Giacomo Poggi

APPUNTI SUL RUMORE ELETTRICO

Versione del 30 maggio 2004

Università degli Studi di Firenze, Dipartimento di Fisica

Anno Accademico 2002-2003

Università degli Studi di Firenze, Dipartimento di Fisica
Anno Accademico 2002-2003

I

I SISTEMI LINEARI

1.– Sistemi lineari e risposta ad un generico segnale in ingresso

Consideriamo una rete lineare ed in particolare identifichiamo in essa due terminali di ingresso ai quali venga applicato un segnale (una ddp) $S(t)$ e due terminali di uscita dai quali preleviamo la risposta (ancora una ddp) $R(t)$. Quanto segue, salvo piccoli adeguamenti sul significato delle grandezze introdotte, si può applicare a qualunque sistema fisico che si comporti in maniera lineare; tuttavia qui e nel seguito si farà riferimento esclusivo ad una rete elettrica.
Il principio di causa-effetto (la *causalità*) impone che la risposta $R(t)$ ad un tempo t possa solo dipendere dal valore che il segnale $S(\theta)$ ha assunto ai tempi $\theta < t$.
Per trovare l'espressione più generale che lega $R(t)$ al segnale $S(\theta)$, esaminiamo la risposta $r(t)$ del sistema (rispetto ai terminali di ingresso e uscita già introdotti) ad un segnale particolare, ovvero un impulso rettangolare $i(t)$ di area unitaria, durata $\Delta\theta$ molto breve (vedremo poi rispetto a cosa) e con inizio nell'origine dei tempi:

$$i_{\Delta\theta}(t) = cost \quad \forall\ 0 \le t \le \Delta\theta, \quad = 0 \ \text{ altrove}$$

$$r_{\Delta\theta}(t) \neq 0 \quad \forall\ t \ge 0, \quad = 0 \ \ \forall\ t < 0$$

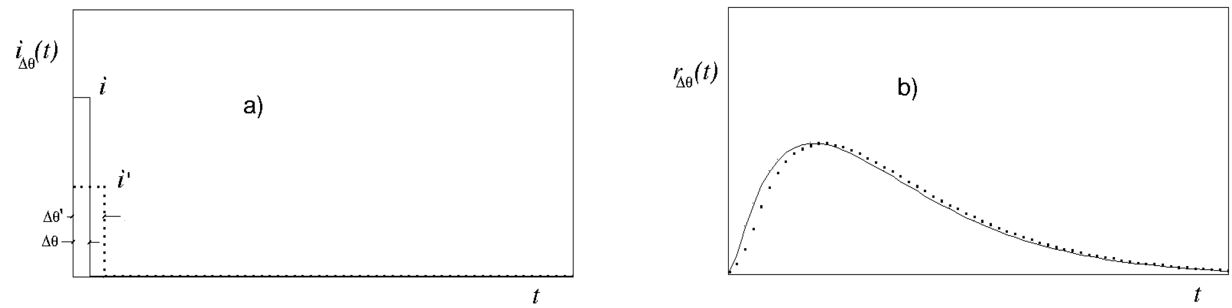

Fig.I.1
Nella Fig.1 parte a) e b) rispettivamente sono riportate a tratto continuo una eccitazione $i_{\Delta\theta}(t)$ e la corrispondente risposta $r_{\Delta\theta}(t)$, dove i pedici $\Delta\theta$ stanno a ricordare l'estensione temporale dell'impulso di ingresso. Nella medesima figura è pure riportata un'altra coppia segnale-risposta, a tratto punteggiato, con l'eccitazione caratterizzata dall'avere una durata doppia, ma la stessa area. Gli assi orizzontali sono gli stessi per la parte a) e b) della figura.

