Esercizi VIII

Problema 1.

Fate i problemi (5)-(9) del capitolo **10.6** della dispensa.

Problema 2.

Un deutone (il nucleo del deuterio) è uno stato legato di un protone e un neutrone. Il potenziale tra i due nucleoni può avere una forma

$$V_W(r) + V_B(r)(1 + \frac{\sigma_1 \cdot \sigma_2}{2}) + V_T(r)\{\frac{3(\sigma_1 \cdot \mathbf{r})(\sigma_2 \cdot \mathbf{r})}{r^2} - \sigma_1 \cdot \sigma_2\}, \tag{1}$$

dove $V_W(r)$, $V_B(r)$, $V_T(r)$ sono potenziali a simmetria centrale.

i) Verificare che l'Hamiltoniana commuta con il momento angolare totale $\mathbf{J} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 + \mathbf{L}$.

ii) Il deutone nel suo stato fondamentale ha un quadrupolo elettrico non nullo

$$\langle Q \rangle = \langle e(x^2 + y^2 - 2z^2) \rangle \simeq 0.002738 \cdot 10^{-24}\, cm^2. \tag{2}$$

Arguire che questo fatto implica che la funzione d'onda contiene una miscela di onda D,

$$\psi \simeq c_0 \psi_S + c_2 \psi_D, \qquad c_2 \neq 0, \tag{3}$$

iii) Dimostrare che $c_2 \neq 0$ implica che il termine del potenziale tensoriale $V_T(r)$ non può essere nullo.

iv) Il deutone ha lo spin 1. Qual'è il termine più importante in (1) nel determinare questo fatto empirico?

Soluzione VIII

(10.6) Problema (7)

(i) Nel caso $B = 0$,

$$H = A\, \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 = A\, \{\mathbf{s}_{tot}^2 - \mathbf{s}_1^2 - \mathbf{s}_2^2\}/2,$$

dove

$$\mathbf{s}_{tot}^2 = (\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2)^2 = \begin{cases} 2 & \text{se} \quad s_{tot} = 1; \\ 0 & \text{se} \quad s_{tot} = 0, \end{cases}$$

e

$$\mathbf{s}_1^2 = \mathbf{s}_2^2 = 3/4.$$

Gli autostati di H in questo caso sono dunque gli stati di tripletto,

$$|1, 1\,\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle,$$

$$|1,0\rangle = (|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)/\sqrt{2},$$

$$|1,-1\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle,$$

con l'autovalore, $A/4$, e lo stato di singoletto ,

$$|0,0\rangle = (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)/\sqrt{2},$$

con l'energia $-3A/4$.

(ii) Quando $A = 0$, evidentemente i quattro autostati di $s_{1z}\, s_{2z}$,

$$|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle$$

diagonalizzano H, con i rispettivi autovalori,

$$0,\ B,\ -B,\ 0.$$

(iii) Nella base degli stati di tripletto e di singoletto, il primo termine dell'Hamiltoniana è diagonale; il secondo termine agisce sui vari stati come

$$B\,(s_{1z} - s_{2z})|1,1\rangle = B\,(s_{1z} - s_{2z})\,|\uparrow\uparrow\rangle = 0;$$

$$\begin{aligned}
B\,(s_{1z} - s_{2z})|1,0\rangle =& B\,(s_{1z} - s_{2z})(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)/\sqrt{2} \\
=& \frac{B}{2}\{(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)/\sqrt{2} - (-|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)/\sqrt{2}\} \\
=& B\,|0,0\rangle;
\end{aligned}$$

$$B\,(s_{1z} - s_{2z})|1,-1\rangle = B\,(s_{1z} - s_{2z})\,|\downarrow\downarrow\rangle = 0;$$

$$\begin{aligned}
B\,(s_{1z} - s_{2z})|0,0\rangle =& B\,(s_{1z} - s_{2z})(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)/\sqrt{2} \\
=& \frac{B}{2}\{(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)/\sqrt{2} - (-|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)/\sqrt{2}\} \\
=& B\,|1,0\rangle.
\end{aligned}$$

L'Hamiltoniana perciò prende la seguente forma

$$H = \begin{pmatrix} A/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A/4 & 0 & B \\ 0 & 0 & A/4 & 0 \\ 0 & B & 0 & -3A/4 \end{pmatrix}$$

o

$$H = \begin{pmatrix} A/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A/4 & B \\ 0 & 0 & B & -3A/4 \end{pmatrix}$$

dove nell'ultima riga H è riscritta nella base riordinata, $\{|1,1\rangle, |1,-1\rangle, |1,0\rangle, |0,0\rangle\}$. Basta perciò diagonalizzarla nel sottospazio di $|1,0\rangle, |0,0\rangle$. Risolvendo

$$\det \begin{vmatrix} \lambda - A/4 & -B \\ -B & \lambda + 3A/4 \end{vmatrix} = 0,$$

i.e.,

$$\lambda^2 + \frac{A\lambda}{2} - \frac{3A^2}{16} - B^2 = 0,$$

si hanno gli autovalori,

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}\,(-\frac{A}{2} \pm \sqrt{A^2 + 4B^2}).$$

Nel limite $A \gg B$, $\lambda_+ \simeq A/4$; $\lambda_- \simeq -3A/4$; mentre nel limite $B \gg A$, $\lambda_{\pm} \simeq \pm B$. Questi risultati sono naturali perché nel primo caso l'accoppiamento tra gli spin domina mentre nel secondo caso il termine dominante di H è quello tra gli spin e il campo magnetico esterno.

