

VII

UN ESEMPIO DI CALCOLO DI RUMORE ELETTRONICO

1.- Il rivelatore al Silicio

In questo capitolo esaminiamo in dettaglio un rivelatore al Silicio e la sua catena elettronica di preamplificazione, amplificazione e formazione.

Non descriveremo in dettaglio il funzionamento di un rivelatore al Silicio, ma ci limitiamo a dire che esso, almeno nella applicazione che ci interessa, è costituito da un diodo a giunzione con la zona n^{++} fortemente drogata e molto sottile e una zona di *bulk* di tipo p a drogaggio molto inferiore. La superficie della giunzione (nel piano perpendicolare alla direzione lungo la quale si sviluppa la barriera) può essere di alcuni cm^2 , lo spessore della zona n^{++} di meno di $1 \mu m$ e lo spessore della zona p di alcune centinaia di μm . Quando il diodo che costituisce il rivelatore viene contropolarizzato ($30 \div 50 V$ o più) si forma una zona di svuotamento che - a causa del basso drogaggio della zona p del *bulk*- arriva ad estendersi per tutto lo spessore del rivelatore. La zona di svuotamento, libera da portatori di carica, è sede di un forte campo elettrico.

Uno schizzo del rivelatore che mostra una sua sezione trasversale è mostrata nell'inserto b) della Fig.1. Il rivelatore è indicato col simbolo circuitale del diodo, affiancato dal valore di capacità C_D che gli compete e che lo caratterizza dal punto di vista sia del segnale che del rumore, come sarà chiaro nel seguito.

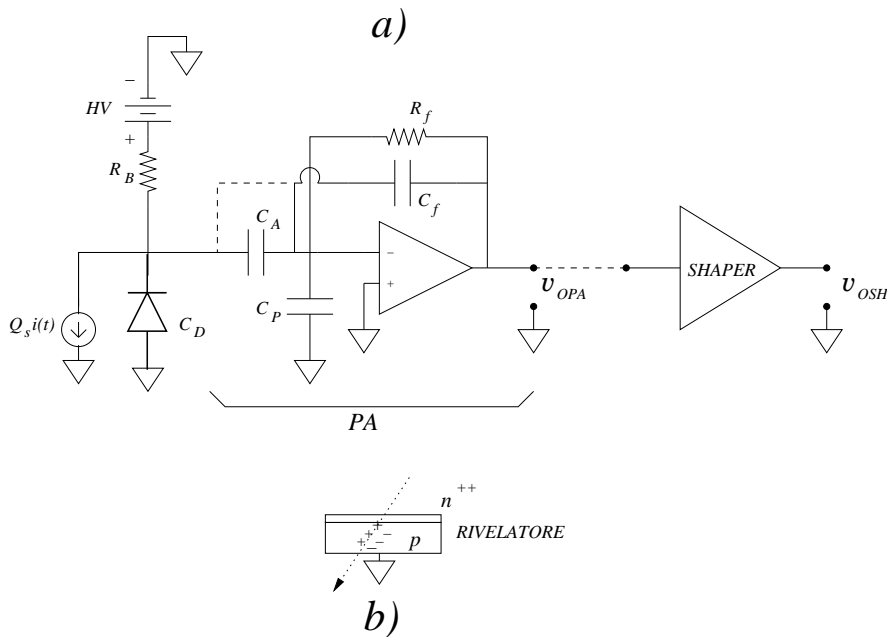


Fig.VII.1

Se una particella ionizzante penetra nel rivelatore (o della radiazione luminosa investe la superficie della zona n^{++}) vengono prodotte delle coppie elettrone-lacuna nella zona di svuotamento *. Le cariche prodotte, sotto l'azione del campo elettrico applicato, cominciano a muoversi verso gli elettrodi (gli elettroni verso il catodo n^{++} e le lacune verso l'anodo). Durante il loro moto nella zona della barriera le cariche inducono nel circuito esterno una corrente, che si esaurisce quando esse raggiungono gli elettrodi (trascurando gli effetti dovuti alla propagazione del campo elettromagnetico sulle dimensioni finite del circuito connesso al rivelatore). L'integrale dell'impulso di corrente prodotto dal moto delle cariche è uguale al valore assoluto dei due tipi di carica (lacune e elettroni) liberati dalla particella (o dai fotoni) nel rivelatore. A sua volta la carica è proporzionale alla energia perduta dalla particella ionizzante (o al numero di fotoni che hanno investito l'anodo). Pertanto l'interesse primario consiste nella misura della carica e infatti la catena elettronica accoppiata al rivelatore è proprio dedicata alla amplificazione e misura di questa carica, ottimizzando il rapporto segnale/rumore.

2.- La catena di misura

La catena elettronica di misura è riportata nella Fig.1. $Q_s \cdot i(t)$ rappresenta il generatore di corrente che descrive il comportamento del rivelatore al Silicio in seguito al passaggio della particella ionizzante. Il segnale $i(t)$ è pensato normalizzato ad area unitaria; esso ha usualmente una estensione temporale di alcuni ns o meno, in pratica il tempo che le cariche "liberate" impiegano a raggiungere gli elettrodi (lo spessore della zona di barriera è di almeno due ordini di grandezza superiore a quella dei diodi progettati per applicazioni circuitali); nel seguito assumeremo $i(t) = \delta(t)$, ovvero un segnale di durata nulla. Il rivelatore, dal punto di vista circuitale, in quanto costituito da un diodo contropolarizzato si rappresenta assai fedelmente con una capacità C_D (che ammonta a circa $100 pF$ per ogni cm^2 di superficie e per $100 \mu m$ di spessore di svuotamento). R_B ($10 M\Omega$ o più) è la resistenza in serie al generatore di tensione HV che assicura la contropolarizzazione del rivelatore. La resistenza R_B deve essere inserita (e poi vedremo che deve essere anche di valore elevato) non fosse altro perché, se HV fosse collegato direttamente al rivelatore, tutta la corrente $Q_s \cdot i(t)$ verrebbe assorbita dal generatore ideale di tensione HV (un cortocircuito per il segnale). C_A (dell'ordine di $0.1 \mu F$) è una capacità che serve a disaccoppiare la tensione ai capi del rivelatore dalla massa virtuale dell'operazionale. Il valore di C_A è talmente superiore a C_D che il suo effetto sul segnale sarà ignorato nel seguito e la sostituiamo concettualmente con un cortocircuito. C_P ($< 10 pF$, tipicamente) rappresenta la capacità "parassita" all'ingresso del circuito operazionale, dovuta ai collegamenti e allo stadio di ingresso. Il blocco PA è il cosiddetto *preamplificatore* (di carica): esso ha il compito di fornire in uscita una tensione V_{OPA} ("V output pre-amplifier") proporzionale all'integrale di $Q_s \cdot i(t)$, ovvero $Q_s \cdot C_f$ ($1 \div 2 pF$) è la capacità in reazione all'operazionale che funge quindi da *integratore di Miller*. A ($\gg 1$) rappresenta il guadagno del blocco base. Spesso la capacità C_f si richiude (come nel tratteggio) a monte di C_A , così da rendere l'effetto di C_A sul segnale ancor meno importante. R_f (tipicamente $> 100 M\Omega$) ha la funzione principale di correggere –come vedremo nel seguito–

* Per la rivelazione di particelle ionizzanti si ha spesso interesse ad avere spessori elevati per frenarle maggiormente e far loro perdere più energia; per i fotoni nel visibile questo interesse non esiste dato il loro bassissimo potere penetrante. Comunque una profonda zona di svuotamento è utile lo stesso, come vedremo successivamente, per il benefico effetto associato alla diminuita capacità

la risposta ideale di un integratore “matematico” e permette di scaricare dinamicamente l’uscita dell’operazionale senza che si debba ricorrere a circuiti dedicati per la scarica del condensatore C_f dopo ogni integrazione. Nel seguito, in gran parte della trattazione, il suo effetto sul segnale verrà trascurato.

Lo *shaper* o *formatore*, che riceve ai terminali di ingresso l’uscita del *PA*, ha la funzione, che sarà ampiamente discussa nel seguito, di amplificare e filtrare in frequenza il segnale, preservando l’informazione della carica raccolta Q_s e ottimizzando il rapporto segnale/rumore.

3.- La risposta della catena elettronica al segnale

Consideriamo ora la risposta del nostro circuito ad un segnale in ingresso, con andamento a $\delta(t)$. Come anticipato, trascuriamo l’effetto sul segnale di R_B , R_f e C_A , almeno per ora. Lo studio della risposta al segnale viene fatto ammettendo l’assenza di effetti di rumore elettrico, che saranno considerati nel seguito; ammettiamo il circuito perfettamente lineare, per cui tratteremo separatamente gli effetti del segnale e del rumore.

Con riferimento alla Fig.2, sappiamo che nel $\lim_{A \rightarrow \infty}$, la risposta del *PA* vale

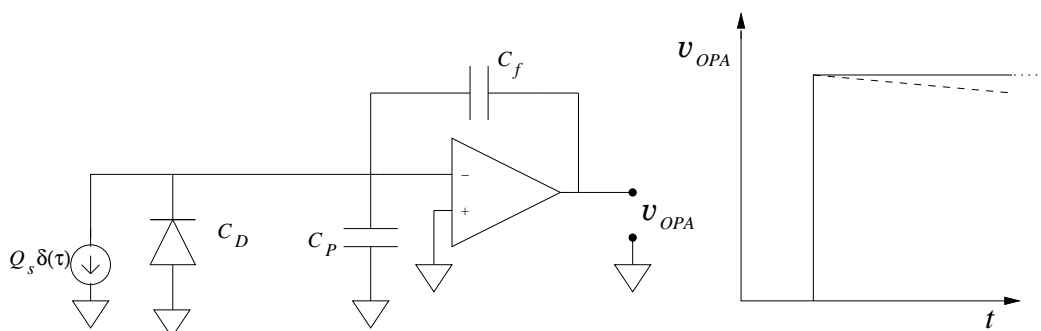


Fig.VII.2

$$V_{OPA} = \frac{Q_s}{C_f} \quad \forall t \geq 0, \quad = 0 \quad \forall t < 0 \quad (\text{VII.1})$$

dove la polarità del segnale dipende dall’aver assunto (coerentemente con la polarizzazione del rivelatore) una corrente positiva come disegnata. Nella Fig.2, a destra, è riportato l’andamento a gradino del segnale di uscita.

