

MISURA DEI PARAMETRI ORBITALI DI UNA STELLA DOPPIA VISUALE

Corso: *Esperimentazioni di Fisica III*

Marco Romoli

Anno Accademico 2001-2002

Aggiornamento: 12 marzo 2002

1 Introduzione

Un sistema binario di stelle è un sistema di oggetti celesti costituito da due stelle che interagiscono gravitazionalmente. Si può generalizzare la classe di oggetti includendo i sistemi stellari multipli, costituiti da tre o più stelle, e i sistemi planetari. Circa il 75% delle stelle appartiene a sistemi multipli, il cui studio ha portato alla determinazione della massa e del raggio delle stelle, e, attualmente, alla scoperta di sistemi planetari extrasolari.

L'esperienza della misura dei parametri orbitali di una stella doppia visuale si compone di due parti:

- l'osservazione di una stella doppia e l'analisi dei dati presi con un telescopio;
- la ricerca delle osservazioni precedenti ed il calcolo dell'orbita vera del sistema binario.

In queste dispense viene descritto il problema dei due corpi che è alla base della dinamica di un sistema stellare doppio. Vengono descritti, brevemente, i sistemi binari di stelle, la loro classificazione, la fenomenologia osservativa ed i parametri che si possono estrarre dalla loro osservazione. Viene, infine, fornito uno schema dell'esperienza e la descrizione dettagliata di tutte le fasi dell'esperienza.

2 Il problema dei due corpi

Keplero (1571-1630) postulò le tre leggi empiriche che regolano l'interazione gravitazionale tra il Sole e i pianeti del sistema solare:

1. *I pianeti orbitano attorno al Sole percorrendo orbite piane ellittiche, di cui il Sole occupa uno dei fuochi.*
2. *Il moto di ogni pianeta è tale che il segmento di retta che unisce il pianeta al Sole spazza aree uguali in tempi uguali.*
3. *Per tutti i pianeti, il rapporto tra il cubo del semiasse maggiore dell'orbita e il quadrato del periodo di rivoluzione è una costante.*

Newton (1642-1727), successivamente, generalizzò queste tre leggi a tutti i sistemi di due corpi interagenti gravitazionalmente, derivandole dalle leggi della dinamica.

Deriviamo qui le leggi di Keplero partendo dalla funzione Lagrangiana che descrive l'interazione gravitazionale tra due corpi [Landau e Lifschitz, 1975].

Consideriamo un sistema isolato composto da due corpi, che si assumono puntiformi, di masse, rispettivamente, m_1 e m_2 . I due corpi sono individuati dai vettori $\vec{\mathbf{r}}_1$ e $\vec{\mathbf{r}}_2$ in un generico sistema di riferimento inerziale (vedi Fig. 1). Essi interagiscono tra loro con un potenziale gravitazionale dato da:

$$U = -\frac{Gm_1m_2}{|\vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1|} \quad (1)$$

In questo sistema di riferimento si può scrivere la funzione Lagrangiana come:

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{r}}_2^2 - U \quad (2)$$

Poiché il sistema dei due corpi è isolato, il suo centro di massa definito come:

$$\vec{x}_G = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (3)$$

seguirà un moto di tipo inerziale. Convienne quindi scegliere un sistema di riferimento con origine nel centro di massa. Questo sistema di riferimento è un sistema inerziale.

Si impone che il centro di massa sia nell'origine e si definisce la coordinata \vec{r} :

$$\begin{cases} m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = 0 \\ \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \end{cases} \quad (4)$$

Dalle quali si ricavano:

$$\begin{cases} \vec{r}_1 = -m_2 \vec{r} / M \\ \vec{r}_2 = m_1 \vec{r} / M \end{cases} \quad (5)$$

Dove $M = m_1 + m_2$ è la massa totale del sistema.

Sostituendo nella funzione Lagrangiana le vecchie coordinate in funzione delle nuove si ottiene:

$$L = \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 + \frac{GM\mu}{r} \quad (6)$$

dove $\mu = m_1 m_2 / M$ prende il nome di *massa ridotta*.

La nuova funzione Lagrangiana equivale a quella di una massa μ che si muova in un campo gravitazionale generato da una massa M .

Utilizzando le coordinate polari: $\dot{\vec{r}} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta$, dove \vec{e}_r e \vec{e}_θ sono i versori delle coordinate polari, si ha:

$$L = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \frac{GM\mu}{r} \quad (7)$$

Poiché U è un potenziale centrale, non c'è un'esplicita dipendenza di L da θ , per cui applicando l'equazione di Lagrange alla coordinata θ :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial L}{\partial \theta} \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \text{cost.} \quad (8)$$

cioè il momento generalizzato p_θ è un integrale del moto:

$$p_\theta = \mu r^2 \dot{\theta} = \text{cost.} \quad (9)$$

Questa equazione esprime la *conservazione del momento angolare* e riscritta in forma vettoriale come $\vec{p}_\theta = \vec{r} \times \vec{p}$ indica che il raggio vettore, \vec{r} , giace nel piano perpendicolare al vettore costante del momento angolare, ossia che il moto orbitale avviene in un piano (prima parte della **1^a Legge di Keplero**).

Definendo la *velocità areolare* come $\dot{A} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}$, la conservazione del momento angolare si può scrivere:

$$p_\theta = 2\mu \dot{A} = \text{cost} \quad , \quad (10)$$

che esprime la conservazione della velocità areolare, o in altre parole: il raggio vettore spazza aree uguali in tempi uguali (**2^a Legge di Keplero**).

Inoltre, poiché il sistema è isolato, vale anche il principio di conservazione dell'energia, per cui:

$$E = \frac{1}{2} \mu \left(\dot{r}^2 + \frac{p_\theta^2}{\mu^2 r^2} \right) - \frac{GM\mu}{r} = \text{cost.} \quad (11)$$

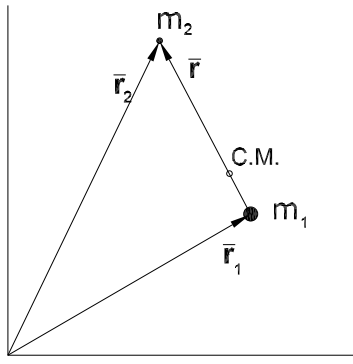


Figura 1: Sistema di riferimento per il problema dei due corpi

dove si è sostituito p_θ nella energia cinetica¹. Il valore dell'energia sarà negativo quando il sistema è un sistema gravitazionalmente legato.

I punti in cui $\dot{r} = 0$ (detti apastro e periastro, nel caso in cui la massa centrale sia una stella) sono i punti dove il modulo del raggio vettore è massimo e minimo.

Per risolvere l'equazione del moto e ricavare l'orbita del sistema si combinano le equazioni:

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\mu} \left(E + \frac{GM\mu}{r} \right) - \frac{p_\theta^2}{\mu^2 r^2}} \quad (13)$$

e

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{p_\theta}{\mu r^2} \quad (14)$$

Risolvendo l'integrale si ottiene l'equazione di un'ellisse (e questo completa la **1^a Legge di Keplero**) in coordinate polari:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{e \cos(\theta - \theta_0) + 1} \quad (15)$$

dove: $\theta = \theta_0$ è la posizione del periastro, $a(1 - e^2) = p_\theta^2 / GM\mu^2$, il semiasse maggiore dell'orbita è $a = GM\mu / 2|E|$, il semiasse minore è $b = a\sqrt{1 - e^2}$ e l'eccentricità è $e = \sqrt{1 + 2Ep_\theta^2 / G^2 M^2 \mu^3}$. Inoltre, sapendo che l'area spazzata dal raggio vettore in un periodo di rivoluzione, T , è uguale all'area dell'ellisse, πab , si può riscrivere la (10) come:

$$p_\theta = 2\mu\dot{A} = 2\mu \frac{\pi ab}{T} \quad (16)$$

dalla quale si ottiene la **3^a Legge di Keplero**, sostituendo p_θ e b con le espressioni ricavate relativamente all'equazione dell'ellisse:

¹L'energia totale può essere vista anche come somma dell'energia cinetica radiale (il primo termine dell'energia) e di un potenziale effettivo:

$$U_{eff}(r) = \frac{p_\theta^2}{2\mu r^2} - \frac{GM\mu}{r} \quad (12)$$

dove il primo termine rappresenta il potenziale centrifugo.

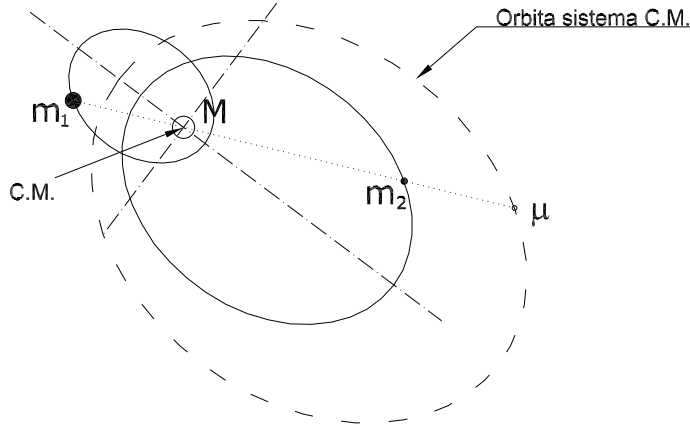


Figura 2: Moto dei due corpi

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} \quad (17)$$

Cambiando unità di misura ed utilizzando a in unità astronomiche, T in anni e M in masse solari, l'equazione sopra si semplifica ulteriormente e diventa:

$$\frac{a(UA)^3}{T(anni)^2} = M(M_\odot) \quad (18)$$

Si può infine derivare, con semplici passaggi algebrici, il valore dell'energia totale in funzione dei parametri orbitali:

$$E = -\frac{GM\mu}{2a} \quad (19)$$

che conferma la validità del teorema del viriale, o di equipartizione dell'energia, $E = U/2$, per un sistema chiuso.