Ammettiamo di ridurre ora progressivamente la durata $\Delta\theta$ dell'impulso, mantenendo il vincolo che l'integrale di $i_{\Delta\theta}(t)$ ($i_{\Delta\theta}(t) \cdot \Delta\theta$) resti unitario; assumiamo che esista il limite della funzione $r_{\Delta\theta}(t)$ per $\Delta\theta \to 0$ e chiamiamo tale limite $r(t)$, ovvero $r(t)$ sia la risposta del sistema alla delta di *Dirac* $\delta(t)$, centrata sull'origine. In tutti i casi realistici si trova che la $r(t)$ ha una estensione temporale non nulla. La estensione temporale della risposta alla δ ci dà proprio il termine di paragone naturale col quale confrontare l'estensione della eccitazione: ovvero impulsi in ingresso di durata molte breve rispetto alla durata della risposta alla δ daranno luogo a risposte confondibili con quelle alla δ. Questo effetto qualitativamente si può apprezzare anche nella Fig.1; infatti si nota che il raddoppio della estensione temporale della eccitazione, rappresentata dalla curva punteggiata nella parte a), provoca un cambiamento modesto nella funzione di risposta (parte b), curva punteggiata), proprio perché l'estensione complessiva della funzione di risposta è comunque significativamente superiore alla durata della eccitazione.
Se le caratteristiche del circuito sono indipendenti dal tempo (p.e. nel caso di componenti costanti quali resistori, condensatori, induttori), allora possiamo affermare che la risposta $r(t, \theta)$ ad una eccitazione $\delta(t-\theta)$ centrata in $t = \theta$, anziché sull'origine dei tempi, è data semplicemente da $r(t-\theta)$ (vedi Fig.2) e in queste condizioni $r(t)$ è detta *funzione di risposta* del circuito in esame, con riferimento ai terminali di ingresso e uscita considerati.

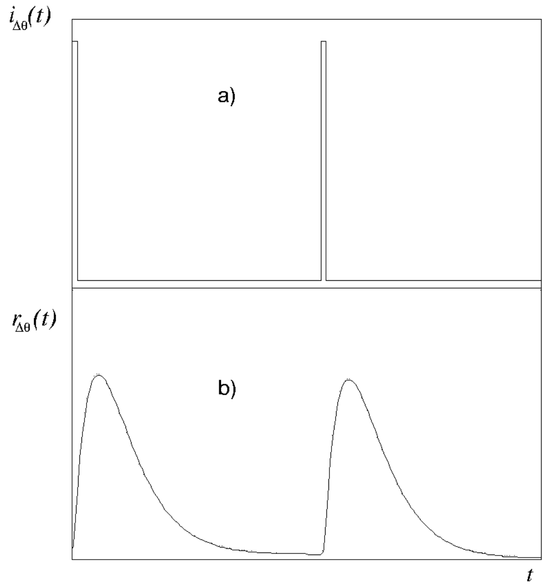

Fig.I.2

Nel caso in esame il sistema presenta quindi una invarianza traslazionale rispetto all'asse dei tempi, che si riflette nella dipendenza da $(t-\theta)$ della risposta del sistema alla δ centrata al tempo θ. In generale, ovvero nel caso in cui la risposta del sistema dipenda dal tempo, cioè dall'istante θ in cui avviene l'eccitazione istantanea, la risposta del sistema alla $\delta(t-\theta)$ deve porsi nella forma generica $r(t, \theta)$, dove l'effettiva dipendenza da θ è determinata dal modo in cui i parametri del sistema variano in funzione del tempo.
Ritorniamo alla nostre ipotesi di invarianza traslazionale nel tempo e guardiamo cosa implica l'ipotesi di linearità del sistema. Molto formalmente, sfruttando la definizione di $\delta(t)$, possiamo esprimere il

segnale $S(t)$ col seguente integrale:

$$S(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(\theta)\ \delta(t-\theta)\ d\theta \tag{I.1}$$

che, alla luce di quanto detto sopra può interpretarsi come il limite per $\Delta\theta \to 0$ di una espressione del tipo:

$$S(t) \approx S_{\Delta\theta}(t) = \sum_{k=0}^{N} S(\theta'_k)\ i_{\Delta\theta}(t-\theta_k)\ \Delta\theta = \sum_{k=0}^{N} c_k\ i_{\Delta\theta}(t-\theta_k)\ \Delta\theta \tag{I.2}$$

Nella Fig.3 la $S(t)$ è rappresentata a tratto continuo, mentre l'approssimazione $S_{\Delta\theta}$ è riportata dalla spezzata.

