

### III

## IL RUMORE NEL DOMINIO DELLE FREQUENZE E DEL TEMPO

### 1.– *Le sequenze casuali nel dominio del tempo e nel dominio delle frequenze*

Storicamente lo studio delle reti lineari e la trattazione dei segnali nascono assai prima dello studio del rumore elettrico, la cui esistenza è stata proprio scoperta durante i progressi tecnologici associati al trattamento e amplificazione dei segnali nelle reti elettriche ed elettroniche.

Il fatto che il rumore elettrico sia stato osservato in questo contesto ha portato come conseguenza naturale il tentativo –per altro condotto con successo– di inquadrare anche questi processi nello schema matematico del trattamento dei segnali, molto spesso sostanzialmente periodici, per i quali l'approccio nel dominio delle frequenze (serie e trasformate di *Fourier*) si era dimostrato particolarmente utile. Pertanto nel seguito faremo vedere come la caratterizzazione dei processi a caso stazionari, ovvero in pratica la determinazione delle medie temporali delle sequenze che troverebbero la naturale collocazione di calcolo proprio nel dominio del tempo, avvenga ancora oggi molto spesso, se non sempre, nel dominio trasformato delle frequenze. Nei paragrafi seguenti faremo anche vedere come sia possibile passare dalla rappresentazione degli effetti in un dominio a quella nell'altro. Prima di procedere col formalismo necessario, si vuole solo anticipare che in qualche caso particolarmente chiaro e istruttivo affronteremo il problema della determinazione delle medie di insieme nel dominio del tempo e ci accorgeremo che –pur complicandosi talvolta i procedimenti di calcolo– potremo sfruttare molto direttamente la modellizzazione fisica del processo.

### 2.– *L'intervallo di quasi-periodicità*

Consideriamo una sequenza a caso  $\{f(t)\}$ , definita su un intervallo  $-T/2, T/2$ ; ammettiamo anche che  $\langle f \rangle = 0$  e che pertanto la media temporale del modulo quadro (o del quadrato, visto che consideriamo sequenze reali) coincida con la varianza. Abbiamo allora:

$$\langle f^2 \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f^2(t) dt \quad (\text{III.1})$$

L'intervallo  $-T/2, T/2$  è detto intervallo di quasi-periodicità della sequenza; l'origine di questo nome va ricercata nel fatto che, come abbiamo detto nel primo paragrafo, i fenomeni aleatori vengono spesso riportati nel dominio delle frequenze mediante o uno sviluppo in serie o una trasformata di *Fourier* della sequenza. Nel caso che si voglia utilizzare lo sviluppo in serie per applicarlo alla sequenza  $\{f(t)\}$  occorre “trasformare” la sequenza che di periodico non ha proprio nulla, in un segnale

periodico: per far ciò si assume allora che la sequenza da sviluppare in serie di *Fourier* sia costituita da infinite sequenze  $\{f(t)\}$  definite in un intervallo  $-T/2, T/2$ , tutte repliche conformi di quella base effettivamente osservata e spostate di multipli interi del periodo  $T$  (a destra e sinistra di quella base). Lo sviluppo in serie è ora possibile e l'armonica fondamentale ha pulsazione pari a  $2\pi/T$ . Il fatto che l'intervallo di quasi-periodicità sia finito porta ovviamente un limite alla minima frequenza identificabile nel processo in studio ( $1/T$ ); si tratta quindi di un limite reale ma concettualmente superabile, imposto dalla durata temporale del campionamento effettuato. Il limite si può ampliare, ovvero le frequenze più basse si possono studiare, semplicemente estendendo la durata della sequenza per un intervallo di tempo  $T' > T$ .

Di norma, per passare dal dominio dove è stata registrata la sequenza, cioè il tempo, a quello delle frequenze si preferisce impiegare la trasformata di *Fourier* ed allora non occorre che la funzione da trasformare sia periodica; in questo caso, data una certa sequenza  $\{f(t)\}$ , definita fra  $-T/2$  e  $T/2$ , si associa ad essa una sequenza  $\{f_e(t)\}$  definita fra  $-\infty$  e  $+\infty$ , identica alla  $\{f(t)\}$  nell'intervallo  $-T/2, T/2$  e 0 altrove. La  $\{f_e(t)\}$  è quindi definita su un supporto compatto ampio  $T$ . Nel seguito seguiremo sempre questo approccio, comunque continuando a chiamare l'intervallo  $-T/2, T/2$  intervallo di quasi-periodicità, mutuando la specificazione corretta nel caso dell'utilizzo della serie.

### 3.- Varianza di una sequenza e densità spettrale di rumore

Applichiamo la definizione 1) di varianza di una sequenza reale  $\{f(t)\}$ , con  $\langle f \rangle = 0$ :

$$\langle f^2 \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f^2(t) dt \quad (\text{III.2})$$

Utilizzando la sequenza "estesa"  $\{f_e(t)\}$  possiamo scrivere:

$$\langle f^2 \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_e^2(t)}{T} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t, T) dt \quad (\text{III.3})$$

con

$$g^2(t, T) = \frac{f_e^2(t)}{T} \quad (\text{III.4})$$

Concettualmente il calcolo di  $\langle f^2 \rangle$  procede così: si definisce un intervallo di quasi periodicità, si costruisce la  $g^2(t, T)$  e si calcola l'integrale fra  $-\infty$  e  $+\infty$ . Per fare il limite si estende l'intervallo di quasi-periodicità  $T' > T$ , ovvero si inglobano altri contributi di  $\{f(t)\}$  alla periferia dell'intervallo precedente; si ricalcola l'integrale e così via. Ammettiamo che il valore di questi integrali converga ad un valore costante; il valore limite è quindi la nostra varianza. Se il limite 3) esiste, ciò significa che  $g^2(t, T)$ , per tutti i valori del parametro  $T$  è una funzione a quadrato sommabile e pertanto ammette trasformata di *Fourier*:

$$FT\{g(t, T)\} = FT\left\{\frac{f_e(t)}{\sqrt{T}}\right\} = \frac{1}{\sqrt{T}} FT\{f_e(t)\} \quad (\text{III.5})$$

