

Teoria elementare della diffusione elastica

Dicembre 2010

Queste dispense trattano alcuni elementi di teoria dello scattering elastico quantistico non relativistico. Buona parte del testo è costituita dalla traduzione del capitolo 19 di R. Shankar, Principles of Quantum Mechanics (second edition), Plenum Press, integrata da considerazioni e osservazioni tratte dagli appunti delle lezioni di Applicazioni di Meccanica Quantistica del prof. M. Ademollo.

Ogni errore naturalmente è imputabile all'autore.

1 Introduzione

Uno dei modi migliori per sondare la struttura delle particelle e le forze fra di esse è quello di farle collidere l'una contro l'altra. Questo è particolarmente vero nel mondo quantistico, dove i sistemi fisici possono essere osservati non già nel senso comune del termine, bensì tramite misurazioni indirette.

Nel processo di *diffusione*, o *deflessione* o *sparpagliamento* o *scattering*, un fascio di particelle incide su un bersaglio (fisso o mobile) e viene, almeno parzialmente, deflesso in direzioni diverse da quella iniziale. Per “particelle” qui intendiamo sia particelle di materia sia fotoni (quanti di luce); ma dato che in meccanica quantistica alle particelle materiali vengono associati pacchetti d'onda (onde di de Broglie), possiamo formulare il problema dello scattering in termini di diffusione di onde a seguito della interazione fra onde incidenti e onde bersaglio. La diffusione avviene in maniera disordinata e imprevedibile e ciò la distingue dalla riflessione e dalla rifrazione, che invece cambiano le direzioni in maniera regolare e determinata. I processi di scattering non includono normalmente fenomeni di assorbimento o emissione di particelle.

Lo studio della diffusione ci fornisce informazioni circa il *proiettile*, il *bersaglio* e le *forze* fra proiettile e bersaglio: un modo naturale di procedere (quando possibile) è di considerare casi in cui due di questi elementi sono noti, così da ricavare notizie sul terzo. Consideriamo, per esempio, gli esperimenti allo Stanford Linear Accelerator Center nei quali fotoni ad alta energia erano usati per bombardare neutroni fermi. La struttura dei fotoni e la loro interazione con la materia carica erano ben noti, perciò essi erano una eccellente sonda per esplorare i neutroni: proprio il fatto che il neutrone, che è elettricamente neutro, interagisca con i fotoni indica che esso possiede una struttura interna costruita a partire da costituenti dotati di carica, la cui carica totale fa zero.

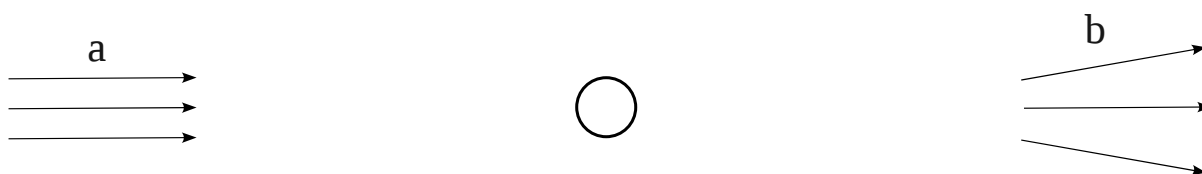


Figura 1: rappresentazione molto schematica del processo di scattering osservato in un sistema di riferimento generico \mathcal{R} . Un fascio di particelle proiettile *a* incide sulla particella bersaglio, o sulle particelle bersaglio, di cui non è indicato alcun nome; non necessariamente il bersaglio è immobile nel sistema \mathcal{R} . Le particelle *a* interagiscono in qualche modo con il bersaglio – secondo le caratteristiche fisiche del proiettile e del bersaglio – e a grande distanza rileviamo le particelle scatterate *b*, in generale di natura diversa rispetto alle particelle *a*. Importante è osservare che, nella nostra trattazione, descriveremo i fasci di particelle incidenti e di particelle diffuse asintoticamente, ovvero in regioni molto lontane, nello spazio e nel tempo, dall'evento di urto (il concetto di lontananza verrà meglio chiarito nel seguito).

Questi esperimenti di scattering fotone-neutrone rivelarono anche che i costituenti del neutrone hanno spin $\frac{1}{2}$ e cariche frazionarie ($\frac{2}{3}e$, $-\frac{1}{3}e$), un quadro sperimentale a cui si era pervenuti anche attraverso altre vie. Gli esperimenti indicarono inoltre che l'interazione fra i costituenti (i cosiddetti quark) diventa molto debole quando essi sono molto vicini; questa informazione ci ha permesso di scegliere, fra innumerevoli possibili modelli per le forze fra quark, quella che attualmente è ritenuta la più pertinente e va sotto il nome di cromodinamica quantistica (QCD), una materia oggi sottoposta a rigorose investigazioni da parte di molti fisici delle particelle.

Un evento di diffusione ha la forma generale

$$a(\alpha) + X(\xi) + \dots \longrightarrow b(\beta) + Y(\zeta) + \dots$$

dove a , X , b , Y ... sono i nomi delle particelle coinvolte, mentre α , ξ , β , ζ ... sono set di variabili cinematiche che specificano gli stati delle particelle, ad esempio impulso, spin, ecc. Un evento di diffusione a due corpi è descritto dalla forma più semplice

$$a(\alpha) + X(\xi) \longrightarrow b(\beta) + Y(\zeta) ,$$

dove è mantenuta la possibilità che la particella diffusa emergente b sia diversa dalla particella proiettile incidente a e la particella rinculante Y sia diversa dalla particella bersaglio X . Sono inclusi in questa scrittura gli scattering *anelastici*, ovvero quelli in cui la particella diffusa abbia la stessa natura della particella incidente ($b = a$) ma la particella bersaglio venga portata a livelli energetici maggiori dello stato fondamentale ($Y = X^*$, dove il simbolo $*$ indica uno stato eccitato):

$$a(\alpha) + X(\xi) \longrightarrow a(\beta) + X^*(\zeta) .$$

Se poi $b = a$ e $Y = X$, ovvero la natura delle particelle in gioco non cambia e l'energia cinetica totale è conservata, abbiamo il cosiddetto scattering *elastico*:

$$a(\alpha) + X(\xi) \longrightarrow a(\beta) + X(\zeta) .$$

con

$$T_{a(\alpha)} + T_{X(\xi)} = T_{a(\beta)} + T_{X(\zeta)} .$$

indicando con T le energie cinetiche, rispettivamente, molto prima e molto dopo l'urto.

Noi considereremo soltanto scattering elastici *non relativistici*, nei quali siano coinvolte basse energie cinetiche: in particolare, affinché il moto di una particella sia descrivibile nel limite non relativistico, la velocità della particella deve essere molto inferiore alla velocità della luce ($v \ll c$) ovvero l'energia cinetica deve essere molto inferiore all'energia a riposo ($\frac{1}{2}mv^2 \ll mc^2$).

2 Sistemi di riferimento

Supponiamo di osservare uno scattering elastico fra una particella incidente a e una particella bersaglio X ferma: questa, ad esempio, era la situazione tipica dei primi esperimenti di scattering in cui particelle alfa o elettroni collidevano contro i nuclei contenuti in una lamina bersaglio ferma nel laboratorio. Esistono almeno due sistemi di riferimento notevoli nei quali studiare il fenomeno: il *sistema del laboratorio* \mathcal{LAB} (entro cui vediamo la particella in movimento a colpire la particella immobile X e deflettere la propria traiettoria, mentre X rincula) e il *sistema del centro di massa* \mathcal{CM} (entro cui vediamo entrambe le particelle muoversi l'una contro l'altra e, in seguito all'urto, modificare la propria traiettoria).

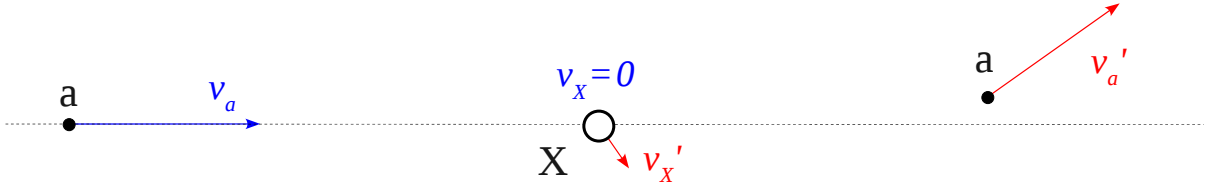


Figura 2: evento di scattering elastico binario nel sistema di riferimento \mathcal{LAB} ; la particella a del fascio incidente colpisce una particella bersaglio ferma X ; la a viene deflessa rispetto alla propria direzione di volo iniziale (qui vediamo la sua direzione asintotica), la X acquista una velocità di rinculo. In questo sistema di riferimento il centro di massa della coppia si muove, sia prima che dopo l'urto se il sistema è isolato, con velocità $\vec{v}_{CM} = \frac{m_a}{m_a + m_X} \vec{v}_a$.

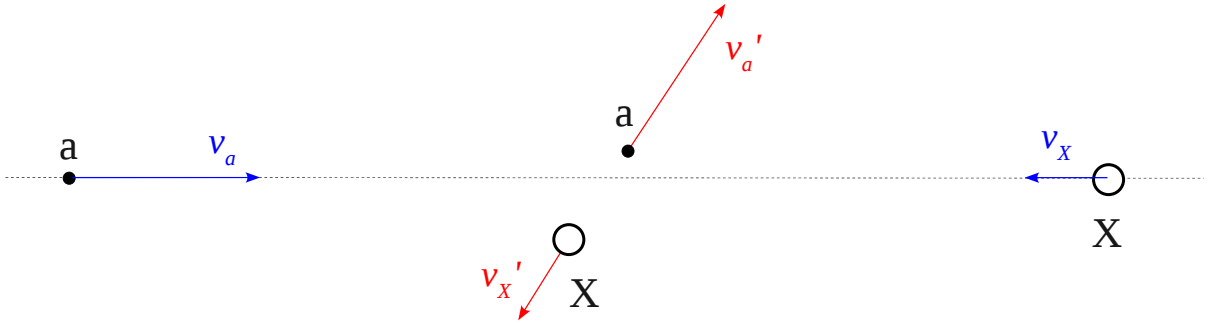


Figura 3: evento di scattering elastico binario nel sistema di riferimento \mathcal{CM} ; entrambe le particelle, quella incidente a e quella bersaglio X , si muovono; entrambe vengono deflesse (qui vediamo le loro direzioni asintotiche). In questo sistema di riferimento il centro di massa è immobile.

Nelle seguenti sezioni, tuttavia, faremo riferimento ad un formalismo diverso: descriveremo *una singola particella deflessa da un potenziale* $V(\vec{r})$. Questa impostazione è giustificata da ragioni matematiche, che ora vedere in dettaglio.

Nel sistema di riferimento \mathcal{CM} l'impulso totale è nullo, per definizione del centro di massa. Vediamolo brevemente. In meccanica non relativistica, dato un qualunque sistema di riferimento in cui calcolare gli impulsi,

$$(2.1) \quad \vec{P} := \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{r}_i = \frac{d}{dt} \vec{r}_{CM} = \vec{v}_{CM} \quad \forall \mathcal{R}$$

se le masse sono costanti nel tempo; nel sistema di riferimento \mathcal{CM} , in particolare, $\vec{v}_{CM} = 0$ e quindi $\vec{P} = 0$. In meccanica relativistica, invece, si trova che le trasformazioni di Lorentz per il quadrimpulso totale di un sistema di particelle sono

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \vec{P}' &= \vec{P} - \vec{v} \frac{\vec{v} \cdot \vec{P}}{v^2} + \gamma \vec{v} \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{P}}{v^2} - \frac{E}{c^2} \right) \\ E' &= \gamma \left(E - \vec{v} \cdot \vec{P} \right) \end{aligned}$$

dove \vec{v} è la velocità relativa fra sistemi di riferimento; si vede che è possibile trovare un \mathcal{R}' in cui sia $\vec{P}' = 0$: questo sistema \mathcal{R}' è definito come il sistema di riferimento \mathcal{CM} e trasla con velocità relativa $\vec{v} = \frac{c^2}{E} \vec{P}$ rispetto a \mathcal{R} .

