Capitolo 4

Scattering EM nucleare

La trattazione dello scattering α-nucleo mediante la teoria dello scattering da potenziale permette di ricavare rapidamente la sezione d'urto Rutherford tra nuclei puntiformi e di introdurre il fattore di forma nel caso di nucleo bersaglio esteso, ma 'nasconde' aspetti quantistici importanti e non è utilizzabile per introdurre la teoria di Fermi della interazione debole. Per questi scopi partiremo dalla seguente formula:

$$d\sigma = \frac{2\pi}{\hbar v_{rel}} \delta(E_a + E_X - E'_a - E'_X)|M_{fi}|^2 \frac{d^3p'_a}{(2\pi\hbar)^3}$$

L'elemento di matrice di transizione M_{fi} è legato all'elemento di matrice dell'operatore hamiltoniano $\hat{H}'_{EM}$ dalla relazione:

$$\langle f|\hat{H}'_{EM}|i\rangle = V\delta^3_{\vec{k}_i,\vec{k}_f} \frac{1}{V^2} M_{fi} \tag{4.1}$$

Ricordiamo anche che l'impulso $\vec{p}'_X$ del nucleo X nello stato finale è fissato dalla conservazione degli impulsi al valore $\vec{p}'_X = \vec{p}_a + \vec{p}_X - \vec{p}'_a$. L'hamiltoniana classica di interazione elettromagnetica di due nuclei (a, X) ha la forma:

$$H'_{EM} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r d^3r' \left[\frac{\rho_a(\vec{r})\rho_X(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{c^2} \frac{\vec{j}_a(\vec{r})\vec{j}_X(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right]$$

per scattering a bassa energia, in cui si può trascurare il ritardo nella propagazione del campo elettromagnetico che media la interazione tra a e X. Le espressioni di $\rho(\vec{r})$ e $\vec{j}(\vec{r})$ dipendono dal modello di struttura nucleare assunto. Il caso più semplice (**scattering Rutherford propriamente detto**) corrisponde a nuclei puntiformi e senza spin per cui:

$$\rho_i(\vec{r}) = Z_i e \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_i)$$

$$\vec{j}_i(\vec{r}) = \vec{v}_i \rho_i(\vec{r}) = \frac{\vec{p}_i}{m_i} \rho_i(\vec{r})$$

In questo caso, la parte magnetica di H'_{EM} è trascurabile rispetto a quella elettrica perchè di ordine $\left(\frac{v}{c}\right)^2$ più piccola. L'operatore hamiltoniano $\hat{H}'_{EM}$ si ottiene da H'_{EM} quantizzando le variabili dinamiche $\vec{r}_i$, $\vec{p}_i$ che, nello spazio delle configurazioni, diventano $\hat{\vec{r}}_i = \vec{r}_i$, $\hat{\vec{p}}_i = -i\hbar\vec{\nabla}_{r_i}$. La densità di carica $\hat{\rho}(\vec{r})$ è un operatore moltiplicativo mentre $\hat{\vec{j}}(\vec{r})$ contiene gradienti.

Se indichiamo con $\psi_a(\vec{r}_a)$ e $\psi'_a(\vec{r}_a)$ la funzione d'onda di a prima e dopo l'urto, l'elemento di matrice di $\hat{\rho}_a(\vec{r})$ è:

$$\langle a'|\hat{\rho}_a(\vec{r})|a\rangle = \int d^3r_a \psi_a^{'*}(\vec{r}_a) Z_a e \delta^3(\vec{r}-\vec{r}_a)\psi_a(\vec{r}_a) = Z_a e \psi_a^{'*}(\vec{r})\psi_a(\vec{r})$$

che corrisponde al prodotto della carica di a per la densità di probabilità di transizione $\psi^{'*}(\vec{r})\psi(\vec{r})$. Analogamente

$$\langle X'|\hat{\rho}_X(\vec{r})|X\rangle = Z_X e \psi_X^{'*}(\vec{r})\psi_X(\vec{r})$$

se anche X è puntiforme. L'elemento di matrice di $\hat{H}'_{EM}$ per lo scattering Rutherford assume la forma:

$$\langle a', X'|\hat{H}'_{EM}|a, X\rangle = \frac{Z_a Z_X e^2}{4\pi\epsilon_0}\int d^3r d^3r' \frac{\psi_a^{'*}(\vec{r})\psi_a(\vec{r})\psi_X^{'*}(\vec{r}')\psi_X(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

che ritroviamo, con qualche modifica, nella teoria di Fermi.

