APPUNTI ASTROFISICA
Processi radiativi

Claudio Chiuderi

June 20, 2007

1 Processi radiativi

Descriveremo brevemente le caratteristiche dei processi radiativi che non coinvolgono l'emissione di righe da parte di atomi, ma che risultano dalle transizioni tra stati appartenenti allo spettro continuo: in astrofisica si indicano tali processi radiativi come dovuti a transizioni *libero-libero*. Questi processi sono particolarmente importanti nei gas ionizzati; a seconda delle energie coinvolte essi possono essere responsabili dell'emissione in bande diverse dello spettro elettromagnetico, da quella radio a quelle dei raggi X o *gamma*.

E' importante realizzare che tutti questi processi sono varianti di un unico processo di base. Nel linguaggio dell'elettrodinamica quantistica essi corrispondono ad un unico *Diagramma di Feynman*. Senza entrare nel dettaglio e quindi senza spiegare il significato profondo di tali diagrammi, li considereremo semplicemente una rappresentazione grafica dei processi elettrodinamici elementari. Un esempio è riportato in Figura 1: Le linee a tratto intero rappresentano elettroni, mentre quelle a tratto ondulato rappresentano dei fotoni. Accanto a ciascuna linea è scritto il valore del *quadrimpulso* della particella corrispondente. Il diagramma in Figura 1 rappresenta dunque un processo in cui l'elettrone di quadrimpulso $p = (E/c, \boldsymbol{p})$ lo cambia nell'impulso q a seguito dell'emissione (o assorbimento) di un fotone di impulso k. E' facile rendersi conto che un processo del genere non può aver luogo se i

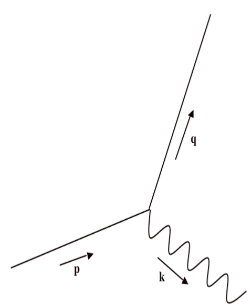

Figura 1: *Diagramma di Feynman per l'interazione elettrone-fotone*

due elettroni sono particelle "reali", cioè se entrambi hanno una massa $m = m_e$. In fatti, la conservazione sia dell'impulso (tridimensionale) che dell'energia, implica che vale la seguente relazione tra quadrivettori:

$$p = q + k \quad \text{che equivale a} \quad \boldsymbol{p} = \boldsymbol{q} + \boldsymbol{k}\ ,\ E(\boldsymbol{p}) = E(\boldsymbol{q}) + \hbar\omega,$$

dove $E(\boldsymbol{p}) = (|\boldsymbol{p}|^2 c^2 + m^2 c^4)^{1/2}$ e $|\boldsymbol{p}|$ è il modulo del vettore tridimensionale $\boldsymbol{p}$. Elevando al quadrato la precedente relazione e tenendo conto che $p^2 = E(\boldsymbol{p})^2/c^2 - |\boldsymbol{p}|^2 c^2 = m^2 c^2$, dove m è la massa della particella, si ottiene:

$$p^2 = q^2 + k^2 + 2\big(E(\boldsymbol{q})\hbar\omega/c^2 - \hbar|\boldsymbol{q}|\,|\boldsymbol{k}|\cos\theta\big),$$

dove θ è l'angolo tra $\boldsymbol{q}$ e $\boldsymbol{k}$. Se le masse di tutte e tre le particelle coinvolte hanno i valori fisici abituali, cioè se sono particelle "reali", otteniamo

$$\cos\theta = \frac{E(\boldsymbol{q})}{|\boldsymbol{q}|^2 c^2} > 1,$$

dove si è tenuto conto che $\omega = k\,c$

Se ne deduce che il processo rappresentato nel diagramma non può aver luogo. Se tuttavia immaginiamo di completare il diagramma con un altro "vertice" come in Figura 2, il processo globale, che rappesenta la diffusione di un fotone da parte di un elettrone può avvenire, perchè sia l'impulso che l'energia (e il momento angolare !) possono essere conservati nel processo globale $p + k = p' + k'$.