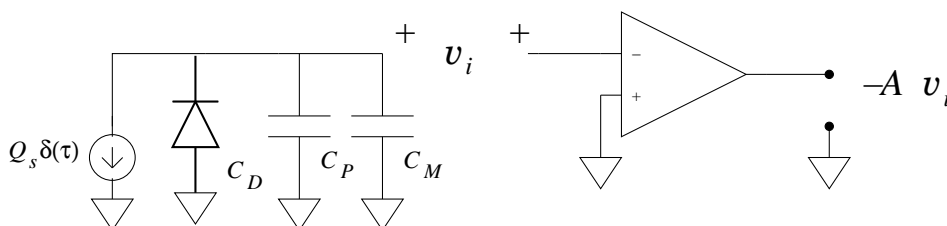


Fig.VII.3

Se A è finito, sfruttando il teorema di *Miller*, abbiamo lo schema equivalente di Fig.3, dove C_M rappresenta la capacità *Miller* riportata in ingresso: $C_M = C_f(1 + A)$:

$$v_i = -\frac{Q_s}{C_D + C_P + C_M} = -\frac{Q_s}{C_D + C_P + C_f(1 + A)} = -\frac{Q_s}{\Sigma C + AC_f} \quad \forall t \geq 0 \quad (\text{VII.2})$$

$$V_{OPA} = -Av_i = A\frac{Q_s}{\Sigma C + AC_f} = \frac{Q_s}{C_f + \Sigma C/A} \quad \forall t \geq 0 \quad (\text{VII.3})$$

con $\Sigma C = C_D + C_P + C_f$. Si vede che rispetto al caso di aver assunto un guadagno infinito, a denominatore c'è un termine correttivo tanto più piccolo quanto maggiore è A . Nella Fig.4 riportiamo l'andamento della tensione V_{OPA} :

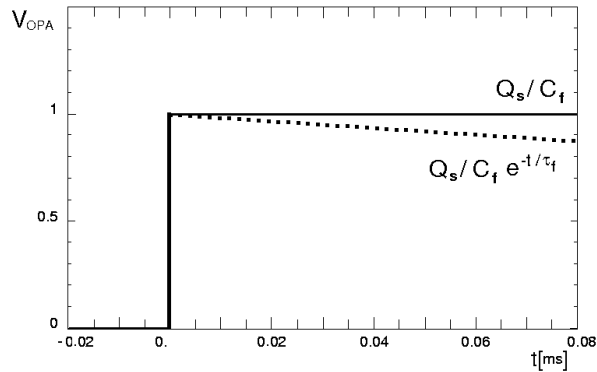


Fig.VII.4

Se teniamo conto della resistenza R_f , la risposta al tempo $t = 0$ non cambia, ma per $t > 0$ la ddp decade esponenzialmente con costante di tempo $\tau_f = C_f R_f$:

$$V_{OPA} = \frac{Q_s}{C_f + \Sigma C/A} \cdot e^{-t/\tau_f} \quad (\text{VII.4})$$

Valori tipici: $C_f \approx 1 \text{ pF}$, $R_f \approx 100 \text{ M}\Omega \div 1 \text{ G}\Omega$ e pertanto $\tau_f \approx 100 \text{ }\mu\text{s} \div 1 \text{ ms}$.

Studiamo ora il trattamento di questo segnale effettuato dal cosiddetto *Shaper* o *Formatore*. In realtà si tratta di un *Formatore + Amplificatore*. Esso è tipicamente costituito da un filtro passa banda, con frequenza centrale attorno al *MHz*. Al momento sorvoliamo sui motivi che portano ad utilizzare un *Formatore* siffatto. Ricordiamo soltanto che la grandezza che vogliamo misurare è Q_s e che il preamplificatore presenta una uscita che raggiunge una ampiezza proporzionale a Q_s in tempi brevissimi; pertanto, all'uscita del *PA* l'informazione su Q_s è disponibile non appena è avvenuto il passaggio di corrente. Nel caso semplificato che stiamo trattando, il tempo di passaggio della corrente è addirittura nullo (corrente con andamento a $\delta(t)$) e nei casi reali comunque il segnale di corrente dura alcuni *ns*. Tutto questo significa che l'informazione su Q_s è estraibile senza problemi sui tempi tipici corrispondenti alla banda passante definita dallo *Shaper* ($\approx \text{MHz}$). Vediamo in dettaglio come questo avviene.

Il filtro passa banda può essere realizzato come la successione di di un filtro $C - R$ passa alto e di un filtro $R - C$ passa basso, disaccoppiati da un amplificatore ideale di tensione con guadagno G (l'amplificatore di cui si diceva prima). Lo schema è riportato il Fig.5a.

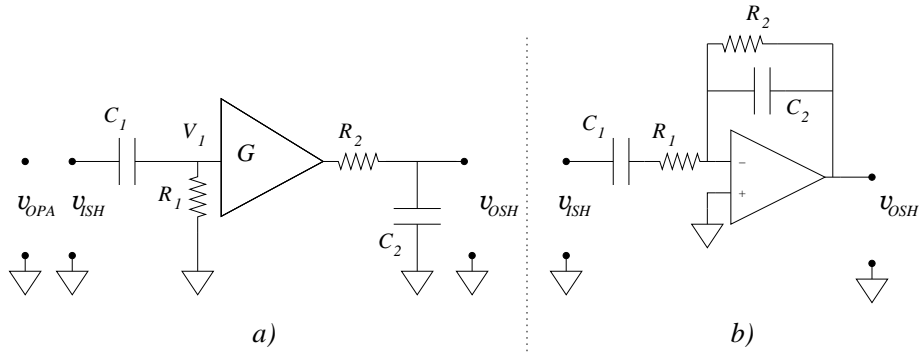


Fig.VII.5

Il disaccoppiamento fra i due filtri non è essenziale, ma semplifica leggermente lo studio della risposta; tuttavia in pratica quasi mai si ricorre allo schema del tipo proposto in Fig.5a; si preferiscono piuttosto schemi del tipo di Fig.5b, per il quale è semplice far vedere che, a parte un fattore reale moltiplicativo, la funzione di trasferimento è uguale a quella del circuito mostrato in Fig.5a. Comunque nel seguito faremo sempre riferimento allo schema di principio di Fig.5a.

Si tratta ora di calcolare l'uscita V_{OSH} in risposta alla tensione a gradino (*step*) in ingresso. Il metodo più semplice per trovare la soluzione sarebbe quello di utilizzare le tecniche di Trasformata di *Laplace*. Tuttavia è relativamente semplice trovare l'andamento del segnale nei vari stadi del Formatore risolvendo il circuito elementarmente nel dominio del tempo.

Calcoliamo innanzitutto l'andamento temporale della tensione V_1 ; la *step* ($V_0 = \frac{Q_s}{C_f + \Sigma C/A}$) è simulata da un generatore di tensione (ammettiamo che l'impedenza di uscita del *PA* sia trascurabile) che si chiude istantaneamente al tempo $t = 0$ sul partitore $C_1 - R_1$ (Fig.6; nel seguito $\tau_1 = R_1 C_1$ e $\tau_2 = R_2 C_2$):

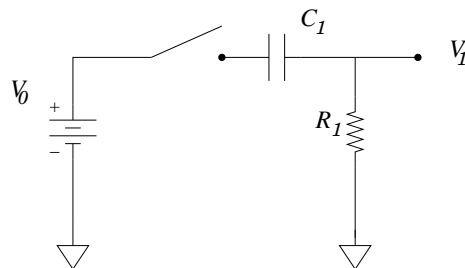


Fig.VII.6

dalla II legge di *Kirchhoff* abbiamo (per $t > 0$):

$$V_0 = i_1 R_1 + \frac{q_1}{C_1} = \frac{dq_1}{dt} R_1 + \frac{q_1}{C_1} \tag{VII.5}$$

Come soluzione particolare possiamo prendere:

$$Q_1^p = C_1 V_0 = cost \tag{VII.6}$$

e quindi aggiungere la soluzione della equazione omogenea associata:

$$q_1^o(t) = Q_1^o e^{-t/\tau_1} \tag{VII.7}$$

Per la soluzione completa ($q_1^o(t) + Q_1^p$), imponendo le condizioni iniziali ($Q_1 = 0$), abbiamo:

$$V_1(t) = V_0 - Q_1(t)/C_1 = V_0 e^{-t/\tau_1} \quad (\text{VII.8})$$

Questa tensione viene presentata tal quale all'ingresso del secondo filtro (passa basso) dal ripetitore di tensione (poniamo al momento $G = 1$).

Nella Fig.7 è rappresentata la seconda parte della formazione del segnale:

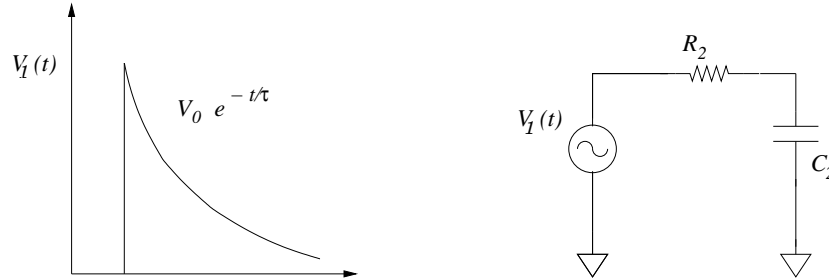


Fig.VII.7

Applicando la II legge di *Kirchhoff* abbiamo:

$$V_1(t) = i_2 R_2 + \frac{q_2}{C_2} = \frac{dq_2}{dt} R_2 + \frac{q_2}{C_2} \quad (\text{VII.9})$$

Cerchiamo la soluzione particolare nella forma

$$q_2^p = Q_0^p e^{-t/\tau_1} \quad (\text{VII.10a})$$

$$\frac{dq_2^p}{dt} = -\frac{Q_0^p}{\tau_1} e^{-t/\tau_1} \quad (\text{VII.10b})$$

La 10b), sostituita nella 9) dà:

$$V_0 = -\frac{R_2}{\tau_1} Q_0^p + \frac{Q_0^p}{C_2} \quad (\text{VII.11})$$

ovvero otteniamo

$$Q_0^p = \frac{V_0 C_2 \tau_1}{\tau_1 - \tau_2} \quad (\text{VII.12})$$

Troviamo ora la soluzione dell'equazione omogenea associata nella forma:

$$q_2^o(t) = Q_2^o e^{-t/\tau_2} \quad (\text{VII.13})$$

Pertanto per la soluzione completa $q_2(t)$ otteniamo:

$$q_2(t) = \frac{V_0 C_2 \tau_1}{\tau_2 - \tau_1} \cdot e^{-t/\tau_1} + Q_2^o e^{-t/\tau_2} \quad (\text{VII.14})$$

Per la derivata di $q_2(t)$ otteniamo:

$$\frac{dq_2(t)}{dt} = i_2(t) = -\frac{V_0 C_2}{\tau_2 - \tau_1} \cdot e^{-t/\tau_1} - \frac{Q_2^o}{\tau_2} e^{-t/\tau_2} \quad (\text{VII.15})$$

Imponendo che la corrente a $t = 0$ valga $\frac{V_0}{R_2}$ (il condensatore ha una ddp nulla ai suoi capi inizialmente in quanto scarico), abbiamo la prescrizione su Q_2^o :

$$\frac{V_0}{R_2} = -\frac{V_0 C_2}{\tau_2 - \tau_1} - \frac{Q_2^o}{\tau_2} \quad (\text{VII.16})$$

e quindi

$$Q_2^o = \tau_2 V_0 \left(\frac{C_2}{\tau_2 - \tau_1} - \frac{1}{R_2} \right) = V_0 \frac{C_2 \tau_1}{\tau_2 - \tau_1} \quad (\text{VII.17})$$

Pertanto:

$$q_2(t) = \frac{V_0 C_2 \tau_1}{\tau_2 - \tau_1} (e^{-t/\tau_2} - e^{-t/\tau_1}) \quad (\text{VII.18})$$

e

$$V_{OSH} = \frac{q_2(t)}{C_2} = \frac{V_0 \tau_1}{\tau_2 - \tau_1} (e^{-t/\tau_2} - e^{-t/\tau_1}) \quad (\text{VII.19})$$

Nella pratica si pone $\tau_1 = \tau_2$ e quindi occorre calcolare il limite della 19) per $\tau_1 \rightarrow \tau_2 = \tau$ (si noti lo zero al numeratore e al denominatore per $\tau_1 = \tau_2$). Otteniamo allora:

$$\begin{aligned} V_{OSH}(\tau_1 = \tau_2 = \tau) &= \lim_{\tau_1 \rightarrow \tau_2} \frac{V_0 \tau_1}{\tau_2 - \tau_1} e^{-t/\tau_2} (1 - e^{-t \cdot (1/\tau_1 - 1/\tau_2)}) = \\ &= \frac{V_0 \tau_1}{\tau_2 - \tau_1} e^{-t/\tau_2} t \cdot (1/\tau_1 - 1/\tau_2) = V_0 \frac{t}{\tau} e^{-t/\tau} \end{aligned} \quad (\text{VII.20})$$

con, ricordiamolo, $V_0 = \frac{Q_s}{C_f + \Sigma C/A}$. L'andamento di V_{OSH} è riportato in Fig.8.

