Esercizi 6

Problema 1.

Si consideri un oscillatore armonico unidimensionale

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2. \tag{1}$$

i) Scrivere le equazioni di Heisenberg per gli operatori $x_H(t)$ e $p_H(t)$;

ii) Introdurre gli operatori (di Heisenberg) di annichirazione e creazione,

$$a(t) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\, x_H(t) + i\sqrt{\frac{1}{2m\omega\hbar}}\, p_H(t); \tag{2}$$

$$a(t)^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\, x_H(t) - i\sqrt{\frac{1}{2m\omega\hbar}}\, p_H(t). \tag{3}$$

Scrivere le equazioni di evoluzione temporale per $a(t)$, $a(t)^\dagger$, facendo uso del risultato del punto i), e risolverle. Di conseguenza trovare $x_H(t)$ e $p_H(t)$ esplicitamente come funzione di t, in termini di $x_H(0) = x$ e $p_H(0) = p$.

iii) Determinare la "funzione di correlazione",

$$\langle 0|x_H(t)x_H(0)|0\rangle, \tag{4}$$

dove $|0\rangle$ rappresenta lo stato fondamentale dell'oscillatore armonico, usando il risultato del punto ii).

iv) Calcolare

$$\langle 0|x_H(t)x_H(0)|0\rangle = \langle 0|e^{\frac{iHt}{\hbar}} x e^{\frac{-iHt}{\hbar}} x|0\rangle, \tag{5}$$

per un oscillatore armonico direttamente, inserendo le opportune relazioni di completezza. Paragonare il risultato con quello del punto iii).

Problema 2.

Un fascio di fotoni è descritto dalla matrice densità,

$$\rho = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sin\beta \\ \sin\beta & 1 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

nella base di stati di due polarizzazioni lineari (nelle direzioni $\hat{x}$ e $\hat{y}$),

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

i) Qual'è il valor medio della polarizzazione lineare nella direzione $(\sqrt{3}\,\hat{x} - \hat{y})/2$? Potete usare il fatto che l'operatore di proiezione su tale stato è:

$$\mathcal{P} = |1'\rangle\langle 1'|, \qquad |1'\rangle = \frac{\sqrt{3}\,|1\rangle - |2\rangle}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

ii) Dire se la matrice densità (6) rappresenta uno stato puro o uno stato misto. Se la risposta dipende dal valore di β, in che modo? Nel caso di uno stato puro qualè la funzione d'onda?

Problema 3.

$$H = \frac{p^2}{2\,m} + \frac{m\,\omega^2}{2}x^2. \tag{9}$$

i) Determinare gli elementi di matrice non nulli di x^4;

ii) La funzione d'onda dell'n-simo stato stazionario ψ_n oscilla, avendo essa $n-1$ nodi. A certo valore di $x \simeq \pm x_0$ il fattore esponenziale inizia a dominare, e a $|x| > x_0$ ψ_n tende a zero velocemente senza ulteriore oscillazione. Stimare x_0 come funzione di n e di altri parametri del sistema.

Soluzione

Problema 1.

$$O_H(t) = U(t) O U(t)^\dagger = e^{iHt/\hbar} O e^{-iHt/\hbar}. \tag{10}$$

$$O_H(t) = U(t) O U(t)^\dagger = e^{iHt/\hbar} O e^{-iHt/\hbar}. \tag{11}$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} O_H = [O_H, H]. \tag{12}$$

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2. \tag{13}$$

Facendo uso del risultato

$$x(t) = x\cos\omega t + \frac{p}{m\omega}\sin\omega t, \tag{14}$$

$$\begin{aligned} \langle 0|x(t)x(0)|0\rangle &= \langle 0|x^2|0\rangle\,\cos\omega t + \langle 0|x\,p|0\rangle\,\frac{\sin\omega t}{m\omega} \\ &= |x_{01}|^2\,\cos\omega t + x_{01}p_{10}\,\frac{\sin\omega t}{m\omega}. \end{aligned} \tag{15}$$

Con aiuto dei noti elementi matrice di x e di p, si trova infine,

$$\langle 0|x(t)x(0)|0\rangle = \frac{\cos\omega t}{2\alpha^2} + \frac{1}{\sqrt{2}\alpha}\left(-i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\right)\frac{\sin\omega t}{m\omega} = \frac{\hbar}{2m\omega}e^{-i\omega t}. \tag{16}$$