Asintoticamente, i nuclei a e X si muovono come particelle libere di dato impulso prima e dopo l'urto. Le loro funzioni d'onda sono quindi onde piane del tipo:

$$\psi_i(\vec{r}_i) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k}_i\cdot\vec{r}_i}$$

$$\psi'_i(\vec{r}_i) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k}'_i\cdot\vec{r}_i}$$

dove V è il volume di normalizzazione. Abbiamo quindi:

$$\langle a', X'|\hat{H}'_{EM}|a, X\rangle = \frac{Z_a Z_X e^2}{4\pi\epsilon_0}\int d^3r d^3r' \frac{1}{V^2}\frac{e^{i(\vec{k}_a-\vec{k}'_a)\cdot\vec{r}} e^{i(\vec{k}_X-\vec{k}'_X)\cdot\vec{r}'}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

che, con il cambio di variabile $\vec{r}-\vec{r}' = \vec{\rho}$, diventa:

$$\langle a', X'|\hat{H}'_{EM}|a, X\rangle = \frac{Z_a Z_X e^2}{4\pi\epsilon_0}\int d^3\rho \frac{e^{i(\vec{k}_a-\vec{k}'_a)\cdot\vec{\rho}}}{V^2\rho}\int d^3r' e^{i(\vec{k}_a+\vec{k}_X-\vec{k}'_a-\vec{k}'_X)\cdot\vec{r}'} = V\delta^3_{\vec{k}_a+\vec{k}_X,\vec{k}'_a+\vec{k}'_X}\frac{1}{V^2}\frac{Z_a Z_X e^2}{4\pi\epsilon_0}\int d^3r \frac{e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}}{r}$$

avendo introdotto il momento trasferito (a meno di $\hbar$):

$$\vec{q} = \vec{k}_a - \vec{k}'_a$$

e ribattezzata $\vec{r}$ la variabile di integrazione $\vec{\rho}$. Per contronto con (1), l'elemento di matrice di transizione è:

$$M_{fi} = \frac{Z_a Z_X e^2}{4\pi\epsilon_0}\int d^3r \frac{e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}}{r} \tag{4.2}$$

L'integrale non converge senza l'introduzione di un fattore integrante. Sappiamo però che esiste una trattazione esatta dello scattering da un potenziale coulombiano che dà un'ampiezza di transizione identica (in modulo) a quella che si ricava da (2) per il potenziale schermato. Una giustificazione fisica del procedimento deriva dal fatto che lo scattering non avviene tra i nuclei 'nudi' $a + X$ perchè il bersaglio consiste di atomi per cui la carica del nucleo è schermata dagli elettroni atomici. In conclusione poniamo:

$$M_{fi} = \lim_{\lambda\to 0}\frac{Z_a Z_X e^2}{4\pi\epsilon_0}\int d^3r \frac{e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}}{r} e^{-\lambda r} = \lim_{\lambda\to 0}\frac{Z_a Z_X e^2}{4\pi\epsilon_0}\int_0^\infty dr\, r e^{-\lambda r}\int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^{1} d\cos\theta\, e^{iqr\cos\theta} =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0} \frac{Z_a Z_X e^2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty dr r e^{-\lambda r} 4\pi \frac{\sin qr}{qr} = \lim_{\lambda\to 0} \frac{Z_a Z_X e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\pi}{q} Im \left[\int_0^\infty dr e^{-\lambda r} e^{iqr} \right] = \lim_{\lambda\to 0} \frac{Z_a Z_X e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\pi}{q} Im \left[\frac{\lambda + iq}{\lambda^2 + q^2} \right] =$$

$$= \frac{Z_a Z_X e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\pi}{q^2}$$