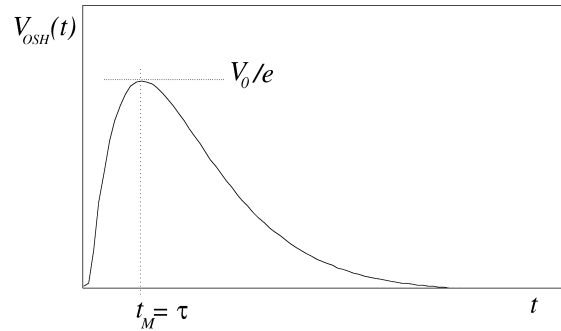


Fig.VII.8

Il massimo, che è raggiunto per $t_M = \tau$, vale V_0/e , con e numero di *Nepero*. Il segnale ha una estensione temporale effettiva dell'ordine di alcuni τ , che vedremo essere nei casi reali attorno al μs . L'informazione sulla quantità da misurare è tutta contenuta nel massimo (detto anche "ampiezza del segnale"). Se l'amplificatore che disaccoppia i due filtri presenta un guadagno G , la tensione in uscita dallo *Shaper* viene semplicemente moltiplicata per G (nella solita ipotesi che G sia una costante reale, ovvero che l'amplificatore abbia una risposta indipendente dalla frequenza).

La misura di Q_s quindi può essere fatta da un ADC che misura l'ampiezza del segnale all'uscita del Formatore. Questa è infatti la procedura normalmente seguita; le conversioni dell'ADC (detto "di picco" per la funzione svolta di misura del massimo) vengono poi classificate in modo da disporre delle distribuzioni delle ampiezze dei segnali provenienti dal rivelatore. Se i segnali fossero tutti identici, ovvero fossero identiche le cariche Q_s depositate dalle particelle, se fossimo in assenza di rumore e le fluttuazioni nelle conversioni assenti, le classificazioni nell'istogramma interesserebbero un unico canale in cui si addenserebbero tutti i conteggi. La presenza del rumore, come vedremo in dettaglio, allarga questa distribuzione.

Prima di passare ad affrontare il problema del calcolo del rumore nel nostro sistema, ricordiamo la funzione complessiva svolta dal sistema preamplificatore+formatore:

1. il preamplificatore di carica produce in uscita un segnale a gradino con una altezza proporzionale alla carica; se il guadagno A del blocco amplificatore base è $\gg 1$ (e tipicamente vale $10^4 \div 10^5$),

l'uscita dipende solo da Q_s e dal valore della capacità C_f che deve essere ad alta stabilità, in particolare con bassissimo coefficiente di temperatura. La preamplificazione di carica si preferisce in genere rispetto ad altre soluzioni proprio perché essa dà una risposta praticamente indipendente (nel solito limite su A molto grande) dalla capacità C_D del rivelatore che non è particolarmente stabile e controllata: per esempio, se invece di usare un preamplificatore di carica avessimo usato un preamplificatore di tensione, avessimo cioè misurato la tensione che si sviluppa ai capi del rivelatore a seguito dell'impulso di corrente, avremmo in questo caso avuto $V_D = -\frac{Q_s}{C_D + C_P}$ e quindi la risposta sarebbe venuta a dipendere da C_D e C_P , entrambe molto poco sotto il nostro controllo e non particolarmente stabili in funzione della temperatura (inoltre si ricorderà che C_D varia con la tensione di contropolarizzazione applicata al rivelatore).

2. il formatore preserva l'informazione su Q_s , ma confina temporalmente il segnale in un ambito ristretto di tempo. Vedremo che questo ha un effetto benefico sul rapporto segnale/rumore. Tuttavia, anche se il rumore non fosse presente, esiste comunque un vantaggio nella formazione su tempi brevi. Infatti, supponiamo che i segnali arrivino sul rivelatore, separati da una differenza di tempo dell'ordine di una decina di μs ; si ricorda che i tempi di arrivo delle particelle sono normalmente fuori dal controllo stretto dello sperimentatore e quindi quei $10 \mu s$ vanno pensati come valore medio di un intervallo di tempo fluttuante fra un impulso e un altro. Se volessimo misurare le ampiezze all'uscita del PA andremmo rapidamente in difficoltà a causa del cosiddetto "impilamento" dei segnali (vedi Fig.9a).

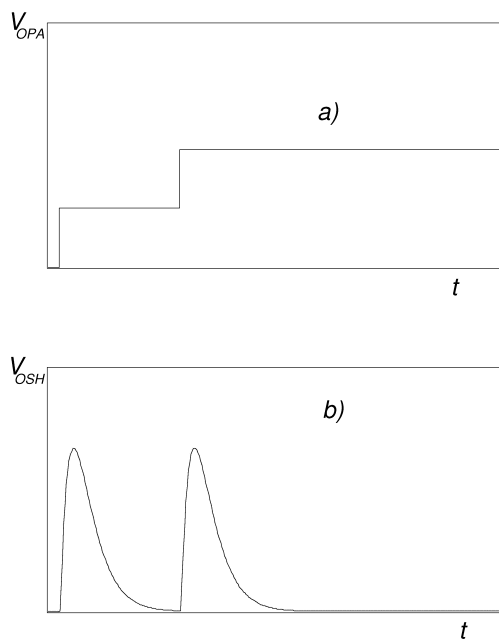


Fig.VII.9

Invece, come mostrato nella parte b della figura, all'uscita del formatore i segnali compaiono ben separati e la determinazione del massimo non presenta alcuna difficoltà aggiuntiva rispetto al caso di segnale isolato. Sulla base di questo argomento, sembrerebbe anzi che convenisse diminuire al massimo la durata della formazione, preservando solo il vincolo ovvio che il tempo della formazione τ fosse superiore alla durata dell'impulso di corrente (che, come sappiamo, non è proprio una $\delta(t)$). A parte quest'ultimo vincolo, che in pratica porrebbe un limite inferiore per τ dell'ordine di $10 \div 50 ns$ per rivelatori al Silicio, sarà proprio l'esame del rumore del nostro sistema a insegnarci che il valore

di τ è determinato da un compromesso che ottimizza il rapporto segnale/rumore e di fatto preclude una riduzione acritica del tempo di formazione τ .

4.– *La risposta dello shaper nel dominio delle frequenze*

Per quanto riguarda il segnale non ha alcun interesse la risposta del formatore (né del preamplificatore) nel dominio delle frequenze, ovvero all'eccitazione sinusoidale. Tuttavia sappiamo che non appena si voglia affrontare il problema del rumore diventa fondamentale conoscere la funzione di trasferimento della rete lineare esaminata.

Esaminiamo quindi la funzione di trasferimento del formatore fra ingresso e uscita, rimandando al paragrafo successivo l'analogo calcolo per il *PA*: per quest'ultimo, a causa delle diverse collocazioni delle sorgenti fisiche di rumore, l'analisi si deve differenziare per le diverse funzioni di trasferimento, mentre nel caso del formatore una sola è la funzione di trasferimento di interesse (appunto quella fra ingresso e uscita).

L'analisi in frequenza dello shaper è banale in quanto si tratta di calcolare la funzione di trasferimento di un circuito *CR* – *RC* passabanda, con due filtri totalmente disaccoppiati:

$$\mathcal{A}_{SH} = \frac{j\omega\tau_1}{1 + j\omega\tau_1} \frac{1}{1 + j\omega\tau_2} \quad (\text{VII.21})$$

Per $\tau_1 = \tau_2 = \tau$ otteniamo:

$$\mathcal{A}_{SH} = \frac{j\omega\tau}{(1 + j\omega\tau)^2} \quad (\text{VII.22})$$

e per il modulo:

$$|\mathcal{A}_{SH}| = \frac{\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \quad (\text{VII.23})$$

Calcoliamo ora quanto vale il massimo di $|\mathcal{A}_{SH}|$ e dove si colloca in funzione della frequenza. Si trova che :

$$\frac{d|\mathcal{A}_{SH}|}{d\omega} = 0 \quad (\text{VII.24})$$

comporta:

$$\omega_M = 1/\tau \quad (\text{VII.25})$$

come era facilmente immaginabile, ricordando gli effetti di taglio dei due filtri separati. Proprio basandosi sulle proprietà dei filtri separati, si deduce subito una attenuazione di $-6dB$; infatti ognuno dei due filtri alla pulsazione $\omega_M = 1/\tau$ riduce l'ampiezza di $-3dB$.

Nella rappresentazione $|\mathcal{A}_{SH}|_{dB}$ in funzione del logaritmo della pulsazione, abbiamo la curva mostrata in Fig.10.

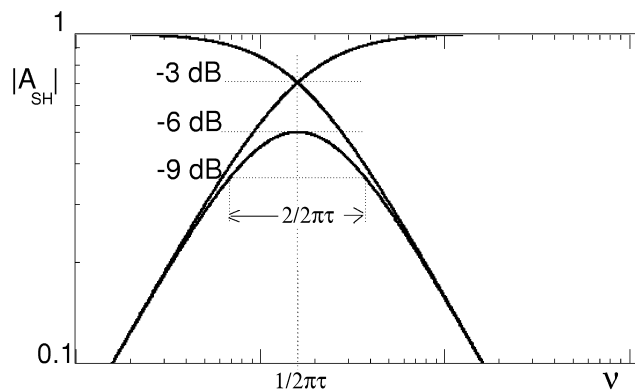


Fig.VII.10

Nella figura sono mostrati anche gli andamenti separati del filtro passa basso e passa alto.

E' di notevole interesse per la discussione che seguirà determinare la larghezza della curva $|A_{SH}|$ in funzione della pulsazione; determiniamo quindi qual è l'ambito di pulsazioni per cui la curva si mantiene al di sopra di $1/\sqrt{2}$ volte del massimo.

Imponiamo quindi (i pedici i e s si riferiscono al valore *inferiore* e *superiore* rispettivamente):

$$\frac{\omega_{i,s}\tau}{1 + \omega_{i,s}^2\tau^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad (\text{VII.26})$$

Svolgendo i calcoli si trova che la zona in cui la curva si mantiene al di sopra di $1/\sqrt{2}$ volte del massimo, vale:

$$(\Delta\omega)_{-9dB} = \frac{2}{\tau} \quad (\text{VII.27})$$

ovvero $(\Delta\nu)_{-9dB} = \frac{1}{\pi\tau}$. Il calcolo mostra che l'intervallo è simmetrico attorno al massimo su carta logaritmica, ma non su scala lineare: il limite inferiore vale $\omega_i = (\sqrt{2}-1)/\tau$, mentre quello superiore $\omega_s = (\sqrt{2}+1)/\tau$.

In ogni caso la larghezza della banda di frequenze "trasmesse" dal filtro è proporzionale all'inverso della costante di tempo τ , ovvero è direttamente proporzionale al valore della pulsazione ω_M di centro banda.

5.- L'individuazione delle sorgenti di rumore

Se si monta una catena di misura del tipo rappresentato in Fig.1 e si vanno ad esaminare all'oscilloscopio le varie tensioni di interesse, ci si accorge della presenza di significative componenti di rumore. Questo avviene semplicemente perché, essendo la catena di misura progettata per misurare segnali di entità molto piccola (anche solo poche centinaia di cariche elettroniche), di necessità si riesce a mettere in evidenza il rumore che è sempre presente, ma percepito solo in presenza di sistemi ad alta sensibilità come il nostro.