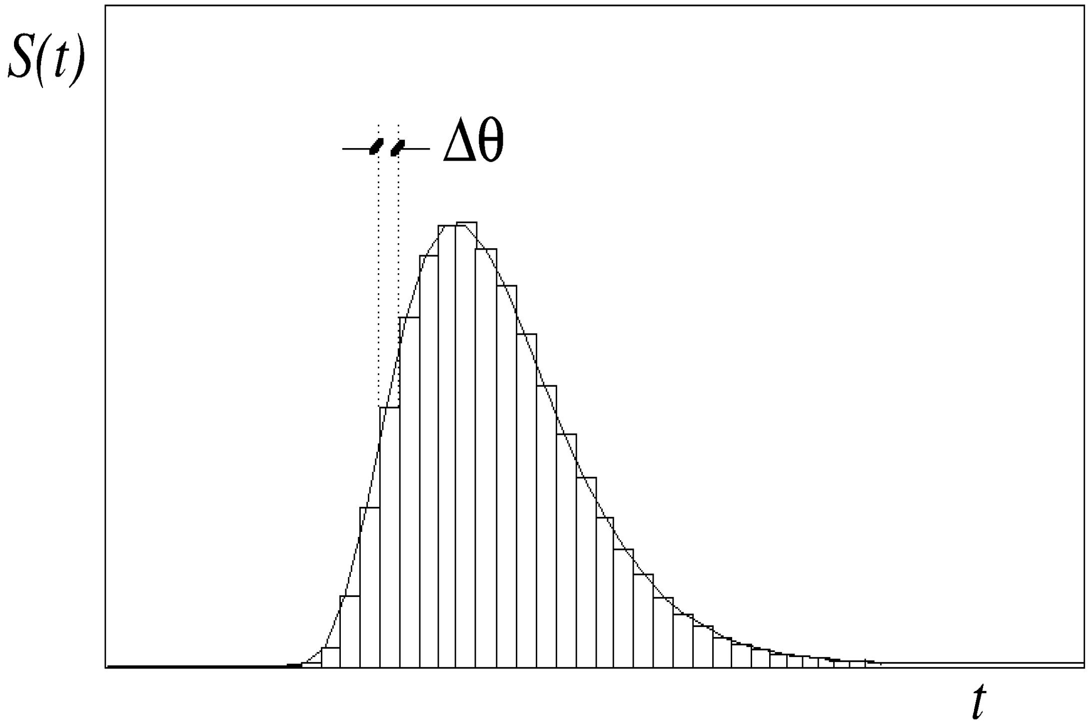

Fig.I.3

I vari θ_k della espressione 2) rappresentano l'origine degli impulsi rettangolari di area unitaria che moltiplicano il valore medio c_k della funzione nell'intervallo considerato; tale valore medio, a causa della regolarità che assumiamo per la funzione, è anche esprimibile mediante il valore che la funzione $S(\theta'_k)$ assume in un punto interno all'intervallo $\Delta\theta$ su cui si estende l'impulso: $\theta_k < \theta'_k < \theta_k + \Delta\theta$. La formula 2), rappresentando la $S(t)$ come somma di segnali, permette, sfruttando le proprietà di linearità del sistema, di scrivere la risposta come somma delle risposte ai vari segnali “addendi”:

$$R_{\Delta\theta}(t) = \sum_{k=0}^{M} c_k\ r_{\Delta\theta}(t-\theta_k)\ \Delta\theta \tag{I.3}$$

con M tale che $\theta_M \le t$; ovvero la somma include (per il principio di causalità) solo le eccitazioni con origine a tempi θ_k antecedenti l'istante in cui si considera la risposta.

La Fig.4 rappresenta graficamente la risposta $R_{\Delta\theta}(t)$ (punteggiata) come somma dei contributi $c_k\ r_{\Delta\theta}(t-\theta_k)$ ai vari impulsi $c_k\ i_{\Delta\theta}(t-\theta_k)$ che approssimano -secondo la formula 2)- il segnale.

