Esercizi 1

Problema 1.

Dimostrare che l'Hamiltoniana (l'energia) del campo elettromagnetico confinato in una scatola di lato L con pareti perfettamente riflettenti, può essere scritta come

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{c^2}{4} \mathbf{P}_{(1)}^2 + \mathbf{k}^2 \mathbf{Q}_{(1)}^2 \right) + \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{c^2}{4} \mathbf{P}_{(2)}^2 + \mathbf{k}^2 \mathbf{Q}_{(2)}^2 \right), \tag{1}$$

in termini di due insiemi di oscillatori armonici non interagenti. 1 e 2 si riferiscono alle due polarizzazioni; $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ sono i "numeri d'onda",

$$k_x = \frac{\pi n_x}{L}; \quad k_y = \frac{\pi n_y}{L}; \quad k_z = \frac{\pi n_z}{L}; \quad n_x, n_y, n_z = 0, 1, 2, 3, \ldots \infty. \tag{2}$$

Problema 2.

Calcolare $h\nu = \hbar\omega$ dove h ($\hbar = h/2\pi$) è la costante di Planck, ν la frequenza del moto classico dell'elettrone attorno al protone (assumete un moto circolare a raggio fisso, r, prendete $r = 0.5 \cdot 10^{-8}$ cm. Paragonate il valore di $h\nu$ così ottenuto con $k\,T$ dove k è la costante di Boltzman, a $T = 273^0$ K; trovate la temperatura T tale che $h\nu \sim kT$.

Soluzione

Problema 1.

Consideriamo le radiazioni elettromagnetiche confinate nel cubo, $0 \le x \le L$, $0 \le y \le L$, $0 \le z \le L$. La Lagrangiana è

$$L = \frac{1}{8\pi} \int_V (\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2) dv \tag{3}$$

con

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}; \quad \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (\phi = 0;\ \nabla \cdot \mathbf{A} = 0), \tag{4}$$

La condizione al contorno corrispondente alla completa riflessione è:

$$\begin{aligned} A_1(\mathbf{r}) &= \sum_{\mathbf{n}} q_1(\mathbf{n};t) \sin\frac{\pi n_1 x}{L} \cos\frac{\pi n_2 y}{L} \cos\frac{\pi n_3 z}{L}; \\ A_2(\mathbf{r}) &= \sum_{\mathbf{n}} q_2(\mathbf{n};t) \cos\frac{\pi n_1 x}{L} \sin\frac{\pi n_2 y}{L} \cos\frac{\pi n_3 z}{L}; \\ A_3(\mathbf{r}) &= \sum_{\mathbf{n}} q_3(\mathbf{n};t) \cos\frac{\pi n_1 x}{L} \cos\frac{\pi n_2 y}{L} \sin\frac{\pi n_3 z}{L}, \end{aligned} \tag{5}$$

dove $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$; e n_i sono numeri interi non negativi. È facile verificare che con queste scelte di componenti di Fourier, il vettore di Poynting $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ è parallelo alle pareti ai bordi. La condizione di gauge $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ significa

$$\mathbf{q}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} = 0. \tag{6}$$

Il vincolo (6) è risolto con

$$\mathbf{q}(\mathbf{n}) = Q_{1\mathbf{n}}\mathbf{i} + Q_{2\mathbf{n}}\mathbf{j}; \quad \mathbf{n} = n\hat{\mathbf{n}}, \tag{7}$$

dove i vettori unitari $\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{i}, \mathbf{j}$ soddisfano

$$\hat{\mathbf{n}} \perp \mathbf{i} = \hat{\mathbf{n}} \perp \mathbf{j} = \mathbf{i} \perp \mathbf{j} = 0; \quad \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}; \quad \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i} \tag{8}$$

Sostituiamo ora (5) in (3) e in (4) e integriamo in $0 \le x \le L:\ 0 \le y \le L;\ 0 \le z \le L:$ le integrazioni sono elementari. Per es.

$$\int_0^L dx\, \sin^2\frac{\pi n_1 x}{L} = \int_0^L dx\, \frac{1 - \cos\frac{2\pi n_1 x}{L}}{2} = \frac{L}{2}, \tag{9}$$

mentre i termini non diagonali si annullano. Il risultato è:

$$L = \frac{1}{8\pi}(\frac{L}{2})^3[\sum_{\mathbf{n}} \frac{1}{c^2}(\dot{Q}_{1\mathbf{n}}^2 + \dot{Q}_{2\mathbf{n}}^2) - \sum_{\mathbf{n}} \mathbf{k}_{\mathbf{n}}^2(Q_{1\mathbf{n}}^2 + Q_{2\mathbf{n}}^2)], \tag{10}$$

dove $\mathbf{k_n} \equiv \pi \mathbf{n}/L$. Una ridefinizione di $Q_{i\mathbf{n}}$ per una costante moltiplicativa e una successiva trasformazione di Legendre standard danno luogo all'Hamiltoniana, (1).

Problema 2.

$h\nu \simeq 4.7\,10^{-11}$ erg, vs $kT_0 \simeq 3.8\,10^{-14}$ erg. $\therefore$ $h\nu \gg kT_0$. I gradi di libertà associati all'elettrone non sono "attivati" alla temperatura ambiente. Occore una temperatura dell'ordine $T \simeq 3.4\,10^5$ (K), perché si attivano i gradi di libertà elettronici.