Capitolo 7

Isospin nei nuclei

Nel 1932 Heisenberg scrisse tre articoli sulla forza nucleare, trattando neutrone e protone come due stati della stessa particella, il nucleone, distinti dal valore assunto da una nuova variabile a due valori ($\pm\frac{1}{2}$), l'**isospin**. In realtà l'esperimento di Chadwick aveva dimostrato che la massa del neutrone è leggermente maggiore di quella del protone, ma Heisenberg decise di attribuire all'interazione elettromagnetica questa differenza. In un mondo ideale, in cui l'interazione elettromagnetica sia spenta, i due stati diventano degeneri:

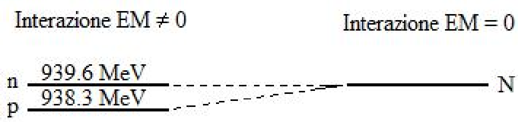

Figura 7.1: Ipotesi di Heisenberg

Una situazione analoga vale per lo spin. In assenza di campo magnetico un elettrone in un'orbita atomica ha la stessa energia per i due stati di spin, che sono degeneri. In presenza di un campo magnetico si ha separazione dei livelli per effetto Zeeman:

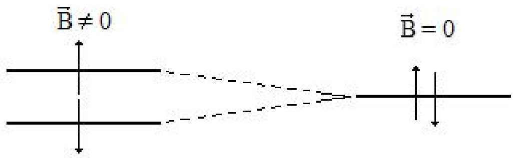

Figura 7.2: Separazione Zeeman

La funzione d'onda dell'elettrone dipende, oltre che dalle variabili spaziali, da una variabile interna di spin σ, che può assumere due valori ($\pm\frac{1}{2}$) in corrispondenza dei quali l'elettrone ha spin 'up' o 'down':

$$\psi_e(\vec{r}, \sigma) = \begin{cases} \psi_e(\vec{r}, +\frac{1}{2}), & \text{elettrone con spin } \uparrow; \\ \psi_e(\vec{r}, -\frac{1}{2}), & \text{elettrone con spin } \downarrow. \end{cases}$$

Una notazione più conveniente si ha fattorizzando la dipendenza da $\vec{r}$ e da σ:

$$\psi_e(\vec{r}, \sigma) = \phi_e(\vec{r})\chi(\sigma)$$

La funzione di spin $\chi(\sigma)$ è tale che $|\chi(\sigma)|^2$ dà la probabilità che la proiezione dello spin sull'asse z, scelto arbitrariamente come asse di quantizzazione, sia uguale a σ. Per rappresentare $\chi(\sigma)$, si introduce uno spazio vettoriale di dimensione 2, definito dagli stati base:

$$\chi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = |\alpha\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} = |\beta\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

che sono gli autostati di $\hat{S}_z$ e di $\hat{\vec{S}}^2$ con autovalori $\pm\frac{1}{2}\hbar$ e $\frac{3}{4}\hbar^2$. La dipendenza di $\chi_{\frac{1}{2},m}(\sigma)$ dalla variabile discreta σ è $\chi_{\frac{1}{2},m}(\sigma) = \delta_{m\sigma}$. Il generico stato di elettrone, in assenza di campo magnetico, è una sovrapposizione di stati $|\alpha\rangle$ e $|\beta\rangle$ con ampiezze di probabilità a e b:

$$\psi_e(\vec{r},\sigma) = \phi_e(\vec{r})(a|\alpha\rangle + b|\beta\rangle) = \phi_e(\vec{r}) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Dallo stato generico si proietta la parte con spin 'up' e 'down' mediante i proiettori:

$$P_+ = \frac{1+\sigma_z}{2}$$

$$P_- = \frac{1-\sigma_z}{2}$$

con $\sigma_z = \frac{2}{\hbar}\hat{S}_z$. Infine gli operatori di innalzamento e abbassamento dello spin sono $\hat{S}_\pm = \hat{S}_x \pm i\hat{S}_y$:

$$\hat{S}_+|\beta\rangle = |\alpha\rangle$$

$$\hat{S}_-|\alpha\rangle = |\beta\rangle$$

$$\hat{S}_+|\alpha\rangle = 0$$

$$\hat{S}_-|\beta\rangle = 0$$

In modo analogo Heisenberg postulò l'esistenza di una variabile dicotomica interna (variabile di isospin τ) che determina lo stato del nucleone, per esempio se $\tau = \frac{1}{2}$ si ha un protone, se $\tau = -\frac{1}{2}$ un neutrone. Lo stato di nucleone è quindi descritto da una funzione d'onda che dipende da $(\vec{r},\sigma,\tau)$:

$$\psi_N(\vec{r},\sigma,\tau) = \begin{cases} \psi_p(\vec{r},\sigma,\frac{1}{2}), & \text{protone;} \\ \psi_n(\vec{r},\sigma,-\frac{1}{2}), & \text{neutrone.} \end{cases}$$

e che diventa stato di protone se $\tau = \frac{1}{2}$ e di neutrone se $\tau = -\frac{1}{2}$. E' però più conveniente introdurre uno spazio vettoriale a due dimensioni (detto *di isospin* o *di carica*) che è una copia matematica di quello di spin. Scegliamo come vettori basi:

$$\eta_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = |\pi\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\eta_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} = |\nu\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

che sono autostati di τ_3 con autovalore ± 1:

$$\tau_3|\pi\rangle = |\pi\rangle$$

$$\tau_3|\nu\rangle = -|\nu\rangle$$

In generale ψ_N è una combinazione $a|\pi\rangle + b|\nu\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Nella fisica delle particelle la scelta dell'autovalore maggiore va allo stato di carica positiva maggiore. In fisica nucleare si sceglie talora la convenzione opposta, si attribuisce cioè allo sato di neutrone l'autovalore $+1$. Noi seguiremo la convenzione della fisica delle particelle.

Esplicitamente, la versione isospin delle matrici di Pauli è indicata con i simboli τ_1, τ_2, τ_3. I generatori del gruppo $SU(2)$ di isospin, nella rappresentazione fondamentale, sono $t_i = \frac{1}{2}\tau_i$, e soddisfano le regole di commutazione:

$$[t_i, t_j] = i\epsilon_{ijk}t_k$$

Da notare l'assenza del fattore $\hbar$: le trasformazioni di isospin non hanno il significato dinamico di quelle di spin.

I proiettori sullo stato di protone e di neutrone sono:

$$P_p = \frac{1+\tau_3}{2}$$

$$P_n = \frac{1-\tau_3}{2}$$

P_p è legato all'operatore di carica $\hat{Q}$ da:

$$\frac{\hat{Q}}{e} = P_p = \frac{1+\tau_3}{2}$$

Gli operatori di trasformazione degli stati, da stato di protone a stato di neutrone e viceversa, che sono importanti nella teoria dell'interazione debole, coincidono con gli operatori di innalzamento e abbassamento $\hat{t}_\pm = \hat{t}_1 \pm i\hat{t}_2$:

$$\hat{t}_+|\nu\rangle = |\pi\rangle$$

$$\hat{t}_-|\pi\rangle = |\nu\rangle$$

$$\hat{t}_+|\pi\rangle = 0$$

$$\hat{t}_-|\nu\rangle = 0$$

Isospin del sistema NN

Si tratta di sommare due isospin $\frac{1}{2}$:

$$\vec{T} = \vec{t}_1 + \vec{t}_2$$

L'isospin risultante assume i valori $T = 0, 1$. Gli autostati di singoletto e di tripletto sono $\eta_{T,\nu}$:

- T=0:
  - $\eta_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\pi_1\nu_2 - \nu_1\pi_2)$
- T=1:
  - $\eta_{1,1} = \pi_1\pi_2$
  - $\eta_{1,-1} = \nu_1\nu_2$
  - $\eta_{1,0} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\pi_1\nu_2 + \nu_1\pi_2)$

Lo stato di due nucleoni assume nel formalismo di isospin la forma:

$$\psi(1,2) = \psi_{pp}(\vec{r}_1,\sigma_1;\vec{r}_2,\sigma_2)\eta_{1,1} + \psi_{nn}(\vec{r}_1,\sigma_1;\vec{r}_2,\sigma_2)\eta_{1,-1} + \psi^a_{np}(\vec{r}_1,\sigma_1;\vec{r}_2,\sigma_2)\eta_{1,0} + \psi^s_{np}(\vec{r}_1,\sigma_1;\vec{r}_2,\sigma_2)\eta_{0,0} \quad (7.1)$$

avendo distinto, nel caso np, i possibili stati antisimmetrici in coordinate spaziali e di spin ψ^a_{np} da quelli simmetrici ψ^s_{np}. Nei casi pp e nn solo stati antisimmetrici in $\vec{r},\sigma$ sono permessi dal principio di Pauli. É da notare che lo stato di due nucleoni $\psi(1,2)$, che è una notazione compatta per $\psi(\vec{r}_1,\sigma_1,\tau_1;\vec{r}_2,\sigma_2,\tau_2)$, è antisimmetrico (principio di Pauli generalizzato) sotto lo scambio delle coordinate spaziali, di spin e di isospin:

$$\psi(1,2) = -\psi(2,1)$$

La scelta è stata dettata dalla indipendenza dalla carica delle forze nucleari per cui $V_{pp} = V_{nn} = V_{np}$ negli stati comuni alle tre coppie pp, nn, np che sono gli stati antisimmetrici in $\vec{r},\sigma$. A questi stati abbiamo accoppiato i tre stati simmetrici di isospin (T=1).

Gli altri stati possibili solo alla coppia np (stati simmetrici in $\vec{r},\sigma$ come lo stato ${}^3S_1 -{}^3D_1$ del deutone) sono dei singoletti di isospin (T=0). La trascrizione degli operatori nel formalismo di isospin avviene mediante l'uso dei proiettori. Consideriamo per esempio il potenziale coulombiano $V_c(r) = \frac{e^2}{r}$ (nel sistema di Gauss) che ovviamente agisce solo per la coppia pp. Se vogliamo applicarlo allo stato $\psi(1,2)$ definito in (1.1) dobbiamo moltiplicarlo per l'operatore che proietta lo stato $\eta_{1,1}$ (e annichila le altre tre possibilità). Ricordando la forma dell'operatore di proiezione sullo stato di protone è immediato scrivere:

$$P_{pp} = P^{T=1}_{\nu=1} = \frac{1+\tau_3^{(1)}}{2}\frac{1+\tau_3^{(2)}}{2}$$

e verificare che $P^2_{pp} = P_{pp}$ e che

$$P_{pp}\eta_{1,1} = \eta_{1,1}$$

$$P_{pp}\eta_{1,0} = P_{pp}\eta_{1,-1} = P_{pp}\eta_{0,0} = 0$$

Quindi il potenziale coulombiano diventa:

$$V_c(r,r_1,r_2) = \frac{e^2}{r}\frac{1+\tau_3^{(1)}}{2}\frac{1+\tau_3^{(2)}}{2}$$

Per determinare i proiettori sugli stati np di isotripletto e isosingoletto conviene partire da quest'ultimo. E' la replica in isospin del proiettore sullo stato di singoletto di spin che è:

$$P^{S=0} = \frac{1-\vec{\sigma}_1\cdot\vec{\sigma}_2}{4} \Rightarrow \begin{cases} P^{S=0}\chi_{0,0} = \chi_{0,0} \\ P^{S=0}\chi_{1,\mu} \end{cases}$$