(10.6) Problema (8)

v)

La (10.108) segue dalla condizione (necessaria e sufficiente per $H\psi_0 = Q_1^2\psi_0 = 0$)

$$Q_1\psi_0 = 0, \tag{4}$$

moltiplicandola da sinistra con σ_1. Integrando la (10.108) si ha la soluzione di energia zero

$$\psi_0 = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1\, e^{\frac{1}{\hbar}\int^x W(x)dx} \\ c_2\, e^{-\frac{1}{\hbar}\int^x W(x)dx} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

La normalizzabilità richiede che

$$||\psi_0|| = \sqrt{\int dx[\,|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2\,]} < \infty. \tag{6}$$

Per W della Fig.11A, $\int^x W(x)dx \to \infty$ per $x \to \pm\infty$, perciò prendendo $c_1 = 0$, $c_2 \neq 0$, si ha una soluzione normalizzabile; per W della Fig.11B, per nessuna scelta delle costanti c_1, c_2 ψ_0 è normalizzabile. Non esiste dunque lo stato di energia nulla. In quest'ultimo caso lo stato fondamentale è doppiamente degenere.

(10.6) Problema (9)

i) Le equazioni soddisfatte da ξ e da η sono

$$\xi \cot \xi = -\eta \quad \text{e} \quad \xi^2 + \eta^2 = 2mV_0a^2/\hbar^2. \tag{7}$$

Sappiamo dai grafici di queste equazioni che quando (**??**) è soddisfatta c'è una sola soluzione, con ξ appena al di sopra del valore $\pi/2$. Poniamo dunque

$$\xi = \frac{\pi}{2} + x, \quad x \ll 1, \tag{8}$$

allora

$$\begin{aligned}\eta &= -(\frac{\pi}{2}+x)\cot(\frac{\pi}{2}+x) \\ &= -(\frac{\pi}{2}+x)\,(-x+O(x^2)) = \frac{\pi}{2}x+O(x^2).\end{aligned} \tag{9}$$

Sostituendo questa nell'altra equazione si ha

$$(\frac{\pi}{2}+x)^2+(\frac{\pi}{2}x+O(x^2))^2=(\frac{\pi}{2}+\epsilon)^2, \tag{10}$$

perciò

$$x=\epsilon+O(\epsilon^2), \tag{11}$$

e di conseguenza,

$$\eta=\frac{\pi}{2}\epsilon+O(\epsilon^2). \tag{12}$$

Ma poiché $\eta=\sqrt{-2\mu E}a/\hbar$, troviamo

$$E\simeq-\frac{\pi^2\hbar^2\epsilon^2}{8\mu a^2}. \tag{13}$$

ii) Nel calcolo è conveniente usare

$$\hbar c\simeq 200\,\mathrm{MeV\,fm};\quad 2\mu c^2=m_N c^2\simeq 940\,\mathrm{MeV}. \tag{14}$$

Infatti, da

$$E=2.3\,\mathrm{MeV}=-\frac{\pi^2(\hbar c)^2\epsilon^2}{4\cdot 2\mu c^2a^2}=-\frac{\pi^2 200^2\epsilon^2}{4\cdot 940\cdot(2)^2}\,\mathrm{MeV} \tag{15}$$

segue che

$$\epsilon\simeq 0.3 \tag{16}$$

La relazione $\sqrt{2\mu V_0a^2/\hbar^2}=\frac{\pi}{2}+\epsilon$ allora dà

$$\frac{2\mu V_0 a^2}{\hbar^2}\simeq(\frac{\pi}{2}+\epsilon)^2\simeq 3.5 \tag{17}$$

Perciò

$$V_0=\frac{3.5(\hbar c)^2}{2\mu c^2a^2}=\frac{3.5\cdot 200^2}{940\cdot 2^2}\simeq 37\,\mathrm{MeV}. \tag{18}$$

(a dato qui è circa la metà del valore realistico)

Problema 2.

ii) Usare Wigner Eckart assumendo che la funzione d'onda dello stato fondamentale è di forma

$$\psi\simeq c_0\psi_S+\ldots \tag{19}$$

iii) In assenza del termine tensoriale, **L** commuta con l'Hamiltoniana: lo stato fondamentale avrà il momento angolare orbitale definito, $\psi=\psi_S$.

iv) Il termine con $V_B(r)$.