E' opportuno, per prima cosa, individuare le sorgenti di rumore presenti nel circuito: per far questo sfrutteremo -ovviamente- quello che abbiamo imparato sulle sorgenti fisiche di rumore nei capitoli

precedenti. Concentreremo comunque la nostra analisi in quelle zone del circuito dove il segnale viene generato e subisce il primo trattamento: infatti è quella la zona nella quale qualunque disturbo viene amplificato e comparirà all'uscita. Chiariamo a questo proposito fin d'ora che per questo motivo non considereremo le sorgenti di rumore nella parte di circuito a valle del primo stadio di preamplificazione; quindi in particolare il rumore termico delle resistenze, il rumore *shot* delle correnti e tutte le sorgenti di rumore dei dispositivi elettronici che non siano quelli del primo stadio di ingresso, saranno ignorati; nei casi pratici, sarà opportuno verificare l'accuratezza di questa schematizzazione, eventualmente ricorrendo a misure dedicate.

I contributi al rumore elettronico nella "zona di ingresso" del *PA* sono identificati in maniera relativamente semplice e qui di seguito li elenchiamo, rimandando a dopo l'analisi quantitativa del loro effetto:

1. il rivelatore è un diodo a giunzione contropolarizzato e pertanto presenta una corrente di saturazione inversa I_B (detta anche *corrente di buio*), caratterizzata da *full shot noise* con densità spettrale di rumore: $w_I^{IB} = 2qI_B$. Questa corrente, essendo le dimensioni del diodo molto superiori a quelle dei diodi impiegati per applicazioni circuitali, è spesso abbastanza superiore al nA e normalmente cresce con il prolungarsi dell'utilizzo del rivelatore, a causa del danneggiamento da radiazione. Topologicamente il generatore di corrente di rumore si colloca esattamente come quello di segnale: infatti tale corrente, come quella di segnale, è generata all'interno del rivelatore;
2. la resistenza R_B di polarizzazione (o di *Bias*) presenta rumore *Johnson*. Conviene adottare per essa la rappresentazione di un generatore di corrente con densità spettrale $w_I^{RB} = (4kT)/R_B$, in parallelo a R_B . In questo modo, essendo *HV* schematizzabile come un generatore ideale di tensione e quindi sostituibile con un cortocircuito verso massa secondo il Principio di sovrapposizione, il generatore di corrente di rumore si colloca anch'esso nella stessa configurazione circuitale del generatore associato alla corrente di buio e quindi di segnale;
3. la resistenza in reazione R_f presenta pure rumore *Johnson*. Schematizzando anche in questo caso il rumore col generatore di corrente associato, si approda, come vedremo meglio nel seguito, ad una configurazione uguale a quella degli altri generatori di rumore finora considerati;
4. lo stadio di ingresso del *PA*, che è normalmente costituito da un JFET, presenta rumore. Come si fa usualmente, si rappresenta l'effetto complessivo tramite due generatori, uno di corrente I_{Fet} con densità spettrale $w_i^{Fet} = 2qI_{Fet}$ che rappresenta il cosiddetto rumore parallelo e uno di tensione con densità spettrale w_v^{Fet} che rappresenta il rumore serie. Il generatore di corrente, essendo posto fra l'ingresso e massa, si colloca esattamente come tutti gli altri generatori di rumore fin qui considerati, mentre il generatore di rumore serie ha una sua collocazione circuitale particolare.

Sappiamo che per trovare l'effetto che questi generatori di rumore hanno sull'uscita dello *shaper*, dobbiamo calcolare la funzione di trasferimento fra i generatori di rumore considerati e l'uscita sopra detta. Per tutti i generatori che abbiamo individuato, salvo il generatore di rumore serie all'ingresso del JFET, la funzione di trasferimento è sempre la stessa e uguale a quella del segnale. Questa è una grossa semplificazione nel calcolo, che purtroppo non interviene quando si tratterà di studiare il rumore serie del JFET.

Per entrambi le due configurazioni, il calcolo della funzione di trasferimento verrà effettuato in due passi: prima la funzione di trasferimento fra i generatori di rumore e l'uscita del *PA* e poi la funzione di trasferimento fra l'ingresso dello *shaper* (ovvero l'uscita del *PA*) e la sua uscita. La funzione di trasferimento complessiva, ovvero dal generatore di rumore all'uscita dello *shaper*, sarà data dal prodotto delle due funzioni, visto che abbiamo ammesso impedenza nulla di uscita del *PA*.

Procediamo quindi al calcolo delle funzioni di trasferimento fra i generatori di rumore e l'uscita del

PA.

6. – Il calcolo della funzione di trasferimento fra i generatori di rumore e l'uscita del preamplificatore

Come abbiamo appena visto, tutte le sorgenti di rumore, salvo quella del rumore serie del JFET, hanno la medesima configurazione circuitale del generatore di corrente di segnale. Per prima cosa, quindi, calcoliamo la funzione di trasferimento del segnale (rispetto ai terminali di uscita del PA). Ricordiamo che non abbiamo effettuato questo calcolo quando abbiamo studiato la risposta al segnale in quanto quest'ultimo non è sinusoidale, ma approssimativamente rappresentabile con una $\delta(t)$ (la conoscenza della funzione di trasferimento ci sarebbe stata comunque utile perché la sua FT^{-1} ci avrebbe dato proprio la risposta alla quale eravamo interessati). Per ottenere la funzione di trasferimento, potremmo ora calcolare la FT della funzione di risposta, data dalla 3) o -più accuratamente dalla 4); comunque, pur essendo possibile procedere con questo metodo, molto rapido e formale e tutto sommato non particolarmente istruttivo, preferiamo affrontare il calcolo esplicito della funzione di trasferimento, per altro estremamente semplice.

Con riferimento alla Fig.11 e applicando il metodo simbolico, abbiamo:

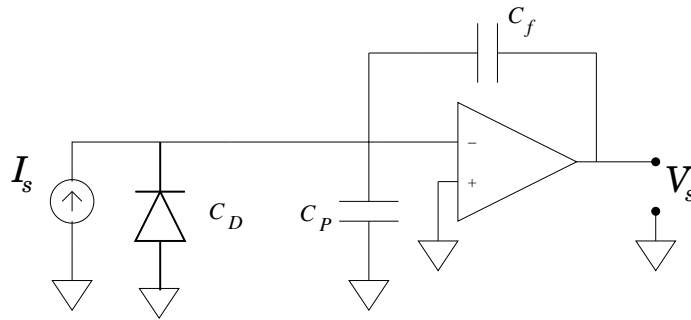


Fig.VII.11

$$\mathcal{V}_s = -\frac{\mathcal{I}_s}{j\omega C_f} \quad (\text{VII.28})$$

cioè per la funzione di trasferimento otteniamo:

$$\mathcal{A}_I = \frac{\mathcal{V}_s}{\mathcal{I}_s} = -\frac{1}{j\omega C_f} \quad (\text{VII.29})$$

Si sarà notato che abbiamo fatto il calcolo nella ipotesi semplificativa di guadagno A infinitamente grande del blocco base: in particolare questo ci ha permesso di trattare l'ingresso “-” come una massa virtuale. Abbiamo anche trascurato l'effetto di R_B , R_f e C_A . Anche nel seguito, per il calcolo del rumore, procederemo con queste semplificazioni che riducono notevolmente il calcolo e costituiscono una ottima approssimazione, soprattutto per la valutazione del rumore.

Il modulo quadro di \mathcal{A}_I vale allora:

$$|\mathcal{A}_I|^2 = \frac{1}{\omega^2 C_f^2} \quad (\text{VII.30})$$

Il generatore di rumore associato alla corrente di saturazione inversa del rivelatore I_B (tipicamente da alcuni nA fino ad alcuni μA) si schematizza come un generatore di corrente ubicato come

\mathcal{I}_s nella Fig.11 e quindi, avendo il generatore uno spettro di potenza $w_i^{I_B} = 2qI_B$, esso produce all'uscita del PA una densità spettrale:

$$W_{OPA}^{I_B} = \frac{2qI_B}{\omega^2 C_f^2} \quad (\text{VII.31a})$$

Si noti che, pur essendo il rumore originario bianco, la funzione di trasferimento verso l'uscita del preamplificatore (un integratore matematico) comporta in uscita una spettro di potenza che cresce in maniera inversa a ω^2 , ovvero presenta una divergenza in continua.

Il generatore di rumore in corrente associato a R_B può rappresentarsi esattamente come quello di \mathcal{I}_s e quindi anche per questo contributo abbiamo (vedi Fig.12):

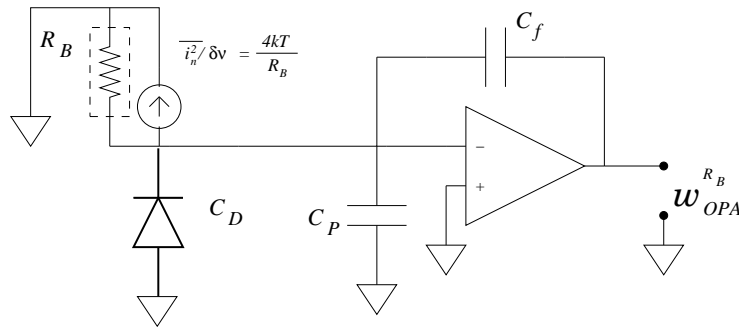


Fig.VII.12

$$W_{OPA}^{R_B} = \frac{4kT}{R_B} \frac{1}{\omega^2 C_f^2} \quad (\text{VII.31b})$$

Nella Fig.12 abbiamo disegnato a tratteggio la resistenza R_B in quanto essa, pur determinando l'esistenza del generatore di rumore che stiamo considerando, viene tuttavia ignorata per quanto attiene al calcolo della funzione di trasferimento.

La corrente di rumore parallelo all'ingresso del JFET si colloca come le altre sorgenti (vedi Fig.13) e quindi dà un contributo del tipo:

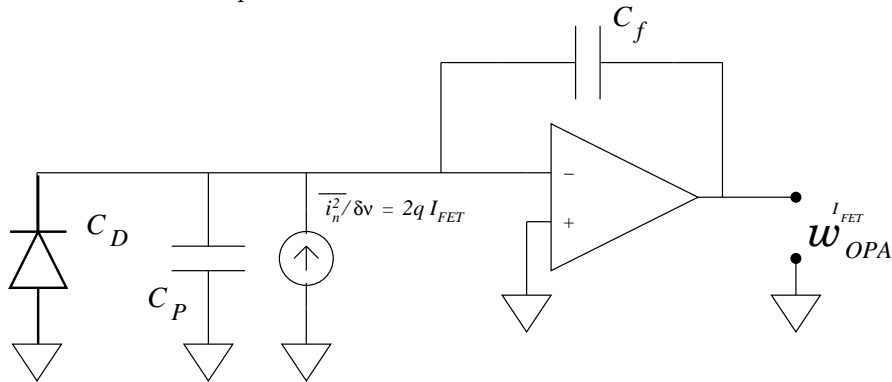


Fig.VII.13

$$W_{OPA}^{I_{Fet}} = \frac{2qI_{Fet}}{\omega^2 C_f^2} \quad (\text{VII.32})$$

L'effetto del rumore *Johnson* della resistenza R_f merita una breve discussione.

