

Capitolo 3

Sezione d'urto e probabilità di decadimento in meccanica quantistica

La formula che lega il tasso di reazioni per unità di volume a $d\sigma_{ab}$, che abbiamo visto nel capitolo *Conteggi e sezione d'urto*:

$$\frac{dN_b}{dt dV} = n_a n_X v_{rel} d\sigma_{ab}$$

si trasforma nel caso teorico quantistico in

$$\frac{dW_{ab}}{dt dV} = \rho_a \rho_X v_{rel} d\sigma_{ab} \quad (3.1)$$

dove ρ_a e ρ_X sono le densità di probabilità ($|\psi|^2$) delle particelle a e del nucleo X e il numero di reazioni per unità di tempo e di volume è diventato la probabilità per unità di tempo e di volume che nell'urto $a + X$ avvenga la reazione $a + X \rightarrow b + Y$. In teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo si dimostra che al prim'ordine:

$$\frac{dW_{ab}}{dt} = \frac{2\pi}{\hbar} |H'_{fi}|^2 \delta(E_f - E_i) \quad (3.2)$$

con i ed f stati iniziale e finale. Le relazioni (2) e (3) collegano la sezione d'urto alla probabilità per unità di tempo che avvenga la transizione $i \rightarrow f$ per effetto della perturbazione H' . Nel caso di transizioni nel continuo, ci sono dN_f stati finali con energia compresa tra E_f ed $E_f + dE_f$. Se indichiamo con $\rho_f(E_f)$ la densità degli stati finali, si ha:

$$dN_f = \rho_f(E_f) dE_f$$

e l'equazione (3) diventa:

$$\frac{dW_{ab}}{dt} = \frac{2\pi}{\hbar} |H'_{fi}|^2 \rho_f(E_i)$$

che è nota come la 'regola d'oro N°2' di Fermi. La regola d'oro N°1 corrisponde al caso in cui $H'_{fi} = 0$ e occorre usare la teoria delle perturbazioni al secondo ordine. Con la normalizzazione in una scatola di lato L e con condizioni di periodicità al contorno, $\psi(\frac{L}{2}) = \psi(-\frac{L}{2})$, gli impulsi sono discretizzati:

$$\vec{p} = \frac{2\pi\hbar}{L} \vec{n} \quad \vec{n} \in \mathbb{Z}^3$$

e le autofunzioni di particella libera sono normalizzate con la delta di Kronecker:

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

$$\int d^3r \psi_{\vec{k}}^*(\vec{r}) \psi_{\vec{k}'}(\vec{r}) = \delta_{\vec{k},\vec{k}'}$$

perchè

$$\int d^3r e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} e^{i\vec{k}'\cdot\vec{r}} = V \delta_{\vec{k},\vec{k}'}$$

Il numero di stati di particella libera con impulso nell'intervallo $\vec{p}, \vec{p} + d\vec{p}$ è dato da:

$$dN = \frac{V d^3p}{(2\pi\hbar)^3}$$

Nel caso di una reazione a due corpi $a + X \rightarrow b + Y$:

$$dN_f = \frac{V d^3p_b V d^3p_Y}{(2\pi\hbar)^3 (2\pi\hbar)^3}$$

In conclusione abbiamo

$$\rho_a \rho_X v_{rel} d\sigma_{ab} = \frac{1}{V} \frac{dW_{ab}}{dt} = \frac{1}{V} \frac{2\pi}{\hbar} |H'_{fi}|^2 \delta(E_f - E_i) \frac{V d^3p_b V d^3p_Y}{(2\pi\hbar)^6}$$

Siccome $\rho_a = |\psi_a(r)|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k}_a \cdot \vec{r}} \right|^2 = \frac{1}{V}$ e analogamente $\rho_X = \frac{1}{V}$, risulta:

$$d\sigma_{ab} = V \frac{2\pi}{\hbar v_{rel}} |H'_{fi}|^2 \delta(E_f - E_i) \frac{V d^3p_b V d^3p_Y}{(2\pi\hbar)^3 (2\pi\hbar)^3}$$