Se si vogliono ricavare le orbite dei due corpi, è sufficiente sostituire l'equazione dell'orbita (15) nelle equazioni (5) per trovare un moto del tipo mostrato in Fig.2.

3 I sistemi binari

Un sistema binario, o multiplo, di stelle è costituito da due o più stelle interagenti gravitazionalmente tra loro². Su cento stelle osservate, 47 appartengono ad un sistema doppio, 23 ad un sistema multiplo e solo 30 sono isolate. Perciò, i sistemi binari o multipli costituiscono la maggioranza degli oggetti di tipo stellare, che indica che la formazione di questi sistemi è il risultato più probabile nell'evoluzione delle dense regioni di formazione stellare. Inoltre, i sistemi legati forniscono un metodo diretto per ricavare la massa del sistema e, dove è possibile, la

²Le coppie di stelle che appaiono molto vicine tra loro sul piano del cielo, ma che sono in realtà molto distanti nello spazio, possono essere scambiate per sistemi binari e prendono il nome di *binarie ottiche o apparenti*.

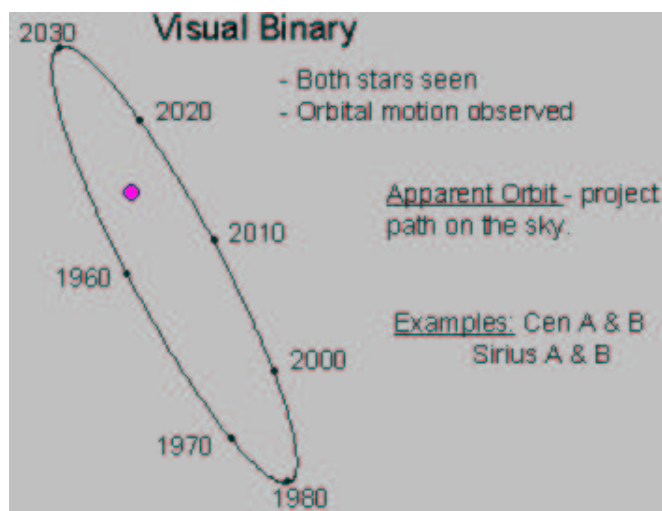


Figura 3: Orbita apparente di una binaria visuale

massa delle singole componenti e il loro raggio. Dalla determinazione della massa delle stelle con l'osservazione dei sistemi binari è stata scoperta una legge che lega la luminosità della stella con la sua massa.

Dal punto di vista osservativo le stelle binarie si possono classificare all'interno di tre grandi categorie: binarie visuali, binarie spettroscopiche e binarie a eclisse. Con le stesse tecniche con cui si studiano i sistemi binari, migliorando le prestazioni degli strumenti fino ai limiti consentiti dalla tecnologia attuale, è stato dato inizio, da pochi anni, alla ricerca di sistemi planetari extrasolari, che costituisce adesso un settore emergente molto importante della ricerca astronomica.

3.1 Binarie Visuali (o astrometriche)

Le binarie visuali sono sistemi di stelle che vengono risolti dai telescopi (vedi Fig.3). Prendono invece il nome di binarie astrometriche quei sistemi nei quali è misurabile il moto di una sola componente attorno al centro di massa. I sistemi ad oggi risolvibili sono quelli con separazione $> 0.1''$ che corrispondono a periodi orbitali > 10 anni. Strumenti più sofisticati che fanno uso di ottiche adattive o di tecniche interferometriche, come ad esempio l'interferometria a speckle, hanno oggi capacità astrometriche dell'ordine del millesimo d'arco e perfino inferiori (vedi ad esempio la missione NASA Hipparcos (1989-1993) [<http://astro.estec.esa.nl/Hipparcos>] o la futura missione ESA GAIA (2009) [<http://astro.estec.esa.nl/GAIA/index.html>]), e mirano ad individuare la presenza di pianeti extrasolari. Quando i sistemi hanno periodi inferiori ai 300-400 anni è possibile determinarne i parametri orbitali, altrimenti la storia delle osservazioni, che può risalire fino alla fine del settecento non fornisce una porzione di orbita sufficiente per poter derivare univocamente l'orbita. Delle circa 100000 binarie visuali osservate, si è potuto determinare i parametri orbitali di circa l'1%.

Dalla misura della separazione angolare, ρ , e dell'angolo di posizione, θ , della stella secondaria rispetto alla stella primaria e alla direzione del Nord celeste, in funzione del tempo, mediante un'analisi dell'orbita, si possono ricavare diversi parametri orbitali e fisici delle due stelle. Dal

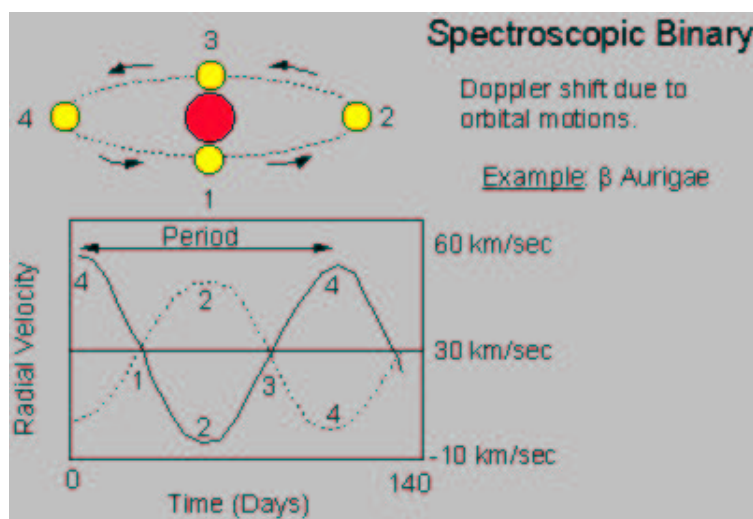


Figura 4: Grafico delle velocità di un sistema doppio spettroscopico

periodo, T , e dal semiasse maggiore angolare³, α , si ricava la massa totale del sistema, $M = m_1 + m_2$, se si conosce la distanza, D ; altrimenti, si ricava la grandezza $M/D^3 = \alpha^3/T^2$. La distanza, D , si determina con la *parallasse trigonometrica* (vedi §12). La massa di ciascuna delle due componenti si può ricavare nel caso in cui il sistema binario sia anche spettroscopico, oppure se si misura la posizione delle due stelle rispetto al centro di massa.

3.2 Binarie Spettroscopiche

Le binarie spettroscopiche sono sistemi di stelle osservabili spettroscopicamente tramite lo spostamento Doppler periodico delle righe dei loro spettri, prodotto dalla velocità delle componenti nella direzione dell'osservatore (vedi Fig.4). Si distinguono in binarie a singola riga o a doppia riga. Le binarie spettroscopiche a singola riga sono quelle in cui si osserva lo spettro di una singola componente, e sono l'equivalente spettroscopico delle binarie astrometriche. L'evidenza osservativa di una binaria spettroscopica a doppia riga è il periodico sdoppiarsi delle righe spettrali di assorbimento sul fondo continuo; per una binaria spettroscopica a singola riga si osservano invece righe di assorbimento che oscillano tra uno spostamento verso il rosso ed uno verso il blu, che significa avvicinamento o allontanamento dell'unico oggetto visibile. Solo i sistemi molto stretti, ovvero con periodi più brevi, producono un effetto Doppler osservabile, perciò i sistemi spettroscopici più osservati sono quelli con periodi compresi tra i 3 giorni e l'anno. Sono state osservate circa 2000 binarie spettroscopiche, del 50% delle quali sono stati determinati i parametri orbitali. Le tecniche spettroscopiche recenti, applicate alla ricerca dei pianeti extrasolari, sono le sole che hanno permesso di individuare nuovi pianeti (HIRES Spectrometer dell'osservatorio Keck alle Hawaii, e nel futuro GAIA (2009)). I risultati sono stati ottenuti con risoluzioni spettrali (Doppler) di una decina di metri al secondo.

Dallo spettro della stella doppia si ricavano le velocità lungo la linea di vista:

$$\begin{aligned} v_1 &= \Omega r_1 \sin i \\ v_2 &= \Omega r_2 \sin i \end{aligned} \quad (20)$$

³Il semiasse maggiore angolare è l'angolo che il semiasse maggiore dell'orbita sottende alla distanza dell'osservatore.

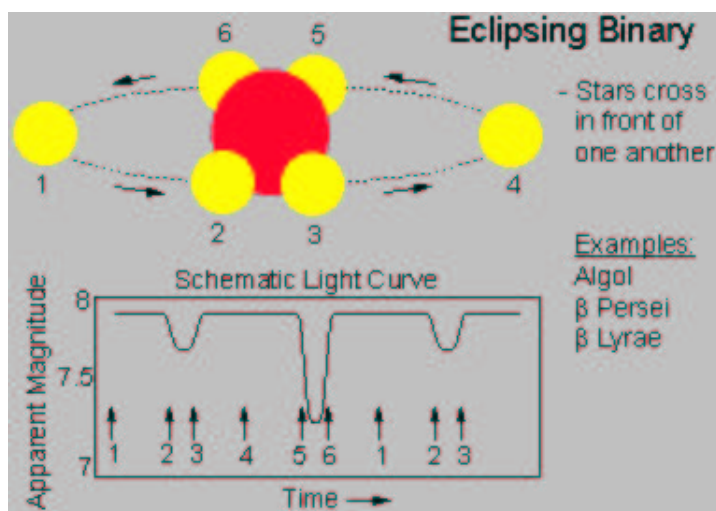


Figura 5: Orbita e grafico della luminosità in funzione del tempo di una binaria ad eclisse

con la legge dello spostamento Doppler:

$$\frac{v}{c} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \quad (21)$$

dove $\Omega = 2\pi/T$ è la velocità angolare del sistema e i è l'inclinazione dell'orbita rispetto al piano del cielo.