Tornando al nostro esempio di urto elastico binario non relativistico, naturalmente il fatto che $\vec{P} = 0$ nel \mathcal{CM} vale in generale, anche se bersaglio è inizialmente in movimento (nei passaggi sopra non abbiamo fatto alcuna ipotesi sullo stato di moto delle particelle).

Poniamoci in un sistema di riferimento generico \mathcal{R} e scriviamo l'hamiltoniana per la coppia di particelle (che indicheremo più semplicemente con gli indici 1 e 2):

$$(2.3) \quad H = \frac{\vec{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m_2} + V(\vec{x}_1, \vec{x}_2) .$$

Se V dipende soltanto dalla differenza delle posizioni $\vec{x}_1 - \vec{x}_2$ (come spesso accade) allora possiamo effettuare un cambio di variabili, sostituendo a \vec{x}_1 e \vec{x}_2 la *coordinata del centro di massa* \vec{x}_{CM} e la *coordinata relativa* \vec{r} nel riferimento \mathcal{R}

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \vec{x}_{CM} &:= \frac{m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2}{m_1 + m_2} \\ \vec{r} &:= \vec{x}_1 - \vec{x}_2 \end{aligned}$$

e sostituendo a \vec{p}_1 e \vec{p}_2 l'*impulso totale* \vec{P} e l'*impulso relativo* \vec{p} nel riferimento \mathcal{R}

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \vec{P} &:= \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \\ \vec{p} &:= \frac{m_2 \vec{p}_1 - m_1 \vec{p}_2}{m_1 + m_2} . \end{aligned}$$

Definendo anche la *massa totale* M e la *massa ridotta* μ del sistema di particelle

$$(2.6) \quad \begin{aligned} M &:= m_1 + m_2 \\ \mu &:= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \end{aligned}$$

possiamo riscrivere l'hamiltoniana nella forma

$$(2.7) \quad H = \frac{\vec{P}^2}{2M} + \frac{\vec{p}^2}{2\mu} + V(\vec{r}) .$$

Il moto nel riferimento \mathcal{R} è adesso dato dalla sovrapposizione di un “moto del centro di massa” e di un “moto relativo al centro di massa”.

Adesso specializziamo il sistema di riferimento \mathcal{R} . Se ci poniamo nel riferimento del laboratorio avremo

$$(2.8) \quad \mathcal{LAB} : \quad H = \frac{(\vec{P}^{lab})^2}{2M} + \frac{(\vec{p}^{lab})^2}{2\mu} + V(\vec{r}) .$$

Se ci poniamo nel riferimento del centro di massa avremo

$$(2.9) \quad \mathcal{CM} : \quad H = \frac{(\vec{P}^{CM})^2}{2M} + \frac{(\vec{p}^{CM})^2}{2\mu} + V(\vec{r}) = \frac{(\vec{p}^{CM})^2}{2\mu} + V(\vec{r}) .$$

Come si vede, nel \mathcal{CM} l'hamiltoniana descrive il moto relativo di una particella di massa ridotta μ in un potenziale $V(\vec{r})$, il cui centro diffusore è immobile. Il salto di impostazione, oltre che matematico, è quindi anche concettuale: se nella (2.3) avevamo due particelle reali 1 e 2 soggette ad un potenziale (comune o reciproco che fosse), nelle (2.7) e (2.8) abbiamo due particelle fittizie – quella del centro di massa e quella ridotta – immerse in un potenziale reciproco, mentre nella (2.9) siamo passati da un *problema a due corpi* ad un *problema a un corpo*, con la sola particella ridotta che si muove in un potenziale generato da un centro diffusore immobile. Nel \mathcal{CM} il centro di massa è fermo e dunque nella (2.9) compare il solo “moto relativo al centro di massa”: le uniche variabili di interesse sono quelle relative (coordinata relativa e impulso relativo).

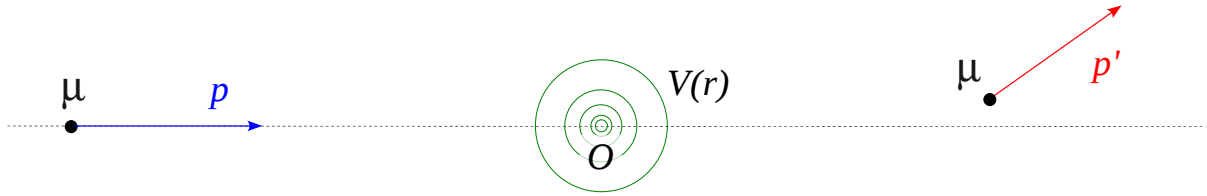


Figura 4: la situazione oggetto di studio si è trasformata, nel riferimento del centro di massa, nell'urto della sola particella fittizia di massa ridotta μ contro un potenziale $V(\vec{r})$, funzione della coordinata relativa, la cui sorgente O né si sposta prima dell'urto né rincula dopo l'urto.

Osserviamo ancora che la particella di massa ridotta μ è una particella fittizia, figlia di un ragionamento matematico; essa non coincide con nessuna delle due particelle reali di partenza. Naturalmente non è difficile darle una interpretazione fisica... Passare al riferimento \mathcal{CM} è equivalente a studiare, nel riferimento \mathcal{LAB} , il moto di un sistema con massa totale M infinita: in tal caso anche nella (2.8) scompare il primo termine, unico riferimento al moto del centro di massa, e resta soltanto l'hamiltoniana della particella ridotta (valutata nel laboratorio, naturalmente). Se quindi la particella 2 avesse massa infinita ($m_2 \rightarrow \infty$) allora $M \rightarrow \infty$, $\vec{x}_{CM} \rightarrow \vec{x}_2$, $\vec{p} \rightarrow \vec{p}_1$, $\mu \rightarrow m_1$: possiamo interpretare il moto relativo della particella ridotta nel \mathcal{CM} come il moto nel \mathcal{LAB} di una particella incidente di massa finita che collide contro un bersaglio di massa infinita, il quale ovviamente non rincula. Nella pratica, dunque, la particella ridotta coincide con la particella incidente se $m_1 \ll m_2$; altrimenti essa resta un utile artificio matematico. È importante sapere come passare da un riferimento all'altro: i calcoli teorici eseguiti con la particella ridotta nel \mathcal{CM} sono più agevoli, ma molti esperimenti sono condotti nel \mathcal{LAB} .

Come abbiamo visto, il processo di scattering si è ridotto al moto di una sola particella contro un potenziale $V(\vec{r})$. Per semplicità, il potenziale di interesse sarà per noi un *potenziale centrale*: $V = V(r)$. Richiediamo inoltre che il potenziale tenda rapidamente a zero all'infinito, almeno come $\frac{1}{r}$: in questo modo avremo particelle asintoticamente libere. Si dice che l'interazione è a *corto raggio*.

In questa ottica possiamo giustificare la richiesta di studio del fascio scatterato a *grande distanza* (dopo un tempo lungo dall'urto): noi studieremo lo stato delle particelle a distanza dal centro diffusore sufficientemente grande da poter considerare le particelle non interagenti con il potenziale.

3 Scattering unidimensionale

Richiamiamo brevemente lo scattering unidimensionale. La domanda che ci facciamo è la seguente: se un fascio di particelle monoenergetiche con impulso medio $\langle p \rangle = \hbar \langle k \rangle = \hbar k_0$ proveniente da $x \rightarrow -\infty$ incide su un potenziale $V(x)$ tale che $xV(x) \rightarrow 0$ per $|x| \rightarrow \infty$, quale frazione T del fascio verrà trasmessa e quale frazione R sarà riflessa?¹ Non è scontato *a priori* che esista una risposta a questa domanda, poiché l'impulso medio non specifica completamente lo stato quantico delle particelle in arrivo; tuttavia si trova che, se le funzioni d'onda nello spazio dei sigoli impulsi sono fortemente piccate intorno a $\hbar k_0$, le probabilità di trasmissione e di riflessione dipendono soltanto dal valore k_0 e non dalla specifica forma delle funzioni d'onda e, così, è possibile calcolare

¹In generale, le particelle potrebbero benissimo provenire da destra anziché da sinistra: non cambierebbe l'approccio. Inoltre non è necessario che $V(x)$ tenda a zero agli estremi del dominio unidimensionale: a rigore basta che sia $V \rightarrow V_{\pm}$ finiti per $x \rightarrow \pm\infty$; noi assumiamo per semplicità $V_{+} = V_{-} = 0$. Se fosse $V_{\pm} < E$ i risultati sarebbero identici ai nostri; se fosse $V_{+} > E$ avremmo quello che si chiama "effetto tunnel".

una frazione $T(k_0)$ e una frazione $R(k_0)$ che valgono per ogni particella del fascio. Riassumiamo la procedura senza entrare nel dettaglio dei calcoli...

(1) Abbiamo un pacchetto d'onda (estensioni spaziale e temporale finite), ad esempio con profilo gaussiano, con $\langle p \rangle = \hbar k_0$ e $\langle x \rangle = -\infty$.

(2) Espandiamo questo pacchetto d'onda in termini di autofunzioni ψ_k dell'hamiltoniana $H = T + V$ con coefficienti $a(k)$; le funzioni ψ_k hanno la seguente proprietà:

$$\psi_k \begin{array}{l} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} A e^{+ikx} + B e^{-ikx} \\ \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} C e^{+ikx} \end{array}$$

In altre parole, la forma asintotica delle ψ_k contiene un'onda incidente $A e^{+ikx}$ e un'onda riflessa $B e^{-ikx}$ nella regione $x \rightarrow -\infty$ e soltanto un'onda trasmessa $C e^{+ikx}$ nella regione $x \rightarrow +\infty$. Sebbene la più generale soluzione del problema matematico contenga anche un termine $D e^{-ikx}$ nella regione $x \rightarrow +\infty$, poniamo $D = 0$ per ragioni fisiche: un'onda incidente da sinistra può produrre solamente un'onda trasmessa che si muove verso destra.

(3) Propaghiamo il pacchetto d'onda nel tempo aggiungendo ai coefficienti $a(k)$ dell'espansione una dipendenza temporale del tipo $e^{-iEt/\hbar}$, dove $E = \hbar^2 k^2 / 2\mu$; esaminiamo la soluzione risultante per $t \rightarrow +\infty$ e indentifichiamo i pacchetti d'onda riflesso e trasmesso; dalla loro norma, ricaviamo R e T .

(4) Troviamo a questo punto che se il pacchetto incidente è fortemente piccato intorno a $\hbar k_0$ nello spazio degli impulsi p , allora R e T dipendono soltanto da k_0 e non dallo specifico profilo della funzione d'onda: una frazione $R(k_0)$ delle particelle incidenti è riflessa e una frazione $T(k_0)$ è trasmessa.