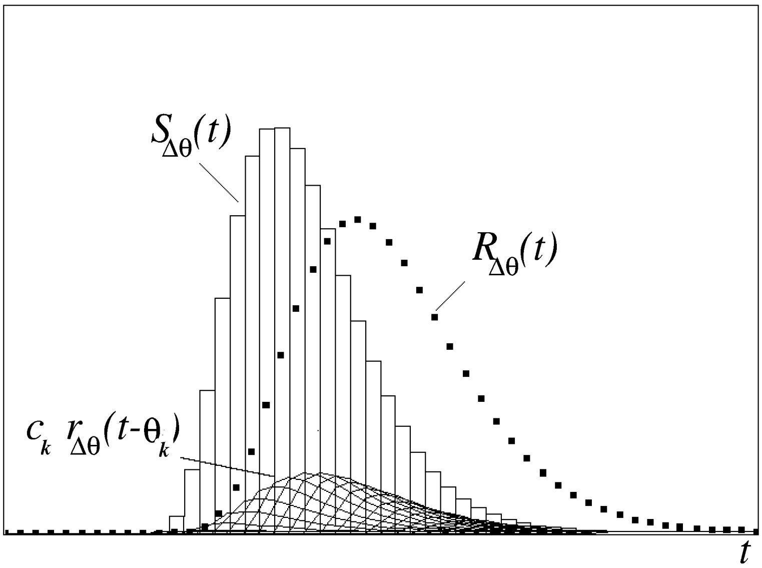

Fig.I.4

La formula 3), riscritta per il comportamento al limite di $\Delta\theta \to 0$ e tenendo conto che $\lim_{\Delta\theta\to 0} c_k = \lim_{\Delta\theta\to 0} S(\theta'_k) = S(\theta_k)$, porta all'espressione:

$$R(t) = \lim_{\Delta\theta\to 0} R_{\Delta\theta}(t) = \lim_{\Delta\theta\to 0} \sum_{k=0}^{M} c_k\ r_{\Delta\theta}(t-\theta_k)\ \Delta\theta = \int_{-\infty}^{t} S(\theta)\ r(t-\theta)\ d\theta \tag{I.4}$$

È ovvio che al risultato 4) si poteva giungere direttamente partendo dalla 1), senza le considerazioni elementari svolte sopra: infatti il passaggio diretto dalla 1) alla 4) è consentito dalla linearità dell'integrale e dal principio di causalità che, mediante l'estremo superiore dell'integrale, fissa i contributi possibili del segnale alla risposta. Nel caso in cui la risposta del sistema (sempre ipotizzato lineare) dipenda dal tempo, la r va scritta nella forma più generale $r(t,\theta)$.

La 4) può essere messa in una forma molto utile dal punto di vista dell'elaborazione matematica successiva. Facciamo la sostituzione $\tau = t - \theta$ e otteniamo così :

$$R(t) = -\int_{+\infty}^{0} S(t-\tau)\ r(\tau)\ d\tau = \int_{0}^{+\infty} S(t-\tau)\ r(\tau)\ d\tau$$

che essendo –per definizione– $r(\tau) = 0\ \ \forall\ \ \tau < 0$ può anche scriversi:

$$R(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(t-\tau)\ r(\tau)\ d\tau \tag{I.5}$$

ovvero la risposta complessiva del sistema al segnale $S(t)$ è rappresentata dal prodotto di convoluzione del segnale con la funzione di risposta del sistema.

