3^0 compitino di Istituzioni di Fisica Teorica

1^0 semestre a.a. 1994-95,
Martedí, 31, Gennaio, 1995

Problema 1

Un sistema quantistico è costituito da due oscillatori armonici 1-dimensionali debolmente interagenti. L'hamiltoniana del sistema è

$$H = \left(\frac{1}{2m} p_1^2 + \frac{1}{2} k x_1^2 \right) + \left(\frac{1}{2m} p_2^2 + \frac{1}{2} k x_2^2 \right) - k' x_1 x_2,$$

dove $k' \ll k$.

(a)- Determinare il livello dello stato fondamentale dell'energia e la corrispondente funzione d'onda al primo ordine perturbativo.

(b)- Risolvere il problema esattamente mediante una trasformazione delle coordinate e dei rispettivi impulsi, determinando i livelli dell'energia esatti e le corrispondenti autofunzioni.

Problema 2

Un oscillatore armonico 1-dimensionale (massa m e costante elastica k) è soggetto alla perturbazione dipendente dal tempo

$$V(t) = ax \cos(\omega_1 t) \cos(\omega_2 t),$$

che è $\neq 0$ nell'intervallo di tempo (0-T) e dove $\omega_1 \neq \omega_2$ (per es. $\omega_1 > \omega_2 > 0$).

(a)- Determinare per quali valori di ω_1 e ω_2 si hanno delle risonanze (indicare le zone di risonanza nel piano $(\omega_1,\ \omega_2)$).

(b)- Calcolare al primo ordine perturbativo le probabilità di transizione dallo stato fondamentale ai livelli eccitati, nell'intorno di tali risonanze, ad un tempo $t > T$.

Problema 3

Une particella libera di massa m e spin $s = 1$ ha impulso determinato $\vec{p} \equiv (0, 0, p)$ e lo spin orientato secondo la direzione $\hat{n} \equiv (\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1}{2})$.

Determinare lo stato di spin nella base usuale, nella quale è diagonale s_z, e scrivere la funzione d'onda.

[si può anche utilizzare la formula

$$(\hat{n} \cdot \vec{s})^3 = (\hat{n} \cdot \vec{s}),$$

valida per l'operatore $\vec{s}$ con $s = 1$ e dove $\hat{n}^2 = 1$]

* * * * *

1 a) $V = -k' x_1 x_2$; $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$; $\omega' = \sqrt{\frac{k'}{m}}$

unico elemento $\neq 0$: (stati stazion. $|n_1, n_2\rangle$)

$$\langle 1 1 | V | 0 0 \rangle = -k' \frac{1}{2\alpha^2}$$

$$\left(\langle n_1 n_2 | V | 0 0 \rangle = -\frac{k'}{2\alpha^2} \delta_{n_1,1} \delta_{n_2,1} \right)$$

$$E^0_{n_1 n_2} = \hbar\omega (n_1 + n_2 + 1)$$

$$E^0_{00} - E^0_{11} = -2\hbar\omega \qquad ; \quad \alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$$

$$\psi(x_1 x_2) = u_{00}(x_1 x_2) + u_{11}(x_1 x_2) \frac{\langle 1 1 | V | 0 0 \rangle}{E^0_{00} - E^0_{11}} =$$

$$= u_0(x_1) u_0(x_2) - u_1(x_1) u_1(x_2) \frac{\langle 1 1 | V | 0 0 \rangle}{2\hbar\omega} =$$

$$= \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 (x_1^2 + x_2^2)} \cdot \left[1 + \frac{k'}{2\hbar\omega} x_1 x_2 \right] + O(k'^2) ;$$

con $\epsilon_1 = \langle 0 0 | V | 0 0 \rangle = 0$

---

b) posto $x_1 = \frac{y_1 + y_2}{\sqrt{2}}$; $x_2 = \frac{y_2 - y_1}{\sqrt{2}}$ si ha

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right] + \frac{m}{2} \left[\omega_1^2 y_1^2 + \omega_2^2 y_2^2 \right]$$

con $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 + \omega'^2}$; $\omega_2 = \sqrt{\omega^2 - \omega'^2}$;

$$u_{n_1 n_2}(x_1 x_2) = N_{n_1} N_{n_2} e^{-\frac{1}{2}\alpha_1^2 y_1^2 - \frac{1}{2}\alpha_2^2 y_2^2} \cdot H_{n_1}(\alpha_1 y_1) H_{n_2}(\alpha_2 y_2)$$

con $\alpha_i = \sqrt{\frac{m\omega_i}{\hbar}}$ $(i = 1, 2)$

$$N_{n_i} = \sqrt{\frac{\alpha_i}{\sqrt{\pi}\, 2^{n_i} n_i!}} \quad (\text{"})$$

$$\begin{cases} y_1 = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}} \\ y_2 = \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Si verifica che $u_{00}(x_1 x_2)$ al 1° ordine in k' coincide col numeratore di (a); il termine $N_{n_1} N_{n_2} \propto \sqrt{\alpha_1 \alpha_2} = \alpha + O(k'^2)$, il termine del 1° ordine proviene solo dall'esponenziale (per l'[illegible] si ha correzioni di [illegible] ordine)

