

IV

LE DENSITÀ SPETTRALI E LA LORO MISURA

1. – Densità spettrali di rumore in ingresso e uscita di una rete lineare

Supponiamo di disporre di un generatore reale di tensione, caratterizzato da una $v_{in}(t)$ generica e da una impedenza interna Z_s . Sia la $v_{in}(t)$ una sequenza casuale, quindi propriamente da indicare come $\{v_{in_i}\}$ definita come al solito in un intervallo di quasi-periodicità $-T/2, T/2$. Allora la sua densità spettrale di rumore è data da:

$$w_v^{in} = 2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|FT\{v_{in}\}|^2}{T} \quad (\text{IV.1})$$

Se ora ci chiediamo qual è l'effetto che tale generatore provoca in termini di tensione $v_{out}(t)$ ai capi di altri due terminali della rete, ammessa avere una risposta invariante nel tempo, troviamo subito sulla base della I.6:

$$v_{out}(t) = FT^{-1}\{FT\{v_{in}\} \cdot \mathcal{A}(\nu)\} \quad (\text{IV.2})$$

dove la $\mathcal{A}(\nu)$ rappresenta la funzione di trasferimento in tensione fra i terminali di ingresso considerati (dove si trova il generatore) e quelli di uscita. La $\mathcal{A}(\nu)$ dipenderà, fra l'altro, anche dalla impedenza interna Z_s del generatore.

Il risultato I.6 ci permette anche di valutare la densità spettrale di rumore $w_v^{out}(\nu)$ associata alla tensione di uscita $v_{out}(t)$. Infatti:

$$w_v^{out} = 2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|FT\{v_{out}\}|^2}{T} = 2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|FT\{v_{in}\} \cdot \mathcal{A}|^2}{T} = 2 |\mathcal{A}|^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|FT\{v_{in}\}|^2}{T} = |\mathcal{A}|^2 \cdot w_v^{in} \quad (\text{IV.3})$$

Si trova pertanto che la densità spettrale di rumore della tensione ai terminali di uscita è uguale alla densità spettrale di rumore in ingresso moltiplicata per il modulo quadro della funzione di trasferimento rispetto ai terminali di uscita e di ingresso considerati.

La ricetta 3) è immediatamente estendibile al caso in cui l'eccitazione in ingresso sia costituita, invece che da una tensione, da una sequenza a caso di corrente $i_{in}(t)$. Occorre semplicemente considerare il generatore reale di corrente associato e calcolare la funzione di trasferimento fra il ramo di ingresso e la tensione di uscita. In questo caso la funzione di trasferimento non è un numero puro come prima, ma ha le dimensioni di una impedenza. La soluzione per gli altri casi (corrente-corrente e tensione-corrente) è ottenibile, estendendo le conclusioni precedenti, in maniera banale.

La formula 3) è di importanza basilare nella risoluzione dei problemi di valutazione del rumore elettrico nelle reti lineari. Infatti nel prossimo capitolo troveremo che le sorgenti fisiche fondamentali del rumore elettrico sono sempre schematizzabili con ottima approssimazione con dei generatori reali (di corrente o tensione), ubicati in punti facilmente identificabili nella rete. Una volta determinate

queste sorgenti e nota la loro densità spettrale di rumore, mediante la 3) è possibile calcolare la densità spettrale di rumore (in tensione o corrente) fra qualunque coppia di terminali o in qualunque ramo (rispettivamente) della rete in studio.