Inoltre, dalle equazioni (5) del problema dei due corpi si ricava:

$$\frac{|\vec{r}_1|}{|\vec{r}_2|} = \frac{m_2}{m_1} \quad (22)$$

Combinando le equazioni precedenti con la 3^a legge di Keplero si ottiene il seguente sistema di tre equazioni in quattro incognite, i , r , m_1 , m_2 :

$$\begin{cases} v_1 + v_2 = \Omega r \sin i \\ \frac{v_1}{v_2} = \frac{|\vec{r}_1|}{|\vec{r}_2|} = \frac{m_2}{m_1} \\ m_1 + m_2 = \frac{\Omega^2 r^3}{G} \end{cases} \quad (23)$$

che è risolvibile se: a) la doppia è visuale; b) la doppia è ad eclisse ($i = 90^\circ$).

3.3 Binarie a Eclisse (o Fotometriche)

Le binarie a eclisse sono sistemi di stelle nei quali periodicamente si osservano variazioni di intensità dovute alle componenti che si eclissano a vicenda (vedi Fig.5). Le binarie a eclisse sono sistemi il cui piano dell'orbita giace lungo la linea di vista. Di circa 4000 binarie a eclisse osservate, è stato possibile determinare l'orbita nel 10% dei casi. Generalmente, è più probabile osservare binarie strette, perché l'intervallo di inclinazione dell'orbita all'interno del quale le stelle possono eclissarsi cresce col diminuire della distanza tra le due componenti. Si osservano perciò binarie ad eclisse in un intervallo di periodi tra qualche ora ad una decina di giorni. Dallo studio della curva di luminosità è possibile ricavare l'orbita, il periodo e il raggio delle due stelle.

4 Obiettivi dell'esperienza

La misura consiste nell'osservare una stella doppia visuale dall'Osservatorio Astronomico di Loiano (BO) oppure dall'Osservatorio Astronomico di Arcetri (FI) ed utilizzare i dati ottenuti insieme ai dati di osservazioni precedenti per determinare i parametri dell'orbita. L'esperienza include anche l'osservazione di oggetti di coordinate note per calibrare la scala spaziale del rivelatore.

Questo è lo schema dell'esperienza:

- Preparazione dell'esperienza
 1. Selezione della stella doppia da osservare
 2. Selezione delle sorgenti per la calibrazione della scala spaziale del rivelatore
- Osservazioni al telescopio
 1. Osservazione della stella doppia e delle sorgenti per la calibrazione
- Analisi dei dati
 1. Calcolo del fattore di scala e dell'angolo di rotazione del sistema di riferimento del rivelatore, con relativi errori
 2. Calcolo della distanza tra le due componenti del sistema binario e dell'angolo di posizione, con relativi errori
- Determinazione dei parametri orbitali del sistema binario
 1. Ricerca in letteratura delle misure precedenti
 2. Calcolo dei parametri dell'orbita vera mediante il metodo analitico o mediante il metodo grafico
 3. Calcolo della massa dell'intero sistema dalla misura di parallasse trigonometrica ricavata dalla letteratura

5 Selezione della stella doppia da osservare

La scelta del sistema binario da osservare è vincolata ai seguenti criteri:

Posizione nel cielo: Il sistema da selezionare deve cadere nell'intervallo di ascensione retta e di declinazione individuato dalla regione di cielo circostante allo zenit, che offre il "seeing" migliore. Questo intervallo di coordinate dipende dal giorno e dall'ora dell'osservazione. Si può determinare in modo semplice calcolando il tempo siderale nell'ora e nel giorno dell'osservazione.

Il tempo siderale è l'angolo orario del punto γ ed è uguale anche alla ascensione retta delle stelle che culminano nel giorno e nell'ora di osservazione (Fig.6). Il tempo siderale, ST , è la somma dell'angolo orario, HA_{\odot} , e dell'ascensione retta, α_{\odot} , del Sole, ed è dato quindi da: $ST = HA_{\odot} + \alpha_{\odot} = (UT - 12^h + \lambda) + \alpha_{\odot}$, dove UT è il tempo universale, λ è la longitudine del luogo di osservazione e 12^h sottratte tengono conto che l'angolo orario è misurato da Sud. L'ascensione retta del Sole si ricava dalle effemeridi. Una volta calcolato il tempo

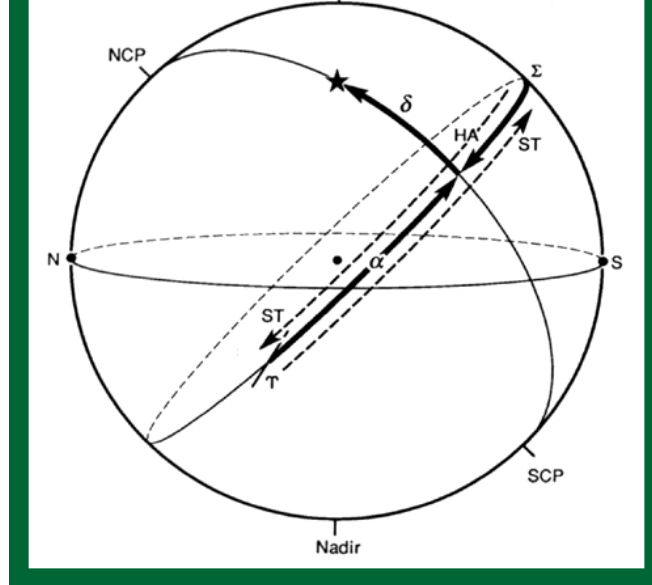


Figura 6: Sistema equatoriale assoluto. ST , tempo siderale; α , ascensione retta; HA , angolo orario; δ , declinazione; γ , punto gamma, nodo ascendente dell'intersezione tra piano dell'eclittica e piano equatoriale terrestre.

siderale, si ha l'ascensione retta centrale delle stelle che culminano durante il periodo di osservazione. Si considerano quindi gli oggetti che hanno ascensione retta $\pm 3^h$ da quel valore.

Sistema binario semplice: Il sistema non deve essere costituito da più di due componenti. La presenza di tre o più stelle interagenti rende molto più complessa l'analisi dell'orbita, a meno che i periodi orbitali all'interno del sistema multiplo non siano molto diversi tra loro, che è, in molti casi, equivalente ad avere separazioni angolari molto differenti.

Separazione delle stelle: Sono da selezionare quei sistemi binari nei quali la separazione delle due componenti sia superiore alla risoluzione spaziale dell'apparato di osservazione ed inferiore al suo campo di vista. Il limite superiore alla separazione è però essenzialmente imposto dal periodo dell'orbita. A parità di distanza e di massa totale del sistema, più grande è la separazione, maggiore è il periodo orbitale. Quest'ultimo può diventare così grande che i dati ottenuti negli ultimi duecento anni di osservazioni non sono sufficienti per caratterizzare i parametri orbitali.

Per selezionare il sistema binario occorre restringere il campo di ricerca a quelle costellazioni che rientrano nell'intervallo di coordinate definito dal primo criterio, e poi consultare i cataloghi di stelle doppie per scegliere le possibili candidate. La compilazione di stelle doppie visuali più completa ed aggiornata, al momento presente, è il catalogo *The Washington Visual Double Star Catalog*, C.E.Worley e G.G. Douglass, 1996 (WDS). Una versione del catalogo è presente anche in rete all'indirizzo <http://ad.usno.navy.mil/wds/wds.html>. Questo catalogo copre tutto il cielo e contiene tutte le stelle doppie visuali conosciute, al 1995, per le quali sia stata misurata almeno una volta la loro separazione. Per ciascun sistema binario vengono fornite le coordinate, indicazione se il sistema è composto da tre o più stelle, data della prima e della più recente osservazione, separazione angolare e angolo di posizione per le osservazioni suddette, la magnitudine

e la classe spettrale di ciascuna componente, più altre informazioni utili alla caratterizzazione del sistema. Tra queste vi è il numero totale di osservazioni e la nota **O** se l'orbita è già stata calcolata.

Per questi sistemi binari esiste un altro catalogo, dello stesso autore, nel quale sono riportati i parametri orbitali delle orbite calcolate: *The 5th Catalog of Orbits of Visual Binary Stars*, C.E. Worley and W.D. Heintz, Publ. U.S. Naval Obs., 1984, che può essere trovato in rete al sito <http://ad.usno.navy.mil/ad/wds/hmw5.html>.

6 Telescopi per l'osservazione

L'osservazione della stella doppia o delle stelle doppie selezionate viene eseguita dall'Osservatorio di Loiano, Bologna, oppure dall'Osservatorio di Arcetri.

Il telescopio di Loiano è un Ritchey–Chrétien in montatura Cassegrain⁴ che ha le caratteristiche riportate in tabella.

Apertura	150 cm
Lunghezza focale equivalente	1200 cm
Rapporto focale equivalente	F/8
Scala spaziale dell'immagine	17"/mm
Campo di vista corretto	70'×70'

Una descrizione completa del telescopio si ottiene alla pagina web dell'Osservatorio di Loiano: <http://boas3.bo.astro.it/loiano/LoianoHome.html>.

Sul piano focale del telescopio è attaccata la Bologna Faint Object Spectrograph & Camera (BFOSC). BFOSC è uno strumento in grado di acquisire con un semplice cambio di configurazione, sia immagini che spettri. Il sistema è dotato di ruota porta-filtri per la fotometria e fa uso di "grismi" per la dispersione spettrale. Il "grisma" è un prisma-reticolo in trasmissione che ha il vantaggio di trasmettere non deviato l'ordine spettrale desiderato. Il sensore utilizzato è un CCD Thomson 1024×1024 le cui caratteristiche principali sono elencate nella seguente tabella.

Campo lineare della camera	30.7×30.7 mm
Copertura spettrale	330–1100 nm
Risoluzione spettrale massima	4200
Dimensione proiettata del pixel	0.562"
Dimensioni del campo	9.6'×9.6'

Per la descrizione completa di BFOSC vedi <http://boas3.bo.astro.it/loiano/new-bfosc.htm>.