(5) Alla fine di tutto questo duro lavoro, si trova che lo stesso risultato poteva essere raggiunto considerando la sola autofunzione ψ_{k_0} e prendendo i rapporti fra le densità di corrente di probabilità riflessa e trasmessa con la densità di corrente di probabilità incidente:

$$(3.1) \quad R = \left| \frac{j_{rifl}}{j_{inc}} \right| = \left| \frac{B}{A} \right|^2 \quad T = \left| \frac{j_{tras}}{j_{inc}} \right| = \frac{k_1}{k_0} \left| \frac{C}{A} \right|^2$$

dove k_1 è il valore attorno a cui è piccato il pacchetto d'onda trasmesso dalla barriera nello spazio dei numeri d'onda k .

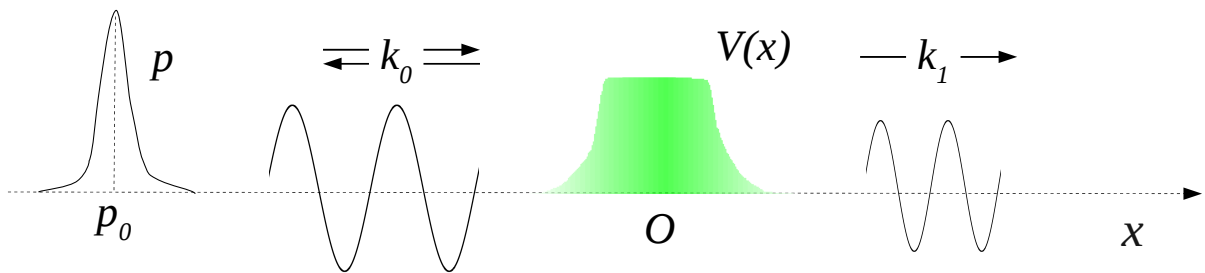


Figura 5: il pacchetto d'onda nella regione asintoticamente a sinistra, descritto da un profilo – ad esempio gaussiano – piccato intorno al valore medio p_0 , a cui corrisponde un numero d'onda medio k_0 ; tale pacchetto è descritto dalla sovrapposizione di due funzioni d'onda, una incidente e una riflessa; nella regione asintoticamente a destra il fascio trasmesso è descritto da un pacchetto d'onda con numero d'onda medio k_1 .

4 Scattering tridimensionale

Il problema della diffusione in tre dimensioni ha molte somiglianze con la sua controparte unidimensionale, ma anche alcune differenze che inevitabilmente accompagnano l'estensione a più dimensioni. Innanzitutto le particelle incidenti (circa monoenergetiche provenienti dall'acceleratore) sono caratterizzate non soltanto da un impulso medio $\langle \vec{p} \rangle = \hbar \langle \vec{k} \rangle = \hbar \vec{k}_0$ ma anche dal *parametro d'urto* (o *d'impatto*) $\vec{\rho}$, che funge da vettore posizione sul piano perpendicolare alla direzione di volo \hat{k}_0 , che sarà per noi la direzione \hat{z} . Negli esperimenti, la distribuzione di particelle è circa uniforme in $\vec{\rho}$ fino a un certo valore ρ_{max} con $\rho_{max} \gg r_0$, dove r_0 è il *range* (o *raggio d'azione*) del potenziale, ovvero la scala delle distanze dal centro diffusore oltre le quali il potenziale può dirsi trascurabile – ad esempio, se $V(r) = e^{-r^2/a^2}$, il range è $r_0 \sim a$; il potenziale coulombiano non ha raggio d'azione finito: $V(r) = k r^{-1}$ ha $r_0 = \infty$.

L'obiettivo è calcolare la quantità di particelle scattate, nell'unità di tempo entro un angolo solido $d\Omega$ nella direzione individuata dagli angoli (θ, φ) misurati rispetto alla direzione dell'asse z , e contate da un rivelatore posto a grande distanza. L'angolo θ è detto *angolo di scattering*: esso non è mai nullo, cioè il rivelatore non può stare sull'asse z , altrimenti sarebbe investito da un fascio composto indistintamente dalle particelle incidenti non deviate e dalle particelle scattate all'angolo $\theta = 0$; le informazioni utili in $\theta = 0$ vengono dedotte attraverso una estrapolazione dei dati raccolti a $\theta \neq 0$.

Definiamo i seguenti *flussi di particelle* incidenti e deflesse:

$$(4.1) \quad \Phi_{inc} = \frac{\text{numero totale di particelle incidenti sul bersaglio}}{\text{unità di tempo}} = \frac{dN_{inc}}{dt}$$

$$(4.2) \quad \Phi_{scat} = \frac{\text{numero totale di particelle diffuse dal bersaglio}}{\text{unità di tempo}} = \frac{dN_{scat}}{dt} .$$

Definiamo l'*intensità* del fascio incidente (alcuni Autori chiamano flusso quella che qui chiamiamo intensità, e viceversa):

$$(4.3) \quad I_{inc} = \frac{\text{numero di particelle incidenti sul bersaglio}}{\text{unità di tempo unità di superficie trasversale}} = \frac{d^2 N_{inc}}{dt dS_{\perp}} .$$

Definiamo la *sezione d'urto differenziale* come il rapporto fra il numero di particelle che vengono deviate nell'angolo solido $d\Omega$ nell'unità di tempo e il numero di particelle incidenti che nell'unità di tempo attraversano l'unità di superficie trasversale:

$$(4.4) \quad \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, \varphi) = \frac{\frac{d^2 N_{scat}}{d\Omega dt}}{\frac{d^2 N_{inc}}{dS_{\perp} dt}} = \frac{d\Phi_{scat}}{I_{inc} d\Omega} .$$

Questa grandezza ha le dimensioni di una superficie e le sue unità di misura tipiche sono il m^2 o il *barn*: $1 \text{ barn} = 10^{-28} m^2$. Naturalmente il flusso $d\Phi_{scat}$ è infinitesimo se $d\Omega \rightarrow 0$, così che la sezione d'urto differenziale sia un numero finito.

Se integriamo su tutto lo spazio otteniamo una informazione indipendente dalla specifica direzione alla quale abbiamo posto il rivelatore: la *sezione d'urto totale* è definita

$$(4.5) \quad \sigma_{TOT} = \int d\sigma(\theta, \varphi) = \int \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, \varphi) d\Omega .$$

Essa dà una misura dell'area della superficie, misurata attorno al centro diffusore sul piano ortogonale alla direzione di incidenza, all'interno della quale la particella incidente risente dell'interazione con il potenziale.

4.1 Sezione d'urto differenziale

La sezione d'urto differenziale – ovvero specifica per la direzione individuata dalla posizione del rivelatore – è una quantità misurabile sperimentalmente: dal confronto fra il valore misurato e il valore predetto è possibile saggiare la consistenza di una teoria. Come calcolare formalmente la sezione d'urto differenziale? E qual è la forma asintotica della funzione d'onda che descrive il fascio diffuso a grandi distanze dal centro diffusore del potenziale? Facciamo una breve ricognizione, rimandando per i dettagli a J. R. Taylor, *Scattering theory*, Wiley.

(1) Abbiamo un pacchetto d'onda (estensioni spaziale e temporale finite) incidente con distribuzione di impulsi piccata intorno a $\langle \vec{p} \rangle = \hbar \vec{k}_0$, ad esempio con profilo gaussiano, e distribuzione uniforme rispetto al raggio vettore $\vec{\rho}$ dall'asse z sul piano xy almeno entro una sezione S ; siamo lontani dall'origine, dove sta confinato il potenziale entro qualche r_0 : $\langle r \rangle = -\infty$.

(2) Espandiamo lo stato di questo pacchetto d'onda in termini di autofunzioni $\psi_{\vec{k}} = \langle \vec{x} | E \rangle$ dell'energia $H = T + V$, dove il pedice \vec{k} ricorda la dipendenza dal vettore d'onda del pacchetto incidente; la forma generale di queste autofunzioni è

$$(4.6) \quad \psi_{\vec{k}} = \psi_{inc} + \psi_{scat} ,$$

dove ψ_{inc} è l'onda incidente da sinistra verso destra (approssimativamente piana) $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ e ψ_{scat} è l'onda scatterata.

(3) Propaghiamo nel tempo la funzione che descrive il pacchetto d'onda aggiungendo ai coefficienti di espansione $a(k)$ una dipendenza temporale del tipo $e^{-iEt/\hbar}$, dove $E = \hbar^2 k^2 / 2\mu$.

(4) Individuiamo l'onda scatterata per $t \rightarrow +\infty$; troviamo a questo punto che, se il pacchetto incidente è fortemente piccato intorno a $\hbar \vec{k}_0$ nello spazio degli impulsi \vec{p} , allora per una particella con parametro d'urto $\vec{\rho}$ la probabilità di venire scatterata nel cono $d\Omega$ agli angoli (θ, φ) dipende

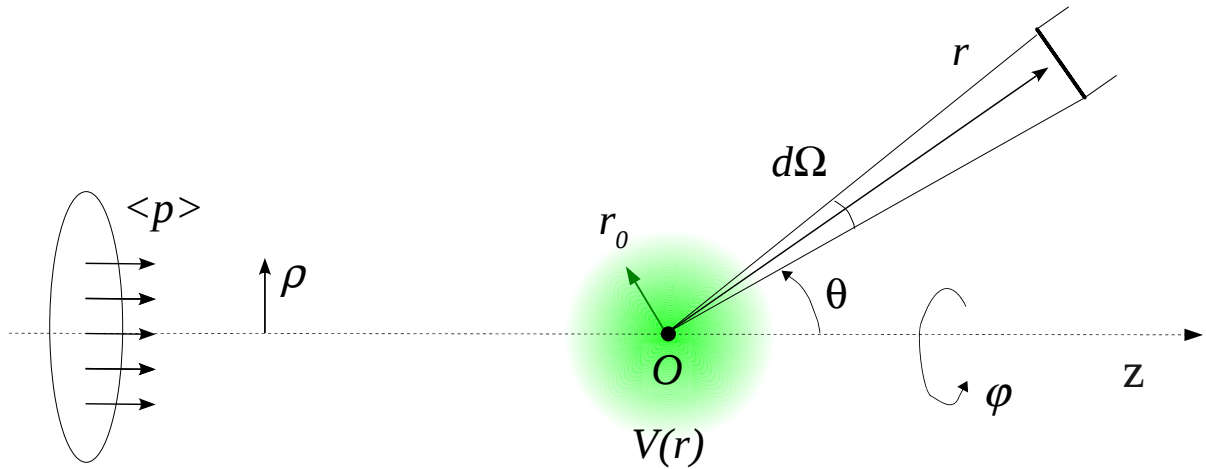


Figura 6: descrizione schematica dello scattering. Le particelle incidenti, rappresentate dalle frecce, sono in realtà descritte da pacchetti d'onda (ne è mostrato uno) con impulso medio $\langle \vec{p} \rangle = \hbar \langle \vec{k} \rangle$ e parametro di impatto $\langle \vec{\rho} \rangle$ distribuito uniformemente nel piano perpendicolare alla direzione di volo sino a $\rho_{max} \gg r_0$, con r_0 raggio d'azione del potenziale. La regione evidenziata intorno all'origine rappresenta la regione entro cui il potenziale ha effetti non trascurabili. Il rivelatore conta tutte le particelle che emergono dall'urto all'interno dell'angolo solido $d\Omega$ centrato attorno all'angolo di scattering θ . Il rivelatore si trova a distanze molto grandi $r \gg r_0$.

soltanto da \vec{k}_0 e $\vec{\rho}$; si chiami questa probabilità $P_{d\Omega}(\vec{k}_0, \vec{\rho})$:

$$(4.7) \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \int_S P_{d\Omega}(\vec{k}_0, \vec{\rho}) d^2\rho \quad \text{e} \quad \sigma_{TOT} = \int_{4\pi} \int_S P_{d\Omega}(\vec{k}_0, \vec{\rho}) d^2\rho d\Omega .$$

