Esercizi MQII - 1

Problema

L'atomo di deuterio è composto di un elettrone e un nucleo che è un deutone, di massa due volte quella del protone, carica +1 e con un quadrupolo elettrico non nullo. Dovuto al quadupolo elettrico del nucleo, il potenziale per l'elettrone contiene una piccola parte di potenziale quadrupolo oltre al termine Coulombiano:

$$V(\mathbf{r}) = -\frac{e^2}{r} + c\,\frac{r^2 - 3z^2}{r^5} \tag{1}$$

dove c è una costante molto piccola.

i) Dimostrare che non ci sono correzioni per l'energia dello stato fondamentale in teoria delle perturbazioni, al primo ordine in $H' = c\,\frac{r^2-3z^2}{r^5}$.

ii) Elencare gli elementi di matrice non nulli di H' tra gli stati di $n = 3$.

iii) Determinare le correzioni di energia ai livelli con $n = 3$, al primo ordine in H'. In quanti sottolivelli si divide il livello $n = 3$?

Potete usare il formulario.

Formulario: Alcune integrali con funzioni radiali dell'atomo di idrogeno

$$\int_0^\infty dr\, r^{-1} R_{3,\ell}(r) R_{3,\ell'}(r) = C_{\ell,\ell'}\, r_B^{-3}, \tag{2}$$

$r_B \equiv \hbar^2/me^2$ è il raggio di Bohr, e il coefficiente $C_{\ell,\ell'}$ è dato da:

ℓ, ℓ'	$2,2$	$2,1$	$2,0$	$1,1$	$1,0$
$C_{\ell,\ell'}$	$\frac{1}{405}$	$\frac{1}{243\sqrt{5}}$	0	$\frac{1}{81}$	$\frac{4\sqrt{2}}{243}$

Soluzione

i) H' è un tensore sferico T^2_0 di rango 2, $\because$ la correzione al primo ordine

$$\langle 1\,0\,0|H'|1\,0\,0\rangle \tag{3}$$

si annulla per il teorema di Wigner-Eckart.

ii) A $n=3$ ci sono stati con $\ell = 2,1,0$. Usando il teorema di Wigner-Eckart e la conservazione di parità, si ha che gli elementi a priori non nulli sono:

$$\langle 3\,2\,m|H'|3\,2\,m\rangle, \qquad \langle 3\,0\,0|H'|3\,2\,0\rangle, \qquad \langle 3\,2\,0|H'|3\,0\,0\rangle, \qquad \langle 3\,1\,m|H'|3\,1\,m\rangle; \tag{4}$$

in verità, gli elementi nondiagonali si annullano perché l'integrale radiale rilevante è nullo.

iii) Visto che

$$\int \frac{dr}{r} R_{3,2}R_{3,0} = 0, \tag{5}$$

H' è diagonale in questa base, perciò:

$$\begin{aligned}
\Delta E_{(3\,2\,\pm 2)} &= \frac{c}{r_B^3}\int \frac{dr}{r}R_{3,2}^2 \int Y_{2,2}^*(1-3\cos^2\theta)Y_{2,2} \\
&= \frac{c}{r_B^3}\cdot\frac{1}{405}\cdot\frac{15}{32\pi}\cdot 2\pi\cdot 2\cdot\int_0^1 dz(1-3z^2)(1-z^2)^2 \\
&= \frac{c}{r_B^3}\cdot\frac{1}{405}\cdot\frac{15}{32\pi}\cdot 2\pi\cdot 2\cdot\frac{32}{105} = \frac{4\,c}{2835\,r_B^3}.
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
\Delta E_{(3\,2\,\pm 1)} &= \frac{c}{r_B^3}\int \frac{dr}{r}R_{3,2}^2 \int Y_{2,1}^*(1-3\cos^2\theta)Y_{2,1} \\
&= \frac{c}{r_B^3}\cdot\frac{1}{405}\cdot\frac{15}{8\pi}\cdot 2\pi\cdot 2\cdot\int_0^1 dz(1-3z^2)(1-z^2)z^2 \\
&= \frac{c}{r_B^3}\cdot\frac{1}{405}\cdot\frac{15}{8\pi}\cdot 2\pi\cdot 2\cdot\left(-\frac{4}{105}\right) = -\frac{2\,c}{2835\,r_B^3}.
\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
\Delta E_{(3\,2\,0)} &= \frac{c}{r_B^3}\int \frac{dr}{r}R_{3,2}^2 \int Y_{2,0}^*(1-3\cos^2\theta)Y_{2,0} \\
&= \frac{c}{r_B^3}\cdot\frac{1}{405}\cdot\frac{5}{16\pi}\cdot 2\pi\cdot 2\cdot\int_0^1 dz(1-3z^2)^3 \\
&= \frac{c}{r_B^3}\cdot\frac{1}{405}\cdot\frac{5}{16\pi}\cdot 2\pi\cdot 2\cdot\left(-\frac{16}{35}\right) = -\frac{4c}{2835\,r_B^3}.
\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
\Delta E_{(3\,1\,\pm 1)} &= \frac{c}{r_B^3}\int \frac{dr}{r}R_{3,1}^2 \int Y_{1,1}^*(1-3\cos^2\theta)Y_{1,1} \\
&= \frac{c}{r_B^3}\cdot\frac{1}{81}\cdot\frac{3}{8\pi}\cdot 2\pi\cdot 2\cdot\int_0^1 dz(1-3z^2)(1-z^2) \\
&= \frac{c}{r_B^3}\cdot\frac{1}{81}\cdot\frac{3}{8\pi}\cdot 2\pi\cdot 2\cdot\frac{4}{15} = \frac{2c}{405\,r_B^3}.
\end{aligned} \tag{9}$$

$$
\begin{aligned}
\Delta E_{(3\,1\,0)} &= \frac{c}{r_B^3}\int \frac{dr}{r} R_{3,1}^2 \int Y_{1,0}^*(1-3\cos^2\theta)Y_{1,0} \\
&= \frac{c}{r_B^3}\cdot\frac{1}{81}\cdot\frac{3}{4\pi}\cdot 2\pi\cdot 2\cdot\int_0^1 dz(1-3z^2)z^2 \\
&= \frac{c}{r_B^3}\cdot\frac{1}{81}\cdot\frac{3}{4\pi}\cdot 2\pi\cdot 2\cdot\left(-\frac{4}{15}\right) = -\frac{4c}{405\, r_B^3}.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Lo stato $|3,0,0\rangle$ rimane imperturbato. Il livello $n=3$ si divide in sei sottolivelli.