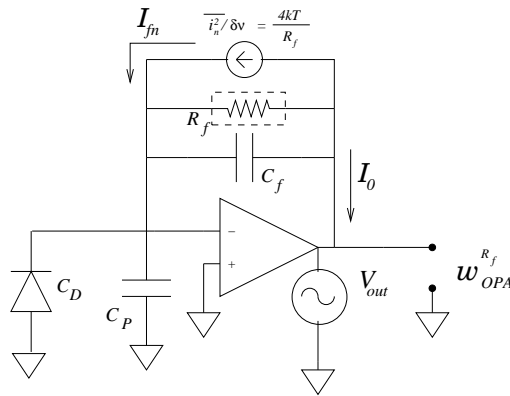


Fig.VII.14

Con riferimento alla Fig.14, dove abbiamo indicato il generatore di rumore associato a R_f , ma abbiamo disegnato a tratteggio R_f per ricordare che non ne considereremo l'effetto nella funzione di trasferimento, notiamo che: un estremo del generatore di rumore *Johnson* di R_f coincide –come tutti i generatori fino ad ora considerati– con la massa virtuale. L'altro estremo è collegato al generatore equivalente di tensione all'uscita del PA. Potremmo pensare che la situazione fosse identica a quella incontrata per R_B : ovvero potremmo sostituire il generatore \mathcal{V}_{out} con la sua resistenza interna (idealmente nulla). Questa procedura è sbagliata: infatti l'applicazione del Principio di sovrapposizione, che permette la sostituzione dei generatori con le loro resistenze interne, è corretta solo se i generatori sono indipendenti; non è questo il caso di \mathcal{V}_{out} , che è un generatore controllato dalla ddp $v_- - v_+$. Per risolvere il problema possiamo procedere come segue, assumendo che il guadagno del blocco base A sia estremamente grande: la corrente iniettata dal generatore nella massa virtuale non può che entrare nel ramo C_f ; infatti se così non fosse e una parte di corrente percorresse il parallelo di C_D e C_P , questo provocherebbe una ddp sulla massa virtuale, che la reazione, a causa del guadagno A infinito, immediatamente annullerebbe. Quindi, percorrendo tutta la corrente il ramo di C_f , all'altro nodo (quello dell'uscita del PA) non vi è possibilità per la corrente \mathcal{I}_{fn} di richiudersi verso \mathcal{V}_{out} : la legge dei nodi impone che \mathcal{I}_o sia zero. Pertanto la ddp in uscita dovuta al generatore di rumore associato a R_f , calcolata come caduta prodotta su C_f , rispetto allo 0 della massa virtuale, vale:

$$\mathcal{V}_{out} = -\frac{\mathcal{I}_{fn}}{j\omega C_f} \quad (\text{VII.33})$$

e quindi possiede la medesima funzione di trasferimento degli altri generatori (e il risultato ottenuto applicando in maniera sbagliata il Principio di sovrapposizione, avrebbe dato un risultato corretto per la tensione in uscita, ma non per la corrente). Pertanto:

$$W_{OPA}^{R_f} = \frac{4kT}{R_f} \frac{1}{\omega^2 C_f^2} \quad (\text{VII.34})$$

Consideriamo ora la funzione di trasferimento fra il generatore di rumore serie con densità spettrale $\langle v_{Fet}^2 \rangle / \delta\nu$ che sappiamo rappresentare il rumore termico del canale del JFET. Nella pratica dovremo davvero vedere (e questo andrebbe fatto anche per il rumore parallelo) cosa dice il costruttore per l'andamento dello spettro di potenza di $\langle v_{Fet}^2 \rangle / \delta\nu$; siccome sappiamo che il grosso dell'effetto è un contributo di rumore bianco, ammettiamo che per la densità spettrale valga l'espressione VI.15:

$$w_v^{Fet} = \langle v_{Fet}^2 \rangle / \delta\nu = \frac{2.7kT}{g_m} \quad (\text{VII.35})$$

Per trovare ora la funzione di trasferimento per il generatore di rumore serie, osserviamo la Fig.15:

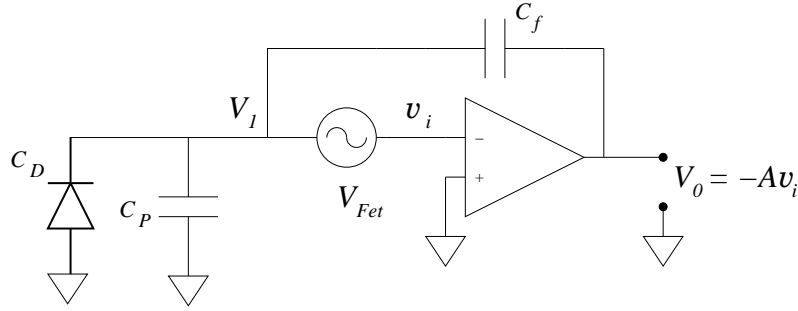


Fig.VII.15

La tensione V_1 in ogni istante è data da: v_i (la ddp all'ingresso "-" dell'operazionale senza rumore) più la tensione istantanea di rumore serie del JFET, ovvero $V_1 = v_i + v_{Fet}$. L'uscita dell'amplificatore, istante per istante, soddisfa la relazione:

$$V_o = -Av_i \quad (\text{VII.36})$$

Inoltre, a causa del fatto che $A \gg 1$, per ogni tensione finita V_o osservata all'uscita dell'amplificatore, $v_i = -V_o/A \approx 0$. Questo comporta che, essendo l'impedenza fra l'ingresso "-" e "+" dell'operazionale finita, la corrente nel ramo interno fra "-" e "+" deve essere di fatto nulla. Pertanto la ddp V_1 , istante per istante, si può esprimere mediante la ripartizione capacitiva di V_o sulla serie della capacità C_f con il parallelo di C_D con C_P . Pertanto:

$$V_1 = v_i + v_{Fet} = -\frac{V_o}{A} + v_{Fet} \quad (\text{VII.37})$$

e

$$V_1 = V_o \frac{1}{\frac{j\omega(C_D + C_P)}{1} + \frac{1}{j\omega C_f}} = V_o \frac{C_f}{C_D + C_P + C_f} = V_o \frac{C_f}{\Sigma C} \quad (\text{VII.38})$$

Uguagliando la 37) e la 38), abbiamo:

$$V_o \left(\frac{1}{A} + \frac{C_f}{\Sigma C} \right) = v_{Fet} \quad (\text{VII.39})$$

ovvero

$$V_o = v_{Fet} \frac{A \Sigma C}{A C_f + \Sigma C} = v_{Fet} \frac{\Sigma C}{C_f + \frac{\Sigma C}{A}} \approx v_{Fet} \frac{\Sigma C}{C_f} \quad (\text{VII.40})$$

Quindi la funzione di trasferimento per il generatore serie e l'uscita del PA è reale e vale $\frac{\Sigma C}{C_f}$. Al medesimo risultato si può giungere osservando che la configurazione ora esaminata è equivalente (e infatti ha la medesima funzione di trasferimento) a quella di un amplificatore operazionale *non-invertente* con v_{Fet} applicato all'ingresso "+"; infatti, comparando v_{Fet} in serie agli ingressi, il circuito è completamente equivalente a quello che si ottiene facendo "slittare" il generatore v_{Fet} fino a porlo nel ramo fra l'ingresso "+" e massa. Quindi per lo spettro di potenza in uscita abbiamo:

$$w_{OPA}^{v_{Fet}} = \langle v_{Fet}^2 \rangle / \delta\nu \left(\frac{\Sigma C}{C_f} \right)^2 \approx \frac{2.7kT}{g_m} \left(\frac{\Sigma C}{C_f} \right)^2 \quad (\text{VII.41})$$

Questo contributo quindi, a causa della funzione di trasferimento che gli compete, appare in uscita con la medesima dipendenza dalla frequenza di quella del generatore serie; in particolare se il rumore serie è ben descritto dal rumore *Johnson* della resistenza del canale del JFET, anche il rumore in uscita è bianco.

A questo punto, ammettendo di aver considerato tutte le sorgenti di rumore significative, abbiamo per la densità spettrale di rumore totale in uscita dal PA:

$$w_{OPA}^{tot} = w_{OPA}^{I_B} + w_{OPA}^{I_{Fet}} + w_{OPA}^{R_B} + w_{OPA}^{R_f} + w_{OPA}^{v_{Fet}} = \frac{a}{\omega^2} + b \quad (\text{VII.41})$$

con

$$a = (2qI_B + \frac{4kT}{R_B} + \frac{4kT}{R_f} + 2qI_{Fet})/C_f^2 \quad (\text{VII.42a})$$

e

$$b = \frac{2.7kT}{g_m} \frac{(\Sigma C)^2}{C_f^2} \quad (\text{VII.42b})$$

Riportiamo nella Fig.16, a tratto continuo, l'andamento rappresentato dalle 41) e 42) con l'asse delle pulsazioni sia in carta lineare che logaritmica, rispettivamente nelle parti a) e b).

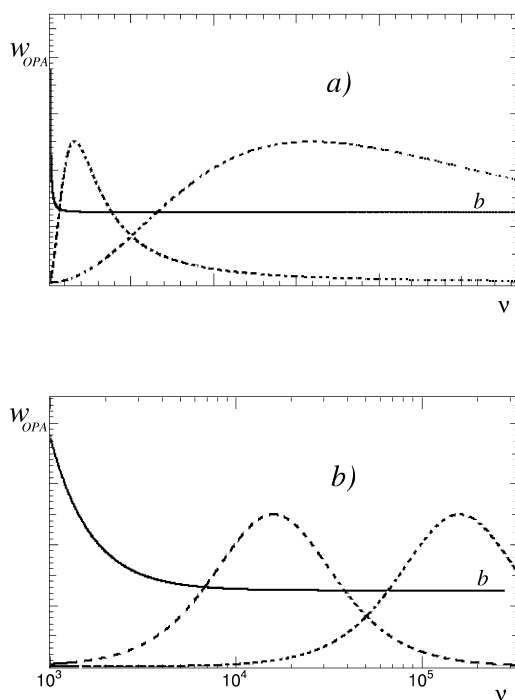


Fig.VII.16

Il rumore all'uscita del preamplificatore consiste quindi (almeno nelle schematizzazioni fatte, che sono assai realistiche) di due contributi con comportamento differente in funzione della frequenza: uno bianco che cresce con la temperatura, è inversamente proporzionale alla transconduttanza del JFET in ingresso e cresce col quadrato della somma delle capacità in ingresso (normalmente dominata da C_D); l'altro contributo cresce fortemente al diminuire della frequenza, cresce per una parte con le correnti di fuga e per un'altra con l'inverso delle resistenze connesse alla massa virtuale (questa parte dipende anche dalla temperatura). Se osserviamo allora l'uscita del preamplificatore all'oscillografo il rumore sarà in generale evidente e l'effetto più marcatamente percepibile sarà quello di una linea

di base fortemente fluttuante in bassa frequenza. Lo spettro di potenza all'uscita del preamplificatore è già stato mostrato nella Fig.IV.3, con anche le fluttuazioni tipiche di queste determinazioni sperimentali.

Nella Fig.17, parte a), è riportata la simulazione numerica dell'uscita del preamplificatore; si notino le fluttuazioni lente, dovuta ai grossi contributi in bassa frequenza, nonché la frastagliatura più fine, indotta dalla componente del rumore bianco. Nella parte b) della Fig.17 è riportata la stessa uscita, con due segnali sovrainposti, che nascono sulle fluttuazioni della linea di base (si è assunto un valore di R_f tale per cui $\tau_f = 100 \mu s$). Osservando la figura e sulla base delle considerazioni svolte sopra, è facile convincersi che all'uscita del PA è praticamente impossibile determinare con precisione le ampiezze delle transizioni del segnale, perché esse nascono su imponenti fluttuazioni di quello che dovrebbe essere lo zero. E' naturale quindi trattare il segnale con lo *shaper* che sappiamo avere come funzione principale quella di rimuovere i contributi in bassa frequenza (e limitare quelli in alta).