Facciamo qualche esempio elementare, cominciando da un generatore reale di tensione (densità spettrale di rumore w_v^{in} , resistenza secondo *Thévenin* R) chiuso su una capacità C (Fig.1; si veda anche la Fig.I.5):

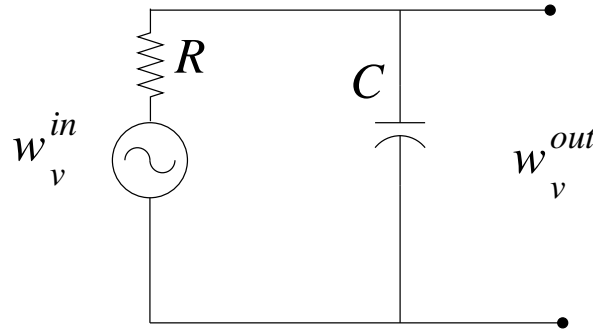


Fig.IV.1

$$|\mathcal{A}(\nu)|^2 = \left| \frac{1}{1 + j2\pi\nu RC} \right|^2 = \frac{1}{1 + 4\pi^2\nu^2 R^2 C^2} \quad (\text{IV.4})$$

$$w_v^{out} = |\mathcal{A}|^2 \cdot w_v^{in} = \frac{w_v^{in}}{1 + 4\pi^2\nu^2 R^2 C^2} \quad (\text{IV.5})$$

Un altro esempio: generatore reale di corrente $i(t)$ (densità spettrale di rumore w_i^{in} , resistenza secondo *Norton* R), chiuso su una capacità C (Fig.2):

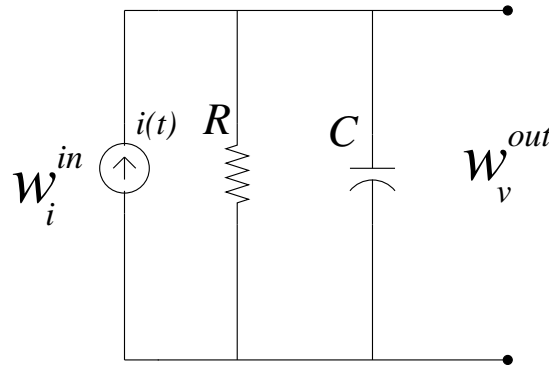


Fig.IV.2

Troviamo innanzitutto la relazione che lega la tensione complessa in uscita con la corrente complessa del generatore \mathcal{I} in entrata:

$$\mathcal{V}_{out} = \mathcal{I} \cdot \frac{1}{1/R + j2\pi\nu C} = \mathcal{I} \cdot \frac{R}{1 + j2\pi\nu RC} \quad (\text{IV.6})$$

Pertanto in questo caso abbiamo:

$$\mathcal{A}(\nu) = \frac{R}{1 + j2\pi\nu RC} \quad (\text{IV.7})$$

$$|\mathcal{A}(\nu)|^2 = \frac{R^2}{1 + 4\pi^2\nu^2 R^2 C^2} \quad (\text{IV.8})$$

per cui la densità spettrale di rumore in tensione fra i terminali di uscita vale:

$$w_v^{out} = w_i^{in} \frac{R^2}{1 + 4\pi^2 \nu^2 R^2 C^2} \quad (\text{IV.9})$$

Se ci sono più generatori casuali presenti nella rete e pensiamo che siano tutti fra loro indipendenti, possiamo applicare il principio di sovrapposizione e considerare l'effetto di ognuno di essi separatamente. Le densità spettrali si sommano e ciò equivale alla ben nota regola per le variabili aleatorie indipendenti: la variabile aleatoria somma di variabili aleatorie ha varianza pari alla somma delle varianze delle variabili di partenza.

2.- Densità spettrale di una $f(t)$ non completamente aleatoria

Nei casi reali in cui si voglia studiare il rumore in una rete lineare, nella rete in questione – diciamo un circuito elettronico di amplificazione e misura – agisce comunque anche un generatore di segnale non casuale $S(t)$ (l'interesse nei confronti del rumore nasce proprio perché siamo interessati al segnale!). Pertanto, a meno di non sopprimere il segnale, normalmente l'uscita della rete che stiamo esaminando presenta una tensione di uscita $U(t)$ che consiste di una parte $U_s(t)$, ovvero la risposta del sistema al segnale $S(t)$, data da:

$$FT\{U_s\} = FT\{S\} \cdot \mathcal{A}_s(\nu) \quad (\text{IV.10})$$

con $\mathcal{A}_s(\nu)$ funzione di trasferimento fra i terminali dove è applicato il segnale e quelli di uscita e di una parte $U_n(t)$ a carattere aleatorio, dovuta alle varie sorgenti di rumore sparse nel circuito:

$$U(t) = U_s(t) + U_n(t) \quad (\text{IV.11})$$

Nonostante che nei capitoli precedenti ci si sia principalmente soffermati sul calcolo dello spettro di potenza di rumore, in realtà la densità spettrale è definibile anche per un segnale periodico $U_s(t)$ con periodo $T_s = \frac{1}{\nu_s}$, con ν_s frequenza fondamentale ed anche in questo caso si può utilizzare la definizione III.8 di spettro di potenza*. La densità spettrale della tensione di uscita conterrà pertanto entrambi i contributi; nel caso di segnale periodico con frequenza fondamentale ν_s la densità spettrale presenterà oltre all'andamento determinato dalla parte aleatoria (quello a cui siamo interessati per la determinazione del rumore; un andamento che a parte le fluttuazioni sarà regolare) dei picchi in corrispondenza a ν_s e alle sue eventuali armoniche superiori.

Non sempre la presenza di uno o più picchi nello spettro di potenza di una tensione è associata ad un segnale deliberatamente introdotto: può anche derivare da un accoppiamento indesiderato con qualche generatore periodico esterno al circuito (tipico l'accoppiamento induttivo o capacitivo con la rete di distribuzione dell'energia elettrica, riconoscibile per la presenza di un picco a 50 Hz o armoniche superiori) o ad un effetto "antenna" del nostro circuito che capta onde elettromagnetiche di trasmissioni via etere o alla presenza di auto-oscillazioni spurie all'interno del circuito, dovute spesso a componenti attivi non perfettamente messi a punto.

* Per un segnale che non sia periodico ed abbia estensione finita lo spettro di potenza assume un valore nullo al tendere di T all'infinito e quindi il caso è normalmente di scarso interesse.

In questi casi, nello spettro di potenza misurato si fa distinzione –a parte il segnale propriamente detto– fra *rumore* e *disturbo*. Col termine “rumore” si indica propriamente la parte aleatoria dovuta a fenomeni fisici in buona misura ineliminabili e comunque riconducibili a sorgenti casuali (che discuteremo nel prossimo capitolo); col termine “disturbo” ci si riferisce propriamente alle altre fonti “sistematiche” (del tipo prima detto) di contributi allo spettro di potenza, almeno teoricamente eliminabili una volta identificate. Va da sé che nella pratica la eliminazione, ma anche solo la riduzione, dei disturbi può essere una operazione complicata e talvolta estenuante, come spesso accade per gli effetti sistematici.

3.– Misura di densità spettrale tramite analizzatori di spettro

La determinazione sperimentale dello spettro di potenza si effettua normalmente con apparecchi (i cosiddetti analizzatori di spettro) che si collegano ai terminali di interesse. In prima approssimazione possiamo considerare lo strumento come un voltmetro ideale (impedenza di ingresso infinita), in grado di rappresentare su uno schermo lo spettro di potenza in esame. Per frequenze elevate (diciamo maggiori di $1 \div 10 \text{ GHz}$) si utilizzano (come accennato nel Cap.II, §3) voltmetri selettivi accordabili; per frequenze relativamente basse al giorno d’oggi molti di questi strumenti si basano sul campionare la sequenza di interesse (un numero finito di punti) per un tempo corrispondente all’intervallo di quasi-periodicità, calcolare la *FT* della sequenza e poi desumere da questa lo spettro di potenza. Il limite per $T \rightarrow \infty$ è fatto semplicemente espandendo l’intervallo di quasi-periodicità per un tempo opportunamente lungo (impostabile dall’utente). Spesso il calcolo della trasformata è effettuato applicando la cosiddetta Trasformata di *Fourier* Discreta (*DFT*) sull’insieme dei punti campionati, usando algoritmi particolarmente efficienti, come la cosiddetta *FFT*, *Fast Fourier Transform*. Il campo delle frequenze presentate sullo schermo dipende dalla durata della osservazione per quanto riguarda il limite inferiore; per il limite superiore tutto dipende dalla “velocità di campionamento”, ovvero dall’intervallo Δt fra un campionamento e l’altro; precisamente la massima frequenza rappresentata correttamente dall’Analizzatore di spettro –la cosiddetta frequenza di *Nyquist*– è pari a $1/(2 \Delta t)$ (si veda il cosiddetto teorema del campionamento). Abbiamo già detto (§3 del Cap.II) che comunque la estensione temporale della misura deve essere assai maggiore del tempo proprio di risposta del sistema, quello per cui la funzione di autocorrelazione della sequenza è significativamente diversa da zero.