Quindi il proiettore sullo stato $\eta_{0,0}$ è

$$P^{T=0} = \frac{1 - \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2}{4}$$

e quello sugli stati di tripletto $\eta_{1,\nu}$ è

$$P^{T=1} = \mathbb{I} - P^{T=0} = \frac{3 + \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2}{4}$$

Infine, il proiettore sullo stato np di singoletto ($\eta_{1,0}$) segue dalla ovvia relazione:

$$P^{T=1}_{\nu=1} + P^{T=1}_{\nu=0} + P^{T=1}_{\nu=-1} = P^{T=1}$$

$$\Rightarrow P^{T=1}_{\nu=0} = \frac{3 + \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2}{4} - \frac{1+\tau_3^{(1)}}{2}\frac{1+\tau_3^{(2)}}{2} - \frac{1-\tau_3^{(1)}}{2}\frac{1-\tau_3^{(2)}}{2} = \frac{1}{4}(1 + \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 - 2\tau_3^{(1)}\tau_3^{(2)})$$

Dalla indipendenza della carica delle forze nucleari alla conservazione dell'isospin

Dallo studio delle proprietà del deutone e degli stati di scattering pp, nn, np abbiamo ricavato che le forze NN sono (approssimativamente) indipendenti dalla carica. Più precisamente abbiamo visto che, nei canali antisimmetrici di $\vec{r}, \sigma$ comuni alle 3 coppie pp, nn, np, che abbiamo identificato con gli stati di isospin 1, si ha:

$$V_{pp} = V_{nn} \simeq V_{np}$$

Il potenziale np negli stati simmetrici in $\vec{r}, \sigma$ (stati con T=0), V'_{np}, è invece diverso. Nel formalismo di isospin il potenziale NN diventa:

$$\hat{V}_{NN} = V_{pp}P^{T=1}_{\nu=1} + V_{nn}P^{T=1}_{\nu=-1} + V_{np}P^{T=1}_{\nu=0} + V'_{np}P^{T=0} = V^{T=1}(P^{T=1}_{\nu=1} + P^{T=1}_{\nu=-1} + P^{T=1}_{\nu=0}) + V^{T=0}P^{T=0} =$$

$$= V^{T=1}P^{T=1} + V^{T=0}P^{T=0} = V^{T=1}\frac{3 + \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2}{4} + V^{T=0}\frac{1 - \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2}{4}$$

Per scrivere $\hat{H}_{NN}$ dobbiamo aggiungere il termine di energia cinetica $\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2$ che acquista come operatore di isospin l'identità perchè le masse dei nucleoni sono state assunte uguali per quanto riguarda l'interazione forte.

In conclusione:

$$\hat{H}_{NN} = \hat{T}\mathbb{I} + \frac{1}{4}(3V^{T=1} + V^{T=0})\mathbb{I} + \frac{1}{4}(V^{T=1} - V^{T=0})\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2$$

pertanto $\hat{H}_{NN}$ dipende solo dalla identità e dal prodotto scalare $\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2$ nelle variabili di isospin. Quindi $\hat{H}_{NN}$ è invariante per rotazioni nello spazio di isospin e il generatore delle rotazioni $\vec{T}$ è un vettore conservato:

$$[\hat{H}_{NN}, \vec{T}] = 0$$

Abbiamo dimostrato che l'indipendenza dalla carica delle forze NN si traduce nella legge di conservazione dell'isospin nel sistema NN. E' opportuno sottolineare che la simmetria dinamica di isospin è una simmetria approssimata che vale solo per la parte di interazione forte. L'interazione elettromagnetica non è simmetrica nell'isospin. Dalla forma del potenziale coulombiano risulta evidente che, in presenza di interazioni elettromagnetiche, solo $\hat{T}_3$ è conservato come è ovvio perchè corrisponde alla conservazione della carica elettrica:

$$\frac{\hat{Q}}{e} = \frac{1+\tau_3^{(1)}}{2} + \frac{1+\tau_3^{(2)}}{2} = 1 + \hat{T}_3$$