Inserendo l'espressione trovata di M_{fi} la sezione d'urto diventa:

$$d\sigma = \frac{2\pi}{\hbar v_{rel}} \delta(E_a + E_X - E'_a - E'_X) |M_{fi}|^2 \frac{d^3 p'_a}{(2\pi\hbar)^3} \to \frac{2\pi}{\hbar v_{rel}} \delta(E_a + E_X - E'_a - E'_X) |\frac{Z_a Z_X e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\pi}{q^2}|^2 \frac{d^3 p'_a}{(2\pi\hbar)^3}$$

In coordinate sferiche $d^3 p'_a = p'^2_a dp'_a d\Omega_a$. La dunzione δ di conservazione dell'energia permette di integrare su dp'_a. Siccome siamo in regime non relativistico $E = \frac{p^2}{2m}$. L'integrale diventa:

$$\int \delta \left(\frac{p_a^2}{2m_a} + \frac{p_X^2}{2m_X} - \frac{p'^2_a}{2m_a} - \frac{p'^2_X}{2m_a} \right) p'^2_a dp'_a$$

in cui bisogna ricordare che p'_X è fissato dalla conservazione dell'impulso come $\vec{p}'_X = \vec{p}_a + \vec{p}_X - \vec{p}'_a$. Nel sistema del centro di massa, in cui $\vec{p}_a + \vec{p}_X = 0$, abbiamo $\vec{p}'_X = -\vec{p}'_a = -\vec{p}'$ e $\vec{p}_X = -\vec{p}_a = -\vec{p}$ per cui l'integrale si semplifica in:

$$\int \delta \left(\frac{p^2}{2\mu} - \frac{p'^2}{2\mu} \right) p'^2 dp' = \int p' \mu \delta \left(\frac{p^2}{2\mu} - \frac{p'^2}{2\mu} \right) d \left(\frac{p'^2}{2\mu} \right) = \mu p$$

dove $\mu = \frac{m_a m_X}{m_a + m_X}$ è la massa ridotta del sistema $a + X$. Siccome $v_{rel} = \frac{p}{\mu}$, otteniamo:

$$d\sigma_{Ruth} = \frac{2\pi\mu}{\hbar p} |\frac{Z_a Z_X e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\pi}{q^2}|^2 \mu p d\Omega^{CM} \frac{1}{(2\pi\hbar)^3}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)^{CM}_{Ruth} = \frac{\mu^2}{\hbar^4} |\frac{Z_a Z_X e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{q^2}|^2 = \left(\frac{Z_a Z_X e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 |\frac{2\mu}{(\hbar q)^2}|^2$$

che si può riscrivere in funzione dell'energia E del moto relativo e dell'angolo di scattering ricordando che $\hbar\vec{q} = \vec{p}_a - \vec{p}'_a$:

$$|\hbar\vec{q}|^2 = \vec{p}_a^2 + \vec{p}'^2_a - 2 p_a p'_a \cos\theta \to_{CM} 2p^2 (1 - \cos\theta)$$

$$|\hbar\vec{q}|^2_{CM} = 4p^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} = 8\mu E \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

In conclusione abbiamo

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)^{CM}_{Ruth} = \left(\frac{Z_a Z_X e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left(\frac{1}{4E \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right)^2 \tag{4.3}$$

che è la famosa sezione d'urto per lo scattering coulombiano calcolata da Rutherford in meccanica classica. Più precisamente, Rutherford ottenne questa formula per la sezione d'urto differenziale nel sistema del laboratorio (E e θ in (3) sono per lui l'energia delle particelle α e l'angolo di scattering nel laboratorio) commettendo un errore trascurabile per scattering su nuclei pesanti ma importante per scattering su nuclei leggeri. La formula corretta della sezione d'urto Rutherford nel Lab è data dalla formula di trasformazione:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)^{Lab} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)^{CM} \frac{(1 + g^2 + 2g\cos\theta^{cm})^{3/2}}{1 + g\cos\theta^{cm}}$$

nel caso $g = \frac{m_a}{m_X} < 1$. Se $g > 1$ occorre sommare i contributi derivanti dai due valori possibili di $\cos\theta^{cm}$ per un definito valore di $\cos\theta^L$:

$$\cos\theta^{cm} = \pm\cos\theta^L\sqrt{1 - g^2\sin^2\theta^L} - g\sin^2\theta^L$$