Ora utilizziamo il Teorema di Parseval che stabilisce l'equivalenza fra l'integrale del modulo quadro di una funzione calcolato nel dominio proprio di definizione e il modulo quadro della sua *FT* integrato sul dominio trasformato:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |S(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |FT\{S\}|^2 d\nu \quad (\text{III.6})$$

Applichiamo la 6) al nostro caso:

$$\begin{aligned}
 \langle f^2 \rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t, T) dt = \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |FT\{g(t, T)\}|^2 d\nu = \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|FT\{f_e(t)\}|^2}{T} d\nu
 \end{aligned} \tag{III.7}$$

Lo scambio fra il segno di integrazione e di limite è stato fatto perché le operazioni associate agiscono su variabili differenti. La 7) pertanto mostra come un integrale naturalmente calcolato in un certo dominio ( $t$ ) possa essere equivalentemente calcolato nel dominio trasformato  $\nu$ . L'integrando nel dominio  $\nu$  della 7), a parte un fattore 2, definisce la *densità spettrale (di rumore) o spettro di potenza* della sequenza  $\{f\}$  che si indica usualmente con il simbolo  $w(\nu)$ :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|FT\{f_e(t)\}|^2}{T} = \frac{w(\nu)}{2} \tag{III.8}$$

e pertanto, ricordando che essendo  $f(t)$  reale  $FT\{f_e\}(\nu) = FT^*\{f_e\}(-\nu)$ , possiamo anche scrivere:

$$\langle f^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|FT\{f_e(t)\}|^2}{T} d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{w(\nu)}{2} d\nu = \int_0^{+\infty} w(\nu) d\nu \tag{III.9}$$

Normalmente, d'ora innanzi, si ometterà il pedice  $e$  alla funzione  $f(t)$ , restando implicitamente inteso che il metodo corretto per il calcolo della sua trasformata è quello sopradetto. Abbiamo già detto del motivo "storico" per il quale si è giunti ad esprimere la varianza di una funzione del tempo come integrale nel dominio delle frequenze. Restano ora da vedere i vantaggi di questo approccio: uno –che sarà ampiamente illustrato nel seguito– è associato alla semplicità con la quale per esempio, nota che sia la densità spettrale di rumore per la tensione fra due terminali di una rete lineare, si passa alla conoscenza della corrispondente densità spettrale di rumore della tensione fra altri due terminali qualunque della rete. Un altro vantaggio è operativo: supponendo di disporre (e di fatto è possibile disporre) di uno strumento che misura la tensione *rms* (cioè uno strumento a *vero valore efficace*) in bande spettrali molto strette e con centro banda regolabile finemente (*voltmetro selettivo accordabile*), potremo, sfruttando la definizione 9), costruire la varianza della tensione come somma dei contributi misurati negli intervalli centrati alle varie frequenze, ovvero misurare "per punti" la densità spettrale di rumore associata alla tensione, in funzione della frequenza. In altri termini, lo spettro di potenza, nonostante la sua definizione apparentemente assai elaborata, è una grandezza accessibile sperimentalmente e in maniera relativamente semplice.

Notiamo ancora che, data una certa sequenza  $\{f(t)\}$  in un intervallo finito  $-T/2, T/2$ , la densità spettrale di rumore calcolata tramite la 9) darà comunque un risultato aleatorio, nel senso che se ripetiamo il calcolo su una sequenza successiva otterremo un risultato in genere differente; il procedimento al limite esplicitamente riportato nella 9), assicura che per sequenze di durata idealmente infinita le fluttuazioni fra i risultati ottenuti per ognuna di esse andrebbero a svanire. Come esempio di estrazione reale (in realtà si tratta di simulazione numerica) di uno spettro di potenza riportiamo nella Fig.1 la densità spettrale di rumore della sequenza riportata nella Fig.II.1. Nella parte a) della figura l'asse orizzontale delle frequenze è lineare, mentre nella parte b) è logaritmico. La scala verticale è logaritmica in entrambi i casi. Si notino le fluttuazioni, che, come detto sopra, dipendono dalla dimensione finita dell'intervallo di quasi periodicità, che in questo caso era di circa  $1.6 \cdot 10^4$  s, e quindi dal numero finito di punti (uno al secondo) su cui la  $\{f(t)\}$  è stata valutata.

La densità spettrale di rumore definita nella 8) normalmente (come nella Fig.1) dipende dalla frequenza; anzi verrebbe fatto di dire che “naturalmente” debba dipendere dalla frequenza, oltretutto nel modo “giusto” tale per cui il suo integrale non abbia a divergere. Un po’ paradossalmente, quando studieremo le sorgenti principali di rumore elettrico (Cap.V) troveremo che, a seguito di alcune schematizzazioni, è possibile prevedere per queste sorgenti proprio densità spettrali indipendenti dalla frequenza; tutti questi casi –detti “puramente casuali” o di “rumore bianco”– danno luogo a varianze delle sequenze che divergono e quindi meritano un esame critico. Tale esame puntualmente mostrerà che alcune schematizzazioni introdotte –apparentemente ragionevoli– in realtà contengono assurdità fisiche (per esempio durate infinitesime per processi fisici reali). Non appena tali semplificazioni siano rimosse, le densità spettrali cessano di essere indipendenti dalla frequenza e tendono viceversa a zero per frequenze al di sopra di un limite finito; le divergenze nelle varianze scompaiono.

