

# Perturbazioni dipendenti dal tempo

## 1 Introduzione

Quando l'hamiltoniana dipende dal tempo, non esistono ovviamente soluzioni stazionarie — e quindi in particolare stati legati con energia definita — e ci dobbiamo quindi basare sull'equazione di Schrödinger temporale. Salvo pochissimi casi in cui l'equazione si può risolvere esattamente (come quello della risonanza magnetica), il problema è in generale molto difficile, ma si può trattare con dei metodi approssimati nei tre casi seguenti.

1) *Approssimazione istantanea.* Supponiamo che l'hamiltoniana passi da  $H_0$  a  $H_0 + H_1$  in un tempo molto breve rispetto ai tempi caratteristici di evoluzione del sistema. Possiamo allora fare l'approssimazione di un cambiamento istantaneo, per esempio al tempo  $t = 0$ , per cui l'hamiltoniana si possa scrivere come  $H(t) = H_0 + \theta(t)H_1$ , dove  $\theta(t)$  è la funzione a gradino. Si suppone anche che lo stato del sistema non cambi improvvisamente a  $t = 0$ , ma si evolva in modo continuo, e si possa quindi scrivere  $|\psi(0+)\rangle = |\psi(0-)\rangle$ . In altre parole, del vettore di stato  $|\psi(t)\rangle$  cambierà la legge di evoluzione da  $t < 0$  a  $t > 0$ , ma il ket  $|\psi(0)\rangle$  sarà ben definito e rappresenterà quindi lo stato iniziale per la successiva evoluzione per  $t > 0$ .

2) *Approssimazione adiabatica.* Supponiamo che l'hamiltoniana  $H(t)$  varii col tempo in modo molto lento rispetto ai tempi propri del sistema. Si può allora pensare che in un intervallo di tempo intermedio  $\Delta t$  l'hamiltoniana si possa considerare costante, in modo che abbiano senso fisico le soluzioni dell'equazione agli autovalori

$$H(t)|\psi_E(t)\rangle = E(t)|\psi_E(t)\rangle.$$

Si può dimostrare che se  $H(t)$  varia molto lentamente, le probabilità di transizione fra un livello e un altro sono trascurabili, per cui il problema si riduce a un problema quasi stazionario, in cui cioè le energie dei livelli sono ben definite e variano lentamente col tempo.

3) *Metodo perturbativo.* Il caso intermedio, in cui cioè la variazione di  $H(t)$  non è né molto rapida né molto lenta, può anch'esso essere trattato in modo approssimato, se queste variazioni sono piccole. Questo è il caso fisicamente più interessante e di esso ci occuperemo in dettaglio nel seguito.

Supponiamo allora che l'hamiltoniana  $H(t)$  si possa separare nel seguente modo:

$$(1) \quad H(t) = H_0 + H_1(t),$$

dove  $H_0$  è indipendente dal tempo e di essa si conoscono le soluzioni stazionarie

$$(2) \quad H_0|u_n\rangle = E_n|u_n\rangle,$$

mentre  $H_1(t)$  è piccolo rispetto ad  $H_0$ , in modo che si possa trattare come una perturbazione. Per la consistenza del metodo dobbiamo anche supporre che valga l'*ipotesi adiabatica*, rappresentata dalle condizioni

$$(3) \quad \lim_{t \rightarrow \pm\infty} H_1(t) = 0.$$

Il vettore di stato  $|\psi(t)\rangle$  deve obbedire all'equazione di Schrödinger temporale

$$(4) \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H(t) |\psi(t)\rangle.$$

Sviluppiamo  $|\psi(t)\rangle$  nella base degli  $|u_n\rangle$  nel seguente modo:

$$(5) \quad |\psi(t)\rangle = \sum_n a_n(t) e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} |u_n\rangle,$$

dove il fattore esponenziale è stato introdotto in modo che, se la perturbazione  $H_1$  è nulla, i coefficienti  $a_n$  siano indipendenti dal tempo. Infatti se  $H = H_0$  i termini della (5), e quindi l'intera serie, sono soluzioni della (4) con  $a_n$  costanti. Quindi la dipendenza dal tempo degli  $a_n(t)$  viene a dipendere soltanto dall'interazione.