Si ricordi che nel collegare l’uscita di un qualunque circuito elettrico con l’ingresso di un altro (ad esempio uno strumento di misura) le impedenze di uscita dell’uno con quelle di ingresso dell’altro influenzano l’andamento dello spettro di potenza osservato. In generale la configurazione di misura è sempre riconducibile ad uno schema del tipo riportato nella Fig.3, dove si è assunto che il generatore di segnale sia inevitabilmente accompagnato da un generatore di rumore ad esso in serie (è una schematizzazione sempre possibile) e che esistano all’interno della rete altri generatori di rumore. Per tutti i generatori di segnale e di rumore, nonché per il generatore di uscita e per il misuratore, sono riportate le impedenze interne. Se vogliamo determinare la densità spettrale di rumore fra i terminali di uscita, si dovrà tenere conto, secondo quanto visto nel primo paragrafo, della impedenza di uscita Z_{out} e di quella di ingresso Z_{im} che lo strumento presenta fra i suoi terminali di misura; normalmente essa è sufficientemente elevata rispetto a Z_{out} da poterne trascurare l’effetto; se non è questo il caso, lo spettro di potenza effettivamente misurato dallo strumento sarà dato da una espressione del tipo della formula 3) che tenga esplicitamente conto della impedenza secondo

Thévenin Z_{out} del generatore equivalente di tensione V_{out} che vogliamo misurare e dell'impedenza di ingresso dello strumento.

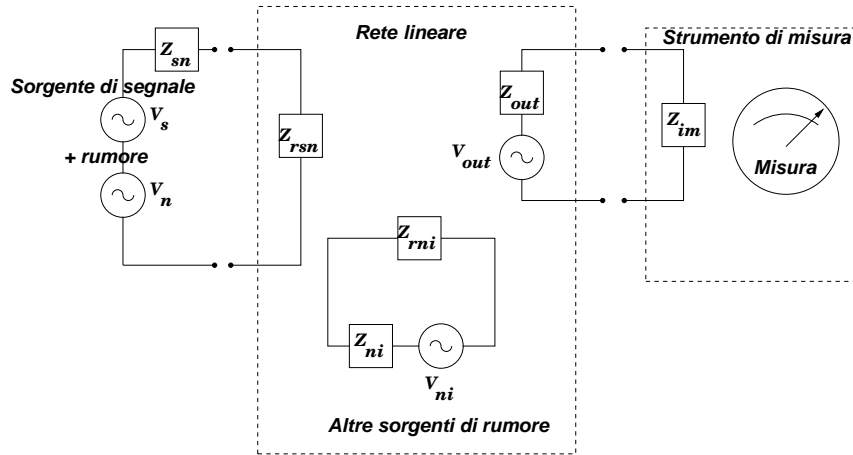


Fig.IV.3

Ricordando poi le considerazioni svolte sulla inevitabile aleatorietà di ogni determinazione sperimentale di spettri potenza, non ci stupiremo del fatto che gli spettri che lo strumento mostrerà in successione sullo schermo dopo ogni campionamento e analisi, non saranno identici fra loro; al più, per avere una presentazione di un andamento più regolare, potremmo richiedere allo strumento, se dotato di questa opzione, di compiere –frequenza per frequenza– la media fra le successive determinazioni in modo da minimizzare le fluttuazioni osservate.