Alternativamente, la stessa funzione di correlazione può essere calcolata direttamente:

$$\begin{aligned}\langle 0|x(t)x(0)|0\rangle &= \sum_n \langle 0|x(t)|n\rangle\langle n|x(0)|0\rangle = \sum_n \langle 0|e^{iHt/\hbar}x\, e^{-iHt/\hbar}|n\rangle\langle n|x|0\rangle \\ &= \sum_n e^{i(E_0-E_n)t/\hbar}|\langle 0|x|n\rangle|^2 = e^{-i\omega t}\frac{1}{2\alpha^2}. \end{aligned} \tag{17}$$

Problema 2.

$$\mathcal{P} = |1^{'}\rangle\langle 1^{'}| = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

I valor medio richiesto è

$$\langle \mathcal{P}\rangle = \mathrm{Tr}\,(\mathcal{P}\,\rho) = \frac{1}{8}\,\mathrm{Tr}\begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \sin\beta \\ \sin\beta & 1 \end{pmatrix} = \frac{2-\sqrt{3}\sin\beta}{4}. \tag{19}$$

Nel caso di un fascio non-polarizzato ($\beta = 0$), troviamo infatti $\langle \mathcal{P}\rangle = \frac{1}{2}$.

La condizione per uno stato puro è

$$\rho^2 = \rho, \tag{20}$$

i.e.,

$$\frac{1+\sin^2\beta}{2} = 1, \quad \therefore\ \beta = \pm\frac{\pi}{2}. \tag{21}$$

Cioè, per $\beta = \pm\frac{\pi}{2}$ ρ rapprenta uno stato puro. Per $\beta = \frac{\pi}{2}$,

$$\rho = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \therefore \quad |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Per $\beta = -\frac{\pi}{2}$,

$$\rho = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \therefore \quad |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Problema 3.

$$H = \frac{p^2}{2\,m} + \frac{m\,\omega^2}{2}x^2. \tag{24}$$

i) Per es.

$$(x^4)_{n+4,n} = x_{n+4,n+3}\,x_{n+3,n+2}\,x_{n+2,n+1}\,x_{n+1,n} \tag{25}$$

$$\begin{aligned} (x^4)_{n+2,n} &= x_{n+2,n+3}\,x_{n+3,n+2}\,x_{n+2,n+1}\,x_{n+1,n} + x_{n+2,n+1}\,x_{n+1,n}\,x_{n,n-1}\,x_{n-1,n} \\ &+ \ x_{n+2,n+1}\,x_{n+1,n}\,x_{n,n+1}\,x_{n+1,n} + x_{n+2,n+1}\,x_{n+1,n+2}\,x_{n+2,n+1}\,x_{n+1,n}. \end{aligned} \tag{26}$$

Il risultato è:

$$(x^4)_{m,n} = \begin{cases} \frac{1}{4\alpha^4}\,\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}, & \text{se } m = n+4; \\ \frac{1}{2\alpha^4}\,(2\,n+3)\,\sqrt{(n+1)(n+2)}, & \text{se } m = n+2; \\ \frac{3}{4\alpha^4}\,(2\,n^2+2\,n+1), & \text{se } m = n; \\ \frac{1}{2\alpha^4}\,(2\,n-1)\sqrt{n\,(n-1)}, & \text{se } m = n-2; \\ \frac{1}{4\alpha^4}\,\sqrt{n\,(n-1)(n-2)(n-3)}, & \text{se } m = n-4; \\ 0, & \text{altrimenti}; \end{cases} \tag{27}$$

ii) Il comportamento esponenziale inizia quando

$$E \sim V, \tag{28}$$

dove ψ" cambia segno. Da

$$E_n \sim n\,\omega\,\hbar = \frac{1}{2} m\,\omega^2\,x^2 \tag{29}$$

si trova

$$x_0 \simeq \sqrt{\frac{2\,n\,\hbar}{m\,\omega}} \tag{30}$$

In vista della relazione, $E_n \sim n\,\omega\,\hbar$, esso è compatibile con il risultato classico per l'ampiezza dell'oscillazione,

$$E_{classico} = \frac{1}{2}\,m\,x_0^2\,\omega^2 \tag{31}$$

Un risultato qualitativamente corretto si ottiene anche dal comportamento dominante

$$\psi_n \sim x^n\,e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2}} = \exp\,[-\frac{\alpha^2\,x^2}{2} + \log x\,]. \tag{32}$$

Esso ha il punto stazionario a

$$-\alpha^2\,x + \frac{n}{x} \simeq 0 \qquad \therefore \quad x = x_0 \sim \frac{\sqrt{n}}{\alpha} = \sqrt{\frac{n\,\hbar}{m\,\omega}}. \tag{33}$$

Questo stima tuttavia non dà il coefficiente numerico davanti a $\sqrt{\frac{n\,\hbar}{m\,\omega}}$ correttamente, non avendo tenuto conto delle oscillazioni dei polinomi di Hermite.