(5) Alla fine di tutto questo lavoro, si scopre che la sezione d'urto differenziale poteva essere calcolata semplicemente considerando la sola autofunzione $\psi_{\vec{k}_0}$ e calcolando, nel limite $r \rightarrow \infty$, il rapporto fra il flusso della densità di corrente di probabilità associata alla funzione d'onda diffusa ψ_{scat} attraverso la superficie $d\Sigma$ (delimitata da $d\Omega$ a distanza r) e la densità di corrente di probabilità associata alla funzione d'onda incidente $\psi_{inc} = e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}}$:

$$(4.8) \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| \frac{\vec{j}_{scat} \cdot d\vec{\Sigma}}{\vec{j}_{inc} d\Omega} \right| .$$

La regione per cui la trattazione dipendente dal tempo si riduce ad una trattazione indipendente dal tempo è la stessa del caso unidimensionale: allargando il pacchetto d'onda incidente nello spazio delle coordinate, l'onda incidente e l'onda diffusa coesistono in una configurazione stazionaria descritta da $\psi_{\vec{k}_0}$. La dipendenza da $\vec{\rho}$ non è più necessaria, poiché il pacchetto d'onda incidente è, al limite, una vera e propria onda piana $e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}}$, uniforme in $\vec{\rho}$.²

Come possiamo estrarre la sezione d'urto dalla $\psi_{\vec{k}_0}$? Scegliendo l'asse z parallelo a \vec{k}_0 e assumendo $r V(r) \rightarrow 0$ per $r \rightarrow \infty$,

$$(4.9) \quad \psi_{\vec{k}_0} = e^{ik_0 z} + \psi_{scat}(r, \theta, \varphi) .$$

Sebbene la forma di ψ_{scat} dipenda dal potenziale V , sappiamo che lontano dall'origine ψ_{scat} soddisfa l'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo per la particella libera:

$$(4.10) \quad \left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 - E \right] \psi_{scat} = 0 , \quad V(r) = 0 \quad (r \rightarrow \infty)$$

$$(4.11) \quad (\nabla^2 + k_0^2) \psi_{scat} = 0 \quad E = \frac{\hbar^2 k_0^2}{2\mu} \quad (r \rightarrow \infty)$$

con E energia cinetica della particella libera. Richiediamo inoltre che la soluzione ψ_{scat} sia un'onda uscente dall'origine e si propaghi verso destra.

Rammentiamo che la soluzione generale al problema tridimensionale della *particella libera in coordinate sferiche* (in una regione che esclude l'origine) è

$$(4.12) \quad \psi_{Elm} = \sum_l \sum_m (A_l j_l(kr) + B_l n_l(kr)) Y_l^m(\theta, \varphi) .$$

Tale soluzione si presenta come una combinazione lineare, attraverso le costanti A_l e B_l e le armoniche sferiche Y_l^m , delle *funzioni sferiche di Bessel* j_l di ordine l e delle *funzioni sferiche di Neumann* n_l di ordine l ; le j_l sono funzioni regolari (finite) nell'origine $r = 0$, le n_l sono funzioni singolari (infinite) nell'origine (ma a noi qui non importa, occupandoci della regione $r \rightarrow \infty$). Queste funzioni hanno andamenti asintotici noti:

$$(4.13) \quad j_l(kr) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{1}{kr} \sin \left(kr - \frac{\pi}{2} l \right)$$

$$(4.14) \quad n_l(kr) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} -\frac{1}{kr} \cos \left(kr - \frac{\pi}{2} l \right) .$$

²Notiamo che, come nel caso unidimensionale, un pacchetto d'onda, avente estensione spaziale finita, non diventa un'onda piana se lo allarghiamo e basta: il primo ha norma unitaria, la seconda ha norma $\delta^3(0)$. Perciò, è sottinteso che, mentre allarghiamo il pacchetto, la sua norma viene costantemente aumentata in qualche modo finché non arriviamo ad un'onda piana.

La nostra soluzione a grande distanza sarà dunque

$$(4.15) \quad \psi_{scat} = \psi_{Elm}(r \rightarrow \infty) = \frac{1}{k_0 r} \sum_l \sum_m \left(A_l \sin \left(k_0 r - \frac{\pi}{2} l \right) - B_l \cos \left(k_0 r - \frac{\pi}{2} l \right) \right) Y_l^m(\theta, \varphi) .$$

Per avere un'onda sferica uscente dobbiamo imporre $A_l = -iB_l$: con questa condizione, la forma asintotica dell'onda diffusa diventa

$$(4.16) \quad \begin{aligned} \psi_{scat}(r \rightarrow \infty) &= \frac{e^{ik_0 r}}{k_0 r} \sum_l \sum_m (-B_l) e^{-\frac{\pi}{2} l} Y_l^m(\theta, \varphi) = \\ &= \frac{e^{ik_0 r}}{k_0 r} \sum_l \sum_m (-i)^l (-B_l) Y_l^m(\theta, \varphi) = \\ &= \frac{e^{ik_0 r}}{r} f(\theta, \varphi) \end{aligned}$$

La funzione $f(\theta, \varphi)$ è detta *ampiezza di scattering* e dipende, oltre che dagli angoli, anche dal numero d'onda k_0 (ma in genere questa dipendenza non viene mostrata esplicitamente). Sotto le nostre ipotesi, essa contiene tutta l'informazione che ci interessa: descrive l'ampiezza dell'onda sferica prodotta dallo scattering di un'onda piana su un potenziale rapidamente decrescente a zero.

Per ottenere la sezione d'urto differenziale abbiamo bisogno delle densità di corrente di probabilità incidente e diffusa. Come calcolarle? Non sono quantità ben definite finché non non invochiamo ulteriori considerazioni fisiche: questo perché non esistono due densità di correnti separate \vec{j}_{inc} e \vec{j}_{scat} , ma una sola densità corrente \vec{j} associata alla soluzione $\psi_{\vec{k}_0}$ e quadratica in $\psi_{\vec{k}_0}$. Quindi \vec{j} non è la somma di due termini, uno dovuto a $e^{ik_0 z}$ e uno dovuto a ψ_{scat} : ci sono anche i termini misti.³ Aggiriamo il problema nel modo seguente.

Notiamo che per $r \rightarrow \infty$, la funzione d'onda sferica ψ_{scat} è trascurabile rispetto a $e^{ik_0 z}$ per via del fattore $\frac{1}{r}$, e così la densità di corrente incidente dovuta a $e^{ik_0 z}$ è

$$(4.17) \quad \begin{aligned} \left| \vec{j}_{inc} \right| &\cong \left| \frac{\hbar}{2i\mu} \left(e^{-ik_0 z} \vec{\nabla} e^{ik_0 z} - e^{ik_0 z} \vec{\nabla} e^{-ik_0 z} \right) \right| = \\ &= \frac{\hbar k_0}{\mu} . \end{aligned}$$

Non possiamo usare questo trucco per calcolare \vec{j}_{scat} entro $d\Omega$, perché ψ_{scat} non è mai molto maggiore di $e^{ik_0 z}$. Useremo un altro trucco. Riconosciamo che $e^{ik_0 z}$ è un'astrazione forte per un pacchetto d'onda limitato lungo la direzione trasversale da ρ_{max} , benché $\rho_{max} \gg r_0$. Dunque, in una descrizione più realistica, soltanto ψ_{scat} sopravvive a $r \rightarrow \infty$ per $\theta \neq 0$: dato ρ_{max} , l'onda incidente è presente dopo l'urto soltanto per angoli $\theta \lesssim \rho_{max}/r$; possiamo rendere θ arbitrariamente piccolo aumentando la distanza r alla quale è posto il rivelatore.⁴ Detto questo calcoliamo ($\theta \neq 0$)

$$(4.18) \quad \vec{j}_{scat} \cong \frac{\hbar}{2i\mu} \left(\psi_{scat}^* \vec{\nabla} \psi_{scat} - \psi_{scat} \vec{\nabla} \psi_{scat}^* \right) .$$

³Non ci siamo preoccupati di ciò nel caso unidimensionale perché la densità di corrente di probabilità j associata alla funzione d'onda $\psi = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$ è proprio $j = \frac{\hbar}{2i\mu} \left(\psi^* \frac{\partial}{\partial x} \psi - \psi \frac{\partial}{\partial x} \psi^* \right) = \frac{\hbar k}{\mu} (|A|^2 - |B|^2) = j_A + j_B$ senza termini misti.

⁴Infatti, soltanto in questa descrizione più realistica è sensato dire che le particelle che entrano nel rivelatore a $\theta \neq 0$ sono particelle scatterate, e non particelle incidenti non diffuse... A $\theta = 0$ non c'è alcun modo per distinguere sperimentalmente i due fasci incidente e diffuso: per confrontare l'esperimento con la teoria all'angolo di scattering nullo è necessario estrapolare $f(\theta = 0)$ a partire dai dati sperimentali $f(\theta)$ con $\theta \neq 0$.

Ora, il gradiente in coordinate sferiche è

$$(4.19) \quad \vec{\nabla} = \hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

ma gli ultimi due addendi sono irrilevanti se $r \rightarrow \infty$:

$$(4.20) \quad \begin{aligned} \vec{j}_{scat} &= \frac{\hbar}{2i\mu} \left[\frac{e^{-ik_0 r}}{r} f^* \hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{ik_0 r}}{r} f \right) - \frac{e^{ik_0 r}}{r} f \hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{-ik_0 r}}{r} f^* \right) \right] = \\ &= \frac{\hbar}{2i\mu} \left[2 \frac{1}{r^2} |f|^2 ik_0 \hat{e}_r + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \right] = \\ &\simeq \frac{|f|^2}{r^2} \frac{\hbar k_0}{\mu} \hat{e}_r . \end{aligned}$$

Dalla definizione $d\Omega = \frac{d\vec{\Sigma} \cdot \hat{e}_r}{r^2}$, abbiamo finalmente

$$(4.21) \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| \frac{\vec{j}_{scat} \cdot d\vec{\Sigma}}{\vec{j}_{inc} d\Omega} \right| = \frac{\left| \frac{|f|^2}{r^2} \frac{\hbar k_0}{\mu} \hat{e}_r \cdot \hat{e}_r r^2 d\Omega \right|}{\frac{\hbar k_0}{\mu} d\Omega} = |f(\theta, \varphi)|^2 .$$

Nella trattazione indipendente dal tempo a cui ci siamo ricondotti, *la sezione d'urto è pari al modulo quadro dell'ampiezza di scattering*. Il suo calcolo, dunque, si riduce di volta in volta al calcolo di $f(\theta, \varphi)$ per il particolare potenziale V coinvolto nel problema.