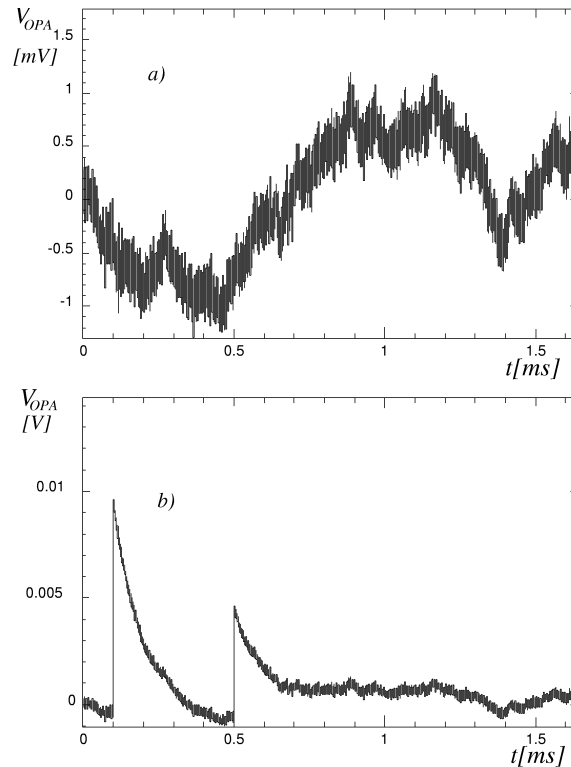


Fig.VII.17

7.- L'effetto del formatore e il rumore finale in uscita

A questo punto siamo in grado di trovare la densità spettrale di rumore in uscita del formatore, ovvero quella finale. Basta allo scopo calcolare (vedi 23) e 41)):

$$w_{OSH}^{tot} = |\mathcal{A}_{SH}|^2 \cdot w_{OPA}^{tot} = \frac{\omega^2 \tau^2}{(1 + \omega^2 \tau^2)^2} \left(\frac{a}{\omega^2} + b \right) = \frac{\tau^2 (a + \omega^2 b)}{(1 + \omega^2 \tau^2)^2} \quad (\text{VII.43})$$

con a e b dati dalle 42). Si noti che la densità spettrale definita dalla 43) assume un valore finito per $\omega = 0$ e tende a 0 all'aumentare di ω .

Un effetto importante dello *shaper* è quello di rimuovere le componenti di rumore in bassa frequenza (grazie alla presenza del filtro *CR* passa alto). In particolare esso rimuove le divergenze della densità spettrale di rumore osservata all'uscita del *PA*. Da questo punto di vista sembrerebbe addirittura vantaggioso impiegare un filtro caratterizzato dall'avere una τ la più piccola possibile; come accennato precedentemente questa soluzione avrebbe anche il vantaggio di ridurre il tempo di accupazione della linea di base da parte del segnale e quindi abbattere la probabilità di impilamento dei segnali nel caso di alti ritmi di arrivo di particelle sul rivelatore. Si ricorda però che la diminuzione di τ comporta sì uno spostamento verso l'alto della frequenza centrale del filtro e quindi un maggior rifiuto delle basse frequenze, ma comporta anche un allargamento della banda accettata (si ricordi che la 27) insegna che la larghezza cresce come la frequenza di centro banda): per evitare il contributo delle basse frequenze si è cioè costretti ad aumentare quello delle alte. In Fig.16 sono disegnati, sovrapposti allo spettro di potenza in uscita del preamplificatore, gli andamenti di due filtri passa banda, caratterizzati da frequenze di centro banda che differiscono di un fattore 10. L'asse lineare delle pulsazioni (parte a), permette di apprezzare il sensibile allargamento delle larghezze, all'aumentare della pulsazione centrale. Esiste, come vedremo fra poco, un valore ottimale per τ , ovvero quello per cui è massimo il rapporto segnale/rumore.

Per affrontare il problema dell'ottimizzazione del rapporto segnale/rumore bisogna innanzitutto definire completamente il metodo di misura della grandezza cui siamo interessati, compresi gli ulteriori interventi in banda passante che il metodo di misura eventualmente comporta. Abbiamo visto che nel nostro caso la quantità di interesse è la carica Q_s : essa si determina –dopo opportuna taratura– in base alla misura del massimo del segnale all'uscita dello *shaper*, che sappiamo valere, a parte il banale fattore moltiplicativo G che abbiamo deciso di ignorare:

$$V_{OSH}^M = \frac{Q_s}{C_f \cdot e} \quad (\text{VII.44})$$

con e base dei logaritmi neperiani. In presenza di rumore con la densità spettrale definita dalla 43) la conversione del massimo da parte dell'ADC di picco subisce una dispersione. Nella Fig.18 la curva continua rappresenta il segnale in presenza di rumore, mentre la curva punteggiata raffigura la risposta ideale, in assenza di rumore; ΔV_M rappresenta la differenza fra il valore vero e quello che verrà registrato dal convertitore.

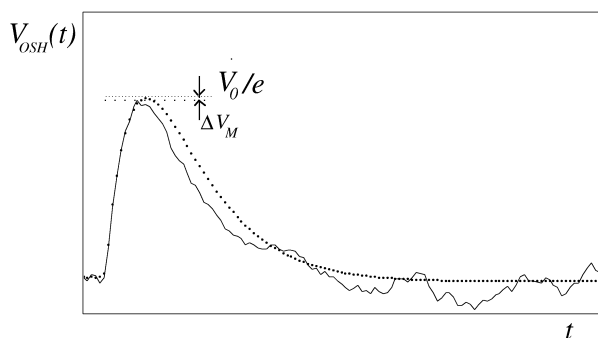


Fig.VII.18

Ammettendo che il sistema mantenga il comportamento lineare ipotizzato, le fluttuazioni (e quindi

la varianza) che si hanno nella determinazione del massimo (nella ipotesi di segnale, ovvero di carica Q_s costante) saranno le stesse che si otterrebbero misurando la linea di base (cioè il solo rumore). Poiché inoltre gli ADC di picco che vengono normalmente utilizzati in questo tipo di misure possono essere considerati ideali quanto a banda passante, ovvero non introducono ulteriori tagli in frequenza, possiamo valutare la varianza sulla misura del massimo semplicemente integrando la densità spettrale di rumore all'uscita dello shaper su tutta la banda:

$$\begin{aligned}\sigma^2(v_{OSH}) &= \int_0^\infty w_{OSH}^{tot} d\nu = \int_0^\infty \frac{\omega^2 \tau^2}{(1 + \omega^2 \tau^2)^2} \left(\frac{a}{\omega^2} + b \right) d\nu = \\ &= \frac{a\tau}{2\pi} \int_0^\infty \frac{d(\omega\tau)}{(1 + \omega^2 \tau^2)^2} + \frac{b}{2\pi\tau} \int_0^\infty \frac{\omega^2 \tau^2}{(1 + \omega^2 \tau^2)^2} d(\omega\tau)\end{aligned}\quad (\text{VII.45})$$

I due integrali hanno lo stesso valore:

$$\int_0^\infty \frac{1}{(1 + \omega^2 \tau^2)^2} d(\omega\tau) = \int_0^\infty \frac{\omega^2 \tau^2}{(1 + \omega^2 \tau^2)^2} d(\omega\tau) = \frac{\pi}{4}\quad (\text{VII.46})$$

Quindi finalmente otteniamo:

$$\sigma^2(v_{OSH}) = \frac{a}{8}\tau + \frac{b}{8\tau}\quad (\text{VII.47})$$

Si noti che la 47) presenta un minimo in funzione di τ . Sperimentalmente la valutazione di $\sigma^2(v_{OSH})$ si fa in genere proprio osservando la distribuzione delle ampiezze (dei massimi) in corrispondenza di segnali di particelle monocromatiche che depositano tutte la stessa energia nel rivelatore e misurandone la larghezza. La distribuzione, in assenza di ulteriori effetti spuri, quali oscillazioni dovute a disturbi a 50 Hz o a radiofrequenze, appare gaussiana e la *standard deviation* della gaussiana è proprio la radice della 47). In pratica la larghezza osservata con questa tecnica soffre di allargamenti dovuti anche al meccanismo di rivelazione, che nulla hanno a che vedere col rumore elettronico; pertanto, se interessa la determinazione del solo contributo elettronico, si procede in maniera diversa, precisamente inserendo all'ingresso del preamplificatore impulsi che simulano particelle monocromatiche e poi procedendo come sopra.

Come già anticipato, la dipendenza funzionale della 47) dalla costante di tempo τ , suggerisce immediatamente l'esistenza di un valore ottimale che massimizza il rapporto segnale/rumore. Poiché il segnale $\frac{Q_s}{C_f \cdot e}$ non dipende da τ , il rapporto segnale/rumore si massimizza semplicemente minimizzando la 47); non sempre la procedura è così semplice; altre formazioni del segnale danno risposte influenzate dai dettagli dei parametri introdotti. Il guadagno G è al solito ignorato, perché esso influenzerebbe allo stesso modo segnale e rumore, comparando esso nella funzione di trasferimento del formatore.

Minimizzando la 47) rispetto a τ si trova il valore ottimale τ_{opt} per la costante di tempo di formazione:

$$\tau_{opt} = \sqrt{\frac{b}{a}}\quad (\text{VII.48})$$

Riprendiamo le espressioni per a e b date dalle 42), che riportiamo qui per comodità:

$$a = (2qI_B + \frac{4kT}{R_B} + \frac{4kT}{R_f} + 2qI_{Fet})/C_f^2\quad (\text{VII.49a})$$

e

$$b = \frac{2.7kT}{g_m} \frac{(\Sigma C)^2}{C_f^2}\quad (\text{VII.49b})$$

Usando dei valori realistici per le grandezze che entrano nelle 49), si trova tipicamente $\tau_{opt} \approx 1 \mu s$. Nella Fig.19 sono riportate le uscite dello *shaper* al primo dei due segnali mostrati nella Fig.17 b), per tre diversi valori della costante di tempo τ : $100 ns$, $1 \mu s$ e $10 \mu s$, nelle parti a), b) e c) rispettivamente. Le scale sono sempre le stesse per tutti e tre gli andamenti riportati. Si notino le diverse durate dei segnali e il diverso rapporto segnale/disturbo. Quest'ultimo aspetto si percepisce ancora meglio nella Fig.20, dove la scala verticale è espansa di un fattore 10 e quella orizzontale abbraccia un intervallo più ampio. Manifestamente la situazione ottimale è proprio quella che corrisponde alla costante di tempo di formazione di $1 \mu s$. Al lettore attento non sarà sfuggito nella Fig.20 b) e c) la presenza di un riattraversamento da parte del segnale dello zero prima del recupero definitivo della linea di base; questo comportamento è dovuto al fatto che la simulazione, come anticipato durante la illustrazione della Fig.17, ha ammesso per l'uscita del *PA* un decadimento esponenziale con $\tau_f = 100 \mu s$ ed ha coerentemente calcolato il segnale di uscita dello *shaper*. Si osservi che i tempi di formazione più lunghi sono più sensibili all'effetto e si sappia che esso è facilmente correggibile tramite la cosiddetta compensazione "polo-zero", che però non discuteremo.