Dalla espressione 5) è immediato verificare che se la $S(t)$ è periodica con periodo T, ugualmente periodica sarà la $R(t)$. Si ritrova così un risultato al quale si perviene studiando le reti lineari in alternata: nell'ambito di quel formalismo la periodicità della risposta è dimostrata sviluppando

in serie di *Fourier* il segnale periodico in ingresso e applicando poi il Principio di sovrapposizione (ovvero la linearità del sistema) per ottenere le risposte alle varie componenti armoniche; la risposta, essendo ancora esprimibile come una serie di *Fourier* con la medesima armonica base, è periodica con lo stesso periodo del segnale in ingresso.
L'importanza della soluzione espressa nella forma 5) risiede nella sua generalità: essa vale per qualunque sistema lineare con funzione di risposta $r(t)$. Inoltre, in tutti i casi fisici di interesse, le $S(t)$ e le $r(t)$ godono di sufficiente regolarità matematica da garantire l'esistenza delle loro trasformate secondo *Fourier*. Questo permette di affermare che se vale la espressione 5) allora per le trasformate: $FT\{r(t)\} = \mathcal{A}(\nu)$, $FT\{R(t)\} = \mathcal{R}(\nu)$ e $FT\{S(t)\} = \mathcal{S}(\nu)$, vale:

$$\mathcal{R}(\nu) = \mathcal{S}(\nu) \cdot \mathcal{A}(\nu) \tag{I.6}$$

ovvero la FT della risposta è data dal prodotto delle FT del segnale e della funzione di risposta. La trasformata della funzione di risposta $FT\{r(t)\} = \mathcal{A}(\nu)$ è detta *funzione di trasferimento* della rete lineare rispetto alle coppie di terminali sopra definite.
Le formule 5) e 6) consentono di valutare la risposta, rispettivamente o nel dominio del tempo o in quello delle frequenze, una volta che sia nota (oltre che ovviamente il segnale $S(t)$ o la sua FT $\mathcal{S}$) la funzione di risposta $r(t)$ oppure la sua FT $\mathcal{A}$, cioè la sua funzione di trasferimento. Pertanto il vero problema che di volta in volta va risolto nell'esaminare la risposta di una rete al una eccitazione generica $S(t)$, è quello di determinare la funzione di risposta $r(t)$ o la funzione di trasferimento $\mathcal{A}(\nu)$, rispetto ai terminali di ingresso e di uscita di interesse.

2.– *La funzione di trasferimento e la funzione di risposta*

Applichiamo il risultato espresso dalla 6) a due casi particolari di $S(t)$: il caso in cui $S(t) = \delta(t)$ e quello in cui $S(t) = \mathcal{S}_0\, e^{j2\pi\nu_s t}$ con $\mathcal{S}_0$ in genere complesso. Il primo dei due casi ci deve restituire la soluzione alla base delle nostre elucubrazioni, ovvero che la risposta alla $\delta(t)$ deve essere proprio la $r(t)$. Infatti dalla 6), imponendo $S(t) = \delta(t)$ e ricordando che $\mathcal{S}(\nu) = FT\{\delta(t)\} = 1$, abbiamo $\mathcal{R}(\nu) = \mathcal{A}(\nu)$, ovvero:

$$R(t) = FT^{-1}\{\mathcal{A}(\nu)\} = r(t)$$

Il secondo caso ($S(t) = \mathcal{S}_0\, e^{j2\pi\nu_s t}$) è assai più interessante, non fosse altro per quello che ci insegna circa la funzione di trasferimento $\mathcal{A}(\nu)$:

$$\mathcal{S}(\nu) = FT\{\mathcal{S}_0\, e^{j2\pi\nu_s t}\} = \mathcal{S}_0 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi(\nu-\nu_s)t}\, dt = \mathcal{S}_0\ \delta(\nu - \nu_s)$$

Pertanto:

$$\mathcal{R}(\nu) = \mathcal{S}(\nu) \cdot \mathcal{A}(\nu) = \mathcal{S}_0\ \mathcal{A}(\nu)\ \delta(\nu - \nu_s) \tag{I.7}$$

Per ottenere $R(t)$ dobbiamo antitrasformare la 7), ottenendo:

$$R(t) = FT^{-1}\{\mathcal{R}(\nu)\} = \mathcal{S}_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{A}(\nu)\ \delta(\nu - \nu_s)\, e^{j2\pi\nu t}\ d\nu = \mathcal{S}_0\ \mathcal{A}(\nu_s)\, e^{j2\pi\nu_s t} \tag{I.8}$$