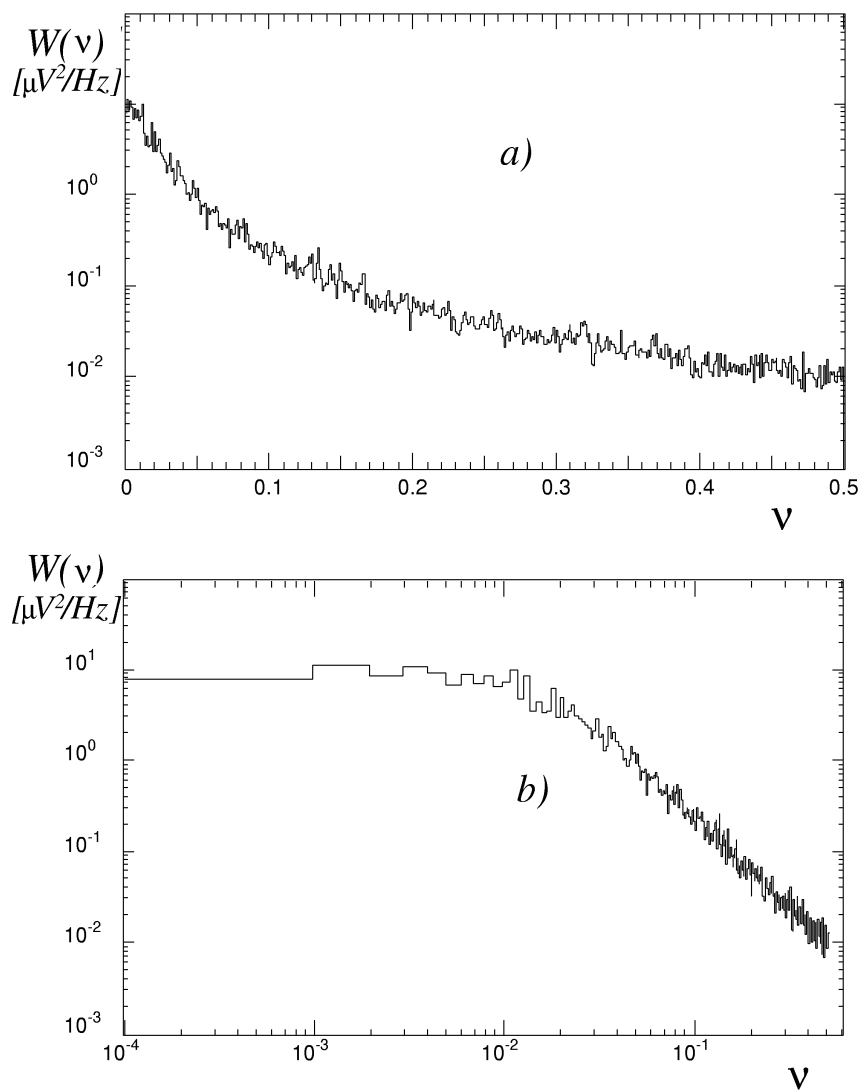


Fig.III.1

#### 4. – Funzione di autocorrelazione e teorema di Wiener-Khinchin

Riprendiamo la definizione II.13 di funzione di autocorrelazione per un processo a caso stazionario:

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t + \tau) \cdot f^*(t) dt \quad (\text{III.10})$$

Esiste una relazione, il cosiddetto Teorema di Wiener-Khinchin, che lega la funzione di autocorrelazione (una funzione quindi calcolata nel dominio del tempo) alla densità spettrale di rumore.

Consideriamo due funzioni  $h(t)$  e  $k(t)$  che ammettano trasformata di Fourier  $\mathcal{H}(\nu) = FT\{h\}$  e  $\mathcal{K}(\nu) = FT\{k\}$ . Costruiamo con  $h(t)$  e  $k(t)$  il seguente integrale:

$$I(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h^*(t) \cdot k(t + \tau) dt \quad (\text{III.11})$$

e calcoliamone la  $FT$ :

$$\begin{aligned} FT\{I\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau e^{-j2\pi\nu\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} dt h^*(t) \cdot k(t + \tau) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau dt e^{-j2\pi\nu\tau} h^*(t) \cdot k(t + \tau) \end{aligned} \quad (\text{III.12})$$

Facendo il cambiamento di variabile  $t + \tau = \theta$ , abbiamo:

$$\begin{aligned} FT\{I\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\theta dt e^{-j2\pi\nu(\theta-t)} h^*(t) \cdot k(\theta) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\theta e^{-j2\pi\nu\theta} k(\theta) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{j2\pi\nu t} h^*(t) \end{aligned} \quad (\text{III.13})$$

Si riconosce nel primo integrale la  $FT\{k\}$  e nel secondo la  $FT^*\{h\}$ ; pertanto:

$$FT\{I\} = FT\{k\} \cdot FT^*\{h\} \quad (\text{III.14})$$

Riprendiamo ora la 10) e riscriviamola, introducendo la funzione  $g(t, T)$  prima definita ( $g^2(t, T) = \frac{f^2(t)}{T} \quad \forall -T/2 < t < T/2$ ,  $g^2(t, T) = 0$  altrove):

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} (g(t + \tau, T) \cdot g^*(t, T)) dt \quad (\text{III.15})$$

Il risultato 14) applicato alla 15), ponendo  $h(t) = k(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{g(t, T)}{\sqrt{T}}$ , dà:

$$FT\{R(\tau)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} FT\{g(t, T)\} \cdot FT^*\{g(t, T)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|FT\{f\}|^2}{T} = \frac{w(\nu)}{2} \quad (\text{III.16})$$

