Compito di Meccanica Quantistica

4 Aprile 2005

Esercizio 1) - Un oscillatore armonico unidimensionale di massa m e pulsazione ω si trova, al tempo $t = 0$, in uno stato descritto dalla funzione d'onda:

$$\psi(x) = A\ x^3\ e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2}$$

con $\alpha = \sqrt{m\omega/\hbar}$ e A costante di normalizzazione.

- **a)** - Calcolare il valor medio dell'energia e dell'impulso al tempo $t = 0$;
- **b)** - Calcolare il valor medio dell'energia e dell'impulso a un tempo t generico;
- **c)** - Calcolare l'incertezza su una misura di posizione $\Delta x(t)$ al tempo t generico.

Esercizio 2) - Si consideri un generico operatore di momento angolare $\vec{J}$ con le usuali regole di commutazione tra le componenti

$$[J_a, J_b] = i\ \hbar\ \epsilon_{abc}\ J_c$$

- **a)** - Dimostrare che vale la formula

$$\vec{J} \wedge \vec{J} = i\ \hbar\ \vec{J}$$

- **b)** - Si considerino poi gli operatori (adimensionali) di momento angolare orbitale $\vec{L}$ e di spin $\vec{S}$, con $\vec{\sigma} = \vec{S}/2$. Utilizzando il precedente risultato e le proprietà delle matrici di Pauli, dimostrare la seguente relazione

$$\left(\vec{\sigma} \cdot \vec{L}\right)^2 = \vec{L}^2 - \vec{\sigma} \cdot \vec{L}$$

- **c)** - Consideriamo adesso una particella di spin 1/2 e supponiamo che l'evoluzione temporale sia governata dall'operatore $U(t) = e^{-i\Omega t}$ con $\Omega = A\left(\vec{\sigma} \cdot \vec{L}\right)^2$ ed essendo A una costante (con dimensioni di una frequenza).
  Se la particella si trova inizialmente in uno stato caratterizzato dai numeri quantici di $\vec{L}^2,\ L_z,\ S_z$: $\ell = 1,\ m = 0,\ s_z = +1/2$, determinare lo stato a un tempo generico e il tempo dopo il quale la probabilità di trovare la particella in uno stato con $s_z = -1/2$ diventa massima.

Esercizio 3) - Una particella di spin 1 si trova, al tempo $t = 0$, nell'autostato di S_n

$$S_n|\psi\rangle \;=\; \hbar\;|\psi\rangle$$

dove $S_n \equiv \vec{S}\cdot\vec{n}$ è la proiezione dell'operatore di spin lungo la direzione $\vec{n}$. Prendendo il versore $\vec{n} \;=\; (\sin\theta,\ 0,\ \cos\theta)$:

- **a)** - determinare la rappresentazione di $|\psi\rangle$ nella usuale base dove:

$$S_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad S_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad S_z = \hbar\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

  Sempre all'istante $t = 0$ si accende un campo magnetico uniforme e costante $\vec{B} = (0, 0, B)$ e si ha una interazione della forma $H = -a\vec{S}\cdot\vec{B}$ (dove a è una costante). Si chiede di:

- **b)** - scrivere nella stessa base la matrice rappresentativa dell'operatore di evoluzione

$$U(t) = e^{-i\frac{H}{\hbar}t}$$

- **c)** - calcolare la probabilità che una misura di S_x dia risultato $\hbar$, come funzione del tempo t.

Polinomi di Hermite

$H_0 = 1;\qquad H_1 = 2z;\qquad H_2 = 4z^2 - 2;\qquad H_3 = 8z^3 - 12z;$
$H_4 = 16z^4 - 48z^2 + 12;\qquad H_5 = 32z^5 - 160z^3 + 120z$