4.2 Approssimazione di Born

Il nostro scopo è adesso costruire un calcolo teorico per l'ampiezza di scattering, dato il potenziale centrale $V(r)$. Considereremo dapprima un potenziale più generale nella forma $V(\vec{r})$, per poi specializzarlo in un potenziale a simmetria sferica non appena avremo bisogno di semplificare le equazioni. Scriviamo l'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo completa per la funzione d'onda $\psi_{\vec{k}_0}$ (l'autovalore E è una costante del moto, e dunque $E \equiv E_{TOT}(t) = E_{TOT}(0) \equiv K_{in}$):

$$(4.22) \quad \left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 + V(\vec{r}) - E \right] \psi_{\vec{k}_0}(\vec{r}) = 0$$

$$(4.23) \quad (\nabla^2 + k_0^2) \psi_{\vec{k}_0}(\vec{r}) = \frac{2\mu}{\hbar^2} V(\vec{r}) \psi_{\vec{k}_0}(\vec{r}) .$$

Questa è una equazione differenziale alle derivate parziali ordinaria del secondo ordine omogenea che, come abbiamo visto nelle (4.6) e (4.9) nell'ipotesi $\vec{k}_0 \parallel \hat{z}$, ha soluzione della forma

$$(4.24) \quad \psi_{\vec{k}_0} = e^{ik_0 z} + \psi_{scat}(r, \theta, \varphi)$$

con la proprietà asintotica vista in (4.16)

$$(4.25) \quad \psi_{scat} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} f(\theta, \varphi) \frac{e^{ik_0 r}}{r} .$$

La forma di ψ_{scat} dipende dal potenziale V , che è sempre più piccolo a distanze sempre più grandi dall'origine. Per scoprire la proprietà asintotica abbiamo posto $V = 0$; adesso l'idea è cercare $f(\theta, \varphi)$ sviluppando al primo ordine perturbativo nel potenziale.

Scriviamo lo *sviluppo perturbativo* completo della soluzione $\psi_{\vec{k}_0}$ ai vari ordini in V :

$$(4.26) \quad \psi_{\vec{k}_0}(\vec{r}) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s V^s = \sum_{s=0}^{\infty} \psi_s(\vec{r})$$

in cui ψ_s è il termine di ordine s nel potenziale, mentre lo sviluppo arrestato all'ordine n è dato da

$$(4.27) \quad \psi_{\vec{k}_0}^{(n)}(\vec{r}) = \sum_{s=0}^n \psi_s(\vec{r}) .$$

Il termine $\psi_{\vec{k}_0}^{(0)} \equiv \psi_0$ di ordine 0 nel potenziale (che naturalmente coincide con lo sviluppo della soluzione arrestato all'ordine 0) è tale da soddisfare l'equazione della particella libera con energia cinetica $\frac{\hbar k_0^2}{2\mu}$

$$(4.28) \quad (\nabla^2 + k_0^2) \psi_0(\vec{r}) = 0 \quad (V = 0)$$

che ha soluzione

$$(4.29) \quad \psi_0(\vec{r}) = e^{ik_0 z} .$$

Chiarita la notazione, vediamo come possiamo utilizzare questo sviluppo. Prima trasformiamo l'equazione differenziale (4.23) in una equazione integrale equivalente. Sia D un operatore differenziale generico: $D_x f(x) = g(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$. La soluzione dell'equazione differenziale è esprimibile come somma di una “soluzione particolare” dell'equazione (che coinvolge la *funzione di Green* G) e una “soluzione generale” dell'equazione omogenea associata ($g = 0$):

$$f(x) = \int G(x, x') g(x') d^n x' + f_0(x) , \quad x \in \mathbb{R}^n$$

con

$$\begin{aligned} D_x f_0(x) &= 0 \\ D_x G(x, x') &= \delta^n(x - x') . \end{aligned}$$

Infatti, si vede facilmente che $f(x)$ è soluzione:

$$D_x f(x) = \int \delta^n(x - x') g(x') d^n x' + 0 = g(x) , \quad x \in \mathbb{R}^n .$$

Nel nostro caso l'operatore differenziale $D = \nabla^2 + k_0^2$ agisce su vettori dello spazio tridimensionale \mathbb{R}^3 :

$$(4.30) \quad \psi_{\vec{k}_0}(\vec{r}) = \psi_0 + \frac{2\mu}{\hbar^2} \int G(\vec{r}, \vec{r}') V(\vec{r}') \psi_{\vec{k}_0}(\vec{r}') d^3 \vec{r}'$$

$$(4.31) \quad (\nabla^2 + k_0^2) G(\vec{r}, \vec{r}') = \delta^3(\vec{r} - \vec{r}')$$

dove la funzione matematica arbitraria f_0 è determinata fisicamente dalle condizioni al contorno ed è necessariamente il termine $\psi_{\vec{k}_0}^{(0)}$ dello *zeresimo ordine in V* (potenziale completamente assente) dato che l'integrale mostra una dipendenza esplicita da V :

$$(4.32) \quad \psi_{\vec{k}_0}(\vec{r}) = e^{ik_0 z} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \int G(\vec{r}, \vec{r}') V(\vec{r}') \psi_{\vec{k}_0}(\vec{r}') d^3 \vec{r}' .$$

La $G(\vec{r}, \vec{r}')$ contribuisce all'andamento dell'onda scaterata in \vec{r} dovuta al potenziale in \vec{r}' . Confrontando questa equazione con la (4.24) vediamo che il termine integrale fornisce proprio la funzione d'onda di scattering ψ_{scat} , dunque esso deve rappresentare, per coerenza di interpretazione, un'onda uscente e propagantesi verso destra: questa richiesta costituisce un vincolo fisico sulla $G(\vec{r}, \vec{r}')$ il quale, assieme alla definizione (4.31), determina univocamente la nostra funzione di Green. Per il momento supponiamo di conoscere G e procediamo (calcoleremo G alla fine).

L'utilità di convertire l'equazione differenziale in una equazione integrale è evidente: permette una espansione perturbativa della soluzione $\psi_{\vec{k}_0}$ in serie di potenze crescenti di V . La funzione integranda contiene già una potenza prima di V , perciò sostituendo nell'integrando uno sviluppo di $\psi_{\vec{k}_0}$ arrestato ad un certo ordine ricaviamo a primo membro lo sviluppo arrestato all'ordine successivo.

Allo *zeroesimo ordine* nel potenziale

$$(4.33) \quad \psi_{\vec{k}_0}^{(0)}(\vec{r}) \equiv \psi_0(\vec{r}) = e^{ik_0z} .$$

Al *primo ordine* nel potenziale

$$(4.34) \quad \begin{aligned} \psi_{\vec{k}_0}^{(1)}(\vec{r}) \equiv \psi_0(\vec{r}) + \psi_1(\vec{r}) &= e^{ik_0z} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \int G(\vec{r}, \vec{r}') V(\vec{r}') \psi_{\vec{k}_0}^{(0)}(\vec{r}') d^3\vec{r}' = \\ &= e^{ik_0z} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \int G(\vec{r}, \vec{r}') V(\vec{r}') e^{ik_0z'} d^3\vec{r}' . \end{aligned}$$

Al *secondo ordine* nel potenziale

$$(4.35) \quad \begin{aligned} \psi_{\vec{k}_0}^{(2)}(\vec{r}) \equiv \psi_0(\vec{r}) + \psi_1(\vec{r}) + \psi_2(\vec{r}) &= e^{ik_0z} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \int G(\vec{r}, \vec{r}') V(\vec{r}') \psi_{\vec{k}_0}^{(1)}(\vec{r}') d^3\vec{r}' = \\ &= e^{ik_0z} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \int G(\vec{r}, \vec{r}') V(\vec{r}') e^{ik_0z'} d^3\vec{r}' + \left(\frac{2\mu}{\hbar^2}\right)^2 \int \int G(\vec{r}, \vec{r}') V(\vec{r}') G(\vec{r}', \vec{r}'') V(\vec{r}'') e^{ik_0z''} d^3\vec{r}' d^3\vec{r}'' . \end{aligned}$$

e così via... Lo sviluppo al primo ordine (4.34) è detto *approssimazione di Born*.

Ora non resta che calcolare la funzione di Green per l'operatore differenziale $\nabla^2 + k_0^2$. Proponiamo brevemente due modi alternativi, senza entrare nei dettagli dei conti.

1) *Metodo generale*. Per trovare la funzione di Green per un qualunque operatore esiste un metodo generale che consiste nello sviluppo in termini di autofunzioni dell'operatore.

$$-i\hbar \vec{\nabla} u_{\vec{k}_0}(\vec{r}) = \vec{p}_0 u_{\vec{k}_0}(\vec{r}) \quad \text{con} \quad \vec{k}_0 = \frac{\vec{p}_0}{\hbar}, \quad \vec{p} \equiv -i\hbar \vec{\nabla}$$

$$-i \vec{\nabla} u_{\vec{k}_0}(\vec{r}) = \vec{k}_0 u_{\vec{k}_0}(\vec{r})$$

dove le autofunzioni del vettore d'onda sulla base delle coordinate sono

$$u_{\vec{k}_0}(\vec{r}) = \langle \vec{r} | \vec{k}_0 \rangle = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}} ,$$

le quali soddisfano la relazione di completezza

$$\int d^3\vec{r} u_{\vec{k}_0}^*(\vec{r}) u_{\vec{k}_0'}(\vec{r}) = \delta^3(\vec{k}_0 - \vec{k}_0')$$

e costituiscono quindi un set completo continuo di autofunzioni ortonormali:

$$\int d^3\vec{k}_0 u_{\vec{k}_0}(\vec{r}) u_{\vec{k}_0}^*(\vec{r}') = \int d^3\vec{k}_0 \langle \vec{r} | \vec{k}_0 \rangle \langle \vec{k}_0 | \vec{r}' \rangle = \langle \vec{r} | \vec{r}' \rangle = \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') .$$

Facciamo la trasformata di Fourier di entrambi i membri della (4.31):

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}} (\nabla^2 + k_0^2) G(\vec{r}, \vec{r}') d^3\vec{r} &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}} \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') d^3\vec{r} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}'} . \end{aligned}$$

Se facciamo agire ∇^2 sulla funzione a sinistra (ricordiamo che esso è un operatore hermitiano, dunque può agire indifferentemente sulla funzione a lato destro o sinistro)

$$(k_0^2 - q^2) \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}} G(\vec{r}, \vec{r}') d^3\vec{r} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}'}$$

ovvero

$$(k_0^2 - q^2) G(\vec{q}, \vec{r}') = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}'}$$

dove \vec{q} è la variabile correlata alla variabile spaziale \vec{r} e $G(\vec{q}, \vec{r}')$ è la funzione trasformata di Fourier di $G(\vec{r}, \vec{r}')$. Nello spazio dei vettori \vec{q} l'equazione differenziale che definisce la funzione di Green (4.31) si è ridotta ad una equazione algebrica, la cui soluzione è

$$G(\vec{q}, \vec{r}') = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} (k_0^2 - q^2)} e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}'}$$

La funzione di Green nello spazio delle coordinate è data dalla antitrasformata

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{i\vec{q}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}}{k_0^2 - q^2} d^3\vec{q}$$

Ecco l'espansione continua per la funzione di Green in termini delle autofunzioni del vettore d'onda (o dell'impulso). Il calcolo dell'integrale sul piano complesso non è banale (in sostanza, dopo opportuni passaggi, interviene il teorema dei residui); il risultato finale è

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik_0|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

2) *Metodo particolare.* Possiamo individuare eventuali simmetrie nell'equazione differenziale di definizione (4.31), simmetrie soddisfatte tanto dall'operatore differenziale quanto dalle funzioni coinvolte. L'operatore $\nabla^2 + k_0^2$ e la funzione $\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')$ (che in realtà ha senso soltanto nel linguaggio delle distribuzioni) sono invarianti sotto rotazioni tridimensionali e traslazioni spaziali, dunque ricercheremo soluzioni altrettanto simmetriche:

$$\left. \begin{aligned} G(\vec{r} - \vec{a}, \vec{r}' - \vec{a}) &= G(\vec{r}, \vec{r}') \\ G(R\vec{r}, R\vec{r}') &= G(\vec{r}, \vec{r}') \end{aligned} \right\} \Rightarrow G(\vec{r}, \vec{r}') = G(|\vec{r} - \vec{r}'|)$$