Il telescopio di Arcetri è un Celestron 14 di tipo Schmidt-Cassegrain⁵ con le seguenti caratteri-

⁴Un telescopio in montatura Cassegrain consiste in uno specchio primario concavo con un piccolo specchio secondario all'interno del fuoco del primario. Il secondario ridirige la luce attraverso un foro centrale del primario dietro al quale è posto il piano immagine. Il Ritchey–Chrétien è un caso particolare in cui specchio primario e secondario sono iperboloidi.

⁵Il telescopio di tipo Schmidt-Cassegrain combina un ampio campo di vista con un rapporto focale veloce (piccolo valore di apertura (F#)). Si compone di un telescopio Cassegrain con una lente correttiva di Schmidt per rimuovere l'aberrazione sferica, posta generalmente in corrispondenza dello specchio secondario.

stiche:

Apertura	35.6 cm
Lunghezza focale equivalente	391 cm
Rapporto focale equivalente	$\sim F/11$
Scala spaziale dell'immagine	53"/mm

Sul piano focale del telescopio c'è un sensore CCD 192 pxl \times 165 pxl con le seguenti caratteristiche:

Campo lineare della camera	2.64 \times 2.64 mm
Dimensioni pixel	13.75 μ m \times 16 μ m
Dimensioni del campo	2.32' \times 2.32'
Dimensione proiettata del pixel	0.715" \times 0.87"

7 Osservazione della stella doppia

L'osservazione consiste di due fasi: osservazione di sorgenti stellari con coordinate note, per determinare la scala spaziale del rivelatore, e osservazione della stella doppia.

Per determinare la scala spaziale del rivelatore occorre osservare un insieme di oggetti che devono essere presenti contemporaneamente nel campo di vista del rivelatore, e le cui coordinate siano note con precisione adeguata alle caratteristiche del CCD. Date le piccole dimensioni del campo di vista del rivelatore, i migliori oggetti per effettuare la calibrazione della scala spaziale sono gli ammassi stellari aperti oppure stelle doppie apparenti o con periodi molto lunghi. Le coordinate degli oggetti presi in esame possono essere trovate nell'atlante del cielo di Monte Palomar, oppure in rete sul sito Simbad (vedi paragrafi successivi).

I tempi di esposizione per ottenere una buona statistica di conteggi sull'immagine senza saturare il sensore possono essere valutati nel corso delle osservazioni con delle esposizioni di prova.

Del sistema binario selezionato verranno acquisite diverse immagini con tempi di esposizione diversi e con posizioni diverse degli oggetti all'interno del campo di vista.

8 Determinazione della scala spaziale del sensore

Per determinare la scala spaziale del rivelatore occorrono una immagine di due o più oggetti, ottenuta col rivelatore da calibrare, e le coordinate celesti degli oggetti osservati, note con una precisione inferiore alla risoluzione spaziale del pixel del rivelatore. Un ammasso aperto, ad esempio, consente di effettuare la calibrazione contemporaneamente su tutto il campo di vista. Questo permette di determinare eventuali non linearità nella scala spaziale.

Le coordinate di un oggetto, S_i , sul rivelatore sono (x_i, y_i) , espresse in pixel, con $(0, 0)$ il centro del pixel in basso a sinistra. Le coordinate degli oggetti possono essere ricavate utilizzando le routine standard di IRAF o di IDL, mediante routines standard per la determinazione del centroide della distribuzione di luce della singola stella.

Le coordinate celesti degli stessi oggetti sono in coordinate sferiche equatoriali, (α_i, δ_i) , ascensione retta e declinazione, espresse, rispettivamente in h, m, s e in $^{\circ}'''$ ⁶.

⁶Si ricorda che i minuti e i secondi di ora non sono equivalenti ai minuti e ai secondi d'arco. Vale la relazione: $1^h = 15^{\circ}$.

Per ricavare la scala spaziale si fa l'ipotesi, ben soddisfatta dato il ridotto campo di vista del rivelatore, che il sistema ottico non introduca distorsioni nell'immagine.

Chiamando con $p_x = x_i - x_j$ e $p_y = y_i - y_j$ le due componenti della distanza tra due oggetti nelle coordinate del rivelatore, in pixel, e con ϵ e ν le stesse due componenti nelle coordinate equatoriali, in secondi d'arco, si può scrivere la seguente relazione vettoriale:

$$\begin{pmatrix} \epsilon \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma p_x \\ \gamma f p_y \end{pmatrix} \quad (24)$$

dove θ è l'angolo formato tra direzione del Nord delle coordinate equatoriali e la direzione dell'asse y delle coordinate del rivelatore; γ è il fattore di scala spaziale lungo l'asse y del rivelatore, in "/pixel; e f è il rapporto tra le dimensioni del pixel lungo l'asse y e lungo l'asse x , e tiene conto del caso in cui il pixel non sia rettangolare.

Le componenti della distanza in coordinate equatoriali:

$$\begin{cases} \epsilon \simeq (\alpha_i - \alpha_j) \cos \bar{\delta} \\ \nu \simeq \delta_i - \delta_j \end{cases} \quad (25)$$

dove $\bar{\delta} = (\delta_i + \delta_j)/2$, si ricavano approssimando al secondo ordine, per $\delta_i - \delta_j \ll 1$ e $\alpha_i - \alpha_j \ll 1$, la seguente relazione trigonometrica in coordinate sferiche:

$$\cos d = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta_i\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta_j\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \delta_i\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \delta_j\right) \cos(\alpha_i - \alpha_j) \quad (26)$$

Il fattore di scala spaziale, γ , si ricava da:

$$\gamma^2 = \frac{\epsilon^2 + \nu^2}{p_x^2 + f^2 p_y^2} \quad (27)$$

L'angolo di rotazione, θ , tra i due sistemi di riferimento si ottiene da:

$$\theta = \arctan \frac{\epsilon}{\nu} - \arctan \frac{p_x}{f p_y} \quad (28)$$

derivata tenendo conto che l'origine degli angoli parte dalla direzione del Nord celeste in senso antiorario.

9 Determinazione delle coordinate orbitali della stella doppia

Dall'immagine del sistema binario si determinano le posizioni delle due stelle nelle coordinate del rivelatore, con lo stesso metodo utilizzato per derivare le coordinate sul CCD degli oggetti per la calibrazione spaziale. Generalmente, in ogni sistema binario, si distingue tra la componente primaria, la stella più luminosa, e la componente secondaria. Dalle loro coordinate, utilizzando il fattore di scala, γ , e l'angolo di rotazione, θ , ricavati nel §8, si ricavano la distanza, ρ , in secondi d'arco, e l'angolo di posizione, ϕ , misurato in senso antiorario rispetto alla direzione del polo nord celeste, della stella secondaria rispetto alla stella primaria.

10 Ricerca osservazioni precedenti

Per poter ricostruire l'orbita apparente del sistema binario è necessario avere un insieme di misure che copre un arco di tempo confrontabile col periodo dell'orbita. Il primo catalogo delle

stelle doppie è il *General Catalog of Double Stars* di Burnham. Esso riporta le misure effettuate tra il 1820 e il 1906, data di pubblicazione del catalogo. Osservazioni fino al 1926 si trovano su Aitken *New General Catalog of Double Stars*. I dati più recenti si possono trovare facendo una ricerca bibliografica sulla stella doppia in questione utilizzando i database disponibili in rete. Il database più completo per la letteratura astronomica è lo *Astrophysics Data System*, <http://adswww.harvard.edu>. SIMBAD (<http://cdsweb.u-strasbg.fr/Simbad.html>) è, invece, un database che fornisce dati osservativi e riferimenti bibliografici di oltre un milione di oggetti celesti esterni al sistema solare, a cui si accede con una password. Per ultimo, un database di cataloghi astronomici è VizieR (<http://vizir.u-strasbg.fr/viz-bin/VizieR>). Questo tipo di ricerca richiede un pò di pazienza per selezionare i riferimenti bibliografici utili, ma consente di coprire quasi tutto l'arco di tempo che va dal 1926 ai giorni nostri. I cataloghi e gli altri articoli forniscono anche la precisione con cui sono state effettuate le misure, anche se, come si può vedere riportando in grafico i punti, alcuni di essi sono probabilmente affetti da errori sistematici, perché sono visibilmente fuori dall'orbita apparente tracciata dagli altri punti sperimentali.

Per risparmiarsi la ricerca bibliografica, è possibile richiedere l'elenco aggiornato delle osservazioni pubblicate fino al 1995 dalla pagina in rete del catalogo: *The Washington Visual Double Star Catalog*, C.E. Worley e G.G. Douglass, 1996 (WDS) (<http://ad.usno.navy.mil/wds/wds.html>). Indicando in modo univoco le coordinate della stella fornite dal catalogo si riceve in breve tempo (qualche ora) un file contenente le osservazioni e una breve legenda di spiegazioni. In Appendice A sono riportate le informazioni introduttive ed un campione di dati.

Un altro catalogo utile per ottenere il valore di parallasse trigonometrica, che serve a ricavare la massa totale del sistema, è il *General Catalogue of Stellar Parallaxes* di Schlesinger. In rete, il valore di parallasse trigonometrica si trova nel database della missione Hipparcos [<http://astro.estec.esa.nl/Hipparcos>].

11 Determinazione dei parametri orbitali

L'osservazione effettuata e l'insieme delle osservazioni precedenti permettono di ricostruire una porzione, oppure l'intera orbita apparente della stella secondaria attorno alla stella primaria che si considera fissa.

Ogni osservazione completa si compone di tre dati: il tempo dell'osservazione, t , l'angolo di posizione, θ , della stella secondaria rispetto alla primaria, e la distanza angolare, ρ , di separazione tra le due stelle (vedi Fig.7).

