1^0 compitino di Istituzioni di Fisica Teorica

1^0 semestre a.a. 1994-95,

Mercoledí, 14, Dicembre, 1994

Problema 1

Dato un oscillatore armonico 2-dimensionale isotropo, di hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}m\omega^2(x_1^2 + x_2^2),$$

determinare gli autovalori dell'energia e la loro degenerazione.

Scrivere l'espressione esplicita degli stati stazionari per lo stato fondamentale e per il primo stato eccitato.

Problema 2

Un sistema fisico ha tre livelli di energia E_1, E_2, E_3 e i corrispondenti autostati dell'energia siano u_1, u_2, u_3, con $(u_i, u_j) = \delta_{ij}$ $(i, j = 1, 2, 3)$.

Al tempo $t = 0$ il sistema sia nello stato

$$\psi = c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3, \qquad |\, c_1 \,|^2 + |\, c_2 \,|^2 + |\, c_3 \,|^2 = 1,$$

con i coefficienti c_1, c_2, c_3 dati.

(1)- Se nella base $\{u_i\}$ è data l'osservabile A

$$\|\, (u_i, Au_j) \,\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

quali sono i possibili risultati di una misura di A al tempo $t = 0$ e quali le corrispondenti probabilità in funzione dei $\{c_i\}$?

(2)- Determinare i proiettori di A.

(3)- Determinare come in (1) i risultati di una misura di A e le probabilità al tempo t generico.

Problema 3

Un elettrone si trova in un potenziale 1-dimensionale $V(x)$:

$$V(x) = 0, \quad \text{per} \;\; |x| < a,$$

$$V(x) = V_0, \quad \text{per} \;\; x < -a \text{ e per } a < x.$$

Determinare il numero di stati legati per $V_0 = 30\ eV$ e $a = 1\mathring{A}$ e scrivere la forma delle corrispondenti funzioni d'onda.

* * * * *

$$\frac{2 m V_0 a^2}{\hbar^2} = 8{,}76 = \sqrt{(2{,}96)^2}$$

Probleme ~~#~~ 2

Autovalori di A : $\underline{0, 1, 2}$;

autovettori di A :

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix};\quad v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix};\quad v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

con $(v_i, v_j) = \delta_{ij}$ $(i, j = 1, 2, 3)$

e $A v_i = \lambda_i v_i$ $(\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2)$

Proiettori di A:

$$\begin{cases} P_1 = v_1 v_1^+ = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 0 & 0\\-1 & 0 & 1\end{pmatrix} \\ P_2 = v_2 v_2^+ = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} \\ P_3 = v_3 v_3^+ = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\\1 & 0 & 1\end{pmatrix} \end{cases}$$

ed è $A = \sum_i \lambda_i P_i$;

Sviluppo di ψ sulla base $\{v_i\}$:

$$\psi = c_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix} =$$

$$= b_1 \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + b_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + b_3\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$b_1 = \frac{c_1 - c_3}{\sqrt{2}}\ ;\quad b_2 = c_2\ ;\quad b_3 = \frac{c_1 + c_3}{\sqrt{2}}$$

quindi le probabilità di trovare il rivelatore di sono $|b_i|^2$ con

$$|b_1|^2 = \frac{|c_1 - c_3|^2}{2}; \quad |b_2|^2 = |c_2|^2; \quad |b_3|^2 = \frac{|c_1 + c_3|^2}{2};$$

Per la domanda (3) si ha semplicemente che

$$\psi(t) = \sum_i c_i(t) u_i \quad \text{con} \quad c_i(t) = c_i e^{-\frac{i}{\hbar}E_i t}$$

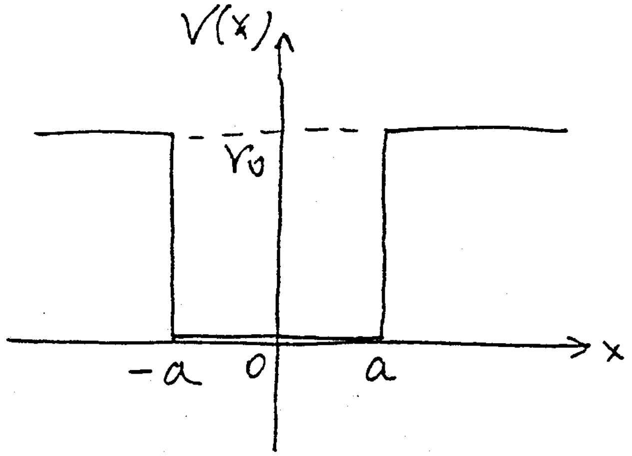
e quindi

$$\begin{cases} |b_1(t)|^2 = \frac{1}{2}\left| c_1 e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t} - c_3 e^{-\frac{i}{\hbar}E_3 t}\right|^2 = \\ \quad = \frac{1}{2}\left[|c_1|^2 + |c_3|^2 - 2\,\mathrm{Re}\, \bar{c}_1 c_3 e^{-\frac{i}{\hbar}(E_1 - E_3)t}\right]; \\ |b_2(t)|^2 = |c_2|^2 \\ |b_3(t)|^2 = \frac{1}{2}\left[|c_1|^2 + |c_3|^2 + 2\,\mathrm{Re}\, \bar{c}_1 c_3 e^{-\frac{i}{\hbar}(E_1 - E_3)t}\right]; \end{cases}$$

— · —

Problema 3

Dato il potenziale 1-dimensionale:



le soluzioni per $0 < E < V_0$ sono:

caso pari:
$$\begin{cases} u(x) = B\cos(\alpha x) & \text{per } |x| < a \\ u(x) = B\cos(\alpha a)\, e^{\beta(a-x)} & \text{per } a < x \\ u(x) = B\cos(\alpha a)\, e^{\beta(a+x)} & \text{per } x < -a \end{cases}$$

con $\alpha \tan(\alpha a) = \beta$; $\alpha = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$; $\beta = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}$;

caso disp.
$$\begin{cases} u(x) = A\sin(\alpha x) & \text{per } |x| < a \\ u(x) = A\sin(\alpha a)\, e^{\beta(a-x)} & \text{per } a < x \\ u(x) = -A\sin(\alpha a)\, e^{\beta(a+x)} & \text{per } x < -a \end{cases}$$

con $\alpha \cot(\alpha a) = -\beta$;

si verifica dai grafici che per

$$\frac{2mV_0}{\hbar^2}a^2 = 9$$

si ha 1 stato legato pari e
1 stato legato dispari.

$$\begin{cases} V_0 = 30\ eV \\ a = 10^{-8}\ cm. \end{cases}$$

$$\frac{2mV_0 a^2}{\hbar^2} = 7{,}87 = (2{,}80)^2$$

$$8{,}76 = (2{,}96)^2$$