Compito di Meccanica Quantistica

Firenze, 23 giugno 2005

Esercizio 1 - Una particella di massa m ha come hamiltoniana ($k > 0$)

$$H \;=\; \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) \;+\; \frac{1}{2}k\left(2x^2 + 5y^2 + z^2 + 4xy\right)$$

1a) - Determinare una trasformazione delle coordinate (lineare e omogenea), tale che H sia scritta come somma di tre hamiltoniane unidimensionali commutanti e dire quale tipo di moto descrive la dinamica.

1b) - Scrivere quali sono gli autovalori e le autofunzioni di H e discutere l'eventuale degenerazione dei livelli energetici.

1c) - Calcolare il valor medio dell'operatore $(x + 2y)^2$ sugli autostati di H.

Esercizio 2 - Un atomo di idrogeno si trova in uno stato con $n \geq 3$, con momento angolare orbitale $\ell = 2$, con $j = 5/2$ e $j_z = +1/2$.

2a) - Dire quali operatori tra $L^2,\ S^2,\ J^2,\ L_z,\ S_z,\ J_z$ commutano con l'operatore $\vec{L} \cdot \vec{S}$.

2b) - Calcolare il valor medio dell'operatore $\vec{L} \cdot \vec{S}$ su tale stato.

2c) - Calcolare il valor medio degli operatori L_z e S_z su tale stato.

2d) - Scrivere esplicitamente tale stato come spinore esplicitando la dipendenza delle componenti dalle armoniche sferiche, ovvero dalle coordinate angolari.

Esercizio 3 - Una particella di massa m è libera di muoversi nella regione del piano $0 \leq x \leq \pi;\quad 0 \leq y \leq \pi,$ all'interno della quale è confinata.

3a) - Scrivere le autofunzioni e gli autovalori dell'energia, discutendo la degenerazione dei livelli (almeno di quelli inferiori).

3b) - Dire se le autofunzioni trovate possono essere autofunzioni dell'impulso e giustificare la risposta.

3c) - Sia poi data, a un istante fissato, la funzione d'onda

$$\psi(x, y) \;=\; A \quad (\pi - 2y) \quad \sin x$$

dove A è una costante di normalizzazione. Determinare la distribuzione di probabilità per i livelli energetici calcolando esplicitamente la prima probabilità non nulla a partire dai livelli inferiori.

Soluzioni

Esercizio 2

2a) - L'operatore $\vec{L}\cdot\vec{S} \;=\; \dfrac{J^2 - L^2 - S^2}{2}$, commuta con $J^2,\ L^2,\ S^2,\ J_z$, non con $L_z,\ S_z$.

2b) - Il valor medio è $\langle \vec{L}\cdot\vec{S}\rangle \;=\; \hbar^2\, \dfrac{\frac{5}{2}(\frac{5}{2}+1) - 2(2+1) - \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)}{2} \;=\; \hbar^2$.

2c) - Passando dalla base $|\ell, s, j, m_j\rangle$ alla base $|\ell, s, m, s_z\rangle$ si ha:

$$| \; 2,\ 1/2,\ 5/2,\ +1/2 \;\rangle \;=\; a \; | \; 2,\ 1/2,\ +1,\ -1/2 \;\rangle \;+\; b \; | \; 2,\ 1/2,\ 0,\ +1/2 \;\rangle$$

e quindi

$$\frac{\langle L_z\rangle}{\hbar} \;=\; |a|^2 \;\cdot\; (+1) \;+\; |b|^2 \;\cdot\; 0 \;=\; |a|^2$$

e analogamente

$$\frac{\langle S_z\rangle}{\hbar} \;=\; |a|^2 \;\cdot\; (-1/2) \;+\; |b|^2 \;\cdot\; (+1/2) \;=\; \frac{|b|^2 \;-\; |a|^2}{2}$$

Usando le tavole dei coefficienti di Clebsch-Gordan si ha $a = \sqrt{2/5}$, $b = \sqrt{3/5}$ e quindi $\langle L_z\rangle = 2\hbar/5$ e $\langle S_z\rangle = \hbar/10$.

2d) - Lo spinore che descrive lo stato è:

$$\Psi(\theta,\varphi) \;=\; \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}\; Y_2^0(\theta,\varphi) \\ \sqrt{3}\; Y_2^{+1}(\theta,\varphi) \end{pmatrix}$$