Possiamo porre $R(t) = \mathcal{R}_0\, e^{j2\pi\nu_s t}$ e quindi ottenere per la ampiezza complessa del segnale $\mathcal{S}_0$ e della risposta $\mathcal{R}_0$ la seguente relazione:

$$\mathcal{R}_0 = \mathcal{S}_0\ \mathcal{A}(\nu_s) \tag{I.9}$$

Quindi, se $S(t)$ è sinusoidale anche $R(t)$ è sinusoidale e con la stessa pulsazione; la ampiezza complessa in uscita $\mathcal{R}_0$ è proporzionale all'ampiezza complessa in ingresso $\mathcal{S}_0$; il coefficiente di proporzionalità è complesso e dipende dalla pulsazione caratteristica del segnale, oltreché, ovviamente, dalle caratteristiche della rete. Ricordando quanto appreso studiando le reti lineari col metodo simbolico e immaginando che $S(t)$ sia la ddp ai capi di ingresso e $R(t)$ la tensione ai terminali di uscita, riconosciamo in $\mathcal{A}(\nu)$ il rapporto fra la tensione complessa in uscita e la tensione complessa in entrata, che sappiamo già calcolare utilizzando l'apparato del metodo simbolico.
$\mathcal{A}(\nu)$, anche nei casi in cui la funzione di trasferimento colleghi, anziché tensioni in entrata e uscita, correnti in entrata e correnti in uscita o correnti con tensioni o tensioni con correnti, è calcolabile considerando la rete lineare (rispetto ai terminali o ai rami di ingresso e uscita) come se fosse eccitata in regime sinusoidale e cercando col metodo simbolico la soluzione che lega le ampiezze complesse in uscita $\mathcal{R}_0$ con quelle in entrata $\mathcal{S}_0$. E' chiaro quindi che $\mathcal{A}(\nu_s)$ è espressa unicamente in funzione delle impedenze della rete in esame.
Facciamo un esempio banale del calcolo di $\mathcal{A}(\nu)$, con riferimento alla Fig.5.

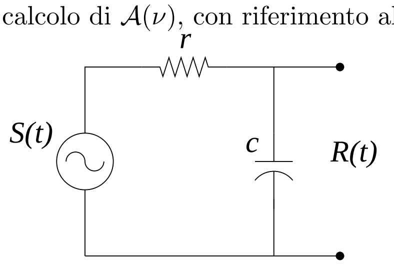

Fig.I.5

Trovando la soluzione col metodo simbolico abbiamo:

$$\mathcal{R}_0 = \mathcal{S}_0 \frac{\frac{1}{j\omega c}}{r + \frac{1}{j\omega c}} = \mathcal{S}_0 \frac{1}{1 + j\omega rc} = \mathcal{S}_0 \frac{1}{1 + j2\pi\nu rc} \tag{I.10}$$

Pertanto la funzione di trasferimento vale $\mathcal{A}(\nu) = \dfrac{1}{1 + j2\pi\nu rc}$. Come completamento dell'esempio, possiamo calcolare, antitrasformando la 10), la funzione di risposta $r(t)$ che risulta valere:

$$R(t) = FT^{-1}\{\mathcal{A}(\nu)\} = FT^{-1}\{\frac{1}{1 + j2\pi\nu rc}\} = \frac{\overline{1}}{\tau} \cdot \ \mathrm{e}^{-t/\tau} \tag{I.11}$$

dove l'unità è stata indicata col simbolo $\overline{1}$ per ricordarci che essa è dimensionale, con unità di misura $V \cdot s$.

Il risultato 10), ovvero che la funzione di trasferimento si possa calcolare nel regime sinusoidale e che quindi la sua determinazione risulti molto spesso elementare (in ogni caso sempre ottenibile con regole certe e semplici), rende il risultato 6) veramente notevole. Abbiamo di fatto un metodo per trovare la risposta di un qualunque sistema lineare (con risposta indipendente dal tempo) a qualunque eccitazione $S(t)$, purché trasformabile secondo *Fourier*.