Esercizi MQII - 2

Problema 1.

Si considerino gli elementi di matrice di un operatore

$$V = ef(r)\,y\,z \tag{1}$$

tra gli stati di secondo livello di eccitazione $|n, \ell, m\rangle = |3, \ell, m\rangle$, dell'atomo di idrogeno.

i) Esprimere V come una combinazione lineari di tensori sferici;

ii) Dire quali tra

$$R_1 = \frac{\langle 3, 2, -1|V|3, 1, 0\rangle}{\langle 3, 2, -1|V|3, 2, 0\rangle}, \quad R_2 = \frac{\langle 3, 1, -1|V|3, 1, 0\rangle}{\langle 3, 1, 0|V|3, 1, 1\rangle}, \quad R_3 = \frac{\langle 3, 2, 1|V|3, 2, 0\rangle}{\langle 3, 1, 0|V|3, 1, -1\rangle} \tag{2}$$

non si possono ottenere senza ulteriore informazione su $f(r)$;

iii) Calcolare il rapporto

$$\frac{\langle 3, 2, 2|V|3, 2, 1\rangle}{\langle 3, 2, -1|V|3, 2, 0\rangle}. \tag{3}$$

Problema 2.

Un numero grande di atomi di idrogeno, tutti nello stato fondamentale a $t = -\infty$, sono posti in un campo elettrico debole, dipendente dal tempo:

$$\mathbf{E} = (0, E(t), 0), \qquad E(t) = \frac{\epsilon}{R^2 + v^2 t^2} \tag{4}$$

(R, v, ϵ reali).

i) Scrivere il potenziale di perturbazione e dire in quali stati (n, ℓ, m) gli atomi si possono trovare a $t = \infty$, secondo la teoria delle perturbazioni al primo ordine;

ii) Calcolare la percentuale di atomi in uno stato di $n = 2$ (il primo livello di eccitazione) a $t = \infty$. Commentare sul limite adiabatico.

Trascurate il decadimento spontaneo di stati eccitati per ambedue le domande. Se è necessario, potete usare la formula

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz\, \frac{e^{i\omega z}}{z^2 + A^2} = \frac{\pi}{A} e^{-\omega A}, \qquad (\omega > 0,\ A > 0) \tag{5}$$

(che si trova facilmente usando il teorema del residuo).

Rispondete soltanto ai punti 1 ii), 1 iii) e 2 ii).

Soluzione

Problema 1.

i)

$$V = T^2_1 + T^2_{-1} \tag{6}$$

ii) R_3 non può essere determinato senza ulterioi informazioni. $R_1 = 0$ dovuto alla parità; R_2 si determina con il teorema di Wigner-Eckart.

iii)

$$\frac{\langle 3,2,2|V|3,2,1\rangle}{\langle 3,2,-1|V|3,2,0\rangle} = \frac{\langle 2,2|2,1;2,1\rangle}{\langle 2,-1|2,-1;2,0\rangle} = \frac{-\sqrt{3/7}}{-\sqrt{1/14}} = \sqrt{6}. \tag{7}$$

Problema 2.

i) La probablità per transizione $i \to f$ è data da

$$\mathcal{P}_{fi} = \frac{1}{\hbar^2}\left|\int dt\, e^{i\omega_{fi}\,t}\langle f|H'|i\rangle\right|^2; \tag{8}$$

il potenziale è:

$$H' = eyE(t), \tag{9}$$

ed è un tensore sferico di rango 1, di forma

$$T_{1,1} + T_{1,-1}. \tag{10}$$

Gli stati finale ha perciò $(n,\ell,m) = (n,1,\pm1)$ con $n = 1,2,\ldots$, poiché

$$\int dr\, r^3 R_{n,1}R_{1,0} \neq 0, \qquad \forall n. \tag{11}$$

(*N.B.* Per $\ell \neq \ell'$, $R_{n,\ell}$ e $R_{n,\ell'}$ non obediscono nessuna relazione di ortogonalità.)

ii)

$$\mathcal{P}_{fi} = \frac{e^2\epsilon^2}{\hbar^2}\,|\langle 2\,1\,\pm 1|\,y\,|1\,0\,0\rangle|^2\left|\int dt\frac{e^{i\omega_{fi}\,t}}{R^2+v^2t^2}\right|^2 \tag{12}$$

$$\langle 2,1,\pm1|\,y\,|1,0,0\rangle = \int dr\, r^2\, R_{2,1}\, r\, R_{1,0}\int d(\cos\theta)d\phi\,[\pm\, i\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,\sin\theta\, e^{\mp i\phi}]\,\sin\theta\sin\phi\,\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

$$= \quad \pm i\frac{128}{81}\sqrt{\frac{2}{3}}\,r_B\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sqrt{\frac{1}{4\pi}}(\mp i\pi)\frac{4}{3} = \frac{2^7}{3^5}\,r_B; \tag{13}$$

$$\int dt\frac{e^{i\omega_{fi}\,t}}{R^2+v^2t^2} \quad = \quad \frac{1}{v^2}\int_{-\infty}^{\infty} dt\,\frac{e^{i\omega_{fi}\,t}}{\frac{R^2}{v^2}+t^2} = \frac{\pi}{vR}e^{-\omega_{fi}R/v} \tag{14}$$

$$P_{|1,0,0\rangle\to|2,1,1\rangle} = P_{|1,0,0\rangle\to|2,1,-1\rangle} = \frac{e^2\epsilon^2}{\hbar^2}\frac{2^{14}}{3^{10}}\,r_B^2\,\frac{\pi^2}{v^2R^2}e^{-2\omega_{fi}R/v}, \qquad \omega_{fi} = \frac{3e^2}{8\,\hbar\, r_B}. \tag{15}$$

La percentuale degli atomi in uno stato $n = 2$ è

$$100 \cdot \frac{e^2 \epsilon^2}{\hbar^2} \frac{2^{15}}{3^{10}} r_B^2 \frac{\pi^2}{v^2 R^2} e^{-2\omega_{fi} R/v} \simeq 55.5 \frac{e^2 \epsilon^2}{\hbar^2} r_B^2 \frac{\pi^2}{v^2 R^2} e^{-2\omega_{fi} R/v}. \tag{16}$$

N.B. Il fattore 2 sta nella probabilità. Non si sommano le ampiezze con stati finali diversi.

Nel limite adiabatico,

$$\frac{e^2 R}{\hbar \, v \, r_B} \ll 1, \tag{17}$$

i.e., limite di variazione lenta, la probabilità di transizione è soppressa esponenzialmente.