Compito di Meccanica Quantistica

26 Giugno 2006

Esercizio 1) - Una particella di massa m è vincolata nella regione $0 < x < a$ dove è libera di muoversi

- **a)** - Scrivere l'espressione per le autofunzioni e gli autovalori dell'energia.

Supponiamo adesso che al tempo $t = 0$ lo stato della particella sia descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(x, t = 0) = \frac{u_1(x) \ + \ e^{i\alpha} \ u_2(x)}{\sqrt{2}}$$

essendo $\alpha \in \Re$ e u_1, u_2 le autofunzioni dell'energia relative allo stato fondamentale e al primo stato eccitato.

- **b)** - Calcolare la probabilità di trovare la particella nell'intervallo $x \in [0, a/2]$ in funzione di α e dire per quale valore di α tale probabilità risulta massima.

- **c)** - Per $\alpha = \pi/2$, calcolare il valor medio dell'impulso all'istante $t = 0$ e a un istante t generico.

Esercizio 2) - La dinamica di una particella di massa m è derivabile dall'Hamiltoniana

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} \ + \ \frac{1}{2}k\left(x^2 + 4y^2 + 4xy\right)$$

- **a)** - determinare una trasformazione canonica delle coordinate che renda H somma di tre Hamiltoniane mutuamente commutanti e dire quale è la dinamica della particella nelle nuove coordinate. Scrivere esplicitamente autovalori e autofunzioni dell'energia.

Adesso, posto $\xi = x + 2y$, si aggiungano successivamente le perturbazioni $V_1 = a_1\xi$ e $V_2 = a_2\xi^2$ con $0 < a_1, a_2 \ll k$.

- **b)** - Trovare come vengono modificate le energie dei livelli al primo ordine perturbativo in a_1 e in a_2 e giustificare i risultati trovati.

Sempre nelle condizioni del punto a) e con $\xi = x + 2y$, si aggiungano invece successivamente le perturbazioni $V_3 = a_3\xi^3$ e $V_4 = a_4\xi^4$ con $0 < a_3, a_4 \ll k$.

- **b)** - Trovare come vengono modificate le energie dei livelli al primo ordine perturbativo in a_3 e in a_4.

Esercizio 3) - Un elettrone è descritto dalla funzione d'onda spinoriale

$$\Psi(x,y,z) = A\ e^{-ar}\ y\ \chi_+$$

essendo A una costante di normalizzazione e χ_+ l'autospinore di σ_z con autovalore $+1$.

- **a)** - Si dica quali valori dei numeri quantici J e M si possono trovare facendo una misura di J^2 e J_z e calcolare le probabilità relative.

Si calcoli il valore di aspettazione

$$\langle \Psi | \vec{L} \cdot \vec{\sigma} | \Psi \rangle$$

- **b)** - nella base $|\ell, s, J, M\rangle$ nella quale sono diagonalizzati L^2, S^2, J^2, J_z
- **c)** - nella base $|\ell, s, m, s_z\rangle$ nella quale sono diagonalizzati L^2, S^2, L_z, S_z