In particolare, secondo l'ipotesi (3), gli  $a_n$  diventano costanti per  $t \rightarrow \pm\infty$ , quando  $H_1$  si annulla. Per  $t \rightarrow -\infty$ , cioè prima che inizi la perturbazione, gli  $a_n(-\infty)$  rappresentano le costanti iniziali del problema, che si considerano note. Per semplicità supporremo che lo stato iniziale sia un autostato dell'energia, che indicheremo con  $|u_i\rangle$ , con energia  $E_i$ , e prenderemo

$$(6) \quad a_n(-\infty) = \delta_{ni}.$$

Dopo che l'interazione ha cominciato ad agire, i coefficienti  $a_n(t)$  con  $n \neq i$  saranno in generale diversi da zero e questo ci dice che si hanno delle transizioni dallo stato iniziale verso altri stati. In particolare per  $t \rightarrow +\infty$ , cioè dopo che la perturbazione è cessata,  $|a_n(+\infty)|^2$ , per  $n \neq i$ , rappresenta la probabilità<sup>1</sup> di transizione dallo stato iniziale  $i$  allo stato finale  $n$ . I coefficienti  $a_n(+\infty)$  vengono invece chiamati *ampiezze di transizione*.

Mettendo lo sviluppo (5) nell'equazione (4) si ottiene

$$(7) \quad \sum_n [i\hbar \dot{a}_n(t) + E_n a_n(t)] e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} |u_n\rangle = \sum_n a_n(t) e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} [H_0 + H_1(t)] |u_n\rangle.$$

Utilizzando la (2) si vede che i termini con  $E_n$  al primo e al secondo membro si cancellano. Cambiando poi da  $n$  a  $m$  l'indice di sommatoria e moltiplicando scalarmente per  $|u_n\rangle$  si può risolvere l'equazione per  $\dot{a}_n(t)$  e si ottiene

$$(8) \quad \dot{a}_n(t) = \frac{1}{i\hbar} \sum_m a_m(t) e^{i\omega_{nm}t} \langle u_n | H_1(t) | u_m \rangle,$$

dove si è introdotta la *frequenza di Bohr*

$$(9) \quad \omega_{nm} = \frac{E_n - E_m}{\hbar}.$$

Le (8) formano un sistema di infinite equazioni differenziali accoppiate del primo ordine in  $t$  per i coefficienti  $a_n(t)$ , che è del tutto equivalente all'equazione di Schrödinger (4). Questo sistema si risolve facilmente in modo iterativo, utilizzando la teoria delle perturbazioni che sarà descritta nel prossimo paragrafo.

---

<sup>1</sup>Si suppone che il ket  $|\psi(t)\rangle$  sia normalizzato, per cui si ha  $\sum_n |a_n(t)|^2 = 1$ . Allora  $|a_n(t)|^2$  rappresenta la probabilità di trovare il sistema nello stato  $|u_n\rangle$  al tempo  $t$ .

## 2 Ampiezza di transizione al primo ordine

La teoria delle perturbazioni che si usa per una hamiltoniana della forma (1) è analoga a quella per il caso stazionario, con la differenza che in questo caso le quantità di interesse sono le ampiezze di transizione  $a_n(t)$ , anziché gli autovalori e gli autovettori dell'energia. Anche in questo caso è utile introdurre un parametro  $\lambda$  compreso fra 0 e 1 e una nuova hamiltoniana

$$(10) \quad H(\lambda, t) = H_0 + \lambda H_1(t).$$

Avremo quindi dei vettori di stato  $|\psi(\lambda, t)\rangle$  e dei coefficienti  $a_n(\lambda, t)$  dipendenti da  $\lambda$ . Questi coefficienti obbediscono alle equazioni

$$(11) \quad \dot{a}_n(\lambda, t) = \frac{1}{i\hbar} \sum_m a_m(\lambda, t) e^{i\omega_{nm}t} \langle u_n | \lambda H_1(t) | u_m \rangle,$$

che estendono le (8).