═══ o ═══

2 a) e b)

$$V_{nm}(t) = \frac{a}{2} \langle n|x|m\rangle \left[\cos(\omega' t) + \cos(\omega'' t)\right]$$

$$\omega' = \omega_1 + \omega_2 ; \quad \omega'' = \omega_1 - \omega_2 ;$$

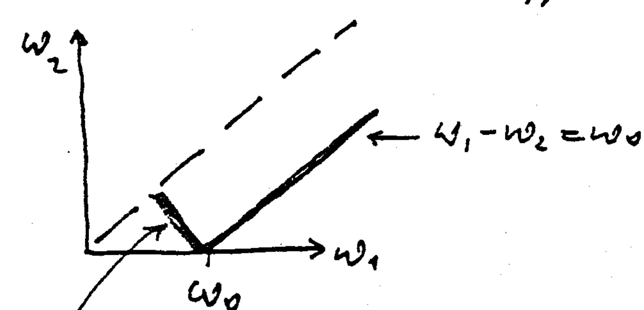
$$\langle n|x|0\rangle = \delta_{n,1} \frac{1}{\alpha\sqrt{2}}$$

$$V_{n0}(t) = \frac{a}{2\alpha\sqrt{2}} \delta_{n,1} \left[\cos(\omega' t) + \cos(\omega'' t)\right]$$

si ha risonanza per

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_0 \quad \text{o} \quad \omega_1 - \omega_2 = \omega_0 \quad (\omega_1 > \omega_2)$$

dove $\omega_0 = \omega_{10} = \frac{1}{\hbar}(E_1 - E_0) = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

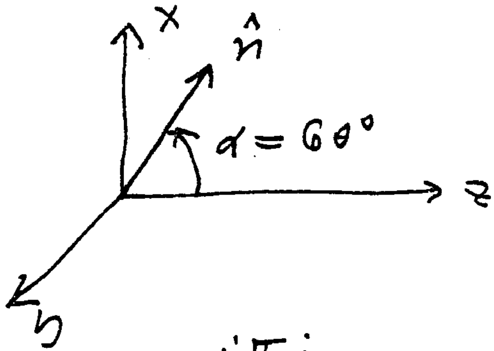


$$\text{Prob.}(0 \to 1) = \frac{a^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\omega' - \omega_0}{2} T\right)}{8 \hbar^2 \alpha^2 (\omega' - \omega_0)^2}$$

per la risonanza $\omega_1 + \omega_2 = \omega_0$ e analoga con $\omega' \to \omega''$ per la risonanza $\omega_1 - \omega_2 = \omega_0$

═══ o ═══

3



$$\hat n \equiv \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1}{2} \right)$$

$$\chi_{\hat n} = e^{-i\frac{\pi}{3}j_y}\chi_{+1} = e^{-i\frac{\pi}{3}j_y}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$e^{-i\alpha(\hat n\cdot\vec j)} = \mathbb{1} + (\cos\alpha - 1)(\hat n\cdot\vec j)^2 - i\,\mathrm{sen}\,\alpha\,(\hat n\cdot\vec j)$$

$$j_y = \frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}0 & -i & 0\\ i & 0 & -i\\ 0 & i & 0\end{pmatrix}; \quad j_y^2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$e^{-i\frac{\pi}{3}j_y} = \mathbb{1} - \frac{1}{2}j_y^2 - i\frac{\sqrt3}{2}j_y = \begin{pmatrix}3/4 & -\frac{\sqrt3}{2\sqrt2} & +1/4\\ \frac{\sqrt3}{2\sqrt2} & 0 & -\frac{\sqrt3}{2\sqrt2}\\ 1/4 & \frac{\sqrt3}{2\sqrt2} & \frac{3}{4}\end{pmatrix}$$

$$\chi_{\hat n} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}3\\ \sqrt6\\ 1\end{pmatrix};$$

si verifica che

$\|\chi_{\hat n}\| = 1$, e che

$$(\hat n\cdot\vec j) = \frac{\sqrt3}{2}j_x + \frac{1}{2}j_z = \frac{\sqrt3}{2}\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & \sqrt{3/2} & 0\\ \sqrt{3/2} & 0 & \sqrt{3/2}\\ 0 & \sqrt{3/2} & -1\end{pmatrix}$$ è tale che

$$(\hat n\cdot\vec j)\chi_{\hat n} = +\chi_{\hat n}.$$