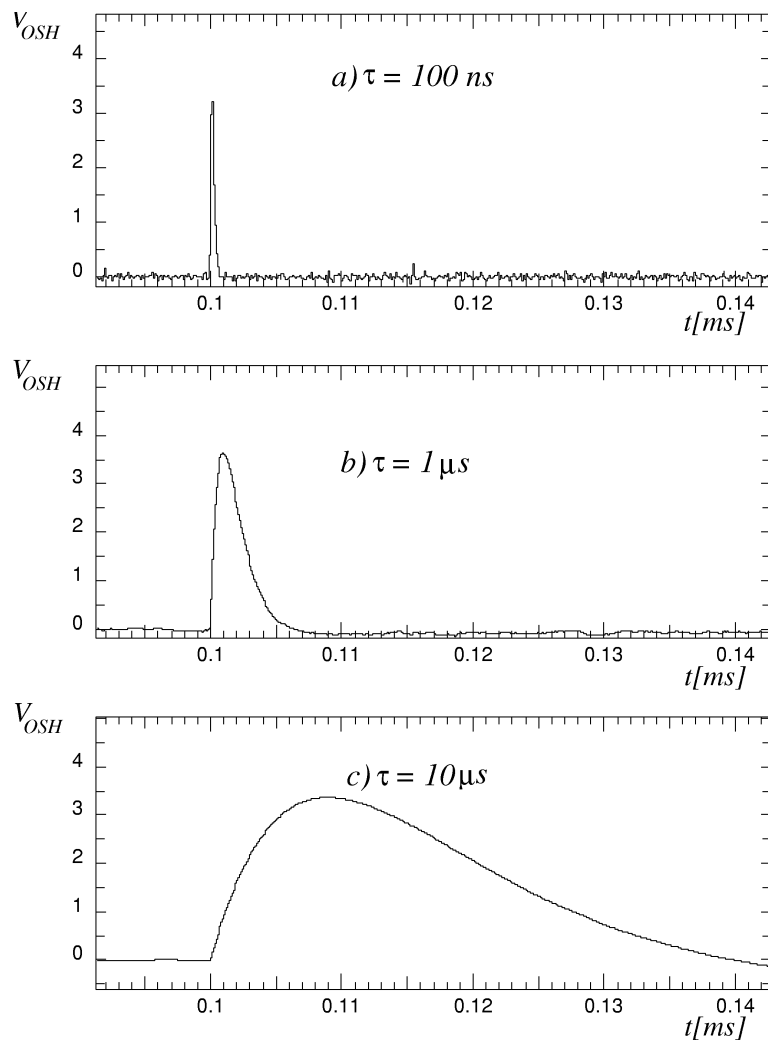


Fig.VII.19

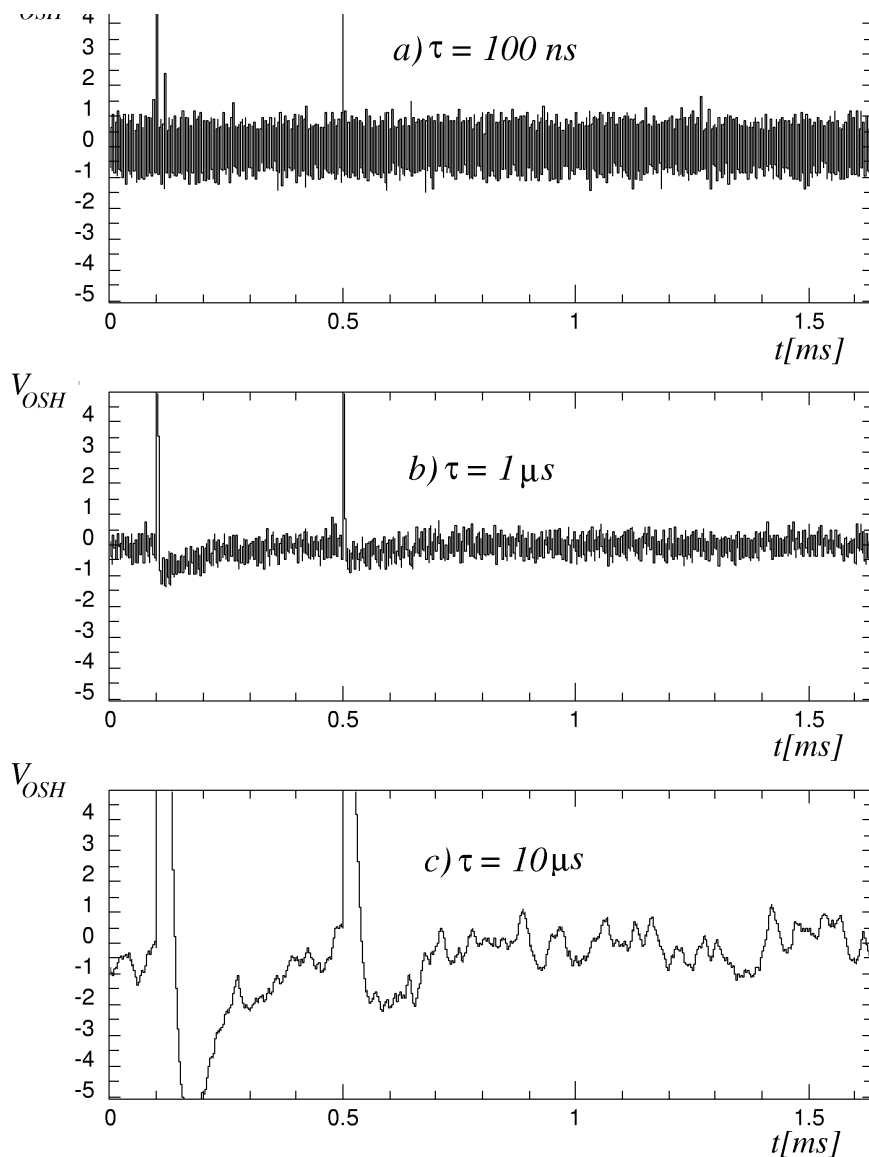


Fig.VII.20

Ovviamente esistono situazioni di lavoro dei rivelatori per le quali il valore ottimale di τ si discosta anche molto da quello tipico: in particolare, se la corrente di buio I_B del rivelatore è particolarmente alta, la prescrizione 48) suggerisce l'utilizzo –a parità di altri parametri– di costanti di tempo più brevi, mentre l'impiego di rivelatori ad alta capacità C_D richiede, a parità di tutto il resto, l'allungamento delle costanti di tempo. Nei due casi considerati sappiamo infatti che l'aumento della corrente di buio provoca l'aumento del rumore in bassa frequenza e costringe ad spostare verso le alte frequenze il centro banda e che l'opposto accade (cioè aumenta il rumore in alta frequenza) quando aumentano le capacità ΣC in ingresso.

Prima di affrontare nel paragrafo successivo alcuni altri aspetti legati al rapporto segnale/rumore, vorremmo spendere una parola per rimuovere un equivoco nel quale si corre il rischio di cadere:

si sente talvolta dire –propriamente– che, a parità di tutti gli altri parametri, l'utilizzo di un rivelatore ad alta capacità peggiora il rapporto segnale/disturbo. Altre volte invece si sente parlare –impropriamente– di rumore “dovuto alla capacità del rivelatore”. Questa ultima affermazione, se non errata, è perlomeno fuorviante perché suggerisce che la capacità sia l'origine del rumore, che è ovviamente falso: come abbiamo visto la sorgente del rumore in questione è il rumore serie del dispositivo elettronico in ingresso (il JFET, tipicamente) che ha un effetto crescente con le capacità in ingresso al dispositivo, fra cui spesso preponderante quella del rivelatore.

8.– Considerazioni ulteriori sul rumore della catena

Le espressioni 49) per a e b dicono alcune cose ovvie ed altre assai meno, che meritano una breve discussione: la parte ovvia è che operare a temperatura ridotta, a parte le complicazioni che ne derivano, è utile per ridurre tutti quei contributi di origine –appunto– termica. Allo scopo, talvolta il JFET di ingresso è separato dal resto del preamplificatore, collocato in prossimità del rivelatore e posto a temperatura notevolmente ridotta (non conviene ridurre eccessivamente la temperatura perché la conseguente riduzione della mobilità dei portatori di carica nei semiconduttori compromette il funzionamento del dispositivo). Talvolta si provvede anche a raffreddare le resistenze R_B e R_f . Altrettanto banale è la considerazione sulle correnti di fuga che devono essere le più piccole possibile (anche in questi casi il raffreddamento può essere benefico).

Meno banali sono le considerazioni che si possono fare sulla parte di rumore serie del JFET (a parte l'aspetto della temperatura, già affrontato). La formula 49b) suggerisce che conviene minimizzare ΣC : la parte C_D che deriva dal rivelatore normalmente non si può considerare come un parametro da variare a piacere, ma deve essere piuttosto considerata come un dato di fatto. Infatti la capacità del rivelatore C_D sarà senz'altro minimizzata contropolarizzando il rivelatore fino al massimo svuotamento possibile, ma per il resto (superficie del rivelatore) ci teniamo la capacità che il rivelatore possiede e che sarà presumibilmente dettata dalla efficienza geometrica che il rivelatore deve possedere per soddisfare le esigenze del nostro esperimento. A ΣC contribuisce anche C_P in cui la parte dovuta alla capacità verso massa del *gate* del JFET è spesso dominante. Pertanto sembra ovvio che la migliore scelta per ridurre b sia quella di cercare il JFET con la minima C_P e la massima transconduttanza g_m . La ricetta, così *lapalissiana*, purtroppo non funziona quasi per nulla, perché di fatto le due richieste sono conflittuali: infatti invariabilmente accade che un JFET con piccola capacità $C_g = C_{gs} + C_{gd}$ abbia anche piccola transconduttanza g_m e viceversa. In altre parole, il processo costruttivo dei JFET intrinsecamente fornisce dispositivi con un rapporto C_g/g_m praticamente costante. Questo significa, un po' semplicisticamente ma non troppo, che occorre innanzitutto individuare un costruttore di JFET che abbia effettivamente ottimizzato il processo che garantisce la minimizzazione del rapporto C_g/g_m e selezionare eventualmente i JFET migliori da questo punto di vista; quindi, soprattutto nel caso in cui la capacità C_D sia grande rispetto alla capacità C_g del singolo JFET, si possono aggiungere altri JFET in parallelo. L'effetto risulta benefico perché un parallelo di JFET è equivalente ad un unico JFET con transconduttanza pari alla somma delle transconduttanze, capacità di ingresso pari alla somma delle capacità e densità spettrale di rumore serie uguale. Finché la somma delle capacità non supera il termine fisso $C_D + C_f$ otteniamo solo vantaggi (il denominatore di b della 49b) aumenta più di quanto faccia il numeratore). E' semplice

convincersi che si smette di avere vantaggio quando il parallelo dei JFET presenta una capacità complessiva pari a quella $C_D + C_f$.

Come abbiamo già sottolineato precedentemente, in questa trattazione non abbiamo considerato altre sorgenti di rumore oltre a quelle di tipo granulare e termica. Sappiamo viceversa che, almeno per quanto riguarda il rumore parallelo nel JFET, ovvero la parte di generatore di corrente, esiste un significativo contributo di rumore $1/f$. Nella selezione del JFET di ingresso occorrerà tener conto anche di questo fatto, esaminando attentamente le caratteristiche che il costruttore ci fornirà in proposito.

9.- Il rumore espresso in unità di interesse fisico

Abbiamo già detto che molte delle applicazioni dei rivelatori al Silicio e della catena di misura del tipo appena descritto riguardano la misura dell'energia depositata dalle particelle nei rivelatori. In questa prospettiva vale quindi la pena di valutare il tipo di precisione nella misura di energia che si può ottenere con la strumentazione descritta.