La 16) ci dice quindi che lo spettro di potenza di una sequenza a caso stazionaria è pari a 2 volte la  $FT$  della funzione di autocorrelazione della medesima sequenza. Tale risultato è il cosiddetto Teorema di *Wiener-Khinchin*. Spesso tale teorema si formula usando la trasformata “coseno” e in questo caso la relazione diretta e inversa del teorema risultano le seguenti:

$$\begin{aligned} a) \quad R(\tau) &= \int_0^{+\infty} w(\nu) \cos 2\pi\nu\tau d\nu \\ b) \quad w(\nu) &= 4 \int_0^{+\infty} R(\tau) \cos 2\pi\nu\tau d\tau \end{aligned} \quad (\text{III.17})$$

Le relazioni 17a) e b) (o le loro equivalenti formulate con la trasformata usuale) sono di fondamentale importanza perché permettono, nella trattazione del rumore, di passare con una certa agilità dal dominio delle frequenze a quello del tempo e viceversa; consentono in particolare di calcolare, sulla base della fisica del processo esaminato, o la densità spettrale di rumore (procedendo nel dominio delle frequenze) o la funzione di autocorrelazione (nel dominio del tempo) a seconda di quale delle due rappresentazioni fisiche del processo sia più adatta a trovare la soluzione. La Fig.2 rappresenta la funzione di autocorrelazione della sequenza presentata nella Fig.II.1; la  $R(\tau)$  della Fig.2 è stata ottenuta proprio antitrasformando la densità spettrale della medesima sequenza, riportata nella Fig.1. Si noti la simmetria della funzione di autocorrelazione attorno allo zero, come atteso sulla base della sua definizione e del fatto che la sequenza esaminata è reale; le fluttuazioni presenti sono, come sopra, dovute alla estensione finita dell'intervallo di quasi-periodicità, ovvero al numero finito di punti considerati.

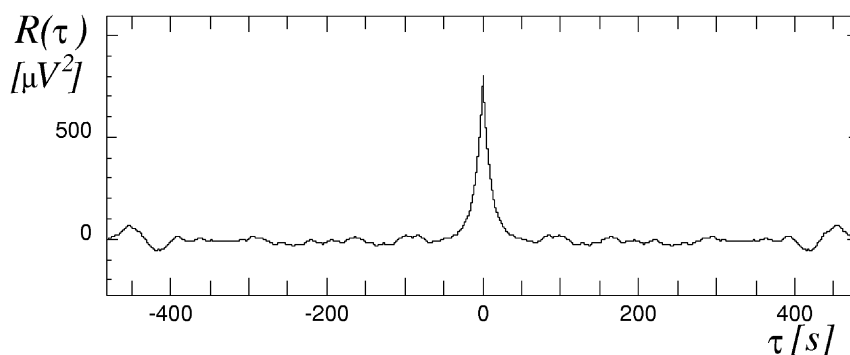


Fig.III.2

Come applicazione elementare dei risultati ora trovati, supponiamo di osservare una sequenza a caso di un processo stazionario cui sia associata una densità spettrale di rumore bianca ( $w(\nu) = \text{costante}$ , ovvero un caso non particolarmente fisico, ma che comunque scopriremo di interesse); sappiamo già che la varianza della sequenza presenta allora una divergenza:

$$\langle f^2 \rangle = \int_0^\infty w \, d\nu = w \int_0^\infty d\nu \quad (\text{III.18})$$

La funzione di autocorrelazione, sulla base della relazione 17) a, vale:

$$R(\tau) = w \int_0^\infty \cos 2\pi\nu\tau \, d\nu = w \delta(\tau) \quad (\text{III.19})$$

ovvero essa ha un andamento a  $\delta$  centrata sull'origine, valore per il quale presenta la divergenza attesa sulla base della 18). Vedremo poi, come già anticipato, che nei casi reali la fisica "giusta" rimuove ogni divergenza di questo tipo.

## 5. – Sequenze casuali, teorema di Campbell e funzione di autocorrelazione

Molto spesso, nella ricerca dei meccanismi fisici alla base del rumore elettrico, è facile convincersi che esso è prodotto da un certo fenomeno base (per esempio l'attraversamento casuale nel tempo di una barriera di potenziale da parte di un portatore di carica oppure il moto a caso di un elettrone in un conduttore ohmico dovuto alla temperatura finita) e che l'effetto macroscopico finale osservato risulta dalla sovrapposizione di un enorme numero di questi effetti elementari, tutti indipendenti fra loro e con origini temporali diverse. Con la prospettiva di poter essere in grado di descrivere fra breve (Cap.V) le origini del rumore elettrico secondo l'approccio sopra delineato, affrontiamo ora un problema che allo stato attuale pare eminentemente matematico, ma che in realtà è riconducibile a problemi fisici estremamente concreti.

Sia data una sequenza casuale  $i_m(t)$  costituita da una successione di  $m$  impulsi e definita in un intervallo di quasi-periodicità  $-T/2, T/2$  molto vasto (vedremo poi rispetto a cosa). Si osservi che, per la prima volta da quando abbiamo affrontato l'argomento, facciamo una ipotesi precisa su come è costituita la sequenza in esame. Le sequenze caratterizzate dal possedere all'interno dell'intervallo di quasi-periodicità esattamente  $m$  impulsi sono esprimibili nella forma:

$$i_m(t) = \sum_{k=1}^m f_l(t - t_k) \quad (\text{III.20})$$

con  $t_k$  origine del  $k$ -esimo impulso  $f_l(t - t_k)$ . Ammettiamo che per la funzione  $f_l$  siano calcolabili i seguenti integrali:  $\int_{-\infty}^{\infty} f_l(t) dt$  e  $\int_{-\infty}^{\infty} f_l(t)f_l(t+\tau) dt$ ; inoltre facciamo l'ipotesi che la durata di ogni singolo impulso sia comunque molto inferiore rispetto all'intervallo di quasi-periodicità, ovvero che gli integrali sopradetti siano calcolabili anche assumendo come estremi quelli dell'intervallo di quasi-periodicità. L'indice  $l$  sta a ricordare che la forma dell'impulso può non essere sempre la stessa, anzi ammettiamo esplicitamente che esista una probabilità  $g_l$  che l'impulso abbia la forma  $f_l(t)$ . Ammettiamo anche che la probabilità di ottenere una forma  $f_l$  per un impulso con origine in  $t_k$ , sia indipendente da  $t_k$ , vale a dire che per ogni impulso, indipendentemente dalla sua origine temporale  $t_k$ , la distribuzione delle forme sia sempre la stessa. Ammettiamo inoltre che nell'intervallo  $-T/2, T/2$  i vari  $t_k$  siano distribuiti uniformemente, ovvero che la densità di probabilità della variabile aleatoria  $t_k$  sia costante e pari a  $1/T$ .