Dalle due leggi di simmetria discende che G è funzione soltanto del modulo della differenza delle coordinate $\rho := |\vec{r} - \vec{r}'|$. La Meccanica Quantistica ci dice che l'operatore scalare ottenuto quadrando l'operatore vettoriale impulso è scomponibile nella somma di una parte radiale e di una parte angolare:

$$\begin{aligned} \vec{p}^2 &\equiv -\hbar^2 \nabla^2 = \vec{p}_r^2 + \frac{\vec{L}^2}{x^2} & \text{con } \vec{p}_r &:= -i\hbar \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r, \quad \vec{p}_r^2 := -\frac{\hbar^2}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r \\ \nabla^2 &\equiv -\frac{\vec{p}^2}{\hbar^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r - \frac{\vec{l}^2}{r^2} \end{aligned}$$

con

$$\vec{l}^2 = \frac{\vec{L}^2}{\hbar^2} = -\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) - \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} = \mathcal{F} \left(\theta, \frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{\partial}{\partial\varphi} \right) .$$

Noi applichiamo l'operatore ∇^2 ad una funzione del raggio ρ :

$$\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} \rho + k_0^2 \right) G(\rho) = \delta^3(\vec{\rho}) .$$

Passiamo alla funzione ridotta $F(\rho) = \rho G(\rho)$:

$$F''(\rho) + k_0^2 F(\rho) = \rho \delta^3(\vec{\rho}) .$$

Per $\vec{r} \neq \vec{r}'$ ($\vec{\rho} \neq 0$) l'equazione diventa

$$F''(\rho) + k_0^2 F(\rho) = 0$$

ed ha soluzione generale

$$F(\rho) = A e^{ik_0\rho} + B e^{-ik_0\rho} .$$

Vogliamo $G(\rho)$ uscente dall'origine e propagantesi verso destra, perché tale deve essere $\psi_{\vec{k}_0}^{(1)}$: $B = 0$. La funzione di Green è dunque l'onda sferica

$$G(\rho) = A \frac{e^{ik_0\rho}}{\rho} .$$

Per determinare A integriamo l'equazione differenziale (4.31) nell'intorno dell'origine entro una sferetta di raggio $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\int_{\mathcal{S}(\varepsilon)} (\nabla^2 + k_0^2) G(\rho) d^3\vec{\rho} = \int_{\mathcal{S}(\varepsilon)} \delta^3(\vec{\rho}) d^3\vec{\rho}$$

$$\int_{\mathcal{S}(\varepsilon)} \left[\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} G(\rho) + k_0^2 G(\rho) \right] d^3\vec{\rho} = 1$$

e applicando il teorema di Gauss

$$\int_{\Sigma(\varepsilon)} \vec{\nabla} G(\rho) \cdot \hat{n} d\Sigma + k_0^2 \int_0^\varepsilon 4\pi\rho^2 G(\rho) d\rho = 1$$

$$\vec{\nabla} G(\varepsilon) \cdot \int_{\Sigma(\varepsilon)} \hat{n} d\Sigma + 4\pi A k_0^2 \int_0^\varepsilon \rho e^{ik_0\rho} d\rho = 1$$

$$4\pi \varepsilon^2 \frac{dG}{d\rho}(\rho = \varepsilon) + 4\pi A k_0^2 \left[\frac{\rho}{ik_0} e^{ik_0\rho} + \frac{1}{k_0^2} e^{ik_0\rho} \right]_0^\varepsilon = 1 .$$

Nel limite $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 4\pi \varepsilon^2 \frac{dG}{d\rho}(\rho = \varepsilon) = 1$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 4\pi \varepsilon^2 A \left(ik_0 \frac{e^{ik_0\varepsilon}}{\varepsilon} - \frac{e^{ik_0\varepsilon}}{\varepsilon^2} \right) = 1$$

$$-4\pi A = 1 .$$

Ecco infine la funzione di Green:

$$G(\rho) = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik_0\rho}}{\rho}$$

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik_0|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} .$$

che coincide con quella che avremmo trovato procedendo con il primo metodo.

Adesso non resta che calcolare l'ampiezza di scattering al primo ordine in V per completare la trattazione in approssimazione di Born.

$$\begin{aligned} \psi_{\vec{k}_0}^{(1)}(\vec{r}) &= e^{ik_0z} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \int G(\vec{r}, \vec{r}') V(\vec{r}') e^{ik_0z'} d^3\vec{r}' = \\ (4.36) \quad &= e^{ik_0z} - \frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int \frac{e^{ik_0|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} V(\vec{r}') e^{ik_0z'} d^3\vec{r}' . \end{aligned}$$

A noi interessa l'onda scatterata a grande distanza dal centro diffusore del potenziale (in modo che V rappresenti una piccola perturbazione al problema della particella libera): $r \rightarrow \infty$ nel senso che $k_0|\vec{r}-\vec{r}'| \gg 1$ ovvero $k_0\rho \gg 1$. Allora

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} &= \frac{1}{\sqrt{(\vec{r}-\vec{r}')(\vec{r}-\vec{r}')}} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2\vec{r}\cdot\vec{r}' + r'^2}} = \\ &= \frac{1}{r\sqrt{1 - 2\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2}}} = \frac{1}{r\sqrt{1 - 2\frac{r'}{r}\hat{r}\cdot\hat{r}' + \left(\frac{r'}{r}\right)^2}} \simeq \\ &\simeq \frac{1}{r\sqrt{1 - 2\frac{r'}{r}\hat{r}\cdot\hat{r}'}} \simeq \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^2}\right) . \end{aligned}$$

Inoltre, riferendosi alla notazione $\vec{k}_0 = k_0\hat{z}$ e $\vec{k}_{scat} = k_0\hat{r} = k_0\frac{\vec{r}}{r}$, sempre al prim'ordine in $\frac{r}{r'}$ abbiamo

$$\begin{aligned} |\vec{r}-\vec{r}'| &= r\sqrt{1 - 2\frac{r'}{r}\hat{r}\cdot\hat{r}' + \left(\frac{r'}{r}\right)^2} \simeq r\left(1 - \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^2}\right) = r - r'\hat{r}\cdot\hat{r}' \\ k_0|\vec{r}-\vec{r}'| &\simeq k_0r - k_0r'\hat{r}\cdot\hat{r}' = k_0r - \vec{k}_{scat}\cdot\vec{r}' . \end{aligned}$$

Da cui

$$\frac{e^{ik_0|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \simeq \frac{1}{r} e^{ik_0r} e^{-i\vec{k}_{scat}\cdot\vec{r}'}$$

e

$$(4.37) \quad \psi_{\vec{k}_0}^{(1)}(\vec{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{ik_0z} - \frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{ik_0r}}{r} \int e^{i(\vec{k}_0 - \vec{k}_{scat})\cdot\vec{r}'} V(\vec{r}') d^3\vec{r}' .$$

Dunque l'onda scatterata è, sufficientemente lontano dall'origine, un'onda sferica, come avevamo già mostrato. Confrontando la (4.37) con la forma generale della soluzione $\psi_{\vec{k}_0}$ (4.24) e con la proprietà asintotica della funzione d'onda per la sola onda scatterata (4.16) ricaviamo

$$(4.38) \quad f(\theta, \varphi) \equiv f(\vec{q}) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}'} V(\vec{r}') d^3\vec{r}'$$

dove $\vec{q} := \vec{k}_{scat} - \vec{k}_0$ è l'impulso trasferito nell'urto alla particella scatterata in unità \hbar . In conclusione, nell'approssimazione di Born, ossia al primo ordine perturbativo nel potenziale, a meno di fattori moltiplicativi l'ampiezza di scattering è la trasformata di Fourier del potenziale rispetto all'impulso trasferito in unità \hbar e dipende solo dal vettore \vec{q} . In termini operatoriali, l'ampiezza di scattering è, a meno di fattori moltiplicativi, l'elemento di matrice dell'operatore potenziale valutato fra gli autostati del vettore d'onda finale e iniziale: $f(\theta, \varphi) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \langle \vec{k}_{scat} | V | \vec{k}_0 \rangle$.

4.3 Sezione d'urto differenziale per potenziali notevoli

Il nostro obiettivo è adesso quello di calcolare la sezione d'urto differenziale per scattering contro potenziali notevoli. Come operiamo? In approssimazione di Born l'ampiezza di scattering è data dalla trasformata di Fourier (4.38); in virtù della fondamentale relazione (4.21) siamo in grado di dedurre la sezione d'urto differenziale a partire dall'ampiezza di scattering. La precedente equazione (4.38) è valida per qualunque potenziale. Da qui in avanti noi ci concentreremo su potenziali centrali, in particolare quello nucleare (di Yukawa) e quello coulombiano (elettrostatico).

Potenziale centrale. Sia $V(\vec{r}) = V(r)$. Per eseguire l'integrazione, useremo coordinate sferiche (r', θ', φ') scrivendo $d^3\vec{r}' = r'^2 dr' d\Omega' = r'^2 \sin\theta' d\theta' d\varphi'$. Scegliamo l'asse polare z' , rispetto al quale misurare θ' , diretto come \vec{q} ; notiamo che z' e θ' sono variabili mute di integrazione e non hanno niente a che fare con la direzione di incidenza z e con l'angolo di scattering θ , fissato in $f(\theta, \varphi)$ dal vettore \vec{q} e quindi dall'impulso trasferito. Ebbene

$$\begin{aligned}
 f(\theta, \varphi) &= -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^\pi d\theta' \int_0^{+\infty} dr' e^{-iqr' \cos\theta'} V(r') r'^2 \sin\theta' = \\
 &= -\frac{\mu}{\hbar^2} \int_0^{+\infty} dr' r'^2 V(r') \int_{-1}^{+1} d(\cos\theta') e^{-iqr' \cos\theta'} = \\
 &= -\frac{\mu}{\hbar^2} \int_0^{+\infty} dr' r'^2 V(r') \frac{1}{iqr'} (e^{+iqr'} - e^{-iqr'}) = \\
 (4.39) \quad &= -\frac{2\mu}{q\hbar^2} \int_0^{+\infty} dr' r' V(r') \sin(qr') \equiv f(\theta) .
 \end{aligned}$$

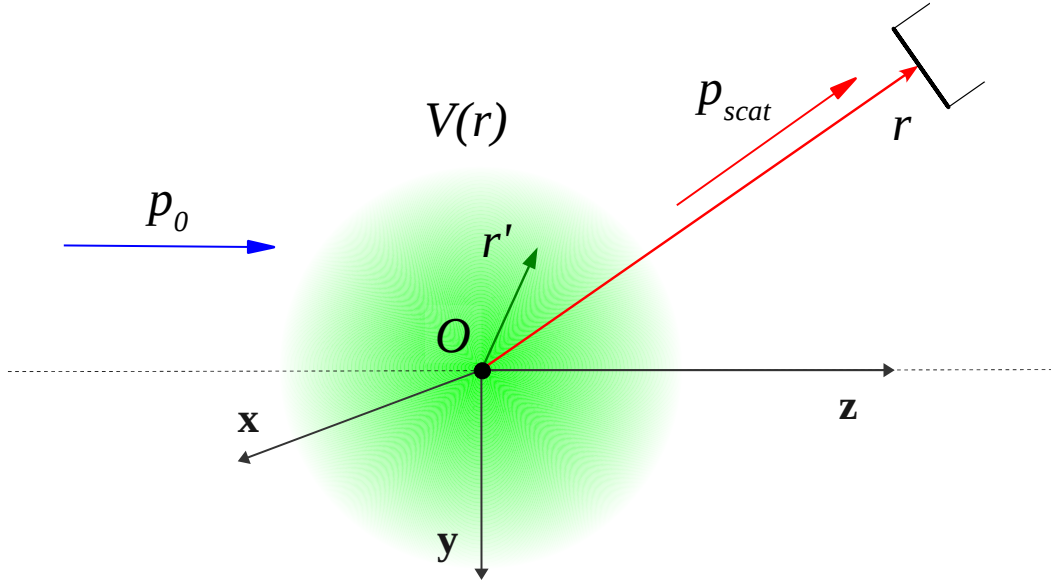


Figura 7: è evidenziata la regione finita entro la quale agisce il potenziale $V(\vec{r})$; al di fuori di questa regione ($r \gg r_0$, r_0 raggio d'azione) il potenziale è trascurabile; \vec{r} è il raggio vettore che individua il punto – molto lontano – in cui valutiamo o misuriamo l'onda scatterata; la variabile di integrazione r' è confinata entro la regione in cui sussiste il potenziale. Con \vec{k}_0 e \vec{k}_{scat} intendiamo i vettori d'onda delle onde incidente e diffusa in \vec{r} , oppure, equivalentemente a meno di un fattore \hbar , i vettori impulso della particella ridotta incidente e diffusa. Si può dimostrare che i due impulsi hanno il medesimo modulo k_0 nel caso di urto elastico; si conserva il modulo, ma le direzioni sono diverse: \vec{k}_0 è parallelo all'asse z , \vec{k}_{scat} punta nella direzione \vec{r} .