Nel caso $g < 1$ solo il segno (+) è accettabile. SI può dimostrare che

$$1 + g^2 = 2g\cos\theta^{cm} = (\sqrt{1 - g^2\sin^2\theta^L} \pm g\cos\theta^L)^2$$

$$1 + g\cos\theta^{cm} = \sqrt{1 - g^2\sin^2\theta^L}(\sqrt{1 - g^2\sin^2\theta^L} \pm g\cos\theta^L)$$

Per $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^{CM}$ conviene usare l'espressione

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^{CM} = \left(\frac{Z_a Z_X e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 |\frac{2\mu}{(\hbar q)^2}|^2$$

perchè il momento trasferito è invariante per trasformazioni di Galilei $\hbar\vec{q}^{cm} = \hbar\vec{q}^L$. Ricordando (dalla cinematica) che:

$$p'_{aL} = \frac{\mu}{m_a} p_{aL}\left[g\cos\theta^L \pm \sqrt{1 - g^2\sin^2\theta^L}\right] \tag{4.4}$$

si ricava

$$|\hbar\vec{q}^L|^2 = p_{aL}^2\left[\sin^2\theta^L + \left\{\frac{\mu}{m_a}(g\cos\theta^L \pm \sqrt{1 - g^2\sin^2\theta^L}) - \cos\theta^L\right\}^2\right]$$

In conclusione, per la sezione d'urto nel Lab otteniamo (nel caso $m_a < m_X$):

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^{Lab} = \left(\frac{Z_a Z_X e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \left(\frac{2\mu}{|\hbar\vec{q}_L|^2}\right)^2 \frac{(\sqrt{1 - g^2\sin^2\theta^L} + g\cos\theta^L)^2}{\sqrt{1 - g^2\sin^2\theta^L}}$$

Alternativamente, si arriva alla $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^{Lab}$ partendo dalla formula

$$d\sigma_{ruth} = \frac{2\pi}{\hbar v_{rel}}\delta(E_a + E_X - E'_a - E'_X)|\frac{Z_a Z_X e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{4\pi}{q^2}|^2\frac{d^3 p'_a}{(2\pi\hbar)^3}$$

valida in ogni sistema di riferimento, calcolando l'integrale

$$\int \delta\left(\frac{p_a^2}{2m_a} + \frac{p_X^2}{2m_X} - \frac{p_a'^2}{2m_a} - \frac{p_X'^2}{2m_a}\right) p_a'^2 dp'_a$$

nel sistema del Lab, in cui $\vec{p}_X = 0$ e quindi $\vec{p}'_X = \vec{p}_a - \vec{p}'_a$ (eliminando per semplicità indici e apici ^{L} per indicare le quantità nel Lab):

$$\int \delta\left(\frac{p_a^2}{2m_a} - \frac{p_a'^2}{2m_a} - \frac{p_a^2 + p_a'^2 - 2p_a p'_a\cos\theta}{2m_X}\right) p'_a dp'_a = \frac{p_a'^2}{|-\frac{p'_a}{m_a} - \frac{p'_a}{m_X} + \frac{p_a\cos\theta}{m_X}|} = \frac{p_a'^2}{|\frac{p_a\cos\theta}{m_X} - \frac{p'_a}{\mu}}$$

Abbiamo usato la formula:

$$\int \delta[f(x)]g(x)dx = \sum_i \frac{g(x_i)}{|f'(x_i)|}$$

dove x_i sono gli zeri di $f(x)$, nell'ipotesi che un solo valore di p'_a sia accettabile (caso $m_z < m_X$). Usando la formula (4) per p'_a è agevole riottenere l'espressione per la sezione d'urto Rutherford nel Lab osservando che $v_{rel} = v_a^L$.