Calcoliamo ora, sulla base delle ipotesi introdotte, tre quantità medie associate a  $i_m(t)$  e precisamente:

- il valor medio di insieme  $\overline{i_m(t)} = \overline{i(t)}$
- il valor quadratico medio di insieme  $\overline{i^2(t)}$
- il valor medio di insieme  $\overline{i(t) \cdot i(t + \tau)}$ , in funzione di  $\tau$

Per attuare le medie agiremo con la procedura di media di insieme, calcolando valori di aspettazione: infatti il valor medio della sequenza  $i(t)$  sarà ottenuto mediando su tutte le variabili aleatorie che costituiscono la sequenza, quindi in particolare le forme degli impulsi, l'istante di tempo in cui sono generati e il numero di impulsi osservati nell'intervallo di quasi periodicità.

Considereremo innanzitutto fra le infinite sequenze di impulsi all'interno di un intervallo di durata  $-T/2, T/2$  quelle caratterizzate da presentare un numero  $m$  di impulsi, cioè

$$i_m(t) = \sum_{k=1}^m f_l(t - t_k) \quad (\text{III.21})$$

Per prima cosa medieremo la 21) sulle forme e otterremo una sequenza  $i_{mf}$ , dove l'indice  $f$  sta a ricordare la media sulle forme (è il primo passo della media di insieme). Successivamente medieremo sulla distribuzione di  $t_k$ , calcolando  $E\{i_{mf}(t)\} = i_{mf}(t) = \int_{-T/2}^{+T/2} i_{mf}(t) \frac{dt_1}{T} \frac{dt_2}{T} \dots \frac{dt_m}{T}$ ; il simbolo  $\widetilde{\phantom{x}}$  lo abbiamo riservato per indicare questo tipo di media. Finalmente medieremo su  $m$ , ovvero considereremo tutte le altre sequenze possibili, cioè quelle che nel medesimo intervallo di tempo  $-T/2, T/2$  presentano numeri di impulsi differenti; la probabilità associata a questa variabile aleatoria discreta che conta il numero di impulsi in un determinato intervallo di tempo sarà ovviamente quella di *Poisson*. Per quest'ultima operazione di media di insieme, che determina il numero medio di impulsi per unità di tempo, abbiamo riservato un simbolo *ad hoc*, ovvero  $\widehat{\phantom{x}}$ . Va tuttavia precisato che di fatto le tre operazioni di media costituiscono nel complesso la media di insieme della sequenza base di durata fra  $-T/2$  e  $T/2$ ; quindi propriamente l'unico simbolo da utilizzare sarebbe la sovralineatura che abbiamo introdotto allo scopo nel Cap.II e che infatti riportiamo sul risultato finale, omettendo gli altri simboli. Notiamo infine che essendo il processo in esame manifestamente stazionario, tali medie garantiscono lo stesso risultato che otterremmo facendo la media temporale. Procediamo quindi mediando la 21) sulle forme:

$$i_{mf}(t) = \sum_{l=1}^F \sum_{k=1}^m g_l f_l(t - t_k) = \sum_{k=1}^m f_f(t - t_k) \quad (\text{III.22})$$

ovvero la media sulle forme si limita a dare nella sommatoria una risposta impulsiva media  $f_f(t) = \sum_{\text{forme}} g_l f_l(t)$ , essendo tale distribuzione di forme totalmente indipendente dal tempo di origine degli impulsi e dal loro numero entro l'intervallo considerato.

Mediando la 22) su  $t_k$  (densità di probabilità  $1/T$ ) abbiamo:

$$\begin{aligned} \widetilde{i_{mf}} &= \int_{-T/2}^{+T/2} \frac{dt_1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \frac{dt_2}{T} \dots \int_{-T/2}^{+T/2} \frac{dt_m}{T} \sum_{k=1}^m f_f(t - t_k) = \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f_f(t - t_k) dt_k = -\frac{1}{T} \sum_{k=1}^m \int_{T/2+t}^{-T/2+t} f_f(\theta_k) d\theta_k = \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=1}^m \int_{-T/2+t}^{+T/2+t} f_f(\theta_k) d\theta_k \end{aligned} \quad (\text{III.23})$$

Nel calcolo precedente abbiamo fatto il cambiamento di variabile  $t - t_k = \theta_k$ . L'ultimo integrale, avendo ipotizzato che la durata degli impulsi elementari fosse molto minore comunque dell'intervallo di quasi-periodicità, risulta indipendente da  $k$  e da  $t$  e vale:

$$F_f = \int_{-T/2+t}^{+T/2+t} f_f(\theta_k) d\theta_k \approx \int_{-\infty}^{\infty} f_f(\theta) d\theta \quad (\text{III.24})$$

La sommatoria nella 23) può allora essere rimossa e sostituita con un fattore moltiplicativo pari a  $m$ :

$$\widetilde{i_{mf}} = F_f \cdot \frac{m}{T} \quad (\text{III.25})$$

Teniamo ora conto del fatto che, pur fissato  $T$ , il numero di impulsi entro  $T$  può fluttuare. Di questo possiamo immediatamente tener conto sostituendo nella 25)  $\widehat{m}_T$  al posto di  $m$ , ovvero il numero medio di impulsi nel tempo  $T$ :

$$\widehat{i}_f = F_f \cdot \frac{\widehat{m}_T}{T} \quad (\text{III.26})$$



Nella 26) il rapporto  $\frac{\widehat{m}_T}{T} = \bar{\nu}$  rappresenta il numero medio di impulsi per unità di tempo; otteniamo così :

$$\overline{i(t)} = \widehat{i(t)} = \bar{\nu} \cdot F_f \quad (\text{III.27})$$

indipendente da  $t$ , con  $F_f = \int_{-\infty}^{\infty} f_f(\theta) d\theta$  area dell'impulso mediato sulle forme, definito nella 24). Non sarà inutile rimarcare l'indipendenza della 27) dal tempo, coerente con la stazionarietà del fenomeno.