L'invarianza per rotazioni rispetto ad un asse arbitrario nello spazio di isospin si riduce a invarianza per rotazioni intorno all'asse 3:

$$[\hat{H} + \hat{V}_c, \hat{T}_3] = 0$$

L'isospin è conservato anche nei nuclei complessi se l'interazione nucleare è dovuta soltanto alle interazioni tra le coppie di nucleoni per cui

$$\hat{H} = \sum_i (\hat{T}_i + \sum_{j>i} \hat{V}_{ij})$$

In realtà i calcoli di struttura dei nuclei leggeri hanno messo in evidenza la necessità di aggiungere forze a 3-corpi alle forze a 2-corpi sinora considerate. In particolare, le energie di legame dei sistemi nucleari a 3-corpi calcolate utilizzando i più sofisticati potenziali NN sono di circa 0,8 MeV inferiori ai valori sperimentali, che sono 7,6 MeV per ^3He e 8,5 MeV per ^3H. Differenze dello stesso ordine di grandezza sono state trovate anche per ^4He e gli altri nuclei leggeri ($A < 10$). In tutti questi casi e' stato possibile fare calcoli microscopici tenendo conto anche delle forze a 3-corpi con il risultato di arrivare a predizioni teoriche in buon accordo con i valori sperimentali. Schematicamente, le forze a 3-corpi nascono dalla possibilita' che un pione emesso dal nucleone 1 venga assorbito dal nucleone 3 dopo essere stato diffuso dal nucleone 2. Si tratta chiaramente di contributi non inclusi nell'interazione tra due nucleoni.

Multipletti di isospin nucleari

In assenza di interazione coulombiana, i $2T+1$ stati del multipletto di isospin T sono degeneri:

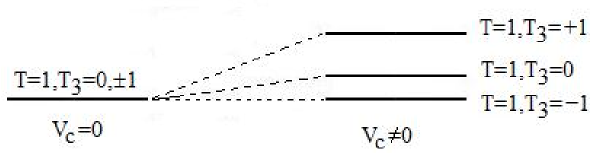

Figura 7.3: Split di isospin in presenza di interazione coulombiana

Da notare che i tre livelli della figura, e in generale i $2T+1$ livelli del multipletto di isospin T, appartengono a diverse specie chimiche. Infatti sono caratterizzati da diversi valori di T_3 e quindi diversi valori della carica Ze nucleare.

Un caso famoso $T = 1$ è il tripletto di stati isobari $A = 14$ e più precisamente gli stati fondamentali di ^{14}C e ^{14}O e il primo stato eccitato di ^{14}N:
L'autovalore di T_3 può essere ricavato da:

$$\frac{\hat{Q}}{e} = \sum^{A} \frac{1}{2} + \hat{T}_3$$

$$Z = \frac{A}{2} + T_3 \Rightarrow T_3 = \frac{Z-N}{2}$$

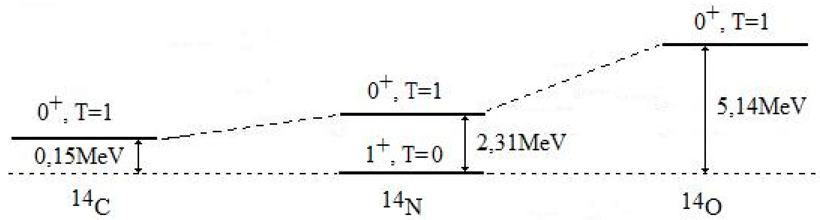

Figura 7.4: Tripletto degli isobari

Il valore dell'isospin T dello stato deve essere maggiore o uguale a T_3 (T_3 è la proiezione di T) e minore o uguale a $\frac{1}{2}A$, che corrisponde ad A isospin $\frac{1}{2}$ e tutti allineati:

$$|\frac{Z-N}{2}| \leq T \leq \frac{A}{2}$$

L'esperimento dimostra che gli stati fondamentali dei nuclei hanno sempre isospin T corrispondente al più piccolo valore possibile, cioè $T = |T_3|$.

