Compito di Meccanica Quantistica

10 Gennaio 2005

Esercizio 1

Lo stato di un oscillatore armonico e' dato da

$$|\psi\rangle = A|0\rangle + B|1\rangle + C|2\rangle \tag{1}$$

Inoltre sappiamo che il valore di aspettazione della posizione e' zero e che quello dell'energia e' $(3/4)\hbar\omega$.

- a) Determinare A, B, C assumendoli reali. Quali e quanti sono gli stati indipendenti del sistema del sistema?
- b) Assumere poi A e B reali, con C immaginario puro. Quali e quanti sono adesso gli stati indipendenti del sistema?
- c) Quali sono i valori medi dell'impulso e del suo quadrato sugli stati indipendenti?

Soluzione Esercizio 1

Usando

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^\dagger) \tag{2}$$

e

$$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \quad a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \tag{3}$$

si trova

$$\langle x\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left[(A^*B + AB^*)2\sqrt{2}(B^*C + BC^*)\right] = 0 \tag{4}$$

che. per i coefficienti reali ha due soluzioni:

$$\begin{aligned} &1)\quad B \neq 0, \quad A = -\sqrt{2}c \\ &2)\quad B = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Inoltre dal valor medio dell'energia

$$A^2 + 3B^2 + 5C^2 = \frac{3}{2} \tag{6}$$

e dalla normalizzazione

$$A^2 + B^2 + C^2 = 1 \tag{7}$$

si hanno soluzioni reali solo nel caso 2). E quindi

$$B = 0, \quad A = \pm\sqrt{\frac{7}{8}}, \quad C = \pm\sqrt{\frac{1}{8}} \tag{8}$$

Pertanto, a meno di un fattore di fase complessivo non osservabile, ci sono due possibili funzioni d'onda.

Nel caso di A e B reali e C immaginario puro, la condizione di valor medio nullo della posizione da'

$$AB = 0 \tag{9}$$

da cui $A = 0$ oppure $B = 0$. Si vede subito che il caso $A = 0$ non ha soluzioni. Mentre per $B = 0$ si trova

$$A = \pm\sqrt{\frac{7}{8}}, \quad C = \pm\frac{i}{\sqrt{8}} \tag{10}$$

Si hanno ancora due soluzioni indipendenti (a meno del segno)

$$|\psi_1\rangle = \sqrt{\frac{7}{8}}|0\rangle + \frac{i}{\sqrt{8}}|2\rangle, \quad |\psi_2\rangle = \sqrt{\frac{7}{8}}|0\rangle - \frac{i}{\sqrt{8}}|2\rangle \tag{11}$$

Si vede subito che, usando

$$P = -i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(a - a^\dagger) \tag{12}$$

$< P >= 0$, mentre

$$\langle\psi|P^2|\psi\rangle = -\left(\frac{\hbar m\omega}{2}\right)\left[A^*C\langle 0|a^2|2\rangle + AC^*\langle 2|a^{\dagger\,2}|2\rangle - 1 - 4|C|^2\right] \tag{13}$$

e quindi nel secondo caso

$$\langle\psi|P^2|\psi\rangle = \frac{3}{4}\left(\hbar m\omega\right) \tag{14}$$

Nel caso in cui i coefficienti sono reali, si ha ancora $< P >= 0$ e invece

$$\langle\psi|P^2|\psi\rangle = \left(\frac{\hbar m\omega}{2}\right)\left(\frac{3}{2} \mp \frac{\sqrt{14}}{4}\right) \tag{15}$$

Esercizio 2

Una particella, vincolata a muoversi su un segmento compreso tra $x = 0$ e $x = L$, all'istante $t = 0$ si trova in uno stato in cui una misura di energia puo' dar luogo, con uguale probabilità a due soli valori, il valore più basso E_1 e quello immediatamente successivo $E_2 = 4E_1$.

- a) Scrivere la funzione d'onda piú generale (dipendente da un parametro arbitrario).
- b) Determinare il parametro sapendo che a $t = 0$ il valo medio dell'impulso è pari a $4\hbar/(3L)$.
- c) Determinare a quale istante di tempo il valor medio di P assume il valore zero.

Soluzione Esercizio 2

Vedi Angelini pagina 48

Esercizio 3

Una particella di massa infinita e spin 1/2 si trova, all'istante $t = 0$ in uno stato in cui la probabilità di osservare la componente dello spin lungo la direzione positiva è 1/4, mentre quella relativa alla direzione negativa è 3/4. Inoltre la particella è sottoposta all'azione di un campo magnetico diretto lungo l'asse x.

- a) Scrivere l'espressione dello stato iniziale (dipendente da un parametro arbitrario).
- b) Determinare autovalori ed autovettori dell'hamiltoniana $H = -g\vec{S} \cdot \vec{B}$.
- c) Determinare l'evoluzione temporale dello stato.
- d) Determinare i valori del parametro da cui dipende lo stato, ed il tempo T al quale lo stato diventa l' autostato di σ_z con autovalore pari a $+1$.

Soluzione Esercizio 3

Vedi Angelini pagina 51