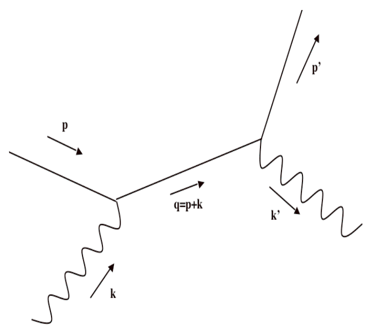

Figura 2: *Diagramma di Feynman per lo scattering elettrone-fotone*

La particella "intermedia" vien detta "virtuale" e può essere interpretati in uno dei due modi seguenti, del tutto equivalenti:

- La particella intermedia ha il valore fisico della massa, ma nel vertice 1 si conserva l'impulso, ma *non* l'energia. Questo è permesso in meccanica quantistica, purchè $\Delta E \Delta t \gtrsim \hbar$. La particella virtuale ha la massa giusta, ma una vita effimera.
- Nel vertice 1 si conserva sia l'impulso che l'energia, la particella virtuale ha un quadrimpulso $q = p + k$, ma la la sua massa vale $\sqrt{(p+k)^2/c^2} \neq m_e$.

La seconda interpretazione è preferita in elettrodinamica quantistica perchè mantiene la covarianza della teoria. I "vertici" rappresentano l'interazione elettrone-campo elettromagnetico che si può scrivere nella forma $J_\mu A_\mu$, dove J_μ e A_μ sono rispettivamente le componenti della quadricorrente $J = (\rho_q c, \boldsymbol{J})$ e del quadripotenziale $A = (\Phi, \boldsymbol{A})$, con ρ_q densità di carica, $\boldsymbol{J}$, densità di corrente, Φ e $\boldsymbol{A}$, potenziale scalare e potenziale vettore, rispettivamente. Ricordiamo che:

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$$

e

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}.$$

Il quadrivettore A_μ può quindi rappresentare sia campi elettrici che magnetici e questoo ci fa capire che *lo stesso diagramma*. cioè quello di Figura 2, può rappresentare processi diversi a seconda della natura del quadrivettore A_μ nel vertice 1. Se A_μ rappresenta il campo elettrico di un nucleo, il diagramma descrive la radiazione emessa durante l'interazione coulombiana di en elettrone con un nucleo ("bremsstrahlung"). Se A_μ rappresenta un puro campo magnetico, la radiazione emessa da un elettrone per effetto del moto imposto dalla presenza di $\boldsymbol{B}$ (radiazione di "ciclotrone", nel caso non relativistico o di "sincrotrone" nel caso ultra relativistico). Se infine A_μ rappresenta una vera e propria onda elettromagnetica, il diagramma descriverà lo scattering Thomson o lo scattering Compton, se l'elettrone è sostanzialmente fermo, o lo scattering Compton *inverso* se l'elettrone è relativistico.

Una unificazione dei vari processi è possibile anche a livello classico, anche se la relazione è meno evidente. Per cercare di vederlo, consideriamo il fatto che una particella carica irradia quando è sottoposta ad un moto accelerato. La potenza irradiata, cioè l'energia emessa dalla particella per unità di tempo sotto forma di onde elettromagnetiche è data dalla formula di Larmor (che riportiamo senza dimostrazione):

$$\frac{dE}{dt} = \frac{2e^2a^2}{3\,c^3}, \tag{1.1}$$

dove e è la carica della particella e a la sua accelerazione, misurata nel sistema di riferimento della particella. Se una particella di massa m "sente" un campo elettrico E, la sua accelerazione sarà:

$$a = \frac{e}{m}E,$$

e la potenza irradiata sarà

$$\frac{2e^4}{3m^2c^3}E^2 = \frac{8\pi}{3}\Big(\frac{e^2}{mc^2}\Big)^2\Big(\frac{E^2}{4\pi}\Big)c.$$

