Esercizi 3

Problema 1.

i) Verificare

$$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B, \qquad [A, BC] = B[A, C] + [A, B]C; \tag{1}$$

ii) Calcolare i commutatori,

$$[x^2, p_x], \quad [p_x, V(\mathbf{r})], \quad [xp_y - yp_x, x]. \tag{2}$$

iii) Calcolare i commutatori,

$$[x, p^n], \quad [p, V(x)^n]. \tag{3}$$

(Trucco: $[A, B^n] = AB^n - B^n A = [A, B]B^{n-1} + B[A, B]B^{n-2} + B^2[A, B]B^{n-3} + \ldots + B^{n-1}[A, B]$.)

Problema 2.

Un sistema "a due stati", descritto dall'Hamiltoniana,

$$H_0 = \begin{pmatrix} E_0 & 0 \\ 0 & E_0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

è nello stato $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. All'istante $t = 0$ si accende un'interazione addizionale rappresentata dall'Hamiltoniana

$$H_I = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \beta^* & 0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

i) Dimostrare che, senza perdere la generalità, β può essere preso reale. Per β reale, determinare gli autovalori e i correspondenti autostati dell'Hamiltoniana totale (per $t > 0$), $H_0 + H_I$.

ii) Qual'è la probabilità ($P_2(T)$) che il sitema è nello stato $|2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ad un generico istante T? Fare uno schizzo di $P_2(T)$ come funzione di T. A quale valore (o valori) di T il sistema si trova esattamente (i.e., con certezza) nello stato $|2\rangle$?

Soluzione

Problema 1.

i)

$$[x^2, p_x] = 2\,i\,\hbar\,x, \quad [p_x, V(\mathbf{r})] = -i\,\hbar\frac{\partial V}{\partial x}, \quad [xp_y - yp_x, x] = i\,\hbar\,y. \tag{6}$$

ii) Siccome $[x, p] = i\hbar$ commuta con p, si ha

$$[x, p^n] = i\,\hbar\,n\,p^{n-1}. \tag{7}$$

Analogamente,

$$[p, V(x)] = -i\,\hbar\,V'(x), \tag{8}$$

commuta con $V(x)$ per cui

$$[p, V(x)^n] = -i\,\hbar\,n\,V'(x)\,V(x)^{n-1}. \tag{9}$$

Problema 2.

i) La fase di ogni stato di base, e in particolare la fase relativa tra $|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $|2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, è arbitraria. Per β complessa si può prendere semplicemente un'altra base con $|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $|2'\rangle = e^{-i\,\mathrm{Arg}\,[\beta]} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Nella nuova base, per es.,

$$\langle 1|H_I|2'\rangle = e^{-i\,\mathrm{Arg}\,\beta}\beta = |\beta|; \qquad \langle 2'|H_I|1\rangle = e^{i\,\mathrm{Arg}\,\beta}\beta^* = |\beta|;\,, \tag{10}$$

mentre la forma di H_0 è invariata. Il problema si riduce allo stesso problema con β reale. Tale cambiamento di base, e di conseguenza degli operatori, è un esempio di *trasformazione unitaria* sotto la quale la fisica rimane invariata. Questo inoltre dimostra che β può essere preso reale e positivo, senza perdita di generalità.

Per trovare l'operatore di evoluzione conviene diagonalizzare l'Hamiltoniana totale. Siccome H_0 è proporzionale alla matrice identità, basta diagonalizzare H_I. Esso è diagonale, con autovalori, $\pm\beta$, nella base di stati,

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Gli autovalori dell'Hamiltoniana totale sono $E_0 \pm \beta$. La funzione d'onda a $t = 0$ è

$$\psi(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \{|+\rangle + |-\rangle\}. \tag{12}$$

Lo stato a $t = T$ è allora

$$\begin{aligned} \psi(T) &= e^{-i(H_0+H_I)T/\hbar}\psi(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{e^{-i(E_0+\beta)T/\hbar} |+\rangle + e^{-i(E_0-\beta)T/\hbar}|-\rangle\} \\ &= \frac{e^{-iE_0T/\hbar}}{\sqrt{2}} \{e^{-i\beta T/\hbar} |+\rangle + e^{i\beta T/\hbar}|-\rangle\} \\ &= e^{-iE_0T/\hbar} \begin{pmatrix} \cos \beta T/\hbar \\ -i \sin \beta T/\hbar \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{13}$$

La probabilità richiesta è dunque

$$P_2 = \sin^2 \beta T/\hbar, \tag{14}$$

essa prende il valore massimo, 1, a

$$T = (2n+1)\frac{\pi\hbar}{2\beta}, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{15}$$