Nella Fig.3 la curva a tratto spesso rappresenta un esempio di sequenza e la linea punteggiata il valor medio della sequenza; nella figura compaiono a tratto sottile anche gli impulsi costituenti la sequenza, nella ipotesi che tutti abbiano la stessa forma e che il ritmo medio sia abbastanza basso da poterli chiaramente individuare.

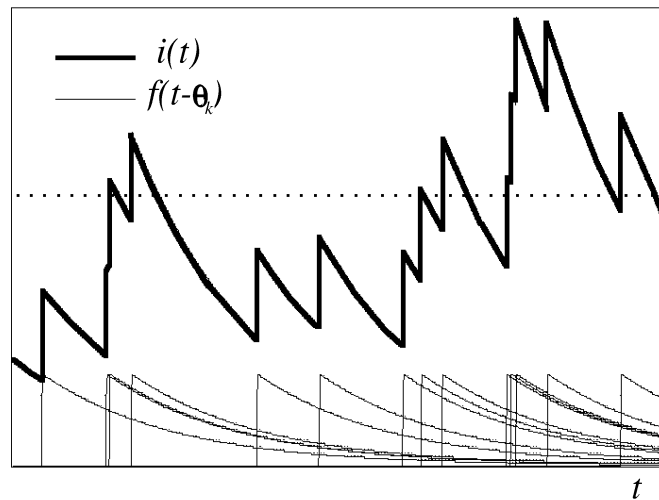


Fig.III.3

Usando lo stesso procedimento possiamo calcolare il valore quadratico medio della medesima sequenza  $\overline{i^2(t)}$ . Sulla base della 21) possiamo scrivere:

$$i_m^2(t) = \sum_{k=1}^m f_l(t - t_k) \cdot \sum_{j=1}^m f_s(t - t_j) = \sum_{k=1}^m f_l^2(t - t_k) + \sum_{k \neq j}^m f_l(t - t_k) f_s(t - t_j) \quad (\text{III.28})$$

dove i diversi indici  $l$  ed  $s$  stanno a ricordare che per  $k \neq j$  in genere gli impulsi hanno forme diverse. Mediando sulle forme otteniamo ( $g_{ls} = g_l \cdot g_s$  poiché i due eventi sono indipendenti):

$$i_{mf}^2 = \sum_{k=1}^m (f^2)_f(t - t_k) + \sum_{k \neq j}^m f_f(t - t_k) \cdot f_f(t - t_j) \quad (\text{III.29})$$

con  $(f^2)_f(t - t_k) = \sum_{l=1}^F g_l f_l^2(t - t_k)$  e  $f_f(t - t_k)$  come definita nella 22).

Mediamo ora la 29) sui tempi  $t_k$ :

$$\begin{aligned} \widetilde{i_{mf}^2}(t) &= \sum_{k=1}^m \int_{-T/2}^{T/2} (f^2)_f(t-t_k) \frac{dt_k}{T} + \sum_{k \neq j}^m \int_{-T/2}^{T/2} f_f(t-t_k) f_f(t-t_j) \frac{dt_k}{T} \frac{dt_j}{T} = \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=1}^m \int_{-T/2+t}^{T/2+t} (f^2)_f(\theta_k) d\theta_k + \frac{1}{T^2} \sum_{k \neq j}^m \int_{-T/2+t}^{T/2+t} d\theta_k f_f(\theta_k) \cdot \\ &\cdot \int_{-T/2+t}^{T/2+t} d\theta_j f_f(\theta_j) = \frac{m}{T} (F^2)_f + \frac{m(m-1)}{T^2} \cdot (F_f)^2 \end{aligned} \quad (\text{III.30})$$

dove

$$(F^2)_f = \int_{-T/2}^{T/2} (f^2)_f(\theta) d\theta \approx \int_{-\infty}^{\infty} (f^2)_f(\theta) d\theta \quad (\text{III.31})$$

e  $F_f$  è data dalla 24).

L'operazione di media su  $m$  dà:

$$\widehat{i_f^2}(t) = (F^2)_f \cdot \frac{\widehat{m_T}}{T} + (F_f)^2 \cdot \frac{\widehat{m_T^2} - \widehat{m_T}}{T^2} \quad (\text{III.32})$$

In generale, per qualunque variabile aleatoria vale:

$$E\{m^2\} = \sigma^2(m) + (E\{m\})^2 \quad (\text{III.33})$$

ed essendo  $m$  una variabile aleatoria poissoniana, abbiamo  $\widehat{m^2} = \widehat{m} + \widehat{m^2}$  e pertanto dalla 32) otteniamo:

$$\overline{i^2(t)} = \widehat{i_f^2}(t) = (F^2)_f \cdot \bar{\nu} + (F_f)^2 \cdot \frac{\widehat{m^2}}{T^2} = (F^2)_f \cdot \bar{\nu} + (F_f)^2 \cdot \bar{\nu}^2 \quad (\text{III.34})$$

Dalla 34) possiamo ottenere per la varianza:

$$\sigma^2(i(t)) = \widehat{i^2(t)} - (\widehat{i(t)})^2 = (F^2)_f \bar{\nu} \quad (\text{III.35})$$

La 27) e la 35), che costituiscono il cosiddetto Teorema di *Campbell*, danno il valor medio e la varianza di una sequenza casuale costituita da una successione di impulsi elementari. Questo risultato fu ottenuto da *Campbell* studiando le risposte di un galvanometro ad una eccitazione costituita da una successione di impulsi.