Il catalogo WDS fornisce gli angoli di posizione alla data di osservazione, per cui, per prima cosa, le osservazioni devono essere riportate alla stessa epoca per eliminare gli effetti dovuti alla precessione⁷ e al moto proprio della stella. Questa correzione si applica all'angolo di posizione, mentre la separazione angolare resta, naturalmente, invariata. In pratica, tali correzioni sono di entità trascurabile, e quindi possono essere tralasciate, a meno che la stella si trovi molto vicina al polo. È comunque consigliabile stimare l'entità di queste correzioni. La correzione per la precessione si trova con la formula approssimata (Aitken, 1964, pag.73):

$$\Delta\theta = 0.0056^\circ (t - t_o) \sin \alpha \sec \delta \quad (29)$$

⁷La precessione terrestre è il moto descritto dall'asse di rotazione terrestre rispetto al piano dell'eclittica. Tale moto cambia la posizione del punto γ e quindi i riferimenti del sistema equatoriale. Un periodo di precessione dura 25700 anni, che equivale ad uno spostamento del punto γ lungo il piano equatoriale di 50" all'anno.

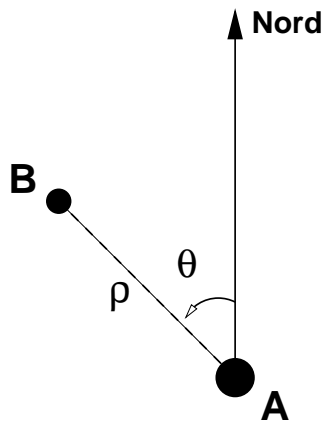


Figura 7: Parametri dell'osservazione. A , stella primaria; B , stella secondaria; θ , angolo di posizione; ρ , separazione angolare.

La formula per la correzione dovuta al moto proprio del sistema:

$$\Delta\theta = -\mu''(t - t_o) \sin \delta \quad (30)$$

dove α e δ sono le coordinate celesti, μ'' è il moto proprio in ascensione retta (in arcsec), t_o è l'epoca alla quale si vogliono ridurre i dati, e t è il tempo di osservazione (t_o e t sono espressi in anni). Generalmente, l'epoca alla quale sono riferite le coordinate è un multiplo intero di 50 anni; quindi, attualmente, si trovano le coordinate celesti riferite al 2000.

11.1 Orbita vera

L'orbita vera, nel caso più semplice di due corpi interagenti, è una conica. Nel caso in cui il sistema sia legato, questa conica è un'ellisse. L'orbita vera del sistema doppio è caratterizzata da 7 parametri orbitali, quattro dei quali sono i parametri dinamici dell'orbita vera, mentre i restanti tre sono parametri legati alla posizione del sistema doppio rispetto alla posizione della Terra.

I quattro elementi dinamici sono:

T : Periodo di rivoluzione espresso in anni solari medi.

τ : Tempo del passaggio dal periastro.

e : Eccentricità.

a : Semiasse maggiore espresso in secondi d'arco.

Se si conosce la distanza del sistema doppio il semiasse maggiore può essere determinato in unità lineari, ad esempio in unità astronomiche.

I tre parametri dipendenti dalla posizione dell'osservatore sono:

Ω : Angolo di posizione del primo punto nodale ($0^\circ < \Omega < 180^\circ$), misurato in senso antiorario dal polo Nord celeste.

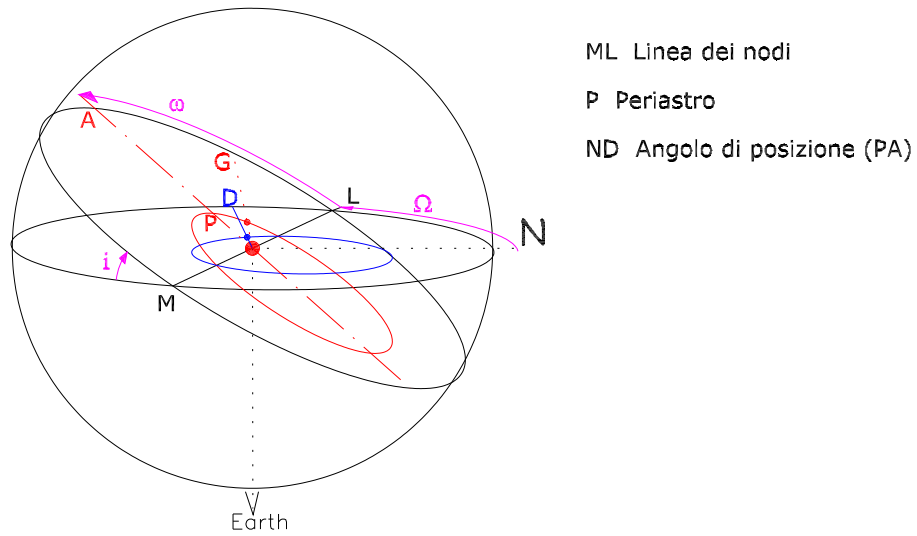


Figura 8: Orbita apparente (in blu sul piano MNL) e orbita vera (in rosso sul piano MAL) con i parametri orbitali. Al centro della sfera è la stella primaria. N è il polo Nord celeste.

ω : Angolo, nel piano dell'orbita vera, tra la linea dei nodi, dal punto nodale definito da Ω e il periastro, misurata nella direzione di moto della stella secondaria.

i : Inclinazione del piano dell'orbita vera rispetto dal piano del cielo. Questo angolo è compreso tra -90° e $+90^\circ$, con segno positivo quando la stella secondaria si allontana dalla Terra nel passaggio dal punto nodale definito sopra. Se non è possibile misurare la velocità radiale della stella secondaria, questo angolo è indeterminato nel segno, in quanto dall'orbita apparente non è possibile dedurre secondo quale dei due angoli, $+i$ o $-i$ sia inclinata l'orbita.

In figura 8 sono disegnate le orbite vera e apparente con i parametri orbitali descritti sopra.

11.2 Orbita apparente

L'orbita apparente è la proiezione sul piano del cielo dell'orbita vera. La proiezione di una conica è ancora una conica dello stesso tipo, in cui la proiezione del centro è il centro della conica proiettata (laddove vi sia un centro), ma in cui l'eccentricità e la posizione dei fuochi e degli assi cambiano. Nel caso di un sistema legato, l'orbita apparente sarà un'ellisse il cui centro è la proiezione del centro dell'ellisse dell'orbita vera, ma *la posizione della stella primaria non occupa uno dei fuochi dell'orbita apparente*. Dalla conoscenza dell'orbita apparente è tuttavia possibile ricavare l'orbita vera.

L'orbita apparente può essere scritta nella forma più generale di una conica:

$$Ax^2 + 2Hxy + By^2 + 2Gx + 2Fy + 1 = 0 \quad (31)$$

dove:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \quad (32)$$

Dalle osservazioni si ricava l'equazione dell'orbita apparente utilizzando un metodo di fit lineare che è descritto nell'appendice B. Il metodo consiste nel determinare il miglior fit della funzione:

$$z(x, y) = Ax^2 + 2Hxy + By^2 + 2Gx + 2Fy \quad (33)$$

che prende sempre il valore -1 con errore calcolato in modo iterativo dalle incertezze sui valori x_i e y_i .

Occorre verificare che la conica così determinata soddisfi la legge delle aree.

Una volta determinata la conica è possibile ricavare i parametri orbitali del sistema doppio utilizzando diversi metodi analitici e grafici. Tra i metodi analitici vi sono: il metodo di Kowalsky (Smart, 1949; Aitken, 1964) che deriva gli elementi orbitali dall'equazione generale dell'ellisse apparente; il metodo di Thiele-Innes-Van den Bos (Aitken, 1964; Couteau, 1982; Heintz, 1978), che utilizza tre osservazioni per derivare i parametri definendo dei parametri orbitali diversi che sono funzione dei parametri orbitali definiti nel paragrafo precedente e che rappresentano i coefficienti di trasformazione dal sistema di riferimento dell'orbita vera al sistema di riferimento dell'orbita apparente; il metodo di Danjon e Rabe (Couteau, 1982; Heintz, 1978), che utilizza coppie di punti opposti nell'orbita, per cui richiede osservazioni su almeno un'orbita completa. Il metodo grafico, detto di Zwiers (Smart, 1949; Aitken, 1964; Couteau, 1982; Heintz, 1978), permette di ricavare tutti i parametri orbitali costruendo l'ellisse dell'orbita apparente e l'ellisse ausiliario in modo puramente grafico o in parte analitico.

Nel paragrafo seguente viene descritto il metodo di Zwiers, che è il più diretto una volta determinato l'ellisse dell'orbita apparente.

11.3 Metodo di Zwiers

Una volta determinato l'ellisse dell'orbita apparente si procede in modo grafico oppure in modo analitico alla determinazione dei parametri orbitali.

L'ellisse apparente ha il centro che è la proiezione del centro dell'orbita vera, ma la stella primaria, fuoco dell'orbita vera, non occupa uno dei due fuochi (vedi Fig.9a).

1. **Proiezione asse maggiore e eccentricità.** Individuato il centro dell'ellisse, si traccia la corda che passa per la stella primaria, S , e per il centro, C (vedi Fig.9b). Questa corda è la proiezione dell'asse maggiore dell'orbita vera, e l'estremo più vicino a S è la proiezione del periastro.

Poichè i rapporti tra segmenti aventi la stessa direzione si conservano in una proiezione ortogonale, ne deriva che il rapporto: CS/CP da l'eccentricità dell'orbita vera.

