2^0 compitino di Istituzioni di Fisica Teorica

1^0 semestre a.a. 1994-95,

Giovedí, 19, Gennaio, 1995

Problema 1

Un sistema quantistico è costituito da due particelle con spin 1/2 e di impulso $\vec{p}_1$ e $\vec{p}_2$ rispettivamente.

La prima particella ha spin orientato secondo l'asse y e la seconda secondo la direzione $\hat{n} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ di una terna destra.

Scrivere la funzione d'onda del sistema (senza tener conto del principio di esclusione).

Problema 2

Un sistema di momento angolare $j = 1$ è descritto dall'hamiltoniana

$$H = \alpha(j_x j_y + j_y j_x) + \beta,$$

con α e β costanti e $\beta > \alpha$.

(1)- Determinare gli autovalori e le autofunzioni di H.

(2)- Se a $t = 0$ la funzione d'onda del sistema ψ è data da

$$\psi(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

determinare la ψ all'istante generico t.

Problema 3

Lo stato fondamentale dell'atomo di Elio (Z=2) ha i due elettroni in uno stato di spin totale $\vec{S}$ con S = 0.

(**1**)- Scrivere la funzione d'onda dello stato fondamentale nell'approssimazione in cui si trascura l'interazione elettrostatica tra i due elettroni (cioè come se si avessero due elettroni indipendenti in un atomo idrogenoide).

(**2**)- Calcolare il valore di aspettazione nello stato fondamentale dell'operatore

$$(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)^2(\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2).$$

(La funzione d'onda normalizzata dello stato fondamentale dell'atomo idrogenoide è

$$u_{100}(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} e^{-\frac{Zr}{a_0}},$$

dove

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2} \quad \text{e} \quad E_{100} = -\frac{Zme^4}{2\hbar^2}).$$

* * * * *

Un sistema è costituito da 2 elettroni, di impulso $\vec{p}_1$ e $\vec{p}_2$ rispettivamente, aventi il primo lo spin orientato secondo l'asse y e il secondo secondo $\hat{n} \equiv (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$.

Scrivere la funzione d'onda del sistema (non antisimmetrizzata)

$$\psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}_1\cdot\vec{x}_1} e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{p_1^2}{2m}t} \chi_1 \cdot \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}_2\cdot\vec{x}_2} e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{p_2^2}{2m}t} \chi_2$$

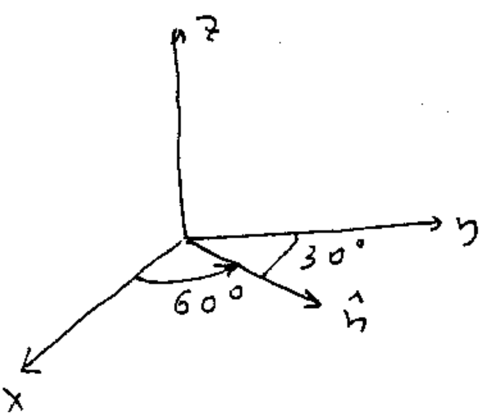
dove

χ_1 = autostato di σ_y con autovalore $+1$

χ_2 - " " $\hat{n}\cdot\vec{\sigma}$ " " $+1$

e dove

$$\hat{n}\cdot\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{pmatrix};$$



$$\begin{cases} \chi_1 = e^{-\frac{i}{2}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\sigma_x}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} ; \\ \chi_2 = e^{-\frac{i}{2}\frac{\pi}{3}\sigma_z} e^{-\frac{i}{2}\frac{\pi}{2}\sigma_y}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} ; \end{cases}$$

Cioè $\chi_1 = \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sigma_x \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i\sigma_x)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & i\\ i & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix} ; \leftarrow$$

e si verifica che

$$\begin{cases} \sigma_y \chi_1 = \chi_1 : \\ \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix} \end{cases}$$

e ancora

$$\chi_2 = \left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sigma_z \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sigma_y \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\sigma_z\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i\sigma_y)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} =$$

③

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sqrt{3}-i & 0\\ 0 & \sqrt{3}+i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sqrt{3}-i & 0\\ 0 & \sqrt{3}+i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sqrt{3}-i\\ \sqrt{3}+i\end{pmatrix} \leftarrow$$

e si verifica che

$$\|\chi_2\|^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\left(|\sqrt{3}-i|^2+|\sqrt{3}+i|^2\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\left(3+1+3+1\right)=\frac{8}{8}=1$$

e che

$$(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})\chi_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1-i\sqrt{3}\\ 1+i\sqrt{3} & 0\end{pmatrix}\frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sqrt{3}-i\\ \sqrt{3}+i\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\begin{pmatrix}(1-i\sqrt{3})(\sqrt{3}+i)\\ (1+i\sqrt{3})(\sqrt{3}-i)\end{pmatrix}=\frac{1}{4\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sqrt{3}+i-3i+\sqrt{3}\\ \sqrt{3}-i+3i+\sqrt{3}\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\begin{pmatrix}2\sqrt{3}-2i\\ 2\sqrt{3}+2i\end{pmatrix}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sqrt{3}-i\\ \sqrt{3}+i\end{pmatrix}=\chi_2\ ;$$

— · —

(2)

Un sistema di momento angolare $j = 1$ è descritto dall'hamiltoniana

$$H = \alpha (j_x j_y + j_y j_x) + \beta$$

con α, β costanti e $\beta > \alpha$.

