2° compitino di Istituzioni di Fisica Teorica

23/5/1995

Problema 1

Una particella di massa m è legata in una buca di potenziale sferica di raggio a e profondità V_0.

a) Tenendo fissi m e a, si dica se c'è sempre almeno uno stato legato, qualunque sia $V_0 > 0$, ovvero qual è il valore minimo di V_0 perché ci sia uno stato legato.

b) Si calcoli l'energia dello stato fondamentale per i seguenti valori numerici:

$$m = 1.67 \times 10^{-24} \text{ g}; \qquad a = 2.5 \times 10^{-12} \text{ cm}; \qquad V_0 = 3 \text{ MeV}.$$

Problema 2

Siano date le funzioni d'onda angolari

$$u_1(\theta, \phi) = A_1(1 + \cos\theta)$$

$$u_2(\theta, \phi) = A_2 \cos\theta \, \cos\phi$$

Si calcolino le costanti di normalizzazione A_1 e A_2 e si dica quali sono gli stati di momento angolare l e m contenuti in ciascuna delle funzioni date.

Problema 3

Un elettrone si trova in uno stato di spin tale che:
(i) la probabilità che una misura di S_z dia il risultato $+\frac{1}{2}$ è uguale a $\frac{2}{3}$;
(ii) i valori di aspettazione di S_x e S_y sono uguali fra loro e positivi.

a) Si trovi lo spinore χ che descrive questo stato di spin e si calcoli il valor medio comune di S_x e S_y.

b) Si determini il versore di polarizzazione $\boldsymbol{u}$ (cioè le sue componenti cartesiane o gli angoli θ e ϕ), tale che $\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{u} \, \chi = \chi$.

1° compitino 23/5/95

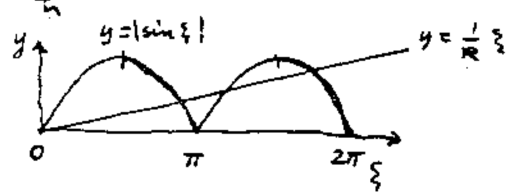
(1)

$\ell = 0$:

$$\begin{cases} \xi \cot g\, \xi = -\eta \\ \xi^2 + \eta^2 = R^2 = \dfrac{2mV_0a^2}{\hbar^2} \end{cases} \qquad \xi = \frac{a}{\hbar}\sqrt{2m(E+V_0)}\,, \quad E<0$$

$$\eta = \frac{a}{\hbar}\sqrt{-2mE}$$

$$|\sin\xi| = \frac{1}{R}\xi\,, \quad \xi \in 2^\circ + 4^\circ \text{ quadr.}$$



a) $\exists$ stati legati con $\ell = 0$ per $R > \frac{\pi}{2}$:

$$R^2 = \frac{2mV_0a^2}{\hbar^2} > \frac{\pi^2}{4}\,, \quad \underline{V_0 > \frac{\pi^2\hbar^2}{8ma^2}}$$

b) $$R^2 = \frac{2\cdot 1.67\cdot 10^{-24}\cdot 3\cdot 1.6\cdot 10^{-6}\cdot (2.5)^2\cdot 10^{-24}}{(1.055)^2\cdot 10^{-54}} = 90.21\,; \quad \underline{R = 9.498}$$

$$f(\xi) = \sin\xi - \frac{1}{R}\xi = 0 \quad \longrightarrow \quad \xi_0 = 2.838$$

$$E_0 = -V_0\left(1 - \frac{\xi_0^2}{R^2}\right) = -3\left[1 - \left(\frac{2.838}{9.498}\right)^2\right] \text{MeV} = \underline{-2.732 \text{ MeV}}$$

$$= -4.377\cdot 10^{-6} \text{ erg}$$

(2)

$$u_1 = A_1(1+\cos\vartheta) = A_1\sqrt{4\pi}\left(Y_0^0 + \frac{1}{\sqrt{3}}Y_1^0\right)$$

$$\|u_1\|^2 = |A_1|^2 4\pi\left(1+\frac{1}{3}\right) = |A_1|^2\frac{16\pi}{3} = 1\,, \quad A_1 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{\pi}}$$

$$u_2 = A_2\cos\vartheta\cos\varphi\,; \quad 1 = |A_2|^2\int_{-1}^{1} w^2\,dw\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi = |A_2|^2\frac{2}{3}\pi$$

$$A_2 = \sqrt{\frac{3}{2\pi}}$$

$$u_2 = \sum_{\ell,m} a_{\ell m}Y_\ell^m\,, \quad a_{\ell m} = \int Y_\ell^{m*}(\vartheta,\varphi)\,u_2(\vartheta,\varphi)\,d\Omega$$

$$u_2(\pi-\vartheta, \varphi+\pi) = u_2(\vartheta,\varphi) = \text{pari} \Rightarrow \ell = \text{pari}$$

$$a_{\ell m} = A_2 N_{\ell m}\int_{-1}^{1} P_\ell^m(w)\,w\,dw\int_0^{2\pi} e^{-im\varphi}\underbrace{\cos\varphi}_{\frac{1}{2}(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi})}\,d\varphi$$

$\hookrightarrow m = \pm 1$

$\underline{m = \pm 1}$, $\underline{\ell = \text{pari} \neq 0}$

$$\chi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

(i) $w_+ = |a|^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow |b|^2 = \frac{1}{3}$; $\chi = e^{i\gamma} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} e^{i\varphi} \end{pmatrix}$

(ii) $$\chi^{\dagger} \sigma_x \chi = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & e^{-i\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ e^{i\varphi} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \sqrt{2} \left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} \right)$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3} \cos\varphi$$

$$\chi^{\dagger} \sigma_y \chi = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & e^{-i\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ e^{i\varphi} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{1}{i} \left(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} \right)$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3} \sin\varphi$$

$$\cos\varphi = \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \left(\varphi = \frac{\pi}{4} \right)$$

$$b = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\cos\varphi + i \sin\varphi \right) = \frac{1}{\sqrt{6}} (1+i) = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

(*) $$\chi = e^{i\gamma} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \frac{1+i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

(*) $$\langle S_x \rangle = \langle S_y \rangle = \frac{1}{2} \chi^{\dagger} \sigma_x \chi = \frac{1}{3}$$

(1) $u_x = \langle \sigma_x \rangle = \frac{2}{3} = u_y$; $u_z = \chi^{\dagger} \sigma_z \chi = \frac{1}{3} (2-1) = \frac{1}{3}$

(2) $\chi = e^{i\gamma} \begin{pmatrix} \cos\frac{\vartheta}{2} \\ \sin\frac{\vartheta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix}$; $\frac{b}{a} = \operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} e^{i\varphi} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}}$

$$\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \vartheta = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}} = 1{,}231 \equiv 70^\circ 31' 44'' ; \quad \varphi = \frac{\pi}{4} \equiv 45^\circ$$