1° compitino di Istituzioni di Fisica Teorica

2/5/1995

Problema 1

Mostrare che il problema classico della stabilità e della dimensione dell'atomo di idrogeno può essere spiegato col principio di indeterminazione. Si mostri in particolare che, a causa della relazione di indeterminazione, l'energia dell'elettrone ha un minimo per $\Delta x \simeq a_0$, dove $a_0 = \hbar^2/me^2$ è il raggio di Bohr.

Problema 2

Si consideri un sistema che ha solo tre stati quantici indipendenti (per es. gli stati di spin 1), per cui, in una data base, uno stato generico può essere rappresentato da un vettore colonna a tre componenti. Sia

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

la matrice che rappresenta una osservabile (per es. S_x nella base in cui S_z è diagonale).

- Trovare quali sono i possibili risultati di una misura di A e quali sono gli autovettori corrispondenti.
- determinare i proiettori P_i sugli autovettori di A e verificare che vale la decomposizione spettrale

$$A = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i P_i \, .$$

dove α_i sono gli autovalori.

Problema 3

Si consideri un oscillatore armonico di massa m e pulsazione ω, la cui funzione d'onda all'istante $t = 0$ è

$$\psi(x, 0) = A x^2 e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2}$$

dove $\alpha = \sqrt{m\omega/\hbar}$ e A è una costante di normalizzazione.

a) Si trovi la funzione d'onda $\psi(x, t)$ al tempo t.

b) Si calcoli la coordinata del baricentro del pacchetto, definita da

$$x_0(t) = \langle \psi(t) | x | \psi(t) \rangle .$$

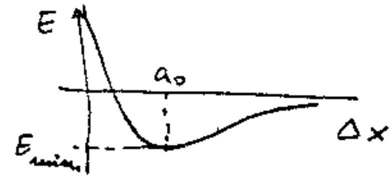
Si dica in particolare se x_0 dipende dal tempo e si giustifichi il risultato.

1° compitino 2/5/95

(1)

$$E = \langle H \rangle = \frac{\Delta p^2}{2m} - e^2 \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle \gtrsim \frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{(\Delta x)^2} - \frac{e^2}{\Delta x}$$

$$\frac{dE}{d\,\Delta x} = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{-2}{(\Delta x)^3} + \frac{e^2}{(\Delta x)^2} = 0$$



$$\Delta x = \frac{\hbar^2}{m e^2} = a_0$$

$$E_{min} = \frac{\hbar^2}{2m a_0^2} - \frac{e^2}{a_0} = -\frac{e^2}{2a_0} = E_0$$

(2) a) autovalori: $\det(A - \alpha \mathbb{1}) = \det \begin{pmatrix} -\alpha & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\alpha & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\alpha \end{pmatrix} = -\alpha^3 + \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}$

$= \alpha(1-\alpha^2) = 0$, $\quad \underline{\alpha_i = 0, \pm 1}$

autovettori: $A u_i = \alpha_i u_i$, $\quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \alpha_i \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} b = \alpha_i a \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(a+c) = \alpha_i b \\ \frac{1}{\sqrt{2}} b = \alpha_i c \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \alpha_i \neq 0: \quad a = c = \alpha_i \frac{b}{\sqrt{2}} \\ \\ \alpha_i = 0: \quad b = 0, \; a = -c \end{array}$$

$$u_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}; \quad u_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad u_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

b) $P_i = u_i u_i^+$; $\quad P_+ = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$$P_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_- = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt2} \\ 1 \\ -\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt2} & 1 & -\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac12 & -\frac{1}{\sqrt2} & \frac12 \\ -\frac{1}{\sqrt2} & 1 & -\frac{1}{\sqrt2} \\ \frac12 & -\frac{1}{\sqrt2} & \frac12 \end{pmatrix}$$

$$\sum_i \alpha_i P_i = P_+ - P_- = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt2 & 0 \\ \sqrt2 & 0 & \sqrt2 \\ 0 & \sqrt2 & 0 \end{pmatrix} = A$$

3) $$\psi(x,0) = A x^2 e^{-\frac{\alpha^2}{2}x^2} \; ; \quad 1 = \int_{-\infty}^{\infty}\psi^2 dx = A^2\int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-\alpha^2 x^2}dx$$

$$= A^2 \frac{3}{4\alpha^5}\sqrt{\pi}\,, \qquad A = \sqrt{\frac{4\alpha^5}{3\sqrt\pi}}$$

$$\psi(x,0) = \sqrt{\frac{\alpha}{3\sqrt\pi}}\; 2\xi^2 e^{-\frac12\xi^2} = \sqrt{\frac{\alpha}{3\sqrt\pi}}\;\frac12\left[(4\xi^2-2)+2\right]e^{-\frac12\xi^2}$$

$$= \sqrt{\frac{\alpha}{3\sqrt\pi}}\;\frac12\left[H_2(\xi)+2H_0(\xi)\right]e^{-\frac12\xi^2} = \sqrt{\frac23}\,u_2(\xi)+\frac{1}{\sqrt3}\,u_0(\xi)$$

a) $$\psi(x,t) = \sqrt{\frac{\alpha}{3\sqrt\pi}}\;\frac12\left[H_2(\xi)\,e^{-i(2+\frac12)\omega t} + 2H_0\,e^{-i\frac12\omega t}\right]e^{-\frac12\xi^2}$$

$$= \sqrt{\frac{\alpha}{3\sqrt\pi}}\; e^{-\frac{i}{2}\omega t}\left[(2\xi^2-1)e^{-2i\omega t}+1\right]e^{-\frac12\xi^2}$$

b) $$x_0(t) = \left[\sqrt{\frac23}\,e^{2i\omega t}\langle 2| + \frac{1}{\sqrt3}\langle 0|\right] x \left[\sqrt{\frac23}\,e^{-2i\omega t}|2\rangle + \frac{1}{\sqrt3}|0\rangle\right]$$

$= 0$ perchè $\langle m|x|n\rangle = 0$ per $m-n \neq \pm 1$

ovvero anche: $x_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x,t)\, x\, \psi(x,t)\,dx = 0$

perchè $\psi(x,t)$ è una funz. pari e l'integrando è dispari.