Analiticamente, si ha un sistema di riferimento con origine nel punto S , occupato dalla stella primaria, e asse x diretto verso il polo Nord celeste. Le coordinate del centro dell'ellisse, $\{x_o, y_o\}$ si ricavano risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} Ax_o + Hy_o + G = 0 \\ Hx_o + By_o + F = 0 \end{cases} \quad (34)$$

Analiticamente, conviene eseguire una roto-traslazione degli assi per riportare l'ellisse dalla sua forma generale alla forma canonica. Successivamente, si determinano le coordinate della stella primaria nel nuovo sistema di riferimento. Utilizzando le incertezze sui coefficienti dell'ellisse apparente (A, B, H, F, G) si ricavano le incertezze sulla posizione del

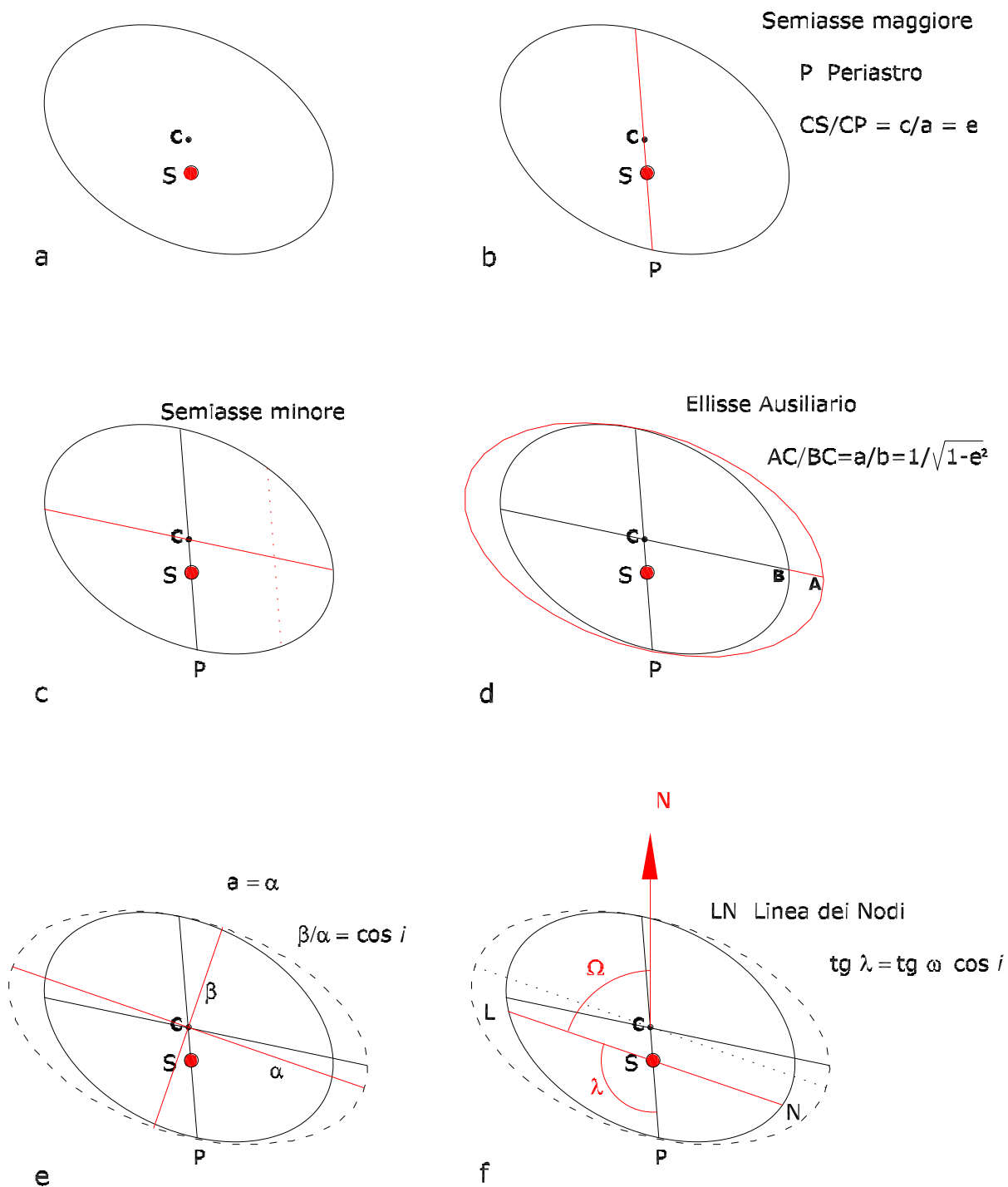


Figura 9: Determinazione dei parametri orbitali per mezzo della soluzione grafica del metodo di Zwiers (vedi testo).

centro dell'ellisse, sull'angolo di rotazione e sulla lunghezza dei semiassi⁸. Infine, si può ricavare il valore dell'eccentricità.

2. **Proiezione asse minore.** Nella proiezione l'asse minore conserva la proprietà di essere il luogo dei punti medi di tutte le corde parallele alla proiezione dell'asse maggiore. Graficamente è semplice da tracciarsi (vedi Fig.9c).
3. **Ellisse ausiliario.** Per ricavare graficamente gli altri parametri orbitali occorre tracciare l'ellisse ausiliario. L'ellisse ausiliario è la proiezione del cerchio ausiliario dell'orbita vera, ossia quel cerchio avente per diametro l'asse maggiore e tangente all'orbita vera agli estremi dell'asse maggiore.

Per costruire il cerchio ausiliario occorre allungare le corde parallele all'asse minore di un fattore, k :

$$k = \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}} \quad (35)$$

e tracciare l'ellisse così individuato dagli estremi delle nuove corde (vedi Fig.9d).

4. **Semiassi maggiore, a , inclinazione dell'orbita, i .** Si tracciano gli assi, α e β , dell'ellisse ausiliario (vedi Fig.9e). Essendo l'ellisse ausiliario la proiezione di un cerchio, il suo asse maggiore è il diametro del cerchio e quindi l'asse maggiore dell'orbita vera, da qui la misura del semiassi maggiore dell'orbita. Il rapporto tra semiassi minore e semiassi maggiore fornisce l'angolo di inclinazione del piano dell'orbita vera rispetto al piano del cielo, infatti:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \cos i \quad (36)$$

Analiticamente, si procede in questo modo, i semiassi maggiore α , e minore, β , dell'ellisse ausiliario e le proiezioni dei semiassi maggiore, CP , e minore, $k \cdot CB$, dell'orbita vera (il semiassi minore è prolungato), formano due coppie di semidiametri coniugati dell'ellisse. Per diametri coniugati s'intendono quelle coppie di diametri che sono proiezione di coppie di diametri tra loro perpendicolari del cerchio ausiliario.

Si può dimostrare che valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 &= CP^2 + (k \cdot CB)^2 \\ \alpha\beta &= CP \cdot k \cdot CB \sin P\hat{C}A \end{aligned} \quad (37)$$

Ricavando CB e $P\hat{C}A$ con la geometria analitica, si può risolvere il sistema, ricavare α e β e quindi il semiassi maggiore dell'orbita, a , e l'inclinazione, i .

5. **Linea dei nodi, Ω , angolo del periastro, ω .** La linea dei nodi, LN è la parallela all'asse maggiore dell'ellisse ausiliario, passante per S (vedi Fig.9f).

L'angolo di posizione della linea dei nodi è l'angolo $N\hat{S}L$, mentre l'angolo del periastro, misurato dalla linea dei nodi nella direzione del moto della stella secondaria, si ricava

⁸Occorre far bene attenzione a non confondere gli assi dell'orbita apparente con le proiezioni degli assi dell'orbita vera sull'orbita apparente.

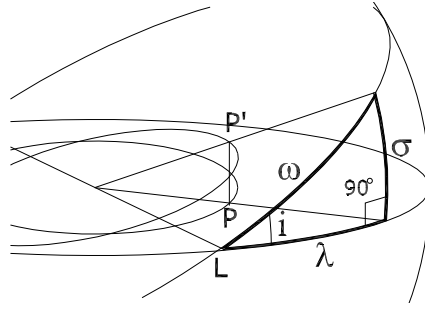


Figura 10: Determinazione dell'angolo di posizione ω del periastro, rispetto alla linea dei nodi.

dall'angolo della proiezione del periastro sul piano del cielo e applicando le formule di trigonometria sferica al triangolo sferico individuato dai punti: L , P e dalla posizione del periastro sull'orbita vera, P' (vedi Fig.10). Applicando la relazione di trigonometria sferica: $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$ a due lati diversi e sapendo che $\widehat{LP'P} = 90^\circ$ si ricava:

$$\tan \omega = \frac{\tan \lambda}{\cos i} \quad (38)$$

Analiticamente, gli angoli Ω e λ si ricavano con la geometria analitica, mentre il calcolo di ω è quello descritto sopra.

6. **Periodo orbitale, T e tempo del passaggio al periastro, τ .** Nel caso in cui i dati osservativi descrivano almeno un'orbita completa è possibile ricavare il periodo da due passaggi successivi con lo stesso angolo di posizione.

Il tempo del passaggio al periastro, τ , si ricava interpolando i dati osservativi attorno al passaggio del periastro quando l'orbita osservata è completa oppure contiene il passaggio.

Nel caso generale in cui l'orbita osservata non è completa, si determinano T e τ come segue (si veda anche l'appendice C per la definizione delle grandezze usate). Per mezzo dell'equazione (38), generalizzata ad un punto qualunque dell'orbita vera, individuato dall'anomalia vera, v , si ricava l'anomalia vera in funzione dell'inclinazione e dell'angolo di posizione della stella secondaria sull'orbita apparente, θ .

$$\tan(v + \omega) = \frac{\tan(\theta - \Omega)}{\cos i} \quad (39)$$

Facendo uso delle relazioni riportate in appendice C, si converte l'anomalia vera in anomalia eccentrica e quindi si usa l'equazione:

$$E - e \sin E = \frac{2\pi}{T}(t - \tau) \quad (40)$$

per determinare il periodo e il tempo del passaggio al periastro. Si possono ricavare T e τ effettuando un fit coi minimi quadrati sulla funzione sopra.