Supporremo che i ket  $|\psi(\lambda, t)\rangle$  e i coefficienti  $a_n(\lambda, t)$  si possano estendere analiticamente da  $\lambda = 0$  a  $\lambda = 1$  e che valga quindi lo sviluppo in serie di potenze

$$(12) \quad a_n(\lambda, t) = \sum_{r=0}^{\infty} a_n^{(r)}(t) \lambda^r.$$

Le ampiezze di transizione  $a_n(t)$  che ci interessano sono date dai coefficienti  $a_n(\lambda, t)$  per  $\lambda = 1$  e quindi dalla serie perturbativa (12) con  $\lambda = 1$ . Inserendo lo sviluppo (12) nella (11) e uguagliando i coefficienti delle stesse potenze di  $\lambda$  si ottiene:

$$(13) \quad \dot{a}_n^{(0)}(t) = 0,$$

$$(14) \quad \dot{a}_n^{(r)}(t) = \frac{1}{i\hbar} \sum_m a_m^{(r-1)}(t) e^{i\omega_{nm}t} \langle u_n | H_1(t) | u_m \rangle, \quad r \geq 1.$$

La (13) dice che gli  $a_n^{(0)}$  sono indipendenti dal tempo. D'altra parte, secondo la (12), essi sono uguali ai coefficienti  $a_n(\lambda, t)$  per  $\lambda = 0$ , ovvero in assenza della perturbazione, e devono quindi coincidere con le costanti iniziali  $a_n(-\infty)$ . Con la scelta della (6) avremo allora

$$(15) \quad a_n^{(0)} = \delta_{ni}.$$

Passiamo ora al primo ordine. Dalla (14) per  $r = 1$  e utilizzando la (15) si ottiene

$$(16) \quad \dot{a}_n^{(1)}(t) = \frac{1}{i\hbar} e^{i\omega_{ni}t} \langle u_n | H_1(t) | u_i \rangle.$$

Questa si può integrare rispetto a  $t$  e si ottiene

$$(17) \quad a_n^{(1)}(t) = \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^t \langle u_n | H_1(t') | u_i \rangle e^{i\omega_{ni}t'} dt',$$

dove la costante d'integrazione si è scelta facendo partire l'integrale da  $t = -\infty$  e utilizzando la condizione che  $a_n^{(1)}(t)$  si deve annullare per  $t \rightarrow -\infty$ , poiché esso è del primo ordine in  $H_1(t)$ , che non ha ancora cominciato ad agire<sup>2</sup>.

<sup>2</sup>Osserviamo che il coefficiente  $a_n(t)$  può dipendere solo dalle costanti iniziali e dall'interazione  $H_1(t')$  per  $t' \leq t$ , per il principio di causalità. Quindi per  $t \rightarrow -\infty$  si ha:  $a_n(-\infty) = a_n^{(0)}$  e  $a_n^{(r)}(-\infty) = 0$  per  $r > 0$ .

Facendo tendere  $t$  a  $+\infty$  e aggiungendo il termine di ordine zero (15), si ottiene per l'ampiezza di transizione completa fino al primo ordine la seguente espressione:

$$(18) \quad a_n(+\infty) \simeq \delta_{ni} + \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle u_n | H_1(t) | u_i \rangle e^{i\omega_{ni}t} dt,$$

Osserviamo che l'integrale rappresenta la trasformata di Fourier dell'elemento di matrice della transizione dallo stato  $i$  allo stato  $n$ , calcolata alla frequenza di Bohr  $\omega_{ni}$  della transizione. Perché l'espressione (18) abbia senso è necessario che l'integrale converga, ovvero che l'elemento di matrice  $\langle u_n | H_1(t) | u_i \rangle$  ammetta la trasformata di Fourier. Questa condizione viene assicurata dall'ipotesi adiabatica (3). Si osserva inoltre che se la perturbazione  $H_1(t)$  dura un tempo finito, per esempio fra  $t = 0$  e  $t = t_0$ , l'integrale viene limitato a questo intervallo, poiché al di fuori l'integrando è nullo. Allora il coefficiente  $a_n^{(1)}(t)$  della (17) risulta nullo per  $t < 0$  e costante per  $t > t_0$ .

