Compito di Meccanica Quantistica

5 Gennaio 2006

Esercizio 1)

Sia dato un versore nello spazio $\hat{n} = (\cos\varphi \ \sin\theta, \sin\varphi \ \sin\theta, \cos\theta)$ con l'usuale definizione degli angoli azimutale e polare. Date inoltre le matrici di Pauli ed essendo $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$:

- **a)** - determinare gli autospinori $\chi_+^{\hat{n}}$ e $\chi_-^{\hat{n}}$ dell'operatore $\vec{\sigma} \cdot \hat{n}$

- **b)** - se un elettrone si trova nell'autospinore $\chi_+^{\hat{n}}$, determinare la probabilità che i risultati di una misura di spin lungo gli assi x, y, z diano risultato $+\hbar/2$

- **c)** - calcolare i valori medi di S_x, S_y, S_z su tale stato

- **d)** - dire come cambiano i valori medi di S_x, S_z per una rotazione del sistema di riferimento attorno all'asse z.

Esercizio 2)

Un elettrone si trova in uno stato stazionario descritto dalla funzione d'onda spinoriale:

$$\Psi(\vec{x}) = AF(r) \begin{pmatrix} z \\ r \end{pmatrix}$$

- **a)** - Si dica quali sono i possibili risultati di una misura di J^2 e J_z e con quali probabilità (lasciare indicati con delle lettere i coefficienti di Clebsch-Gordan che dovessero necessitare nel calcolo)

- **b)** - Si calcoli il valore di aspettazione dell'operatore $\vec{L} \cdot \vec{\sigma}$ su tale stato.

Esercizio 3)

Un oscillatore armonico unidimensionale di massa m e pulsazione ω si trova, al tempo $t = 0$, nello stato $\psi = \dfrac{u_3 \ + \ i \ u_4}{\sqrt{2}}$, dove u_n sono le autofunzioni dell'energia.

- **a)** - Calcolare il valor medio dell'energia, dell'impulso e della posizione sullo stato al tempo $t = 0$.

- **b)** - Ricalcolare i valori medi precedenti a un tempo generico t.

- **c)** - Calcolare l'indeterminazione sulla posizione in funzione del tempo.

Armoniche Sferiche $Y_l^m(\theta, \varphi)$

$$Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}; \quad Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta; \quad Y_1^{-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta \ e^{-i\varphi};$$

$$Y_l^m = (-1)^m \left(Y_l^{-m}\right)^*$$

Soluzioni

Esercizio 1

a) - Risolvendo l'equazione agli autovalori si trova che a meno di un fattore di fase $\chi_+^{\hat{n}} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2)\ e^{i\varphi} \end{pmatrix}$; $\chi_-^{\hat{n}} = \begin{pmatrix} \sin(\theta/2) \\ -\cos(\theta/2)\ e^{i\varphi} \end{pmatrix}$

b) - Si ha, anche dal precedente risultato, che $\chi_+^x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\chi_+^y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

Si trova quindi che le probabilità cercate sono pari a $(1 + \sin\theta\ \cos\varphi)/2$ lungo x,$(1 + \sin\theta\ \sin\varphi)/2$ lungo y e $\cos^2(\theta/2) = (1 + \cos\theta)/2$ lungo z.

c) - Si trova $\langle S_x \rangle = \frac{\hbar}{2} \sin\theta\ \cos\varphi$, $\langle S_y \rangle = \frac{\hbar}{2} \sin\theta\ \sin\varphi$, $\langle S_z \rangle = \frac{\hbar}{2} \cos\theta$

d) La precedente implica $\langle \chi_+^{\hat{n}} | \sigma_i | \chi_+^{\hat{n}} \rangle = \hat{n}_i$ che si ottiene anche dall'equazione agli autovalori per $\chi_+^{\hat{n}}$, tenendo conto che i valori medi delle σ_i sono reali e compresi tra gli autovalori -1 e 1.

d) Utilizzando la formula $e^{i\sigma_z \alpha/2} = \cos(\alpha/2) + i\sigma_z \sin(\alpha/2)$ essendo α l'angolo di rotazione attorno all'asse z, si trova: $\langle S_x \rangle' = \langle S_x \rangle \cos\alpha + \langle S_y \rangle \sin\alpha$. Il valor medio di S_z non cambia.

Esercizio 2

a) - Si ha $\Psi(\vec{x}) = ArF(r) \begin{pmatrix} \cos\theta \\ 1 \end{pmatrix} = ArF(r)\sqrt{\frac{4\pi}{3}} \begin{pmatrix} Y_1^0 \\ \sqrt{3}Y_0^0 \end{pmatrix} \equiv G(r)\frac{1}{2} \begin{pmatrix} Y_1^0 \\ \sqrt{3}Y_0^0 \end{pmatrix}$ con $G(r)$ che soddisfi $\int_0^{+\infty} r^2\ |G(r)|^2\ dr = 1$.

Per il contenuto di momento angolare scriviamo quindi lo stato nella base $|\ell, s, m, s_z\rangle$: si ha $|\psi\rangle = \frac{1}{2}|1, 1/2, 0, +1/2\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|0, 1/2, 0, -1/2\rangle$. Passando alla base $|\ell, s, J, M\rangle$ si ha:
$|\psi\rangle = \frac{1}{2}(a|1, 1/2, 1/2, +1/2\rangle + b|1, 1/2, 3/2, +1/2\rangle) + \frac{\sqrt{3}}{2}|0, 1/2, 1/2, -1/2\rangle$.
Quindi i possibili valori di J^2 sono $j(j+1)\hbar^2$ con $j = 1/2$ e $j = 3/2$ con probabilità $(3 + |a|^2)/4$ e $|b|^2/4$ rispettivamente e di J_z sono $M\hbar$ con $M = +1/2$ e $M = -1/2$ con probabilità 1/4 e 3/4 rispettivamente.

b) - Omettendo $\hbar$ si ha $\vec{L} \cdot \vec{\sigma} = J^2 - L^2 - S^2$, per cui si trova:
$\langle \vec{L} \cdot \vec{\sigma} \rangle = -|a|^2/2 + |b|^2/4$. I valori di a, b si prendono dalle tavole dei coefficienti.

Esercizio 3

a) - $\langle E \rangle = 4\hbar\omega$, $\langle x \rangle = 0$, $\langle p \rangle = \sqrt{2}\hbar\alpha$

b) - Al tempo t il valor medio dell'energia non cambia, mentre $\langle x \rangle = \sqrt{2}\sin(\omega t)/\alpha$
$\langle p \rangle = \sqrt{2}\hbar\alpha\cos(\omega t)$

b) - $\Delta x = 2\cos(\omega t/2)/\alpha$