Regole di selezione di isospin

Se la transizione tra due stati nucleari è dovuta ad una hamiltoniana $\hat{H}'$ forte (che conserva l'isospin) valgono le regole di selezione:

$$T_f = T_i$$

$$T_{3f} = T_{3i}$$

Infatti l'ampiezza di transizione (al prim'ordine della teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo) è data da:

$$\langle \alpha', T', T_3' | \hat{H}' | \alpha, T, T_3 \rangle$$

dove α e α' rappresentano tutti gli altri numeri quantici caratterizzanti lo stato iniziale e finale. Siccome per ipotesi

$$[\hat{H}', \hat{T}_3] = [\hat{H}', \hat{T}^2] = 0$$

abbiamo:

$$\langle \alpha', T', T_3' | \hat{T}_3 \hat{H}' | \alpha, T, T_3 \rangle = \langle \alpha', T', T_3' | \hat{H}' \hat{T}_3 | \alpha, T, T_3 \rangle$$

da cui

$$T_3' \langle \alpha', T', T_3' | \hat{H}' | \alpha, T, T_3 \rangle = T_3 \langle \alpha', T', T_3' | \hat{H}' | \alpha, T, T_3 \rangle$$

e quindi l'ampiezza di transizione è diversa da zero solo se $T_3' = T_3$. Analogamente si ottiene $T' = T$ partendo da $\hat{T}^2 \hat{H}' = \hat{H}' \hat{T}^2$. Inoltre l'ampiezza di transizione non dipende dal valore di T_3. Infatti

$$\langle \alpha', T, T_3 + 1 | \hat{H}' | \alpha, T, T_3 + 1 \rangle = \langle \alpha', T, T_3 | \hat{H}' | \alpha, T, T_3 \rangle$$

che si ricava dalle relazioni

$$|\alpha, T, T_3 + 1\rangle = \frac{\hat{T}_+}{C_{T,T_3}} |\alpha, T, T_3\rangle$$

$$\hat{H}'\hat{T}_+ = \hat{T}_+\hat{H}' = \hat{T}_-^\dagger\hat{H}'$$

$$\langle\alpha', T, T_3 + 1|\hat{T}_-^\dagger = C_{T,T_3}\langle\alpha', T, T_3|$$

L'ultima relazione è l'hermitiana coniugata di

$$\hat{T}_-|\alpha', T, T_3 + 1\rangle = C_{T,T_3}|\alpha', T, T_3\rangle$$

Esplicitamente $C_{T,T_3} = \sqrt{T(T+1) - T_3(T_3+1)}$.
In conclusione:

$$\langle\alpha', T', T_3'|\hat{H}'|\alpha, T, T_3\rangle = \delta_{T,T'}\delta_{T_3,T_3'}A(T, \alpha, \alpha')$$

Una reazione studiata sperimentalmente per verificare la conservazione dell'isospin in fisica nucleare è stata:

$$d +^{16} O \rightarrow \alpha +^{14} N^*(2,31MeV)$$

che non è possibile se l'isospin è conservato perchè d, ^{16}O, α hanno $T = 0$ mentre il primo stato eccitato di ^{14}N è membro di un tripletto di isospin (T=1). E' stato trovato che tale stato è popolato molto debolmente in contronto con gli altri stati di bassa energia in ^{14}N, in accordo con la simmetria approssimata di isospin. Per esempio nel caso di deutoni di $24MeV$, la produzione dello stato eccitato $(2,31MeV)$ è stata misurata pari a $0,7 \pm 0,6\%$ di quella dello stato fondamentale di ^{14}N.