

Esercizi 4

Problema 1.

Per un oscillatore armonico unidimensionale di massa m , verificare la regola di somma

$$\sum_k (E_n - E_k) |\langle \psi_n | x | \psi_k \rangle|^2 = -\frac{\hbar^2}{2m}, \quad \forall n. \quad (1)$$

Problema 2.

Una particella descritta dall'Hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m} - f \delta(x), \quad f > 0, \quad (2)$$

è in uno stato legato, con energia $E_0 < 0$. Come è noto, ponendo

$$\psi(x) = \theta(-x) e^{\kappa x} + \theta(x) e^{-\kappa x}, \quad \kappa = \sqrt{\frac{-2mE_0}{\hbar^2}}, \quad (3)$$

e richiedendo che essa soddisfi l'equazione di Schrödinger, si trova che $\kappa = \frac{mf}{\hbar^2}$ e perciò $E_0 = -\frac{mf^2}{2\hbar^2}$.

- i) Dire se questo sistema possiede altri stati legati.
- ii) All'istante $t = 0$, la buca si sposta all'improvviso, i.e., il potenziale diventa

$$V(x) = -f \delta(x - a), \quad t > 0. \quad (4)$$

Calcolare la probabilità P che la particella rimane legata alla buca, e discutere la dipendenza di P da a .

- iii) Successivamente, all'istante $t_0 (> 0)$, il potenziale viene rimosso improvvisamente. La particella che era legata al nuovo potenziale, (4), comincerà a viaggiare liberamente. Calcolare la distribuzione di probabilità per i vari valori dell'impulso.

N.B. la funzione d'onda (3) non è normalizzata.

Soluzione

Problema 1.

Soltanto i termini $k = n \pm 1$ contribuiscono alla somma. Facendo uso dei noti elementi di matrice di x e $E_k = \omega \hbar (k + \frac{1}{2})$ la formula è facilmente verificata.

Problema 2.

$$\psi(x)' = \kappa [\theta(-x)e^{\kappa x} - \theta(x)e^{-\kappa x}], \quad (5)$$

$$\psi(x)'' = \kappa^2 [\theta(-x)e^{\kappa x} + \theta(x)e^{-\kappa x}] - 2\kappa \delta(x). \quad (6)$$

Identificando questa con

$$\psi(x)'' = -\frac{2m}{\hbar^2} [E_0 + f \delta(x)] \psi(x) \quad (7)$$

si trova

$$\kappa = \frac{mf}{\hbar^2}; \quad E_0 = -\frac{mf^2}{2\hbar^2}. \quad (8)$$

i) No (la normalizzabilità e la continuità a $x = 0$ determinano la funzione d'onda univocamente.)

ii) La funzione d'onda normalizzata è

$$\psi_0(x) = \sqrt{\kappa} [\theta(-x)e^{\kappa x} + \theta(x)e^{-\kappa x}], \quad (9)$$

e

$$\psi_0' = \sqrt{\kappa} [\theta(-x+a)e^{\kappa(x-a)} + \theta(x-a)e^{-\kappa(x-a)}], \quad (10)$$

prima e dopo il cambiamento del potenziale. Per $a > 0$,

$$\begin{aligned} \langle \psi_0' | \psi_0 \rangle &= \kappa \left[\int_{-\infty}^0 dx e^{\kappa x} e^{\kappa(x-a)} + \int_0^a dx e^{-\kappa x} e^{\kappa(x-a)} + \int_a^{\infty} dx e^{-\kappa x} e^{-\kappa(x-a)} \right] \\ &= e^{-\kappa a} (1 + \kappa a). \end{aligned} \quad (11)$$

Per $a < 0$, ripetendo il calcolo, opportunamente cambiando le regioni di integrazioni, si trova

$$\langle \psi_0' | \psi_0 \rangle = e^{\kappa a} (1 - \kappa a). \quad (12)$$

perciò

$$P = |\langle \psi_0' | \psi_0 \rangle|^2 = e^{-2\kappa|a|} (1 + \kappa|a|)^2. \quad (13)$$

$P = 1$ per $a = 0$, come deve essere, e $P(|a|)$ decresce monotonicamente al crescere di $|a|$.

iii) Calcolo la trasformata di Fourier della (10), spostando $x - a \equiv x'$,

$$\psi'_0 = \int \frac{dp}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipx'/\hbar} a(p); \quad (14)$$

$$\begin{aligned} a(p) &= \int \frac{dx}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-ipx/\hbar} \sqrt{\kappa} [\theta(-x)e^{\kappa x} + \theta(x)e^{-\kappa x}] \\ &= \frac{\sqrt{\kappa}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \left[\int_{-\infty}^0 dx e^{(\kappa - \frac{ip}{\hbar})x} + \int_0^{\infty} dx e^{-(\kappa + \frac{ip}{\hbar})x} \right] \\ &= \frac{\sqrt{\kappa}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \left[\frac{1}{\kappa - \frac{ip}{\hbar}} + \frac{1}{\kappa + \frac{ip}{\hbar}} \right] = \frac{2\kappa^{3/2}\hbar^{3/2}}{\sqrt{2\pi}(p^2 + \kappa^2\hbar^2)} \end{aligned} \quad (15)$$

La distribuzione dell'impulso è:

$$|a(p)|^2 dp = \frac{2\kappa^3\hbar^3}{\pi(p^2 + \kappa^2\hbar^2)^2} dp. \quad (16)$$

Visto che

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{(x^2 + 1)^2} = \frac{\pi}{2}, \quad (17)$$

la probabilità è correttamente normalizzata:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |a(p)|^2 dp = 1. \quad (18)$$