Nella Fig.4 è proprio rappresentato un tipico risultato per uno spettro di potenza, con tutte le fluttuazioni dovute alla breve durata della misura. Lo spettro di potenza si riferisce alla densità spettrale di rumore all'uscita di un preamplificatore di carica (si veda il Cap.VII). Si noti la scala verticale logaritmica, necessaria per mostrare con un sufficiente dettaglio la grande varietà di valori dello spettro di potenza.

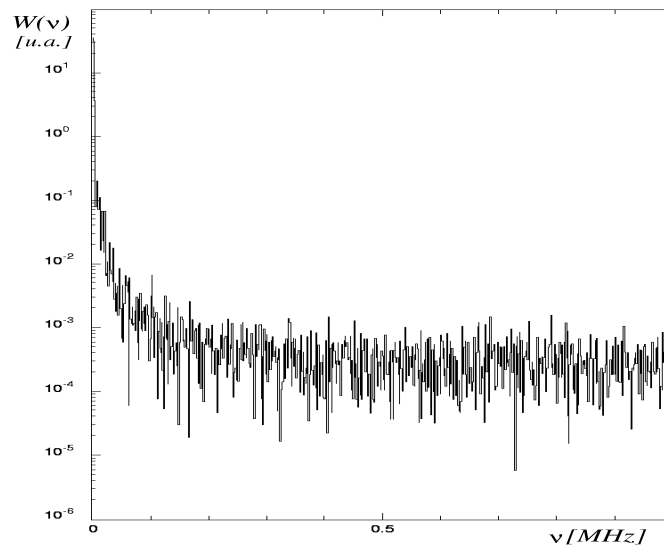


Fig.IV.4

4.– Misura di rumore integrata sulla banda passante

Qualora non si sia interessati allo spettro di potenza, ma si voglia solo conoscere la varianza totale della tensione di rumore, si può utilizzare semplicemente un voltmetro a vero valore efficace. Il quadrato della tensione V_{rms} misurata dà la somma del quadrato del valor medio della tensione più la sua varianza. Una misura di rumore così condotta, oltre ad imporre la determinazione accurata del valor medio (tanto più accurata tanto più esso è grande), ha comunque un limite, legato proprio al fatto che essa dà un valore del rumore integrato sulla banda passante dello strumento. Precisamente, supponendo pure che lo strumento abbia una impedenza di ingresso Z_{im} di cui si possa tenere conto come detto alla fine del paragrafo precedente, comunque esso non sarà mai ugualmente sensibile a tutte le frequenze in ingresso e la V_{rms} misurata rappresenta un valore di rumore integrato su una gamma limitata (spesso sia inferiormente che superiormente) di frequenze, sulla quale il costruttore ci dovrà informare. Raramente la banda è definita in maniera brusca e il profilo con cui essa va a zero deve pure essere conosciuto e fornito dal costruttore; normalmente, a parte il profilo, il valore di banda riportato si riferisce alle frequenze di -3 dB .

5.– Un metodo per la misura della varianza di rumore nelle classificazioni di ampiezza

Supponiamo che all'uscita di un circuito elettronico di misura (ipoteticamente, per ora, esente da rumore) si presentino segnali della forma rappresentata nella Fig.5

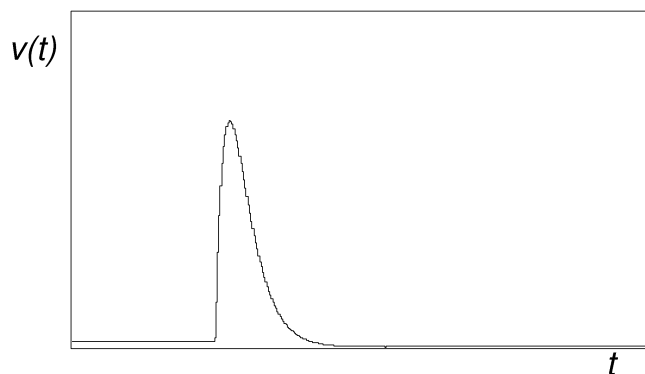


Fig.IV.5

Tali segnali nei casi di interesse fisico che saranno descritti nel seguito, si presentano a caso nel tempo e di essi deve essere misurato il valore del massimo. Per far questo un ADC collegato alla uscita del circuito, dopo aver rivelato, tramite un circuito di trigger a soglia, l'arrivo di un segnale, attiva un circuito di *Sample and hold* che compie una operazione di prolungamento del valore del massimo (*stretching*) e poi converte tale valore.