a) Determinare autov. e autost. di H.

b) Se a $t=0$ è

$$\psi(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

determinare $\psi(t)$.

$$j_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = j_x j_y + j_y j_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad j_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

autov. A : $\lambda = 0, \pm 1$

autost. A : $u^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \; u^{(-1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix}; \; u^{(+1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$

---

a) autovalori energia : $E = \alpha \lambda + \beta = \begin{cases} \beta - \alpha, & (>0 \\ \beta, & (>0 \\ \beta + \alpha, & (>0 \end{cases}$

$$\begin{cases} \lambda = 0 : & E^{(0)} = \beta \\ \lambda = -1 : & E^{(-1)} = \beta - \alpha \\ \lambda = +1 : & E^{(+1)} = \beta + \alpha \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} \psi(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = b u^{(0)} + \frac{a+ic}{\sqrt{2}} u^{(-1)} + \frac{a-ic}{\sqrt{2}} u^{(+1)} \\ \\ \psi(t) = b u^{(0)} \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}\beta t} + \frac{a+ic}{\sqrt{2}} e^{-\frac{i}{\hbar}(\beta-\alpha)t} u^{(-1)} + \frac{a-ic}{\sqrt{2}} e^{-\frac{i}{\hbar}(\beta+\alpha)t} u^{(+1)} \end{cases}$$

$$j_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad j_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

fonol.
Helio

(a)

(3)

$$\psi(\vec{x}_1\vec{x}_2 t) = u(\vec{x}_1,\vec{x}_2)\, e^{-\frac{i}{\hbar}(E_1+E_2)t}$$

$$u(\vec{x}_1\vec{x}_2) = u_{100}(\vec{x}_1)\, u_{100}(\vec{x}_2)\, \chi(12)$$

$$\chi(12) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle|-\rangle - |-\rangle|+\rangle\right)$$

$$u_{100}(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} e^{-\frac{Zr}{a_0}}\,. \; ; \quad \|u_{100}\|^2 = 1;$$

$$Z = 2\,; \quad a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2}\,;$$

$$E_{100} = -\frac{Zme^4}{2\hbar^2}\frac{1}{1^2}\,, \quad (n=1)\,;$$

Valore di aspettazione di $(\vec{x}_1-\vec{x}_2)^2 = \vec{r}^{\,2}$

$$\langle \vec{r}^{\,2}\rangle = \int d^3x_1 \int d^3x_2\, \bar{u}_{100}(\vec{x}_1)\bar{u}_{100}(\vec{x}_2)\left(\vec{x}_1^{\,2}+\vec{x}_2^{\,2}-2\vec{x}_1\cdot\vec{x}_2\right)\cdot$$

$$\cdot\, u_{100}(\vec{x}_1)u_{100}(\vec{x}_2)\,\langle\chi(12)|\chi(12)\rangle =$$

$$= 2\left(\int d^3x_1\, \bar{u}_{100}(\vec{x}_1)\,\vec{x}_1^{\,2}\, u_{100}(\vec{x}_1)\right) -$$

$$-2\left(\int d^3x_1\, \bar{u}_{100}(\vec{x}_1)\, \vec{x}_1\, u_{100}(\vec{x}_1)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\int d^3x_2\, \bar{u}_{100}(\vec{x}_2)\, \vec{x}_2\, u_{100}(\vec{x}_2)\right)\langle\chi(12)|\chi(12)\rangle$$

esempio.
$\langle \vec{S}_1\cdot\vec{S}_2\rangle \Rightarrow -\frac{3}{4}\hbar$
$(S=0)$

(b)

$$\vec{S}_1\cdot\vec{S}_2 = \frac{1}{2}\left[(\vec{S}_1+\vec{S}_2)^2 - \vec{S}_1^2 - \vec{S}_2^2\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\vec{S}^2 - \frac{3}{4}\hbar^2 - \frac{3}{4}\hbar^2\right]$$

$$(\vec{S}_1\cdot\vec{S}_2)_{\text{autov.}} = \frac{1}{2}\left[S(S+1) - \frac{3}{2}\hbar^2\right]$$

nel nostro caso. $S = 0$

$$(\vec{S}_1\cdot\vec{S}_2)_{\text{autov.}} = -\frac{3}{4}\hbar^2;$$

$$\langle \vec{x}^2 \rangle = \int d^3x\, \bar{u}_{100}(\vec{x})\, \vec{x}^2 u_{100}(\vec{x}) =$$

$$= \int_0^\infty r^2 dr \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} e^{-\frac{Zr}{a_0}}\right)^2 r^2\, 4\pi =$$

$$= 4\pi\frac{1}{\pi}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^3 \int_0^\infty r^4 e^{-\frac{2Zr}{a_0}} dr = \left(\frac{3}{4\pi}\frac{a_0^2}{Z^2}\right)4\pi = \frac{3a_0^2}{Z^2}$$

$$\langle \chi(12) |\, \vec{S}_1\cdot\vec{S}_2\, | \chi(12) \rangle = -\frac{3}{4}\hbar^2$$

$$\int_0^\infty x^n e^{-\alpha x} dx = n!\,\alpha^{-n-1};$$

$$\langle (\vec{x}_1-\vec{x}_2)^2(\vec{S}_1\cdot\vec{S}_2)\rangle = \left(-\frac{3}{4}\hbar^2\right) 2\cdot\frac{3a_0^2}{Z^2};$$