Esercizi MQII - 3

Problema 1.

Un oscillatore armonico unidimensionale con frequenza angolare ω e di massa m nello stato fondamentale a $t = -\infty$, è sottoposto ad una perturbazione

$$V(x,t) = A\,\delta(x - c\,t), \tag{1}$$

dove A e c sono costanti.

(i) Trovare la probablilità che il sistema si trova nel primo stato di eccitazione a $t = \infty$, nella teoria delle perturbazioni al primo ordine;

(ii) Discutere il limite adiabatico e il limite di perturbazione istantanea.

Problema 2.

Un sistemi a due livelli (e.g. stati di spin $\frac{1}{2}$ in un campo magnetico statico), $E_1 < E_2$, è perturbato dal potenziale esterno debole variabile col tempo,

$$V(t) = \begin{pmatrix} 0 & \gamma\, e^{i\omega t} \\ \gamma\, e^{-i\omega t} & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

(γ reale), a partire dal $t = 0$.

(i) Trovare $c_1(t)$ e $c_2(t)$, dove

$$\psi(t) = c_1(t)\, e^{-iE_1 t/\hbar}\, |\uparrow\rangle + c_2(t)\, e^{-iE_2 t/\hbar} |\downarrow\rangle, \tag{3}$$

risolvendo l'equazione di Schrödinger t-dipendente in maniera esatta, e assumendo $c_1(0) = 1$, $c_2(0) = 0$. Determinare le probablilità che lo spin sia nello stato "up" o " down" ad un generico istante t.

Suggerimento: per esempio, porre

$$c_1(t) = e^{i\,(\omega-\omega_{12})\,t/2}\,\tilde{c}_1(t), \qquad c_2(t) = e^{-i\,(\omega-\omega_{12})\,t/2}\,\tilde{c}_2(t)$$

($\omega_{12} \equiv (E_2 - E_1)/\hbar$) e diagonalizzare l'Hamiltoniana nella nuova base.

(ii) Discutere il limite di γ piccolo col metodo perturbativo.

Il risultato del punto (i) è la formula di Rabi.

Soluzione

Problema 1.

La probablità di transizione $i \to f$ è data dall'espressione

$$P_{fi} = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} dt \, e^{i\,\omega_{fi} t} \, \langle f|V|i\rangle \right|^2 . \tag{4}$$

In questo problema,

$$\omega_{fi} = \omega; \tag{5}$$

$$\langle f|V|i\rangle = c_0\, c_1 \int dx \, e^{-\alpha^2\, x^2} 2\alpha\, x\, A\, \delta(x - c\, t) = 2\, c\, \alpha\, c_0 c_1 A\, t\, e^{-\alpha^2 c^2 t^2}, \tag{6}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dt \, e^{i\,\omega_{fi} t} \, \langle f|V|i\rangle &= 2\, c\, \alpha\, c_0 c_1 A \int dt\, t\, e^{-\alpha^2 c^2 (t - \frac{i\omega}{2\alpha^2 c^2})^2 - \frac{\omega^2}{4\alpha^2 c^2}} \\ &= 2\, c\, \alpha\, c_0 c_1 A \frac{i\omega}{2\alpha^2 c^2} \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha c}\, e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha^2 c^2}} = \frac{i\sqrt{\pi}\, c_0 c_1 \omega A}{\alpha^2 c^2}\, e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha^2 c^2}} . \end{aligned} \tag{7}$$

$$P_{fi} = \frac{1}{\hbar^2} \left| \frac{i\sqrt{\pi}\, c_0 c_1 \omega A}{\alpha^2 c^2}\, e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha^2 c^2}} \right|^2 = \frac{A^2 \omega}{2\, m\, \hbar\, c^4}\, e^{-\frac{\omega\hbar}{2mc^2}} . \tag{8}$$

Sia nel limite adiabatico $c \to 0$ (i.e., nel limte in cui V_{fi} varia lentamente) che nel limite di perturbazione istantanea $c \to \infty$, la probablità di transizione si annulla. Nell'ultimo caso, questo risultato può essere compreso senza uso della teoria delle perturbazione, visto che la funzione d'onda non ha tempo per evolvere, mentre il sistema a $t \to -\infty$ e quello a $t \to \infty$ sono identici.

Problema 2.

Trovate la soluzione in molti libri di testo di MQ, per es. in Cohen-Tannoudji et. al., Complement C_{XIII}; J.J. Sakurai, Problem 30 del Cap. 5.