Se le ampiezze dei segnali sono tutte identiche, ogni segnale dà luogo, all'uscita dell'ADC, allo stesso codice numerico. Facendo quindi un istogramma delle conversioni, ovvero una classificazione delle ampiezze, otteniamo l'addensamento di tutte le ampiezze in un unico canale (lo stesso codice numerico) dell'istogramma. Cosa accade ora se all'uscita del circuito è presente anche il rumore elettrico? E' possibile misurare la varianza di questo rumore? Visivamente, osservando con un oscillografo l'uscita del circuito, percepiremo la presenza del rumore come una increspatura del tipo mostrata in Fig.6:

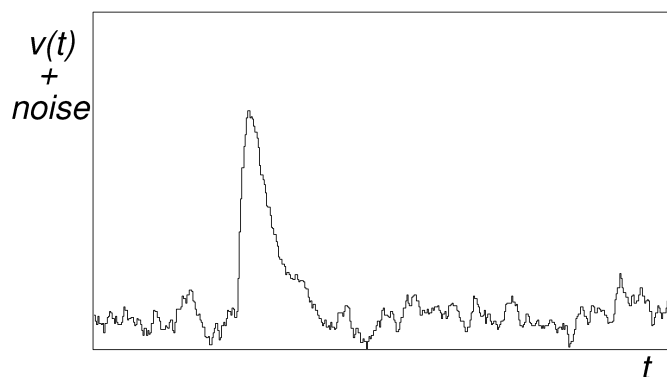


Fig.IV.6

L'andamento del rumore presentato nella Fig.6 è realistico e rappresenta proprio quello che si osserva in casi reali che studieremo in dettaglio nel Cap.VII. Si noti, in particolare, che le variazioni in funzione del tempo del rumore si svolgono su tempi che sono confrontabili con quelli di raggiungimento del massimo del segnale. Il sistema di conversione, che per semplicità continuiamo a considerare esente da disturbi e da rumore proprio, compirà sul segnale affetto dal rumore la stessa operazione di *Sample and hold* e di conversione vista prima e convertirà il massimo, il cui valore è ora influenzato dalla presenza del rumore. In particolare il massimo (il primo massimo che il circuito di *Sample and hold* individua dopo il trigger) non sarà quello "esatto" senza rumore, ma subirà di volta in volta una fluttuazione del valore verso l'alto o verso il basso. Le conversioni allora, sempre nell'ipotesi di segnali originari di ampiezza costante, si distribuiranno attorno al medesimo valor medio di prima ma sparpagliandosi un po': nell'istogramma esse non "cresceranno su un unico canale" come prima, ma assumeranno la forma di un picco con larghezza finita (oltretutto, come vedremo poi, la distribuzione risulterà gaussiana). La determinazione della varianza della distribuzione delle conversioni, fatta direttamente sull'istogramma, permette la conoscenza della varianza del rumore, una volta che sia noto il coefficiente di proporzionalità fra le conversioni numeriche all'uscita dell'ADC e la tensione al suo ingresso.

Questo metodo di misura del rumore è quello normalmente impiegato nelle misure in fisica nucleare, nelle quali i segnali di Fig.5 e 6 sono prodotti dalle particelle ionizzanti che colpiscono un rivelatore; il massimo di tali segnali è di interesse perché il processo di rivelazione e misura ne assicura la proporzionalità alla energia depositata dalle particelle rivelate (vedi Cap.VII).