12 Determinazione della massa totale del sistema binario

Per determinare la massa totale del sistema binario si usa la 3^a legge di Keplero:

$$M = m_1 + m_2 = \frac{a^3}{T^2} \quad (41)$$

con M in unità di massa solare, e T in anni; nella quale però resta da conoscere il semiasse maggiore, a dell'orbita in unità astronomiche. Nella derivazione dei parametri orbitali della stella si è ottenuto il valore del semiasse maggiore angolare, α (in arcsec) e, per derivare a occorre conoscere la distanza del sistema binario, d (in parsec). Il parsec è un'unità di distanza definita come quella distanza alla quale l'unità astronomica sottende un secondo d'arco. Con questa definizione si ha:

$$a(\text{UA}) = \alpha(\text{arcsec}) \cdot d(\text{pc}) \quad (42)$$

Se si osserva una stella da due punti opposti dell'orbita terrestre, si osserva che, se la stella è vicina, essa appare in due posizioni diverse rispetto alle stelle del fondo, che si possono considerare fisse. La *parallasse trigonometrica*, Π (in arcsec), è definita come la metà dello spostamento angolare apparente della stella, perciò la distanza della stella si ricava da:

$$d(\text{pc}) = \frac{1\text{UA}}{\Pi} \quad (43)$$

La misura della parallasse trigonometrica del sistema binario in esame può essere ricavata dalla letteratura. Una volta nota la distanza del sistema binario, è sufficiente applicare la 3^a legge di Keplero per ricavare la somma delle masse del sistema.

$$m_1 + m_2 = \frac{a^3}{T^2} = \frac{(\alpha d)^3}{T^2} = \frac{\alpha^3}{\Pi^3 T^2} \quad (44)$$

13 Bibliografia

- Aitken R.G., *New General Catalogue of Double Stars within 120° of the North Pole*, Washington, 1934 (coll. 3.9/184)
- Aitken R.G., *The Binary Stars*, Dover, 1964 (coll. 3.6/25)
- Burnham S.W., *A General Catalogue of Double Stars within 121° of the North Pole*, Washington, 1906 (coll. 3.9/183)
- Couteau, P., *Observing Visual Double Stars*, MIT Press, 1982 (coll. 3.4/27)
- Heintz W.D., *Double Stars*, Reidel, 1978 (coll. 4.6/47)
- Landau, L.D., Lifschitz, E.M., *Meccanica*, Editori Riuniti, 1975
- Schlesinger, *General Catalogue of Stellar Parallaxes*, Yale, 1935 (coll. 3.9/183)
- Smart, W.M., *Text-Book on Spherical Astronomy*, Cambridge, 1949 (coll. 3.3/7)

A File di dati osservativi ottenuto da *The Washington Visual Double Star Catalog*

Il testo seguente è il file che si riceve dalla pagina in rete del catalogo WDS. In questo esempio, il testo contiene solamente la parte iniziale dei dati della stella doppia σ CrB, richiesta col nome *STS2032* assegnatogli nel catalogo.

DATA FROM WASHINGTON DOUBLE STAR CATALOG
(WDS)

U.S. NAVAL OBSERVATORY

WASHINGTON D.C. 20392

WDS INDEX CATALOG NOTES, COLUMNS 79 AND 80.

N Notes found in WDSNOT MEMO a of WDS
O Orbit, briefly described in WDSNOT MEMO a
P 100 year proper motion in right ascension
Q 100 year proper motion in declination
R 100 year proper motion in right ascension and declination
6 Separation given in minutes of arc (') instead of seconds of arc (")
a Pair appears in an appendix list, not part of discoverer's regular numbering sequence.
r Pair was listed, but in a "rejected" list, not part of discoverer's regular numbering sequence.
s Pair has other discoverer's names and numbers in the literature due to duplicate discovery.
p Coordinates and proper motions from ACRS, PPM, IRS, FK5 catalogs.

WDS OBSERVATION CATALOG, COLUMN 62

A Refractor, micrometer
B Reflector, micrometer
C Comparison image micrometer
D Heliometer
E Visual interferometer
F CCD astrometry
G Photographic, with astrograph
H Photographic, with medium or long-focus technique
I Transit method
J Occultation binary, multiple resolutions.
K Long base line optical interferometer
L Electronographic camera
M Meridian circle
N Transit interferometer
O Photographic, with ocular enlargement
P Photoelectric phase-grating interferometer
Q HST-FGS
R RG0 use of micrometer plus comparison image micrometer on same star
S Speckle interferometry
T Hipparcos type observation - aperture reflects Rayleigh limit at V
U Adaptive Optics
V HST-WFPC2 & HST-FOC
W Area scanner
X Aperture Masking

WDS OBSERVATION CATALOG, COLUMN 63

1 Published distance or position angle correction
2 Possible misprint in publ. (either corrected or not by cataloger)
3 Uncertain or low weight in the opinion of the cataloger
4 Wrong identification, or position, in the opinion of the cataloger
5 Published 3rd decimal in the date (pre-1985)
6 Unpublished in orbit quotation
7 Omissions by van den Bos or catalogers changes
8 Add 100 to the aperture
9 Distance less than value indicated
0 Corrected by author
A Over 9 nights, add 10 to number in column 54
B Over 19 nights, add 20 to number in column 54
C Over 29 nights, add 30 to number in column 54
D Over 39 nights, add 40 to number in column 54
E Over 49 nights, add 50 to number in column 54
J Mean of multiple measures of same photographic plate
M Mixed apertures
Q Quadrant reversed by the cataloger

R Red/IR magnitudes
 S Add 300 to aperture
 T Add 200 to aperture
 U Uncertain
 V A magnitude, not a magnitude difference in columns 48-53
 W No. of nights varies 50% or more between angle and separation measures
 X General note by measurer, may be worth consulting

WDS OBSERVATION CATALOG, COLUMN 64

A Movement direct
 B Movement retrograde
 C Orbit residuals
 D Difficult
 E Elongated
 F Too faint, not seen, or not located
 G Rarely measured
 H Red/IR Magnitudes
 I Identification, or question about such
 J Possible motion
 K Separation decreases
 L Optical
 M Multiple
 N Not round
 O Over 9 nights (add 10 to number in column 54)
 P Separated
 Q Quadrant reversed by cataloger
 R Round (=Single)
 S Single (=Round)
 T Too close (but not round)
 U Uncertain
 V Variable
 W Fixed
 X General note, possibly worth consulting
 Y Separation increases
 Z Measurer other than author(s)
 0 Measure corrected by the author(s).
 5 Estimated separation
 6 Separation given in minutes of arc (') instead of seconds of arc (")
 7 More than one telescope used
 8 Over 19 nights, add 20 to number of nights
 9 Distance less than value quoted

WDS OBSERVATION CATALOG, COLUMN 65

0 Post-IDS measure added by Lick Observatory
 1 Post-IDS measure added by USNO
 2 Measure prior to Lick punch-card collection, added by USNO
 3 Post WDS (1984.0) measure added by USNO
 4 Post WDS (1984.0) old measure added by USNO
 5 Post WDS (1996.0) measure added by USNO
 6 Post WDS (1996.0) old measure added by USNO

Sometimes you will find that the reference is listed as "unpublished". If you use such data, common courtesy requires that you obtain the permission of the author. This permission is implicitly given by me by inclusion of my own unpublished measures in the data base.

Also, if you make use of data supplied by us, we would appreciate an acknowledgement in your published report or paper. Finally, if you have received this data by e-mail, please send me an e-mail reply indicating that you have indeed received it, as we have had intermittent problems with our system.

C. Worley

Internet: eqb@draco.usno.navy.mil

WDS Star No. 16147+3352

RA	DEC	Disc.	Comp.	Dates	No.	Position	Separation	
Magnitudes	Spec.	P.M.	BD Number	No	Obs	Angle		of
2000	2000	Number						
Comp.	Type	(1000 yr)		te				
hr min	deg mm		Frst Last	Frst Last	Fst Lst	Frst Last	Frst Last	A
B		RA DECL						
16 14.7	+33 52	STF2032	AB	1827 1998	99	89 235	1.3 6.7	5.23
6.26	60V 61V	-270 -090	+34	2750	NO			

Observations

Date Obs.	Ap	Position Col. Angle	Separation Col. Col.				Pri. Mag.	Sec. Mag.	Nights
			62	63	64	65			
1819.62		48.0						1	
STF	04	A				2			
						Reference: Struve, F.G.W.	Mensurae		
Micrometricae		Petropoli;				1837.			
1827.02		89.3		1.31		5.0	6.1	4	
STF	10	A				2			
						Reference: Struve, F.G.W.	Mensurae		
Micrometricae		Petropoli;				1837.			
1830.11		104.9		1.22				3	
STF	10	A				2			
						Reference: Struve, F.G.W.	Mensurae		
Micrometricae		Petropoli;				1837.			
1831.36		108.7		1.42				3	
HJ	05	A				4			
						Reference: Herschel, J.	Mem. R. Astron. Soc.		
8, 37; 1835.									
1832.52		113.6		1.07				6	
HJ	05	A	W			4			
						Reference: Herschel, J.	Mem. R. Astron. Soc.		
8, 37; 1835.									
1832.55		115.8						3	
DA	04	A				4			
						Reference: Daves, W.R.	Mem. R. Astron. Soc.		
8, 61; 1835.									
1832.57		114.8						1	
HJ	18	B				4			
						Reference: Herschel, J.	Mem. R. Astron. Soc.		
8, 37; 1835.									
1832.99		118.8		1.30				3	
STF	10	A				2			
						Reference: Struve, F.G.W.	Mensurae		
Micrometricae		Petropoli;				1837.			
1833.26		120.0		1.33				3	
HJ	05	A				4			
						Reference: Herschel, J.	Mem. R. Astron. Soc.		
8, 37; 1835.									
1833.36		120.7		1.31		6.3	7.5	3	
DA	04	A				4			
						Reference: Daves, W.R.	Mem. R. Astron. Soc.		
8, 61; 1835.									
1834.54		125.5						3	
DA	06	B				4			
						Reference: Daves, W.R.	Mem. R. Astron. Soc.		
19, 191; 1851.									
1835.50		130.5		1.31				5	
STF	10	A				2			
						Reference: Struve, F.G.W.	Mensurae		
Micrometricae		Petropoli;				1837.			
1836.59		134.7		1.44				6	
STF	10	A				2			
						Reference: Struve, F.G.W.	Mensurae		
Micrometricae		Petropoli;				1837.			
1837.47		136.8						1	
DA	04	A				4			
						Reference: Daves, W.R.	Mem. R. Astron. Soc.		
19, 191; 1851.									
1837.55		140.0		1.42				5	
STF	10	A				2			
						Reference: Struve, F.G.W.	Mensurae		
Micrometricae		Petropoli;				1837.			
1838.44		143.2		1.44				4	
STF	10	A				2			
						Reference: Struve, F.G.W.	Mensurae		
Micrometricae		Petropoli;				1837.			
1839.51		147.8		1.54				2	
GLL	10	A				4			
						Reference: Galle, G.	Beob. K. Sternw.		
Berlin 1, 142; 1840.									
1839.53		144.3		1.60				1	
DA	07	A				4			
						Reference: Daves, W.R.	Mem. R. Astron. Soc.		
35, 137; 1867.									
1839.75		142.2		1.31				1	
CHL	12	A				2			
						Reference: Challis, J.	Cambridge Obs. 24,		
Pt. 1; 1908.									
1840.57		147.8		1.66				3	
DA	07	A				4			
						Reference: Daves, W.R.	Mem. R. Astron. Soc.		