La formula precedente si può "leggere" nel modo seguente. $(8\pi/3)(e^2/mc^2)^2 = \sigma_T$ è la sezione d'urto Thomson che rappresenta l'interazione dell'onda elettromagnetica con la particella, $E^2/4\pi$ rappresenta la densità di energia nell'onda elettromagnetica. Infatti la densità di energia elettrica è $E^2/8\pi$ e quella di energia magnetica $B^2/8\pi$, ma in un'onda elettromagnetica $E = B$. Quindi $\sigma_T c$ rappresenta il volume efficace d'interazione e quindi $\sigma_T cw$, dove W è la densità di energia rappresenta l'energia diffusa per effetto dell'interazione con la particella. Questa formula è valida qualunque sia il tipo di radiazione incidente. Spesso è utile considerare l'energia *media* irradiata,dove il significato di "media" può variare a seconda delle circostanze (media nel tempo, media angolare, media sulle frequenze ecc.) e la formula precedente si generalizza come:

$$\text{potenza media irradiata} \equiv \Big\langle\frac{dE}{dT}\Big\rangle = 2\,\sigma_T\,c\langle w_E\rangle,$$

dove w_E è la densità di energia del *campo elettrico* (da cui il fattore 2).

Come abbiamo già detto, il campo elettrico che compare in w_E è il campo elettrico "effettivo", cioè la forza per unità di carica che la particella subisce.. Se la particella si muove, il campo effettivo è

$$E_{eff} = \gamma\Big(E + \frac{1}{c}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\Big),$$

con $\gamma = \sqrt{1 - v^2/c^2}$, e la formula finale per la potenza media irradiata sarà quindi:

$$\langle \frac{dE}{dt} \rangle = 2\,\sigma_T\,\gamma^2 c \,\langle \Big(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\Big)\rangle. \tag{1.2}$$

Finora ci siamo occupati soltanto della potenza totale irradiata, ma un'altra quantità di interesse è la distribuzione angolare della radiazione emessa. Bisogna qui distinguere la distribuzione angolare nel sistema di quiete della particella emittente ed in quello dell'osservatore in cui la particella ha velocità v. La *fase* di un'onda elettromagnetica, $\Phi = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t$ è un invariante relativistico, cioè il suo valore è lo stesso in tutti i sistemi inerziali. Questo lo si può intuire facilmente moltiplicando Φ per $\hbar$ e osservando che $\hbar\boldsymbol{k}$ e $\hbar\omega$ sono rispettivamente l'impulso e l'energia di un fotone, cosicchè $\hbar\Phi$ si puo scrivere nella forma di un prodotto scalare tra quadrivettori, $p_\mu x_{mu}$, che è evidentemente un invariante relativistico. Quindi

$$\omega\, t - \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} = \omega' t' - \boldsymbol{k}' \cdot \boldsymbol{r}'.$$

Se ora supponiamo che la particella, che si trova in quiete nel sistema S', si muova con velocità v lungo l'asse delle $x > 0$ nel sistema S ed applichiamo le trasformazioni di Lorentz che esprimono le variabili nel sistema S in termini di quelle nel sistema S', otteniamo facilmente:

$$\omega = \gamma(1 + \beta \cos\theta'),$$

e

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta'}{\gamma(\cos\theta' + \beta)}.$$

La prima formula è l'espressione dell' effetto Doppler relativistico mentre la seconda vien detta *aberrazione* relativistica e ci dà la legge di trasformazione richiesta. Nel caso di particelle che si muovono a velocità prossime a c ($\beta \approx 1$) la formula per l'aberrazione diviene

$$\tan\theta \simeq \frac{\sin\theta'}{\gamma(\cos\theta' + 1)} = \frac{\tan\theta'/2}{\gamma}.$$

Supponiamo ora che la radiazione venga emessa isotropicamente nel sistema di riposo della particella S'. I fotoni emessi perpendicolarmente all'asse x, cioè quelli con $\theta' = \pi/2$ appariranno nel sistema S con un angolo $\theta \simeq 1/\gamma$. Poichè $\gamma \gg 1$, posiamo concludere che tutta la radiazione emessa nel sistema S' nel semispazio che contiene la velocità v è collimata in un cono di semiapertura $\approx 1/\gamma$. Ne concludiamo che le particelle fortemente relativistiche ($\beta \approx 1, \gamma \gg 1$) appaiono emettere sostanzialmente nella direzione della loro velocità.