4.1 Scattering da nucleo esteso

Supponiamo che le particelle a del fascio siano puntiformi e senza spin, ma per il nucleo X teniamo conto della sua composizione di Z protoni e N neutroni distribuiti in un volume finito. Assumiamo però che i nucleoni siano puntiformi per cui solo i protoni contribuiscono alla densità di carica:

$$\rho_X(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{Z} e\delta^3(\vec{r} - \vec{r}_i)$$

Siccome i nucleoni hanno momento di dipolo magnetico intrinseco la densità di corrente $\vec{j}_X$ consta di due componenti, quella di convezione e quella di magnetizzazione. La parte magnetica in H'_{EM} risulta però trascurabile anche ora perchè il fascio incidente è composto da nuclei pesanti e senza spin. Quando considereremo lo scattering di elettroni da nuclei, dovremo (in principio) tener conto anche della parte magnetica di H'_{EM}. Per arrivare alla sezione d'urto, dobbiamo calcolare l'elemento do matrice di $\hat{\rho}_X(\vec{r})$ tra gli stati iniziale e finale del nucleo X. Questi stati dovranno fattorizzarsi in una parte che descrive il moto del centro di massa nucleare e in una parte che riguarda il moto interno dei nucleoni rispetto al centro di massa. La funzione d'onda iniziale sarà quindi della forma:

$$\psi_X(\vec{r}_i, ..., \vec{r}_A) = \Phi_{CM}(\vec{R})\Phi_X(\vec{r}\,'_1, ..., \vec{r}\,'_A)$$

avendo ignorato le variabili di spin. La coordinata $\vec{R}$ del centro di massa e le coordinate $\vec{r}\,'_i$ relative al centro di massa sono date da:

$$\vec{R} = \frac{1}{A}\sum_{i}^{A} \vec{r}_i \qquad \vec{r}\,'_i = \vec{r}_i - \vec{R}$$

nell'ipotesi che le masse di protone e neutrone siano uguali.

Ovviamente, solo $A-1$ vettori $\vec{r}\,'_i$ sono indipendenti perchè:

$$\sum_{i}^{A} \vec{r}\,'_i = 0$$

La parte interna della funzione d'onda di X resta inalterata nello stato finale (scattering elastico) mentre cambia quella riguardante il centro di massa:

$$\psi'_X(\vec{r}_1, ...\vec{r}_A) = \Phi_{CM}(\vec{r}\,'_1, ..., \vec{r}\,'_A)$$

Per procedere al calcolo dell'elemento di matrice di $\hat{\rho}_X(\vec{r})$:

$$\langle X'|\hat{\rho}_X|X\rangle = \int dr \psi'^*_X(\vec{r}_j) \sum_{i}^{Z} e\delta^3(\vec{r} - \vec{r}_i)\psi_X(\vec{r}_i)$$

dove $dr = d^3r_1 \cdots d^3r_A = \prod_i^A d^3r_i$. Occorre passare alle variabili $\vec{R}$, $\vec{r}\,'_i$. Si può dimostrare che $dr = d^3R dr'$:

$$dr' = A^3 d^3r_1 \cdots d^3r'_{A-1} = \delta^3(\frac{1}{A}\sum_{i}^{A} \vec{r}\,'_k) d^3r' \cdots d^3r'_A$$

Siccome il centro di massa si muove come una particella libera con impulso $\vec{p}_X$ iniziale e $\vec{p}'_X$ finale, Φ_{CM} e Φ'_{CM} sono date da:

$$\Phi_{CM}(\vec{R}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k}_X\cdot\vec{R}}$$

$$\Phi'_{CM}(\vec{R}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k}'_X\cdot\vec{R}}$$

Sostituendo nell'espressione dell'elemento di matrice otteniamo:

$$\langle X'|\hat{\rho}_X(\vec{r})|X\rangle = \int d^3R dr' \frac{1}{\sqrt{V}} e^{-i\vec{k}'_X\cdot\vec{R}} \Phi^*_X(\vec{r}'_j) \sum_i^Z e\delta^3(\vec{r} - \vec{r}'_i - \vec{R}) \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k}_X\cdot\vec{R}} \Phi_X(\vec{r}'_j)$$