35, 137; 1867.					
1840.68	145.2	1.53			1
STF	15	A	4		
			Reference: Struve, F.G.W.	Pulkova Observations	
9; 1878.					
1840.82	151.7	1.56			5
STT	15	A	4		
			Reference: Struve, O.	Pulkova Observations	
9; 1878.					
1841.56	152.3	1.60			7
MAD	10	A	4		
			Reference: Madler, J.	Dorpat Observations	
9, 47; 1842.					
1841.58	150.3	1.66			3
DA	07	A	4		
			Reference: Daves, W.R.	Mem. R. Astron. Soc.	
35, 137; 1867.					
1841.66	148.8	1.57			6
KAI	06	A	2		
			Reference: Kaiser, F.	Astron. Nachr. 64,	
97; 1865.					
1842.37	153.3				1
DA	07	A	4		
			Reference: Daves, W.R.	Mem. R. Astron. Soc.	
35, 137; 1867.					
1842.52	157.0	1.84			8

B Fit di una funzione lineare nei suoi parametri

Si hanno dei dati sperimentali (\vec{x}_i, z_i) , con $i = 1, \dots, N$, dove $\vec{x} \in R_n$ che si vogliono fittare con una funzione del tipo:

$$z(\vec{x}) = \sum_{k=1}^m a_k f_k(\vec{x}) \quad (45)$$

cioè con una funzione che è una funzione lineare nei parametri a_1, a_2, \dots, a_m , di m funzioni f_k di n variabili indipendenti \vec{x} .

Questa è la generalizzazione del caso di un fit polinomiale $y(x) = \sum a_k x^{k-1}$.

In questo caso, la probabilità di effettuare N osservazioni z_i con deviazione standard σ_i corrispondenti ai valori \vec{x} è:

$$P(a_k) = \left[\prod_i \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \right] \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_i \left(\frac{z_i - \sum_{k=1}^m a_k f_k(\vec{x}_i)}{\sigma_i} \right)^2 \right\} \quad (46)$$

Per massimizzare la probabilità occorre minimizzare l'esponente dell'esponenziale, detto χ^2 :

$$\chi^2 = \sum_i \left(\frac{z_i - \sum_{k=1}^m a_k f_k(\vec{x}_i)}{\sigma_i} \right)^2 \quad (47)$$

Si deriva il χ^2 rispetto ai parametri a_k e si pongono queste derivate uguali a zero.

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial a_l} = -2 \sum_i \frac{f_l(\vec{x}_i)}{\sigma_i} \left(\frac{z_i - \sum_{k=1}^m a_k f_k(\vec{x}_i)}{\sigma_i} \right) = 0 \quad (48)$$

Si ottiene così un sistema di m equazioni nelle m incognite a_k .

$$\sum_i \frac{f_l(\vec{x}_i)}{\sigma_i^2} z_i = \sum_{k=1}^m a_k \sum_i \frac{f_l(\vec{x}_i) f_k(\vec{x}_i)}{\sigma_i^2} \quad (49)$$

Questo sistema può essere riscritto in forma matriciale come:

$$\beta = \alpha \mathbf{a} \quad (\beta_k = \alpha_{kl} a_l) \quad (50)$$

dove:

$$\beta_k = \sum_i \frac{f_k(\vec{x}_i)}{\sigma_i^2} z_i \quad e \quad \alpha_{kl} = \sum_i \frac{f_l(\vec{x}_i) f_k(\vec{x}_i)}{\sigma_i^2} \quad (51)$$

La matrice α è una matrice simmetrica.

Per risolvere l'equazione matriciale nelle incognite a_k si può moltiplicare entrambi i membri per una matrice ϵ , $\epsilon \beta = \epsilon \alpha \mathbf{a}$, tale che $\epsilon \alpha = \mathbf{1}$. ϵ è la matrice inversa di α : $\epsilon = \alpha^{-1}$.

Per cui:

$$\mathbf{a} = \alpha^{-1} \beta \quad \left(a_l = \alpha_{lk}^{-1} \beta_k = \alpha_{lk}^{-1} \sum_i \frac{f_k(\vec{x}_i)}{\sigma_i^2} z_i \right) \quad (52)$$

Errore sui parametri:

La varianza $\sigma_{a_l}^2$ di ogni parametro a_l è la somma della varianza σ_i^2 di ciascun dato z_i per il quadrato dell'effetto che ciascun dato produce sulla determinazione del parametro a_l .

$$\sigma_{a_i}^2 = \sum_i \sigma_i^2 \left(\frac{\partial a_i}{\partial z_i} \right)^2 \quad (53)$$

In generale, la covarianza è data da:

$$\sigma_{a_i a_j}^2 = \sum_i \sigma_i^2 \frac{\partial a_i}{\partial z_i} \frac{\partial a_j}{\partial z_i} \quad (54)$$

che in generale non sarà uguale a zero.

Sapendo che

$$\frac{\partial a_l}{\partial z_i} = \sum_{k=1}^m \alpha_{lk}^{-1} \frac{f_k(\vec{x}_i)}{\sigma_i^2} \quad (55)$$

e sostituendo nell'espressione della covarianza:

$$\begin{aligned} \sigma_{a_i a_j}^2 &= \sum_i \sigma_i^2 \sum_k \alpha_{lk}^{-1} \frac{f_k(\vec{x}_i)}{\sigma_i^2} \sum_p \alpha_{jp}^{-1} \frac{f_p(\vec{x}_i)}{\sigma_i^2} = \\ &= \sum_k \alpha_{lk}^{-1} \sum_p \alpha_{jp}^{-1} \sum_i \frac{f_k(\vec{x}_i) f_p(\vec{x}_i)}{\sigma_i^2} = \\ &= \sum_k \alpha_{lk}^{-1} \sum_p \alpha_{jp}^{-1} \alpha_{pk} = \\ &= \sum_k \alpha_{lk}^{-1} 1_{jk} = \alpha_{lj}^{-1} \end{aligned} \quad (56)$$

C Moti planetari: equazione di Keplero

La 2^a legge di Keplero permette di calcolare la posizione di un pianeta nella sua orbita in qualunque istante, una volta che siano noti: il semiasse maggiore, a , l'eccentricità, e , il tempo del passaggio dal perielio, τ , e il periodo orbitale, T . Sia P la posizione del pianeta nell'istante di tempo t , vedi Fig.11, sulla traiettoria ellittica in cui il Sole, S , occupa uno dei fuochi e r la distanza PS .

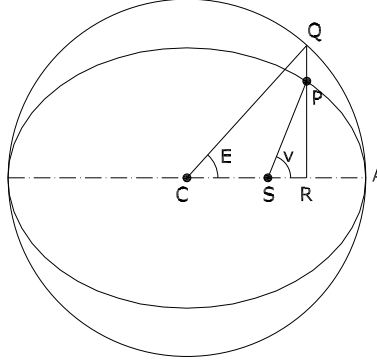


Figura 11: Orbita ellittica e cerchio ausiliario.

Si definisce *anomalia vera* la coordinata angolare, $v = \widehat{PSA}$, del pianeta rispetto al Sole misurata a partire dal perielio, A . Il cerchio che ha per diametro l'asse maggiore dell'orbita si chiama *cerchio ausiliario*. Sia R la proiezione di P sull'asse maggiore. Sia Q l'intersezione tra il cerchio ausiliario e il prolungamento della perpendicolare da P all'asse maggiore, l'angolo $E = \widehat{ACQ}$ è detto *anomalia eccentrica*. Per le proprietà dell'ellisse si ha che $PR/QR = \sqrt{1 - e^2}$. Essendo $PR = r \sin v$ e $QR = a \sin E$, si ha:

$$r \sin v = a \sqrt{1 - e^2} \sin E \quad (57)$$

Inoltre: $SR = r \cos v$, ma anche $SR = CR - CS$, quindi:

$$r \cos v = a \cos E - ae \quad (58)$$

Sommando quadraticamente le due equazioni precedenti si ottiene:

$$r = a(1 - e \cos E) \quad (59)$$

È utile mettere in relazione E con v . Con un po' di algebra, utilizzando le ultime due formule per eliminare r , si ottiene:

$$\tan \frac{v}{2} = \left(\frac{1+e}{1-e} \right)^{\frac{1}{2}} \tan \frac{E}{2} \quad (60)$$

L'area del settore di orbita ASP è data da:

$$A(t) = \frac{\pi ab(t - \tau)}{T} \quad (61)$$

La grandezza:

$$M = \frac{2\pi}{T}(t - \tau) \quad (62)$$

viene detta *anomalia media*, per cui:

$$A(t) = \frac{1}{2}abM \quad (63)$$

Adesso, si vuole esprimere l'area ASP in funzione dell'anomalia eccentrica. Con semplici passaggi si ottiene:

$$A(t) = \frac{1}{2}ab(E - e \sin E) \quad (64)$$

da cui

$$M = E - e \sin E = \frac{2\pi}{T}(t - \tau) \quad (65)$$