

## Esercizi 8

### Problema 1.

Un sistema di due spin ( $s_1 = \frac{1}{2}$ ,  $s_2 = \frac{1}{2}$ ) è descritto dall'Hamiltoniana,

$$H = \lambda \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2. \quad (1)$$

Determinare gli autovalori e le autofunzioni di  $H$ .

### Problema 2.

Un sistema di due particelle (ambedue di spin  $\frac{1}{2}$ ) è nello stato singoletto di spin totale,  $S_{tot} = 0$ . Si misurano una componente dello spin 1 lungo la direzione  $\mathbf{a}$  e quella dello spin 2 lungo il vettore  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2 = 1$ . Calcolare il valor medio,

$$\langle (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(1)}) (\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(2)}) \rangle.$$

### Problema 3.

Un sistema analoga a quello del problema 2 ma con spin totale,  $S_{tot} = 1$ ,  $S_{tot,z} = 0$ :

(1) Calcolare il valor medio,

$$\langle (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(1)}) (\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(2)}) \rangle.$$

(2) Supponiamo invece che l'osservatore sia in grado di misurare soltanto lo spin 1. Spiegare che in questo caso la particella 1 appare come stato misto. Calcolare la matrice densità.

### Problema 4.

Una particella  $A$  di spin  $\frac{3}{2}$  e parità intrinseca (+), nello stato  $|S, S_z\rangle = |\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ , a riposo decade spontaneamente in due particelle  $B$  e  $C$ , di spin-parità  $(1/2)^+$  e  $(0)^-$  rispettivamente. Nel decadimento sia il momento angolare che la parità sono conservati.

- i) Dire qual'è il valore di  $\ell$ , dove  $\ell$  è il momento angolare orbitale del moto relativo tra  $B$  e  $C$ .
- ii) Esprimere la funzione d'onda dello stato finale in termini di funzioni armoniche sferiche, di funzioni di spin di  $B$  e di una funzione radiale.
- iii) Determinare la distribuzione angolare della particella  $C$  (nel sistema di centro di massa di  $B$  e  $C$ ).
- iv) Si misura la componente  $s_z$  dello spin di  $B$ , con un apparecchio alla Stern-Gerlach, posto nella direzione  $(\theta, \phi)$ . Dire qual'è la probabilità che lo spin risulti "up".

## Soluzione

### Problema 1.

$$\lambda \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 = \frac{\lambda}{2} [\mathbf{S}_{tot}^2 - \mathbf{s}_1^2 - \mathbf{s}_2^2] = \frac{\lambda}{2} [\mathbf{S}_{tot}^2 - \frac{3}{2}] = \begin{cases} \frac{\lambda}{4}, & S_{tot} = 1, \\ -\frac{3\lambda}{4}, & S_{tot} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

### Problema 2.

Metodo brutale:

$$\langle (\mathbf{a} \cdot \sigma^{(1)})(\mathbf{b} \cdot \sigma^{(2)}) \rangle = \langle \frac{\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow}{\sqrt{2}} | \begin{pmatrix} a_3 & a_1 - ia_2 \\ a_1 + ia_2 & -a_3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_3 & b_1 - ib_2 \\ b_1 + ib_2 & -b_3 \end{pmatrix} | \frac{\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow}{\sqrt{2}} \rangle \quad (3)$$

Calcolatelo esplicitamente come e.g.

$$\begin{aligned} & \langle \uparrow\downarrow | \begin{pmatrix} a_3 & a_1 - ia_2 \\ a_1 + ia_2 & -a_3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_3 & b_1 - ib_2 \\ b_1 + ib_2 & -b_3 \end{pmatrix} | \uparrow\downarrow \rangle \\ &= \langle \uparrow | \begin{pmatrix} a_3 & a_1 - ia_2 \\ a_1 + ia_2 & -a_3 \end{pmatrix} | \uparrow \rangle \cdot \langle \downarrow | \begin{pmatrix} b_3 & b_1 - ib_2 \\ b_1 + ib_2 & -b_3 \end{pmatrix} | \downarrow \rangle = -a_3 b_3, \end{aligned} \quad (4)$$

etc. Il risultato è:  $-\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ .

Metodo elegante: Visto che lo stato è singoletto,  $(\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2)|\rangle = 0$ ,

$$\begin{aligned} \langle (\mathbf{a} \cdot \sigma^{(1)})(\mathbf{b} \cdot \sigma^{(2)}) \rangle &= -\langle (\mathbf{a} \cdot \sigma^{(1)})(\mathbf{b} \cdot \sigma^{(1)}) \rangle = -a_i b_j \langle \sigma_i^{(1)} \sigma_j^{(1)} \rangle \\ &= -\frac{a_i b_j}{2} \langle [\sigma_i^{(1)} \sigma_j^{(1)} + (j \leftrightarrow i)] \rangle = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \langle \mathbf{1} \rangle = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}. \end{aligned} \quad (5)$$

### Problema 3.

i) Il metodo brutale dà:  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - 2a_3 b_3$ .

Metodo elegante?

ii)

$$\langle O^{(1)} \rangle = \langle \frac{\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow}{\sqrt{2}} | O^{(1)} | \frac{\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow}{\sqrt{2}} \rangle = \frac{1}{2} [\langle \uparrow | O^{(1)} | \uparrow \rangle + \langle \downarrow | O^{(1)} | \downarrow \rangle] = \text{Tr}\{O^{(1)}\rho\}; \quad (6)$$

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \rho^2 \neq \rho. \quad (7)$$

### Problema 4.

i) La conservazione della parità dà

$$+1 = (+1)(-1)(-)^{\ell}, \quad (8)$$

i.e.  $\ell$  deve essere dispari. La conservazione del momentop angolare comporta:

$$\ell = 1, 2. \quad (9)$$

Perciò  $\ell = 1$ .

ii) Dalla tabella di coefficienti di Clebsch-Gordan,

$$|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|1, 1\rangle|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1, 0\rangle|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \quad (10)$$

i.e.,

$$\psi(\mathbf{r}) = R(r) \left[ \frac{1}{\sqrt{3}} Y_{1,1}(\theta, \phi) |\downarrow\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} Y_{1,0}(\theta, \phi) |\uparrow\rangle \right]. \quad (11)$$

iii)

$$Y_{1,1} = -i\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{i\phi}, \quad Y_{1,0} = i\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta, \quad (12)$$

$$\therefore |\psi|^2 d\Omega = \left[ \frac{1}{3} |Y_{1,1}(\theta, \phi)|^2 + \frac{2}{3} |Y_{1,0}(\theta, \phi)|^2 \right] d\Omega = \frac{1 + 3 \cos^2 \theta}{8\pi} d\phi \sin\theta d\theta. \quad (13)$$

Si noti che

$$\int |\psi|^2 d\Omega = 2\pi \int \frac{1 + 3 \cos^2 \theta}{8\pi} \sin\theta d\theta = 1. \quad (14)$$

iv) Alla direzione  $(\theta, \phi)$  la funzione d'onda *di spin* normalizzata è

$$\mathcal{N} [Y_{1,1}(\theta, \phi) |\downarrow\rangle + \sqrt{2} Y_{1,0}(\theta, \phi) |\uparrow\rangle] = \frac{Y_{1,1}(\theta, \phi) |\downarrow\rangle + \sqrt{2} Y_{1,0}(\theta, \phi) |\uparrow\rangle}{\sqrt{|Y_{1,1}|^2 + 2|Y_{1,0}|^2}} \quad (15)$$

$$P_{\uparrow} = \frac{2|Y_{1,0}|^2}{|Y_{1,1}|^2 + 2|Y_{1,0}|^2} = \frac{4 \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta + 4 \cos^2 \theta} = \frac{4 \cos^2 \theta}{1 + 3 \cos^2 \theta}; \quad (16)$$

$$P_{\downarrow} = \frac{|Y_{1,1}|^2}{|Y_{1,1}|^2 + 2|Y_{1,0}|^2} = \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta + 4 \cos^2 \theta} = \frac{\sin^2 \theta}{1 + 3 \cos^2 \theta}. \quad (17)$$