3° compitino di Istituzioni di Fisica Teorica

6/6/1995

Problema 1

Un atomo di idrogeno nel primo stato eccitato ($n = 2$) viene sottoposto al potenziale stazionario

$$H_1 = A\,xy\,.$$

Trascurando lo spin, il livello $n = 2$ è 4 volte degenere. Si dica se e in che modo la perturbazione H_1 al primo ordine è in grado di separare il livello e si calcolino i relativi spostamenti dell'energia.

Problema 2

Una particella di spin $\frac{3}{2}$ a riposo decade in due particelle, una di spin 1 e una di spin $\frac{1}{2}$. Considerando che nel decadimento il momento angolare totale si conserva, si dica quali sono i possibili valori del momento angolare orbitale (relativo) delle due particelle finali.

Problema 3

Un atomo di idrogeno si trova nello stato fondamentale per $t < 0$ e viene sottoposto per $t > 0$ a un campo elettrico diretto lungo l'asse z e variabile col tempo secondo la legge

$$E(t) = E_0\,e^{-t/\tau}, \qquad\qquad t > 0.$$

a) Trascurando lo spin dell'elettrone, si dica verso quali stati del livello $n = 2$ si possono avere transizioni al primo ordine perturbativo.

b) Si calcoli l'ampiezza di probabilità di transizione verso uno di questi stati per $t \to +\infty$

3° compitino - 6/6/95

(1)

$$H_1 = A\,xy = A\,r^2 \sin^2\vartheta \sin\varphi\cos\varphi = \frac{A}{4i}\, r^2 \sin^2\vartheta \left(e^{2i\varphi} - e^{-2i\varphi}\right)$$

$$= -iA\sqrt{\frac{2\pi}{15}}\; r^2 \left(Y_2^{2} - Y_2^{-2}\right)$$

$\langle 2\ell m|\, H_1\, |2\ell' m'\rangle \neq 0$ solo per $\ell = \ell' = 1$, $m' = \pm 1$, $m = \mp 1$

$$M = \langle 2 1 1 |\, H_1\, | 2 1 -1\rangle = -iA\sqrt{\frac{2\pi}{15}} \int_0^\infty R_{21}^2(r)\, r^4\, dr \underbrace{\int Y_1^{1*}\, Y_2^{2}\, Y_1^{-1}\, d\Omega}_{-\sqrt{\frac{3}{10\pi}}}$$

$$= iA\sqrt{\frac{2\pi}{15}}\sqrt{\frac{3}{10\pi}}\; \frac{1}{(2a_0)^3}\,\frac{1}{3} \int_0^\infty \left(\frac{r}{a_0}\right)^2 e^{-\frac{r}{a_0}}\, r^4\, dr$$

$$= iA\,\frac{1}{5!}\, a_0^2 \int_0^\infty x^6 e^{-x}\, dx = 6\,iA\,a_0^2$$

$$M^* = \langle 2 1 -1 |\, H_1\, | 2 1 1\rangle = -M$$

$$H_1^{(n=2)} = \begin{array}{c|cccc} & 00 & 11 & 10 & 1-1 \\ \hline 00 & & & & \\ 11 & & & & \\ 10 & & & & \\ 1-1 & & & & \end{array} \!\!\!\! \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M^* & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \Delta E = \text{autoval. di } H_1^{(n=2)}$$

$$\det\left(H_1^{(1)} - \lambda \mathbb{1}\right) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & M \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & +M^* & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2\left(\lambda^2 - |M|^2\right) = 0$$

$$\Delta E_2 = 0 \;(2\text{ volte}),\; = \pm|M| = \pm 6A\,a_0^2$$

$d=4$ ——— → $d=2$

(2)

$$\left(s = \tfrac{3}{2}\right) \to (s = 1) + \left(s = \tfrac{1}{2}\right) + (\ell)$$

$$s_f = (1) + \left(\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}$$

Per $s_f = \frac{1}{2}$, $\ell = 1, 2$

Per $s_f = \frac{3}{2}$, $\ell = 0, 1, 2, 3$

3) $H_1 = e E_0 e^{-\frac{t}{\tau}} z$

$$a_{fi}^{(1)} = \frac{1}{i\hbar} \int_0^\infty \langle 2\ell m | H_1 | 100 \rangle e^{i\omega_{fi} t} dt$$

$\neq 0$ solo per $\ell = 1$, $m = 0$

$$\langle 210 | z | 100 \rangle = \int_0^\infty R_{21} R_{10} r^3 dr \underbrace{\int Y_1^0 \cos\vartheta \, Y_0^0 \, d\Omega}_{\to \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{1}{a_0^3} \frac{2 a_0^4}{2\sqrt{2}\, 3} \int_0^\infty \rho^4 e^{-\frac{3}{2}\rho} d\rho = \frac{a_0}{3\sqrt{2}} \left(\frac{2}{3}\right)^5 4! = \frac{2^7 \sqrt{2}}{3^5} a_0$$

$$a_{fi}^{(1)} = \frac{1}{i\hbar} e E_0 a_0 \frac{2^7 \sqrt{2}}{3^5} \int_0^\infty e^{(i\omega_{21} - \frac{1}{\tau})t} dt$$

$$\int dt = - \frac{1}{i\omega_{21} - \frac{1}{\tau}} = \frac{\tau}{1 - i\omega_{21}\tau} \quad ; \quad \omega_{21} = \frac{e^2}{2 a_0 \hbar}\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{8} \frac{e^2}{a_0 \hbar}$$