Esercizi 2

Problema 1.

Le matrici hermitiane

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

sono chiamate *matrici di Pauli.*

i) Verificare i seguenti:

$$\sigma_i^2 = \mathbf{1}; \qquad \sigma_i \cdot \sigma_j = i\,\epsilon_{ijk}\sigma_k, \qquad (i \neq j); \tag{2}$$

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{per } (ijk) = (123) \text{ o permut. pari;} \\ -1 & \text{per } (ijk) = (213) \text{ o permut. dispari di (123);} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}; \tag{3}$$

$\{\mathbf{1}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ insieme forma la base di *quaternioni* (nelllo stesso senso che $(1, i)$ forma la base di *numeri complessi* .) Dimostrare che una matrice hermitiane 2×2 qualsiasi può essere scritta come una combianazione lineare di $\{\mathbf{1}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ con coefficienti reali.

ii) Verificare

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2\,i\,\epsilon_{ijk}\sigma_k. \tag{4}$$

iii) Trovare gli autovalori e autovettori di [$\mathbf{n} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$],

$$\mathbf{n} \cdot \sigma = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta\, e^{-i\phi} \\ \sin\theta\, e^{i\phi} & -\cos\theta \end{pmatrix}. \tag{5}$$

iv) Un sistema "a due stati" è descritto dall'Hamiltoniana:

$$H = \lambda\,[\,\sin\theta\,\sigma_1 + \cos\theta\,\sigma_3\,], \qquad \lambda > 0. \tag{6}$$

Determinare gli autovalori e gli autostati dell'energia.

v) Sapendo che il sistema (6) si trova nello stato fondamentale, determinare la probabilità che la misura dell'operatore $O = \sigma_1$ dia il risultato -1.

Problema 2.

Una particella che si muove in una dimensionale è in uno stato descritto dalla funzione d'onda $\psi(x) = e^{-ax^2/2}$. $(a > 0)$

Calcolare il valor medio dell'operatore $p^2 = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ in questo stato.

Soluzione

Problema 1.

iii) Gli autovalori sono ± 1; gli autostati sono

$$|\,1\rangle = \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2}\cos\frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi/2}\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}; \qquad |-1\rangle = \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2}\sin\frac{\theta}{2} \\ -e^{i\phi/2}\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

iv) È un caso particolare di iii) con $\phi = 0$: gli autovalori di H sono $\pm\lambda$. Gli autostati sono

$$|\lambda\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}; \qquad |-\lambda\rangle = \begin{pmatrix} \sin\frac{\theta}{2} \\ -\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \tag{8}$$

dei quali il secondo è lo stato fondamentale.

v) L'autostato normalizzato dell'operatore σ_1, corrispondente all'autovalore -1 è

$$|\sigma_1 = -1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

La detta probabilità è perciò;

$$|\,\langle\sigma_1 = -1| - \lambda\rangle\,|^2 = \frac{1}{2}(\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2})^2 = \frac{1}{2}(1 + \sin\theta). \tag{10}$$

Problema 2.

La funzione d'onda va prima normalizzata correttamente:

$$\psi = \left(\frac{a}{\pi}\right)^{1/4} e^{-ax^2/2}. \tag{11}$$

$$\langle p^2\rangle = \int dx\,|p\,\psi|^2 = \sqrt{\frac{a}{\pi}}\int dx\,|\,i\,\hbar\,a\,x\,e^{-ax^2/2}|^2 = \frac{a^{5/2}\hbar^2}{\sqrt{\pi}}\int dx\,x^2\,e^{-ax^2} = \frac{a\hbar^2}{2}. \tag{12}$$