Se il potenziale gode di simmetria sferica, allora non c'è dipendenza da φ – come era ragionevole aspettarsi. Infatti l'onda incidente e^{ik_0z} è insensibile a trasformazioni in φ , ad esempio rotazioni attorno all'asse z ; pure il potenziale, essendo centrale, non varia al variare di φ ; segue che f non può avere alcuna dipendenza da φ . Nel linguaggio del momento angolare, l'onda incidente non possiede componente l_z e questa proprietà è conservata nello scattering, ovvero l'onda diffusa ha componente l_z nulla ed è indipendente da φ . Tuttavia rimane nell'onda diffusa la dipendenza dall'angolo di scattering θ attraverso il modulo di \vec{q} :

$$\begin{aligned}
q &= |\vec{q}| = |\vec{k}_{scat} - \vec{k}_0| = \sqrt{(\vec{k}_{scat} - \vec{k}_0)(\vec{k}_{scat} - \vec{k}_0)} = \\
&= \sqrt{|\vec{k}_{scat}|^2 + |\vec{k}_0|^2 - 2\vec{k}_{scat} \cdot \vec{k}_0} = \sqrt{k_0^2 + k_0^2 - 2k_0^2 \cos \theta} = \\
(4.40) \quad &= 2k_0 \sin \frac{\theta}{2}.
\end{aligned}$$

Potenziale di Yukawa. Si tratta di un potenziale a corto raggio d'azione introdotto negli anni Trenta da Yukawa per descrivere l'interazione nucleare forte fra due nucleoni posti a distanza sufficientemente ravvicinata:

$$(4.41) \quad V_Y(r) = g \frac{e^{-\nu r}}{r}, \quad \text{con } \nu > 0.$$

L'ampiezza di scattering associata è

$$\begin{aligned}
f_Y(\theta) &= -\frac{2\mu}{q\hbar^2} \int_0^{+\infty} dr' r' g \frac{e^{-\nu r'}}{r'} \sin(qr') = \\
&= -\frac{2\mu g}{q\hbar^2} \int_0^{+\infty} dr' e^{-\nu r'} \frac{e^{+iqr'} - e^{-iqr'}}{2i} = \\
&= -\frac{2\mu g}{2iq\hbar^2} \int_0^{+\infty} dr' [e^{+r'(iq-\nu)} - e^{-r'(iq+\nu)}]
\end{aligned}$$

e poiché la parte reale dei coefficienti $iq - \nu$ e $-iq - \nu$ ad esponente è negativa

$$(4.42) \quad = -\frac{2\mu g}{2iq\hbar^2} \left(\frac{-1}{iq - \nu} - \frac{-1}{-iq - \nu} \right) = -\frac{2\mu g}{\hbar^2 (\nu^2 + q^2)}.$$

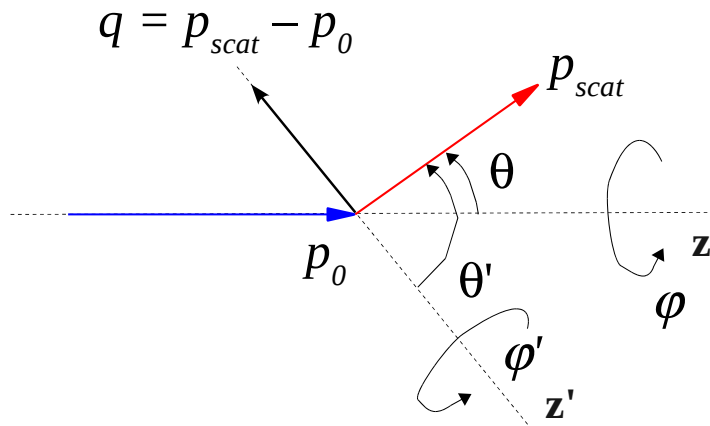


Figura 8: rappresentazione schematica delle grandezze coinvolte nell'integrazione.

La sezione d'urto nucleare è dunque

$$(4.43) \quad \left. \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) \right|_Y = \frac{4\mu^2 g^2}{\hbar^4 \left(\nu^2 + 4k_0^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)^2}.$$

dove abbiamo sostituito l'espressione per q trovata in (4.40).

Potenziale di Coulomb. Si tratta di un potenziale a raggio d'azione infinito: non è confinato spazialmente dato che non decade a zero più velocemente di r^{-1} . Non è dunque possibile maneggiare il formalismo che abbiamo costruito: la particella non può mai dirsi completamente libera, neanche a grandi distanze.⁵ Tuttavia è possibile definire una sezione d'urto differenziale notando che il potenziale coulombiano è quello di Yukawa con $g = Ze^2$ al limite $\nu \rightarrow 0$:

$$(4.44) \quad V_C(r) = \frac{Ze^2}{r}$$

in unità di Gauss (in unità S.I. compare il fattore $4\pi\epsilon_0$ a denominatore). L'ampiezza di scattering associata è

$$(4.45) \quad f_C(\theta) = -\frac{2\mu Ze^2}{\hbar^2 q^2}.$$

La sezione d'urto coulombiana è dunque

$$(4.46) \quad \left. \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) \right|_C = \frac{4\mu^2 (Ze^2)^2}{16\hbar^4 k_0^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} = \frac{(Ze^2)^2}{16E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}}.$$

dove abbiamo sostituito l'espressione per q trovata in (4.40) e $E = \frac{p^2}{2\mu}$. Questa è proprio la sezione d'urto che Rutherford calcolò classicamente (e verificò sperimentalmente) nei primi anni Dieci.

4.4 Limiti di validità dell'approssimazione di Born

Giacché nell'approssimazione di Born si rimpiazza $\psi_{\vec{k}_0}^-(\vec{r}') = e^{ik_0 z'} + \psi_{scat}(r', \theta, \varphi)$ semplicemente con $e^{ik_0 z'}$ nel secondo membro dell'equazione integrale (4.32), essa è accettabile soltanto se $|\psi_{scat}| \ll |e^{ik_0 z'}|$ cioè $|\psi_{scat}| \ll 1$ nella regione del potenziale $|\vec{r}'| \lesssim r_0$. Siccome ci aspettiamo che ψ_{scat} sia massima in prossimità dell'origine (a grandi distanze si comporta come un'onda sferica), per cautela facciamo il confronto proprio nell'origine $\vec{r} = 0$, utilizzando la (4.36) per valutare $\psi_{scat}(0)$. Assumendo $V(\vec{r}) = V(r)$, un ruvido criterio per la validità dell'approssimazione di Born è

$$(4.47) \quad \begin{aligned} |\psi_{scat}(0)| &= \left| \frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int \frac{e^{ik_0 r'}}{r'} V(\vec{r}') e^{ik_0 z'} d^3\vec{r}' \right| = \\ &= \left| \frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^\pi d\theta' \int_0^{+\infty} dr' r'^2 \sin\theta' \frac{e^{ik_0 r'}}{r'} V(r') e^{ik_0 z'} \right| = \\ &= \left| \frac{\mu}{\hbar^2} \int_0^{+\infty} dr' r' e^{ik_0 r'} V(r') \int_{-1}^{+1} d(\cos\theta') e^{ik_0 r' \cos\theta'} \right| = \\ &= \left| \frac{2\mu}{k_0 \hbar^2} \int_0^{+\infty} dr' e^{ik_0 r'} V(r') \sin(k_0 r') \right| \ll 1. \end{aligned}$$

⁵Questo si manifesta nel fatto che l'interazione coulombiana, nonostante ammetta sezione d'urto differenziale, possiede sezione d'urto totale infinita: si provi a integrare la (4.46) su tutti gli angoli θ e si avrà una divergenza.

A basse energie, $E \rightarrow 0$ (E energia cinetica della particella incidente), $k_0 r' \rightarrow 0$, $e^{ik_0 r'} \rightarrow 1$ e $\sin(k_0 r') \rightarrow k_0 r'$:

$$\frac{2\mu}{\hbar^2} \left| \int_0^{+\infty} dr' r' V(r') \right| \ll 1$$

e considerando che il potenziale abbia profondità (o altezza) $V_0 > 0$ entro un raggio d'azione r_0 ,

$$\frac{2\mu}{\hbar^2} \left| \int_0^{r_0} dr' r' V(r') \right| \ll 1$$

$$\frac{\mu}{\hbar^2} V_0 r_0^2 \ll 1$$

$$(4.48) \quad V_0 \ll \frac{\hbar^2}{\mu r_0^2} .$$

Questa è la condizione sul potenziale nel caso di basse energie cinetiche del fascio incidente. Interpretiamola: una particella di massa μ confinata in una buca di profondità V_0 e ampiezza r_0 possiede un impulso dell'ordine di $\frac{\hbar}{r_0}$ e una energia cinetica dell'ordine di $\frac{\hbar^2}{\mu r_0^2}$; la forte disuguaglianza sopra ci dice che l'approssimazione di Born funziona a basse energie sinché il potenziale è abbastanza debole da non creare uno stato legato per la particella.

