# Compito di Meccanica Quantistica

8 Settembre 2005

Ai fini della valutazione saranno considerati i due migliori esercizi svolti tra i seguenti tre:

## Esercizio 1

Considerate un sistema fisico con uno spazio degli stati tridimensionale. In una base ortonormale l'operatore hamiltoniano (in unità adimensionali) è rappresentato dalla matrice

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \tag{1}$$

- 1) Quali sono i possibili risultati quando si misura l'energia del sistema?

Supponiamo di avere un'altra variabile dinamica $A$ che nella stessa base è rappresentata dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & i \\ 0 & -i & 2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Si chiede ancora:

- 2) Quali sono i possibili risultati quando si misura $A$?
- 3) Supponendo che il sistema si trovi nell'autostato di $H$ corrispondente all'autovalore $E = 1$ quali sono le probabilità di trovare i tre possibili autovalori di $A$?

## Esercizio 2

Un oscillatore armonico di massa $m$ e pulsazione $\omega$ si trova nello stato

$$|\psi\rangle = a|1\rangle + b|2\rangle \tag{3}$$

dove $|n\rangle$ sono gli autostati dell'energia dell'oscillatore.

- 1) Determinare i valori di aspettazione degli operatori di posizione ed impulso $X$ e $P$ in funzione dei parametri $a$ e $b$.

- 2) I parametri complessi $a$ e $b$ dipendono in generale da 4 parametri reali. Dire perché lo stato $|\psi\rangle$ dipende solo da due parametri reali e che quindi si possono parametrizzare $a$ e $b$ nella forma

$$a = \cos\phi, \quad b = e^{i\theta}\sin\phi \tag{4}$$

e calcolare i parametri $\theta$ e $\phi$ in funzione dei valori di aspettazione di $X$ e $P$ nello stato $|\psi\rangle$,

$$\bar{x} = \langle\psi|X|\psi\rangle, \quad \bar{p} = \langle\psi|P|\psi\rangle \tag{5}$$

- 3) Calcolare il valore di aspettazione dell'hamiltoniana sullo stato $|\psi\rangle$ e mostrare che se si assume

$$\bar{x} = \alpha\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}, \quad \bar{p} = \beta\sqrt{\hbar m\omega} \tag{6}$$

si deve avere

$$\alpha^2 + \beta^2 \leq 1 \tag{7}$$

### Esercizio 3

Una particella senza spin ha una funzione d'onda data da

$$\psi(\vec{x}) = K(x + y + 2z)e^{-\alpha r} \tag{8}$$

con $K$ ed $\alpha$ due costanti reali. Si chiede:

- 1) Il momento angolare totale della particella ed il valore di aspettazione di $L_z$.
- 2) Quale è il valor medio di $L_z$ sullo stato $\psi(\vec{x})$? Se si misura $L_z$ quale è la probabilità di trovare il risultato $L_z = \hbar$?
- 3) Quale è la probabilità di trovare la particella agli angoli $\theta$ e $\phi$ e nell'angolo solido $d\Omega$?

Sono utili le seguenti espressioni per le armoniche sferiche:

$$Y_{00} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}, \quad Y_{1\pm1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{\pm i\phi}, \quad Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta \tag{9}$$