In realtà il teorema di *Campbell* è formulato per un caso più semplice di quello che abbiamo trattato, ovvero quello in cui tutti gli impulsi siano uguali. In questa ipotesi, esprimendo il singolo impulso come  $f(t) = q \cdot \phi(t)$  con  $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(\theta) d\theta = 1$ , abbiamo:

$$\begin{aligned} a) \quad \overline{i(t)} &= q \cdot \bar{\nu} \\ b) \quad \sigma^2(i) &= q^2 \bar{\nu} \cdot \phi^2 \end{aligned} \quad (\text{III.36})$$

con  $\phi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \phi^2(\theta) d\theta$ .

Ci sarà utile nel seguito calcolare anche la funzione di autocorrelazione per la sequenza  $i(t)$ , ovvero:

$$R(\tau) = \overline{i(t) \cdot i(t+\tau)} \quad (\text{III.37})$$

L'utilità consiste nel fatto che, se riusciamo nell'intento, abbiamo trovato un metodo che, basandosi sulla fisica del processo nel dominio del tempo (gli impulsi elementari) ci permette anche di accedere

alle proprietà della sequenza nel dominio delle frequenze. Infatti, usando la relazione 17 b), potremo passare alla densità spettrale di rumore. Prima di svolgere anche questo calcolo, si noti che –a voler essere precisi– non calcoleremo la funzione di autocorrelazione (che propriamente avviene come media temporale), ma piuttosto valuteremo la cosiddetta sequenza di autocorrelazione definita dalla I.5 come media di insieme; comunque nel seguito non faremo tale distinzione, visto che l'uguaglianza del risultato ci è garantita dalla stazionarietà del fenomeno.

Procedendo in maniera simile a prima si trova:

$$\begin{aligned} i_m(t) \cdot i_m(t + \tau) &= \sum_{k=1}^m f_l(t - t_k) \cdot \sum_{j=1}^m f_s(t - t_j + \tau) = \\ &= \sum_{k=1}^m f_l(t - t_k) f_l(t - t_k + \tau) + \sum_{k \neq j}^m f_l(t - t_k) f_s(t - t_j + \tau) \end{aligned} \quad (\text{III.38})$$

Mediando la 38) sulle forme otteniamo:

$$i_{mf}(t) \cdot i_{mf}(t + \tau) = \sum_{k=1}^m \psi_\tau(t, t_k, \tau) + \sum_{k \neq j}^m f_f(t - t_k) \cdot f_f(t - t_k + \tau) \quad (\text{III.39})$$

con  $\psi_\tau(t, t_k, \tau) = \sum_{l=1}^F g_l f_l(t - t_k) f_l(t - t_k + \tau)$ .

Mediando poi la 39) sui tempi  $t_k$ :

$$\begin{aligned} i_{mf}(t) \cdot \widetilde{i_{mf}}(t + \tau) &= \frac{1}{T} \sum_{k=1}^m \int_{-T/2}^{+T/2} dt_k \psi_\tau(t, t_k, \tau) + \\ &+ \frac{1}{T^2} \sum_{k \neq j}^m \int_{-T/2}^{T/2} dt_k \int_{-T/2}^{T/2} dt_j f_f(t - t_k) f_f(t - t_j + \tau) = \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=1}^m \int_{-T/2+t}^{+T/2+t} \psi_\tau(\theta_k, 0, \tau) d\theta_k + \frac{1}{T^2} \sum_{k \neq j}^m \int_{-T/2+t}^{T/2+t} dt_k f_f(\theta_k) \cdot \\ &\cdot \int_{-T/2+t}^{T/2+t} dt_j f_f(\theta_j + \tau) = \Psi_\tau \cdot \frac{m}{T} + (F_f)^2 \cdot \frac{m(m-1)}{T^2} \end{aligned} \quad (\text{III.40})$$

con

$$\Psi_\tau = \int_{-T/2+t}^{T/2+t} \psi_\tau(\theta, 0, \tau) d\theta \approx \int_{-\infty}^{\infty} \psi_\tau(\theta, 0, \tau) d\theta = \sum_{l=1}^F g_l \int_{-\infty}^{\infty} f_l(\theta) f_l(\theta + \tau) d\theta \quad (\text{III.41})$$

e  $F_f$  definita dalla 24).

Passando finalmente alla media su  $m$  otteniamo:

$$\overline{i(t) \cdot i(t + \tau)} = i(t) \cdot \widehat{i(t + \tau)} = \Psi_\tau \cdot \bar{v} + (F_f)^2 \cdot \bar{v}^2 \quad (\text{III.42})$$

Si rimarca che la stazionarietà del fenomeno si riflette nella dipendenza della 42) dalla differenza di tempo  $\tau$  (esplicitamente presente nella 41)).

Come esempio di applicazione della 42), consideriamo il caso in cui tutti gli impulsi siano identici fra loro ed esprimibili come  $q \cdot \delta(t - t_k)$ , ovvero  $\delta$  di Dirac centrate a  $t_k$ , con area  $q$ . In questo caso abbiamo per la funzione di autocorrelazione complessiva:

$$R(\tau) = \overline{i(t) \cdot i(t + \tau)} = i(t) \cdot \widehat{i(t + \tau)} = q^2 \delta(\tau) \cdot \bar{v} + q^2 \bar{v}^2 \quad (\text{III.43})$$

poiché  $\Psi_\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\theta)\delta(\theta + \tau) d\theta = \delta(\tau)$ .