Alla fine si passa al limite per $V \rightarrow \infty$. I vari fattori V a moltiplicare e dividere si devono cancellare. Siccome l'hamiltoniano H' in (3) è invariante per traslazioni (conservazione dell'impulso), dall'elemento di matrice H'_{fi} si può estrarre un fattore $V \delta_{\vec{k}_i, \vec{k}_f}^3$:

$$\langle f | H' | i \rangle = V \delta_{\vec{k}_i, \vec{k}_f}^3 \mathcal{M}_{fi}$$

\mathcal{M}_{fi} è un elemento di matrice intrinseco, dipende cioè da un integrale sulle variabili relative al centro di massa, $\vec{r}_i^{cm} = \vec{r}_i - \vec{R}$. Se indichiamo con \hat{O} l'operatore responsabile della transizione $i \rightarrow f$, abbiamo:

$$\mathcal{M}_{fi} = \int d^3r \psi_b^* \psi_Y^* \hat{O} \psi_a \psi_X = \left(\frac{1}{\sqrt{V}} \right)^4 M_{fi}$$

avendo evidenziato i fattori di normalizzazione $\frac{1}{\sqrt{V}}$ per ogni stato di particella libera. Siccome il quadrato della delta di Kronecker è uguale alla delta stessa, si ha:

$$|\langle f | H' | i \rangle|^2 = V^2 \delta_{\vec{k}_i, \vec{k}_f}^3 |\mathcal{M}_{fi}|^2 = \frac{1}{V^2} \delta_{\vec{k}_i, \vec{k}_f}^3 |M_{fi}|^2$$

Facciamo adesso tendere all'infinito il volume di normalizzazione:

$$V \delta_{\vec{k}_i, \vec{k}_f}^3 \rightarrow (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k}_i - \vec{k}_f) = (2\pi\hbar)^3 \delta^3(\vec{p}_i - \vec{p}_f)$$

perchè ora gli stati di particella libera sono normalizzati alla delta di Dirac, e l'espressione della sezione d'urto diventa:

$$d\sigma_{ab} = \frac{2\pi}{\hbar v_{rel}} \delta(E_a + E_X - E_b - E_Y) (2\pi\hbar)^3 \delta^3(\vec{p}_a + \vec{p}_X - \vec{p}_b - \vec{p}_Y) |M_{fi}|^2 \frac{d^3p_b d^3p_Y}{(2\pi\hbar)^6}$$

avendo esplicitato $i = a + X$ e $f = b + Y$.

3.1 Decadimenti in meccanica quantistica

Bastano poche modifiche rispetto a quanto visto per lo scattering. Consideriamo un decadimento a tre corpi (come il decadimento β):

$$X \rightarrow a + b + Y$$

e la normalizzazione in una scatola per gli stati. La probabilità di transizione per unità di tempo (che chiameremo $d\lambda$) è data da:

$$d\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} \delta(E_i - E_f) |H'_{fi}|^2 \frac{V d^3p_a}{(2\pi\hbar)^3} \frac{V d^3p_b}{(2\pi\hbar)^3} \frac{V d^3p_Y}{(2\pi\hbar)^3}$$

Come nel capitolo precedente:

$$\langle f | H' | i \rangle = V \delta_{\vec{k}_i, \vec{k}_f}^3 \mathcal{M}_{fi}$$

$$\mathcal{M}_{fi} = \int d^3r \psi_a^* \psi_b^* \psi_Y^* \hat{O} \psi_X = \left(\frac{1}{\sqrt{V}} \right)^4 \mathcal{M}_{fi}$$

$$\Rightarrow |H'_{fi}|^2 = V^2 \delta_{\vec{k}_i, \vec{k}_f}^3 \left(\frac{1}{V} \right)^4 |M_{fi}|^2$$

$$d\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} \delta(E_i - E_f) V \delta_{\vec{k}_i, \vec{k}_f}^3 |M_{fi}|^2 \frac{V d^3p_a}{(2\pi\hbar)^3} \frac{V d^3p_b}{(2\pi\hbar)^3} \frac{V d^3p_Y}{(2\pi\hbar)^3}$$

Passando al limite del continuo:

$$d\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} \delta(E_i - E_f) (2\pi\hbar)^3 \delta^3(\vec{k}_i - \vec{k}_f) |M_{fi}|^2 \frac{d^3p_a}{(2\pi\hbar)^3} \frac{d^3p_b}{(2\pi\hbar)^3} \frac{d^3p_Y}{(2\pi\hbar)^3}$$