1.1 Radiazione di sincrotrone

La radiazione di sincrotrone è quella emessa da una particella fortemente relativistica sottoposta all'azione di un campo magnetico. Una discussione approssimata delle caratteristiche di una tale radiazione si può fare utilizzando la (1.2) con $\boldsymbol{E} = 0$, che ci dice che

$$\langle\frac{dE}{dt}\rangle = 2\,\sigma_T\,\gamma^2 c\beta^2 B^2 \sin^2\psi \simeq 2\,\sigma_T\,\gamma^2 c B^2 \sin^2\psi = \frac{2}{3}\frac{e^4}{m^2c^3}\gamma^2 B^2 \sin^2\psi, \tag{1.3}$$

dove ψ è l'angolo tra il campo magnetico $\boldsymbol{B}$ (supposto costante) e la velocità $\boldsymbol{v}$.

Come abbiamo visto, la radiazione sarà fortemente collimata nella direzione della velocità e l'osservatore vedrà di fatto un'emissione di radiazione solo quando la velocità della particella punta verso di lui. Vediamo un po' più in dettaglio la geometria del processo. L'equazione di moto (relativistica) della particella ci dà

$$\frac{d}{dt}(\gamma m\boldsymbol{v}) = \frac{e}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B},$$

e

$$\frac{d}{dt}(\gamma mc) = e\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v} = 0,$$

poichè abbiamo supposto che sia presente solo un campo magnetico. La seconda equazione ci dice che γ, cioè l'energia totale $\epsilon = \gamma mc^2$ è costante e quindi anche $v = costante$. D'altra parte il moto lungo il campo magnetico si svolge con velocità costante, $v_\parallel = costante$ e poichè $v^2 = v_\parallel^2 + v_\perp^2$, anche $v_\perp = costante$. La soluzione dell'equazione di moto nel piano perpendicolare a $\boldsymbol{B}$ è un moto circolare uniforme con frequenza di girazione

$$\Omega = \frac{|\boldsymbol{e}|B\sin\psi}{\gamma mc} = \frac{\Omega_0}{\gamma},$$

dove Ω_0 è la frequenza di Larmor. Trascurando per semplicità il moto parallelo a $\boldsymbol{B}$, consideriamo l'intervallo di tempo Δt in cui la velocità della particella è diretta in modo tale che l'osservatore si trovi all'interno del cono di semiapertura $1/\gamma$. In questo intervallo di tempo la particella percorre un arco di circonferenza di lunghezza $\Delta s = R\Delta\theta = 2R/\gamma$. Poichè d'altra parte $R = v/\Omega$, abbiamo

$$\Delta s = \frac{2v}{\gamma\Omega}.$$

Il segnale che l'osservatore è in grado di vedere, cioè quello in cui l'osservatore si trova nel cono di semiapertura $1/\gamma$ sarà emesso tra gli istanti t_1 e $t_2 = t_1 + \Delta t$ con

$$t_2 - t_1 = \tau = \frac{\Delta s}{v} = \frac{2}{\gamma\Omega}.$$

Se l'osservatore si trova ad una distanza D, l'inizio del segnale verrà ricevuto ad un tempo $t_1' = t_1 + D/c$. Al tempo t_2 la particella si trova ad una distanza dall'osservatore $D' = D - \Delta s$

e di conseguenza la fine del segnale per l'osservatore avverrà al tempo $t'_2 = t_2 + (D - \Delta s)/c$. La durata del segnale per l'osservatore sarà dunque

$$\tau' = t'_2 - t'_1 = t_2 - t_1 - \frac{\Delta s}{c} = \tau(1 - \frac{v}{c}) = \tau(1 - \beta) \approx \frac{\tau}{2\gamma^2} = \frac{1}{\gamma^3 \Omega} \ll \frac{2\pi}{\Omega}.$$

In conclusione, l'osservatore vedrà una serie di impulsi di durata $\approx 1/(\gamma^3\Omega)$ a intervalli $\approx 2\pi/\Omega$. La teoria generale degli sviluppi in integrale di Fourier ci insegna che se un segnale ha una durata Δt, lo spettro in frequenza si estende fino a $\nu \approx 1/\Delta t$. Una maniera semplice di capire questo risultato è quella di considerare un segnale di forma gaussiana:

$$f(t) = f_0 \, \mathrm{e}^{-t^2/\tau^2}.$$

τ rappresenta una misura della larghezza della gaussiana e precisamente il valore di t per cui f vale $f_0 \mathrm{e}{-1}$. La sua trasformata di Fourier, cioè lo spettro in frequenza del segnale, è data da:

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \mathrm{d}t.$$

Calcolando la trasformata di Fourier per il segnale gaussiano troviamo:

$$f(\omega) = \Big(\frac{f_0 \tau}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-u^2} \mathrm{d}u\Big) \mathrm{e}^{-\omega^2\tau^2/4} = f(\omega = 0) \, \mathrm{e}^{-\omega^2\tau^2/4}.$$

La trasformata di Fourier è dunque ancora una gaussiana di larghezza $2/\tau$ e questo dimostra, almeno in questo esempio, quanto affermato più sopra.

La nostra discussione ha mostrato che lo spettro della radiazione emessa da un elettrone ultra relativistico in un campo magnetico si estende fino ad una frequenza dell'ordine di ω_c con

$$\omega_c = \gamma^3 \Omega = \gamma^2 \Omega_0.$$

.

Si può poi dimostrare che lo spettro, $F(\omega)$, è una funzione soltanto del rapporto (ω/ω_c), il cui andamento a basse frrequenze, $(\omega/\omega_c) \ll 1$, è proporzionale a $(\omega/\omega_c)^{1/3}$, mentre ad alte frequenze è proporzionale a

$$\Big(\frac{\omega}{\omega_c}\Big)^{1/2} \mathrm{e}^{-2\omega/\omega_c}.$$

La forma dello spettro di sincrotrone per una particella è riportato in Figura 3.

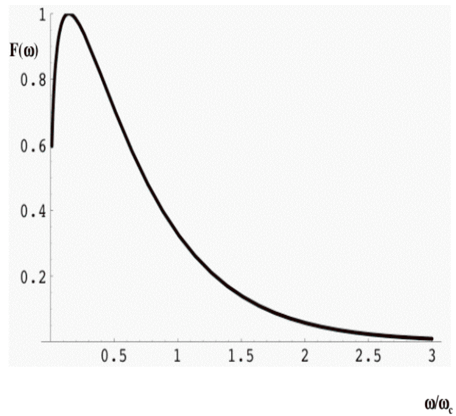

Figura 3: *Lo spettro (normalizzato) della radiazione di sincrotrone di una particella*

Finora ci siamo occupati della radiazione emessa da una singola particella con una ben definita velocità (o energia). E' chiaro che nella realtà la radiazione osservata sarà il risultato della radiazione emessa dda un *insieme* di particelle con una certa distribuzione di velocità o di energie. Trattandosi di particelle di alta energia, la forma più comune della funzione di distribuzione in energia è del tipo

$$N(E)\mathrm{d}E = C_0 E^{-s}|dE \qquad E_1 < E < E_2,$$

o, equivalentemente,

$$N(\gamma)\mathrm{d}\gamma = C_1 \gamma^{-s}\mathrm{d}\gamma \qquad \gamma_1 < \gamma < \gamma_2.$$

La potenza totale irradiata sarà:

$$F_{tot}(\omega) = C_1 \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} F(\omega)\gamma^{-s}\mathrm{d}\gamma.$$

Ricordando che $F(\omega)$ è in realtà una funzione della variabile $x = \omega/\omega_c$ e che $\omega_c = \gamma^2\Omega_0$, possiamo trasformare l'integrale in un integrale rispetto alla variabile x, ottenendo:

$$F_{tot}(\omega) = \frac{C_1}{2}\left(\frac{\omega}{\Omega_0}\right)^{-\frac{s-1}{2}} \int_{x_2}^{x_1} F(x)\, x^{(s-3)/2}\mathrm{d}x.$$

Vediamo dunque che se la distribuzione di energia delle particelle emittenti è una legge di potenza con esponente $-s$, lo spettro della radiazione emessa è anch'esso una legge di potenza con esponente $-(s-1)/2$. Spettri di questo tipo sono stati osservati in numerose radiosorgenti.