Un approccio simile a quello qui seguito per trovare la relazione che lega la varianza e la funzione di correlazione alla forma dell'impulso elementare della sequenza nel dominio del tempo può essere seguito per esprimere la densità spettrale di rumore della sequenza in funzione della  $FT$  dell'impulso base  $FT\{f_l(t - t_k)\}$  che compare nella 20). Il procedimento di calcolo, nel dominio delle frequenze, segue la falsariga del ragionamento che ci ha precedentemente guidato ed approda (in maniera leggermente più semplice rispetto a quella da noi seguita) alla seguente soluzione per la densità spettrale della sequenza complessiva  $w(\nu)$ :

$$w(\nu) = 2|FT\{f_f(t)\}|^2 \cdot (\bar{v} + \bar{v}^2\delta(\nu)) \quad (\text{III.44})$$

Si noti che se la  $f_f(t)$  è a media nulla, allora anche la  $FT\{f_f(t)\}$  calcolata per  $\nu = 0$  è nulla, misurando essa proprio l'area delle  $f_f(t)$ ; pertanto, in questa situazione, il secondo termine della 44) diventa ininfluenza non appena che si calcolino le varianze, integrando nel dominio della frequenza. Nel seguito (principalmente nel Cap.V) faremo uso dei risultati estratti nel dominio del tempo, anche se nei testi classici sull'argomento è preferito l'altro approccio sintetizzato nel risultato 44).

## 6.- *Il teorema di Campbell e i sistemi con risposta indipendente e dipendente dal tempo*

Per i sistemi lineari con risposta indipendente dal tempo il Teorema di *Campbell* consente di risolvere nel dominio del tempo tutti quei problemi riguardanti il calcolo del rumore in cui la risoluzione nel dominio delle frequenze è pure possibile. Quando faremo (Cap. VII) un esempio di calcolo dettagliato di rumore su un caso di interesse per misure di fisica, mostreremo proprio come la determinazione del rapporto segnale/rumore si possa fare nei due domini, indifferentemente. Anche alla luce dell'esempio che faremo nel seguito, è inoltre opportuna la seguente considerazione: nella nostra definizione di sequenza costituita dalla successione di impulsi elementari, non abbiamo imposto alcuna ipotesi restrittiva sul ramo della rete che stavamo considerando. Ci siamo solamente limitati ad affermare che la sequenza fosse costituita da impulsi. Questo implica che se consideriamo una rete lineare (con risposta invariante nel tempo o no), e applichiamo il teorema di *Campbell* per un ramo dove si osserva una sequenza casuale di impulsi, possiamo applicare il teorema (*mutatis mutandis*) in qualunque altro ramo della rete. Infatti se in un certo ramo (parliamo di corrente, ma il caso è banalmente estendibile alle tensioni) si osserva il generarsi di un impulso elementare sappiamo che in un altro ramo qualunque si sviluppa corrispondentemente un altro impulso che sappiamo calcolare sulla base delle conclusioni del Cap.I. Pertanto ad una successione di impulsi in un ramo corrisponde una successione di impulsi (generalmente diversi, ma calcolabili) in un altro qualunque ramo della rete. Coerentemente con i risultati ottenuti nel paragrafo precedente, sappiamo che per calcolare la funzione di autocorrelazione della sequenza è sufficiente conoscere il dettaglio della forma dell'impulso e i ritmi medi di arrivo di questi; allora il teorema di *Campbell* può essere applicato a tutti i rami della rete, perché il ritmo degli impulsi è ovviamente lo stesso in tutti i rami, se l'origine degli impulsi è unica, e le forme degli impulsi elementari sono tutti calcolabili, nota che ne sia la forma in un ramo qualsiasi. Se per esempio la rete ha risposta invariante nel tempo e l'impulso elementare in un ramo che chiamiamo di ingresso è una  $\delta$ , allora nel ramo generico la forma dell'impulso corrispondente è data dalla funzione di risposta caratteristica di questo ramo,

rispetto a quello di ingresso.

E' semplice comprendere cosa cambia se la risposta del sistema non è invariante nel tempo: infatti, per i sistemi lineari con risposta non indipendente dal tempo, la risposta del sistema ad una eccitazione a  $\delta$  è esprimibile con una funzione  $r(t, \theta)$  e non come  $r(t - \theta)$  (si veda il §1 del Cap.I). In questi casi il teorema di *Campbell* risulta particolarmente utile, perché una volta trovata la  $r(t, \theta)$  (operazione che può essere niente affatto semplice) e la risposta all'impulso in ingresso nel ramo di interesse:

$$R(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\theta) r(t, \theta) d\theta \quad (\text{III.45})$$

potremo sfruttare le conclusioni del nostro teorema per calcolare il valore medio di  $R(t)$  e la sua varianza; operazione che in questo caso ci sarebbe preclusa nel dominio delle frequenze, in quanto il formalismo delle trasformate di *Fourier* non è ora utilizzabile.

Infine, affinché non rimanga la curiosità insoddisfatta di conoscere almeno un esempio di sistema lineare con risposta non temporalmente invariante, citiamo *l'integratore a tempo*, ovvero un dispositivo che, a seguito dell'arrivo di un certo segnale, ne compie l'integrale definito, usando come estremo inferiore l'istante di arrivo del segnale  $t_0$  e come estremo superiore  $t_0 + T$ , con  $T$  caratteristico del dispositivo. Strumenti di questo tipo trovano effettivamente impiego nel trattamento dei segnali. La valutazione del rumore in questi dispositivi, per le ragioni sopra dette, deve avvenire per forza nel dominio del tempo.

*G.Poggi: Appunti sul rumore elettrico; Cap.III  
Firenze, 4 maggio 2006*