Il primo passo è quello di conoscere il legame che intercorre fra l'energia depositata in un Silicio da una radiazione ionizzante (sperando che non dipenda dal tipo di radiazione) e la quantità di carica che in esso viene liberata. Sperimentalmente è noto che per ogni legame covalente rotto nel Silicio, la radiazione ionizzante deve aver deposto, in media, circa $3.6 eV$ di energia; si osservi che tale energia è circa 3 volte superiore all'energia di legame elettrone-lacuna nel Silicio: ciò significa che solo una frazione dell'ordine di un terzo di tutta l'energia depositata finisce in ionizzazione. L'altro fatto sperimentalmente ben accertato è che tale coefficiente è largamente indipendente dal tipo di radiazione γ, β, α o particelle subnucleari che hanno colpito il rivelatore; si hanno deviazioni significative, nel senso di una ulteriore riduzione dell'efficienza di conversione energia-carica, solo per nuclei molto pesanti e relativamente poco energetici che hanno densità di ionizzazione particolarmente elevate. A questo punto possiamo valutare, sulla base del rumore tipico di una catena elettronica di misura, qual è la minima carica che si riesce a misurare e poi passare, tramite il coefficiente $\epsilon = 3.6 eV/coppia$ alla determinazione della corrispondente energia.

Se consideriamo come minima carica misurabile Q_s^{min} quella che in uscita fornisce un segnale con una ampiezza corrispondente a 3 volte la σ del rumore, utilizzando la 44) e la 47), otteniamo:

$$Q_s^{min} = 3 \cdot C_f \cdot e \sqrt{\frac{a}{8}\tau + \frac{b}{8\tau}} \quad (\text{VII.50})$$

Il risultato, tenendo conto delle 49) non dipende da C_f , comune al segnale e al rumore. Adottando per i vari parametri che entrano nelle 49) dei valori tipici, ovvero: $I_B = 10 nA$, $I_{Fet} \ll I_B$, $R_B = 10 M\Omega$, $R_f \gg R_B$, $\Sigma C = 100 pF$, $g_m = 30 mA V^{-1}$ e $\tau = 1 \mu s$ otteniamo:

$$Q_{smin} \approx 1.7 \cdot 10^3 q \quad (\text{VII.51})$$

dove q rappresenta la carica dell'elettrone. Il sistema, in altri termini ha una sensibilità tale da misurare una energia depositata di circa

$$E_{min} \approx 1.7 \cdot 10^3 q \cdot 3.6 eV/q \approx 6 keV$$

Invece di esprimere questo risultato in termini di energia minima rivelabile, si può dire equivalentemente che per effetto del rumore elettronico, qualunque energia depositata nel Silicio da una particella ionizzante, ha una σ associata dell'ordine di $2 keV$. Questo limite va considerato più che altro come indicativo in quanto con particolari accorgimenti, alcuni dei quali esposti nel paragrafo precedente, si riescono ad ottenere anche dei valori significativamente migliori.

10.— Il calcolo nel dominio del tempo

Vogliamo ora far vedere come, a causa del fatto che tutte le sorgenti di rumore del nostro sistema in studio sono a spettro bianco (onestamente: *avendo ipotizzato ...*), sia abbastanza semplice calcolare la varianza totale all'uscita del formatore nel dominio del tempo, utilizzando il Teorema di *Campbell* (seconda parte, formula III.35 e III.36). Infatti, l'ipotesi che le sorgenti di rumore siano o di tipo granulare o termico corrisponde ad assumere che nelle sorgenti considerate gli impulsi delle sequenze siano tutti uguali e δ -formi. Allora possiamo applicare la III.36 ed essa ci dice che, per ogni sorgente di rumore caratterizzata da una sequenza di impulsi δ -formi con area individuale q e ritmo di ripetizione medio $\bar{\nu}$, in un qualunque ramo della rete per il quale la funzione di risposta rispetto al ramo (o nodo) dove origina il rumore considerato sia $\phi(t)$, si ha una varianza totale data da:

$$\sigma^2 = q^2 \bar{\nu} \int_{-\infty}^{\infty} \phi^2(t) dt \quad (\text{VII.53})$$

Prima di procedere, vediamo come sia possibile porre la 53) in una forma ancor più semplice per i calcoli che dobbiamo svolgere. Notiamo intanto che per il rumore *shot* vale

$$q\bar{\nu} = I \quad (\text{VII.54})$$

e quindi

$$\sigma_{shot}^2 = qI \int_{-\infty}^{\infty} \phi^2(t) dt \quad (\text{VII.55})$$

Riprendendo la deduzione del rumore termico del Cap.V, §.5, troviamo che in quel caso: $q = \frac{e\bar{\lambda}}{L}$, $\bar{\nu} = \frac{N}{\theta}$ e quindi $q^2\bar{\nu} = \frac{2kT}{R}$ e pertanto:

$$\sigma_{i-Johnson}^2 = \frac{2kT}{R} \int_{-\infty}^{\infty} \phi^2(t) dt \quad (\text{VII.56})$$

Le relazioni di sopra sono state dedotte assumendo sequenze di corrente, ma la matematica non cambia se esaminiamo impulsi di tensione; questo significa che, ad esempio, se avessimo esaminato il rumore *Johnson* in termini di impulsi elementari di tensione, avremmo ottenuto

$$\sigma_{v-Johnson}^2 = 2kTR \int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(t) dt \quad (\text{VII.57})$$

dove $\psi(t)$ rappresenta la funzione di risposta agli impulsi di tensione.

Nelle formule 55), 56) e 57) la varianza calcolata è quella che corrisponde al tipo di grandezza misurata in uscita, corrente o tensione. Si sarà notato che i fattori numerici a moltiplicare l'integrale niente altro sono che metà delle densità spettrali di rumore delle sorgenti originarie; infatti al risultato

espresso dalle 55), 56) e 57) si poteva anche giungere applicando il teorema di *Parseval* alle espressioni delle varianze in uscita calcolate nel dominio delle frequenze, sfruttando la indipendenza degli spettri di potenza dalla frequenza (w_{or} rappresenta lo spettro di potenza “originario” delle sorgenti primarie di rumore bianco):

$$\sigma^2 = \int_0^\infty w \, d\nu = \int_0^\infty w_{or} |\mathcal{A}|^2 \, d\nu = \frac{w_{or}}{2} \int_{-\infty}^\infty |\mathcal{A}|^2 \, d\nu = \frac{w_{or}}{2} \int_{-\infty}^\infty \phi^2(t) \, dt \quad (\text{VII.57})$$

in quanto la funzione di risposta coincide con FT^{-1} della funzione di trasferimento \mathcal{A} .

Venendo quindi al nostro caso della catena elettronica di misura della carica, per quanto riguarda tutti i contributi di rumore riconducibili a generatori di rumore in corrente all'ingresso nella stessa configurazione circuitale del generatore di segnale, il calcolo è già tutto impostato. Infatti la funzione di risposta in tensione all'uscita dello *shaper*, ovvero la risposta alla $\delta(t)$ di corrente all'ingresso del preamplificatore, è già stata calcolata (vedi 20)):

$$\phi_{iv}(t) = \frac{t}{C_f \cdot \tau} e^{-t/\tau} \quad \forall t \geq 0 \quad (\text{VII.58})$$

Pertanto, per quanto riguarda la varianza associata ai generatori di corrente di rumore all'ingresso della massa virtuale, abbiamo:

$$\sigma_i^2(v_{OSH}) = \frac{1}{2} (2qI_B + 2qI_{Fet} + \frac{4kT}{R_B} + \frac{4kT}{R_f}) \int_0^\infty \left(\frac{t}{C_f \cdot \tau} e^{-t/\tau} \right)^2 dt \quad (\text{VII.59})$$

Essendo

$$\int_0^\infty x^2 e^{-x} \, dx = 2 \quad (\text{VII.60})$$

abbiamo:

$$\sigma_i^2(v_{OSH}) = \frac{a\tau}{8} \quad (\text{VII.61})$$

dove, come sopra, $a = (2qI_B + 2qI_{Fet} + \frac{4kT}{R_B} + \frac{4kT}{R_f}) / C_f^2$.

Quanto al secondo termine occorre calcolare la funzione di trasferimento $\phi_{vv}(t)$ del formatore, in risposta alla $\delta(t)$ inviata dal generatore del rumore serie della Fig.15. Per determinare $\phi_{vv}(t)$ possiamo procedere in vari modi: uno potrebbe essere quello di applicare la FT^{-1} alla funzione di trasferimento fra la $\delta(t)$ generata là dove opera il generatore di rumore serie e l'uscita dello *shaper*, che conosciamo. Noi seguiremo una procedura differente, un po' meno formale: sappiamo che la tensione di uscita del preamplificatore riproduce, istante per istante, il segnale del generatore di rumore serie (la funzione di trasferimento è reale e pari al rapporto della capacità $\frac{\Sigma C}{C_f}$ (vedi 40)).

Quindi l'uscita del preamplificatore in risposta alla $\delta(t)$ nel generatore serie vale:

$$v_{OSH}^\delta = \frac{\Sigma C}{C_f} \delta(t) \quad (\text{VII.62})$$

Si tratta ora di calcolare la risposta dello *shaper* alla $\delta(t)$ al suo ingresso. Questo risultato è presto ottenuto notando che la funzione di risposta $\phi_{iv}(t) = \frac{t}{C_f \cdot \tau} e^{-t/\tau} \quad \forall t \geq 0$ corrisponde alla risposta dello *shaper* ad una funzione a gradino al suo ingresso: infatti la risposta del preamplificatore alla corrente di segnale in ingresso (anch'essa una $\delta(t)$, per l'appunto) è la funzione a gradino. Ora, essendo la $\delta(t)$ rappresentabile come la derivata della funzione gradino ed essendo il sistema lineare, la ϕ_{vv} , funzione di risposta alla $\delta(t)$ in ingresso allo *shaper* si può ottenere semplicemente derivando

la $\phi_{iv}(t)$ (e ovviamente risistemando le costanti).

Pertanto, essendo

$$\phi_{iv}(t) = \frac{t}{C_f \cdot \tau} e^{-t/\tau} \quad \forall t \geq 0 \quad (\text{VII.63})$$

la risposta al gradino di ampiezza $1/C_f$, otteniamo

$$\phi_{vv}(t) = \Sigma C \cdot \frac{d\phi_{iv}(t)}{dt} = \frac{\Sigma C}{C_f} \frac{1}{\tau} \left(1 - \frac{t}{\tau}\right) e^{-t/\tau} \quad \forall t \geq 0 \quad (\text{VII.64})$$

A questo punto non resta che calcolare

$$\sigma_v^2(v_{OSH}) = \frac{2.7kT}{2g_m} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{vv}^2(t) dt \quad (\text{VII.65})$$

Sostituendo la 64) nella 65) e calcolando l'integrale si ottiene:

$$\sigma_v^2(v_{OSH}) = \frac{2.7kT}{8g_m} \frac{(\Sigma C)^2}{C_f^2} \frac{1}{\tau} = \frac{b}{8\tau} \quad (\text{VII.66})$$

dove, come prima, $b = \frac{2.7kT}{g_m} \frac{(\Sigma C)^2}{C_f^2}$.

La varianza totale su v_{OSH} , data dalla somma della 61) e della 66) restituisce allora il risultato 47), ottenuto svolgendo i calcoli nel dominio delle frequenze.

*G.Poggi: Appunti sul rumore elettrico; Cap.VII
Firenze, 11 maggio 2006*