Possiamo usare la $\delta^3(\vec{r} - \vec{r}'_i - \vec{R})$ per integrare su d^3R:

$$\langle X'|\hat{\rho}_X(\vec{r})|X\rangle = \frac{e^{i(\vec{k}_X - \vec{k}'_X)\cdot\vec{r}}}{V} \int dr' \Phi^*_X(\vec{r}_j) \sum_i^Z e e^{i(\vec{k}'_X - \vec{k}_X)\cdot\vec{r}'} \Phi_X(\vec{r}'_j)$$

che si può porre nella forma:

$$\langle X'|\hat{\rho}_X(\vec{r})|X\rangle = \frac{Z_X e}{V} e^{i(\vec{k}_X - \vec{k}'_X)\cdot\vec{r}} F(\vec{k}'_X - \vec{k}_X)$$

avendo definito il fattore di forma $F(\vec{k}'_X - \vec{k}_X)$ come:

$$F(\vec{k}) = \frac{1}{Z_X e} \int dr' \Phi^*_X(\vec{r}'_j) \sum_{i=1}^Z e e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}'_i} \Phi_X(\vec{r}'_j)$$

Per rendersi conto che tale formula per $F(\vec{k})$ non è che la versione quantistica del fattore di forma introdotto precedentemente, basta osservare che essa dà il valore di aspettazione sullo stato intrinseco di X della trasformata di Fourier di $\hat{\rho}_X(\vec{r})$ nel sistema del centro di massa:

$$\int d^3r e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \hat{\rho}_X(\vec{r}) = \int d^3r e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \sum_i^Z e\delta^3(\vec{r} - \vec{r}'_i) = \sum^Z e e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}'_i}$$

opportunamente normalizzata ($F(0) = 1$). Per confronto di

$$\langle X'|\hat{\rho}_X(\vec{r})|X\rangle = Z_X e \psi'^*_X(\vec{r}) \psi_X(\vec{r})$$

ovvero l'elemento di matrice di $\hat{\rho}_X$ nel caso di nucleo puntiforme, con

$$\langle X'|\hat{\rho}_X(\vec{r})|X\rangle = \frac{Z_X e}{V} e^{i(\vec{k}_X - \vec{k}'_X)\cdot\vec{r}} F(\vec{k}'_X - \vec{k}_X)$$

vediamo che l'effetto della struttura estesa del nucleo si traduce nel fattore di forma moltiplicativo. Procedendo come nel caso di scattering da nucleo puntiforme su ottiene:

$$\langle a', X'|H'_{EM}|a, X\rangle = \frac{1}{V} \delta^3_{\vec{k}_a + \vec{k}_X, \vec{k}'_a + \vec{k}'_X} M_{fi} F(\vec{q})$$

dove $M_{fi} = \frac{Z_a Z_X e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{4\pi}{q^2}$ e abbiamo usato la conservazione dell'impulso per trasformare $\vec{k}'_X - \vec{k}_X$ in $\vec{q} = \vec{k}_a - \vec{k}'_a$. In conclusione, la sezione d'urto di scattering coulombiano da nucleo esteso è data dal prodotto della sezione d'urto da nucleo puntiforme per il modulo al quadrato del fattore di forma:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^{CM}_{esteso} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^{CM}_{puntif.} |F(\vec{q})|^2 \tag{4.5}$$

Osservazioni finali:

1. La formula (5) non è adeguata per studiare lo scatteing $a + X$ a energie tali che $F(q) \neq 1$ e quindi per ricavare la densità di carica del nucleo X. Il motivo è che, a questo punto, entrano in gioco anche le forze nucleari e la sezione d'urto sperimentale dipende più da queste forze che dalla estensione spaziale della densità di carica.

2. Esiste però un caso importante a cui si applicano le considerazioni di questo paragrafo ed è lo scattering elettrone-nucleo, perchè l'elettrone è puntiforme e non risente dell'interazione forte nucleare. Anche in questo caso però sono necessarie correzioni perchè l'elettrone ha spin $\frac{1}{2}$ e il suo moto deve essere trattato relativisticamente.

3. Infine, la trattazione svolta per lo scattering elettromagnetico sarà alla base della teoria di Fermi del decadimento β nucleare.