

## Esercizi 5

### Problema 1.

Una particella si muove in un potenziale a “valle”,

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + V(x, y), \quad (1)$$

dove

$$V(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} m \omega^2 x^2, & 0 \leq y \leq a; \\ \infty, & y < 0, \quad y > a. \end{cases} \quad (2)$$

- i) Determinare i livelli di energia e le funzioni d'onda corrispondenti;
- ii) Calcolare il valor medio dell'operatore  $\mathbf{p}^2 = p_x^2 + p_y^2$  nello stato fondamentale.

### Problema 2.

Una particella di massa  $m$  è contenuta in una scatola unidimensionale di lunghezza  $a$  e si trova nello stato fondamentale. All'istante  $t = 0$  si tolgono istantaneamente le pareti.

- i) Determinare la funzione d'onda in rappresentazione degli impulsi a tutti gli istanti successivi a  $t = 0$ ;
- ii) Calcolare la probabilità di trovare l'impulso della particella tra  $p$  e  $p + dp$  a tutti gli istanti successivi a  $t = 0$ ;
- iii) Calcolare il valore medio dell'energia a tutti gli istanti successivi a  $t = 0$ .

### Problema 3.

Un elettrone (considerato qui come una particella carica (carica  $-e$ ) e senza spin) si muove in un piano  $x - y$ , in campo magnetico costante e uniforme in direzione perpendicolare al piano,  $\mathbf{H} = (0, 0, B)$ . Studiare lo spettro del sistema, prendendo come potenziale vettoriale,

$$\mathbf{A} = (-By, 0, 0). \quad (3)$$

## Soluzione

### Problema 1.

i) Separando le variabili

$$\Psi = \psi(x)\phi(y), \quad (4)$$

si hanno gli autovettori,

$$\Psi_{k,\ell} = \psi_k(x)\phi_\ell(y), \quad (5)$$

$$\psi_k(x) = C_k H_k(\alpha x) e^{-\alpha^2 x^2/2}, \quad \phi_\ell(y) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi \ell y}{a}\right), \quad (6)$$

ed i corrispondenti autovalori,

$$E_{m,n} = \omega \hbar \left(k + \frac{1}{2}\right) + \frac{\pi^2 \hbar^2 \ell^2}{2 m a^2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad \ell = 1, 2, \dots \quad (7)$$

ii) Conviene calcolare

$$\langle 0, 1 | \mathbf{p}^2 | 0, 1 \rangle = 2m \langle 0, 1 | \frac{\mathbf{p}^2}{2m} | 0, 1 \rangle = 2m \langle 0, 1 | H - V(x, y) | 0, 1 \rangle. \quad (8)$$

Ma

$$\langle 0, 1 | H | 0, 1 \rangle = E_{0,1} = \frac{1}{2} \omega \hbar + \frac{\pi^2 \hbar^2}{2 m a^2}; \quad (9)$$

$$\langle 0, 1 | V(x, y) | 0, 1 \rangle = \langle 0 | \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 | 0 \rangle, \quad (10)$$

dove nel secondo membro della (10) il bra ed il ket si riferiscono all'oscillatore armonico unidimensionale. Questo ultimo è dato da

$$\frac{1}{2} m \omega^2 \langle 0 | x^2 | 0 \rangle = \frac{1}{2} m \omega^2 |\langle 1 | x | 0 \rangle|^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 \cdot \frac{\hbar}{2 m \omega} = \frac{1}{4} \omega \hbar. \quad (11)$$

$$\therefore \langle 0, 1 | \mathbf{p}^2 | 0, 1 \rangle = 2m \left[ \frac{1}{2} \omega \hbar + \frac{\pi^2 \hbar^2}{2 m a^2} - \frac{1}{4} \omega \hbar \right] = \frac{m \omega \hbar}{2} + \frac{\pi^2 \hbar^2}{a^2}. \quad (12)$$

### Problema 2.

i)

$$\psi(x) \begin{cases} = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi x}{a} & \text{per } 0 \leq x \leq a; \\ = 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad (13)$$

La funzione d'onda nella rappresentazione di  $p$  (il componente di Fourier) è:

$$\phi(p) = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\pi}{a \hbar}} \frac{1 + e^{-i p a / \hbar}}{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - \frac{p^2}{\hbar^2}}. \quad (14)$$

All'istante  $t$

$$\phi(p, t) = e^{-i \frac{p^2 t}{2 m \hbar}} \phi(p). \quad (15)$$

ii)

$$d\mathcal{P} = |\phi(p, t)|^2 dp = |\phi(p)|^2 dp = \frac{4\pi a \hbar^3 \cos^2 \frac{pa}{2\hbar}}{(a^2 p^2 - \hbar^2 \pi^2)^2} dp. \quad (16)$$

$$\int d\mathcal{P} = 4\pi \int dz \frac{\cos^2 \frac{z}{2}}{(z^2 - \pi^2)^2} = 1. \quad (17)$$

iii)

$$\langle E \rangle = E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}. \quad (18)$$

### Problema 3.

L'Hamiltoniana è

$$H = \frac{(\mathbf{p} + \frac{e}{c}\mathbf{A})^2}{2m} = \frac{(p_x - \frac{eB}{c}y)^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m}. \quad (19)$$

Poiché  $H$  commuta con  $p_x$ , è possibile costruire gli autosati di  $H$  ponendo

$$\Psi(x, y) = e^{i p x / \hbar} \psi(y). \quad (20)$$

$\psi(y)$  soddisfa all'equazione

$$\left[ \frac{p_y^2}{2m} + \frac{(\frac{eB}{c}y - p)^2}{2m} \right] \psi(y) = E \psi(y), \quad (21)$$

che è l'equazione di Schrödinger per un oscillatore armonico lineare, con la frequenza di Larmor

$$\omega = \frac{eB}{m c} \quad (22)$$

e con il centro dell'oscillatore a

$$y = \frac{p c}{e B}. \quad (23)$$

I livelli dell'energia sono

$$E_n = \omega \hbar (n + \frac{1}{2}) : \quad (24)$$

sono indipendenti da  $p$ . Questo significa che ogni livelli  $n$  è infinitamente degenero, con valore di  $p$ ,  $-\infty < p < \infty$ .

Questi livelli sono noti come *livelli di Landau*.

La frequenza  $\omega = \frac{eB}{m c}$  corrisponde a quella del moto circolare nel caso dell'elettrone classico che entra nel campo magnetico uniforme  $\mathbf{H}$ ,

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p} = \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H}. \quad (25)$$

È istruttivo risolvere il problema in un'altra gauge (gauge simmetrica) nella quale

$$\mathbf{A} = (-\frac{B y}{2}, \frac{B x}{2}, 0). \quad (26)$$