Ad alte energie, $E \rightarrow \infty$ (E energia cinetica della particella incidente) e $k_0 r' \gg 1$:

$$\frac{2\mu}{k_0 \hbar^2} \left| \int_0^{+\infty} dr' \frac{e^{2ik_0 r'} - 1}{2i} V(r') \right| \ll 1$$

$$\frac{\mu}{k_0 \hbar^2} \left| \int_0^{+\infty} dr' e^{2ik_0 r'} V(r') - \int_0^{+\infty} dr' V(r') \right| \ll 1$$

ma, poiché l'esponenziale immaginario oscilla rapidamente entro il range del potenziale, l'integrale sarà circa nullo e quindi

$$\frac{\mu}{k_0 \hbar^2} \left| \int_0^{+\infty} dr' V(r') \right| \ll 1$$

$$\frac{\mu}{k_0 \hbar^2} V_0 r_0 \ll 1$$

$$(4.49) \quad V_0 \ll \frac{\hbar^2 k_0}{\mu r_0} .$$

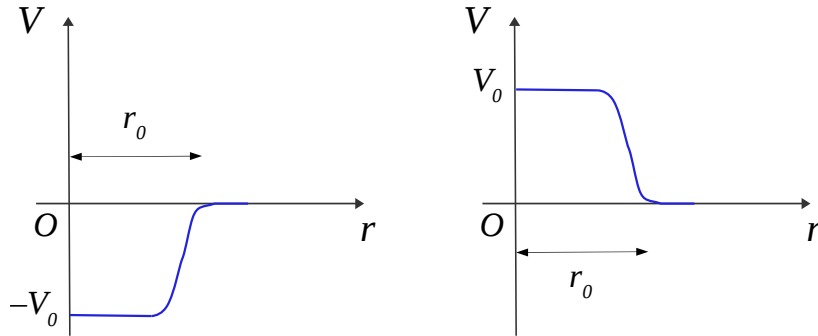


Figura 9: rappresentazione grafica di un potenziale a corto raggio confinato in $r \lesssim r_0$; nella prima immagine il potenziale è negativo (si parla di buca di potenziale), ed è il caso del potenziale nucleare forte o del potenziale elettrostatico attrattivo; nella seconda immagine il potenziale è positivo (si parla di barriera di potenziale), ed è il caso del potenziale elettrostatico repulsivo.

4.5 Sviluppo in onde parziali

Abbiamo evidenziato che $V(\vec{r}) = V(r) \Rightarrow f(\theta, \varphi) = f(\theta)$. In realtà f è anche funzione dell'energia cinetica E (conservata nell'urto elastico) ovvero del numero d'onda k_0 , sebbene questa dipendenza non sia mostrata. Dato che ogni funzione di θ può essere espansa in termini dei polinomi di Legendre con $m = 0$

$$(4.50) \quad P_l^0(\cos \theta) = \left(\frac{4\pi}{2l+1} \right)^{\frac{1}{2}} Y_l^0(\theta) \quad (l \in \mathbb{N})$$

nel nostro caso è possibile scrivere

$$(4.51) \quad f(\theta, k_0) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) a_l(k_0) P_l^0(\cos \theta)$$

dove la dipendenza da k_0 è assegnata a ciascun coefficiente $a_l(k_0)$, chiamato *ampiezza dell'onda parziale l-esima*. Esso ha il seguente significato: si può dimostrare che l'onda piana incidente e^{ik_0z} è composta da stati di tutti i momenti angolari orbitali

$$(4.52) \quad e^{ik_0z} = e^{ik_0r \cos \theta} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(k_0r) P_l^0(\cos \theta)$$

e, poiché il potenziale conserva il momento angolare, ciascuna componente del momento angolare scattera indipendentemente; $a_l(k_0)$ dà una misura dell'ampiezza di scattering per la componente di momento angolare $l\hbar$.

Qual è l'utilità dello sviluppo (4.51)? Apparentemente nessuna: abbiamo barattato una funzione di due variabili $f(\theta, k_0)$ con infinite funzioni di una variabile $a_l(k_0)$. Ciò che rende vantaggioso lo sviluppo è il fatto che, a basse energie, solo i primissimi coefficienti $a_l(k_0)$ sono apprezzabilmente diversi da zero. Così, si riesce a descrivere lo scattering in termini di poche funzioni a_0, a_1, \dots di una sola variabile. Il seguente ragionamento euristico (convalidato da calcoli espliciti) viene di norma fornito per spiegare come lo scattering sia limitato a pochi l per bassi valori di k_0 . Dall'acceleratore fuoriesce un fascio uniforme in ρ (parametro d'urto) di particelle che si muovono lungo z con vettore d'onda \vec{k}_0 . Tutte le particelle contenute in un guscio cilindrico di raggio ρ e spessore $d\rho$ hanno momento angolare orbitale

$$(4.53) \quad L = l\hbar = |\vec{r} \wedge \vec{p}| = \rho \hbar k_0 .$$

Se il potenziale ha range r_0 , le particelle con $\rho \gtrsim r_0$ mancheranno il bersaglio, perciò saranno scatterate solamente quelle aventi valori di l fino a $l_{max} = k_0 \rho_{max}$, dove $k_0 \rho_{max}$ è piccolo se k_0 è piccolo (basse energie cinetiche).

Dato un potenziale $V(r)$, come calcoliamo i coefficienti $a_l(k_0)$? In altre parole, come sono legati alla soluzione dell'equazione di Schrödinger per il momento angolare L ? Iniziamo considerando una particella libera. A partire dalla proprietà asintotica

$$j_l(kr) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{1}{kr} \sin \left(kr - \frac{\pi}{2} l \right)$$

otteniamo, utilizzando anche l'equazione (4.52),

$$(4.54) \quad \begin{aligned} e^{ik_0z} &\xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2ik_0} \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) \left(\frac{e^{i(k_0r - l\pi/2)}}{r} - \frac{e^{-i(k_0r - l\pi/2)}}{r} \right) P_l^0(\cos \theta) = \\ &= \frac{1}{2ik_0} \sum_{l=0}^{\infty} e^{il\pi/2} (2l+1) e^{-il\pi/2} \left(\frac{e^{ik_0r}}{r} - \frac{e^{-i(k_0r - l\pi)}}{r} \right) P_l^0(\cos \theta) = \\ &= \frac{1}{2ik_0} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \left(\frac{e^{ik_0r}}{r} - \frac{e^{-i(k_0r - l\pi)}}{r} \right) P_l^0(\cos \theta) . \end{aligned}$$

Perciò per ogni momento angolare abbiamo un'onda entrante e un'onda uscente, propagantesi in direzioni opposte \hat{z} e $-\hat{z}$, dotate della stessa ampiezza (e sfasate di $l\pi$). Le correnti di probabilità associate alle due onde sono uguali e opposte.⁶ Questa uguaglianza era prevedibile: in questo stato stazionario non dovrebbe esserci alcun flusso netto di probabilità diretto verso l'origine o proveniente da essa. Questo bilancio deve avvenire per ciascun l , poiché il momento angolare è conservato e la diffusione in ciascun canale l è indipendente dalla diffusione negli altri canali.

Cosa accade adesso se imponiamo la presenza di un potenziale nell'origine? Per $r \rightarrow \infty$ la funzione d'onda radiale R_l si deve ridurre alla funzione d'onda per una particella libera, sebbene ci possa essere uno sfasamento $\delta_l(k_0)$ dovuto al potenziale:

$$(4.55) \quad R_l(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} A_l \sin \left[k_0 r - l \frac{\pi}{2} + \delta_l(k_0) \right]$$

dove A_l è una qualche costante mentre δ_l è lo sfasamento – dovuto al potenziale – sulla funzione d'onda asintotica rispetto alla funzione d'onda della particella libera (cioè in assenza di potenziale). In altre parole, se non c'è alcun potenziale ($V = 0$) la soluzione dell'equazione di Schrödinger sarebbe una funzione d'onda di particella libera; se c'è un potenziale a corto raggio la soluzione asintotica ($r \rightarrow \infty$, laddove $V \rightarrow 0$) è ancora una funzione d'onda di particella libera, che però differisce dalla precedente per uno sfasamento. Come vedremo fra un attimo, l'effetto del potenziale a grandi distanze dopo lo scattering è quello di introdurre un fattore di fase $e^{2i\delta_l}$ nella funzione d'onda uscente; questo fattore non cambia la corrente di probabilità associata all'onda scatterata e il bilancio fra corrente totale in entrata e corrente totale in uscita è preservato; ma questo non significa che lo scattering non sia avvenuto... Quindi

$$(4.56) \quad \psi_{\vec{k}_0}(\vec{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{\infty} A_l \left(\frac{e^{i(k_0 r - l\pi/2 + \delta_l)}}{r} - \frac{e^{-i(k_0 r - l\pi/2 + \delta_l)}}{r} \right) P_l^0(\cos \theta) .$$

Per trovare A_l osserviamo che V produce un'onda uscente, e quindi rispetto al caso $V = 0$ può modificare soltanto l'onda uscente; allora l'onda entrante deve essere la stessa sia per $\psi_{\vec{k}_0}$ sia per l'onda piana $e^{ik_0 z}$. Confrontando i coefficienti di $\frac{e^{-ik_0 r}}{r}$ nelle equazioni (4.54) e (4.56) si ha

$$(4.57) \quad A_l = \frac{2l+1}{2ik_0} e^{i(l\pi/2 + \delta_l)} .$$

Sostituendo questo risultato nella (4.56) e usando la (4.54) otteniamo

$$(4.58) \quad \begin{aligned} \psi_{\vec{k}_0}(\vec{r}) &\xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2ik_0 r} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \left[e^{ik_0 r} e^{2i\delta_l} - e^{-i(k_0 r - l\pi)} \right] P_l^0(\cos \theta) = \\ &= e^{ik_0 z} + \left[\sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \left(\frac{e^{2i\delta_l} - 1}{2ik_0} \right) P_l^0(\cos \theta) \right] \frac{e^{ik_0 r}}{r} . \end{aligned}$$

Confrontando con lo sviluppo (4.51) abbiamo finalmente

$$(4.59) \quad a_l(k_0) = \frac{e^{2i\delta_l} - 1}{2ik_0} .$$

Dunque, per calcolare le ampiezza delle onde parziali a_l è necessario calcolare gli sfasamenti δ_l nella funzione d'onda asintotica.

⁶Ancora una volta, possiamo parlare separatamente della densità di corrente in entrata e in uscita per un dato l ? Sì, proprio come nel caso unidimensionale. Se calcoliamo la densità di corrente totale \vec{j} (che avrà soltanto la parte radiale per $r \rightarrow \infty$) e integriamo su tutto lo spazio angolare, l'ortogonalità dei polinomi di Legendre P_l eliminerà completamente i termini di interferenza fra l diversi: non ci sarà interferenza fra l'onda entrante e l'onda uscente.

Esistono dei *modelli* per valutare teoricamente gli sfasamenti δ_l . Noi non ci soffermeremo sull'argomento. Riportiamo soltanto un esempio: nel caso di *potenziale da sfera rigida*

$$V(r) = \begin{cases} \infty & r < r_0 \\ 0 & r > r_0 \end{cases}$$

si dimostra che gli sfasamenti prodotti asintoticamente nell'onda scattersa sono

$$\delta_l = \arctan \left[\frac{j_l(k_0 r)}{n_l(k_0 r)} \right]$$

con j_l e n_l funzioni sferiche di Bessel e di Neumann di ordine l . Come caso particolare, per $l = 0$

$$\delta_0 = \arctan \left[\frac{j_0(k_0 r)}{n_0(k_0 r)} \right] = -k_0 r_0 .$$

È facile capire il risultato: la sfera rigida ha spinto via la particella forzando la sua funzione d'onda a cominciare le oscillazioni sinusoidali a $r = r_0$ anziché a $r = 0$. In generale, i potenziali repulsivi producono sfasamenti negativi (perché rallentano la particella e riducono la fase), mentre i potenziali attrattivi producono sfasamenti positivi (per la ragione opposta). Questo discorso vale, naturalmente, solo se δ_l è piccolo, poiché esso è definito con periodicità π .

Questo lavoro è stato realizzato mediante l'utilizzo di software liberi quali *Mozilla Firefox* (per le ricerche in Internet), *OpenWord* (per le immagini) e *pdfLATEX* (per la videocomposizione tipografica del testo).

Il presente materiale non ha pretese di completezza: spero possa essere chiaro e utile o almeno interessante e godibile per i lettori.

Dedicato a Barbara, con tanto affetto.

Marco Gabbrielli