Limitandosi al primo ordine perturbativo, la probabilità di transizione dallo stato  $i$  allo stato  $n$ , dopo che è cessata la perturbazione, è data da<sup>3</sup>

$$(19) \quad P_{i \rightarrow n} \simeq |a_n^{(1)}(+\infty)|^2,$$

mentre la probabilità di permanenza nello stato  $i$  risulta

$$(20) \quad P_i \simeq 1 - \sum_{n \neq i} |a_n^{(1)}(+\infty)|^2.$$

### 3 Caso di una perturbazione periodica

Consideriamo il caso di una perturbazione sinusoidale che agisce per un tempo finito e sia

$$(21) \quad H_1 = \begin{cases} 2V_1 \cos \omega_0 t, & 0 \leq t \leq t_0 \\ 0, & t < 0, \quad t > t_0 \end{cases}$$

dove  $V_1$  è un potenziale perturbatore indipendente dal tempo. Il caso di una perturbazione costante nell'intervallo  $0 < t < t_0$  si può ottenere come caso particolare per  $\omega_0 = 0$ . L'ampiezza

---

<sup>3</sup>Se la serie perturbativa (12) viene troncata, per es. al primo ordine, la condizione di normalizzazione  $\sum_n |a_n|^2 = 1$  non è più soddisfatta. La probabilità di transizione va allora definita come

$$P_{i \rightarrow n} = \frac{|a_n|^2}{\sum_m |a_m|^2},$$

dove  $a_n$  sta per  $a_n(+\infty)$ . Sviluppando fino ai termini del secondo ordine si ottiene, per  $n \neq i$ :

$$P_{i \rightarrow n} \simeq \frac{|a_n^{(1)}|^2}{|1 + a_i^{(1)}|^2 + \sum_{m \neq i} |a_m^{(1)}|^2} = \frac{|a_n^{(1)}|^2}{1 + 2\text{Re } a_i^{(1)} + \sum_m |a_m^{(1)}|^2} \simeq |a_n^{(1)}|^2$$

Per la probabilità di permanenza nello stato  $i$  si ha invece

$$P_i = \frac{|a_i|^2}{\sum_n |a_n|^2} \simeq \frac{|1 + a_i^{(1)}|^2}{|1 + a_i^{(1)}|^2 + \sum_{n \neq i} |a_n^{(1)}|^2} = \frac{1 + 2\text{Re } a_i^{(1)} + |a_i^{(1)}|^2}{1 + 2\text{Re } a_i^{(1)} + \sum_n |a_n^{(1)}|^2} \simeq 1 - \sum_{n \neq i} |a_n^{(1)}|^2.$$

di transizione al primo ordine per  $t > t_0$  si ricava dalla (17) e risulta

$$\begin{aligned}
 (22) \quad a_n^{(1)} &= \frac{1}{i\hbar} \langle u_n | V_1 | u_i \rangle \int_0^{t_0} (e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}) e^{i\omega_{ni} t} dt \\
 &= \frac{1}{i\hbar} \langle u_n | V_1 | u_i \rangle \left[ \frac{e^{i(\omega_{ni} + \omega_0)t_0} - 1}{i(\omega_{ni} + \omega_0)} + \frac{e^{i(\omega_{ni} - \omega_0)t_0} - 1}{i(\omega_{ni} - \omega_0)} \right] \\
 &= \frac{2}{i\hbar} \langle u_n | V_1 | u_i \rangle \left[ e^{i(\omega_{ni} + \omega_0)\frac{t_0}{2}} \frac{\sin [(\omega_{ni} + \omega_0)t_0/2]}{\omega_{ni} + \omega_0} \right. \\
 &\quad \left. + e^{i(\omega_{ni} - \omega_0)\frac{t_0}{2}} \frac{\sin [(\omega_{ni} - \omega_0)t_0/2]}{\omega_{ni} - \omega_0} \right]
 \end{aligned}$$

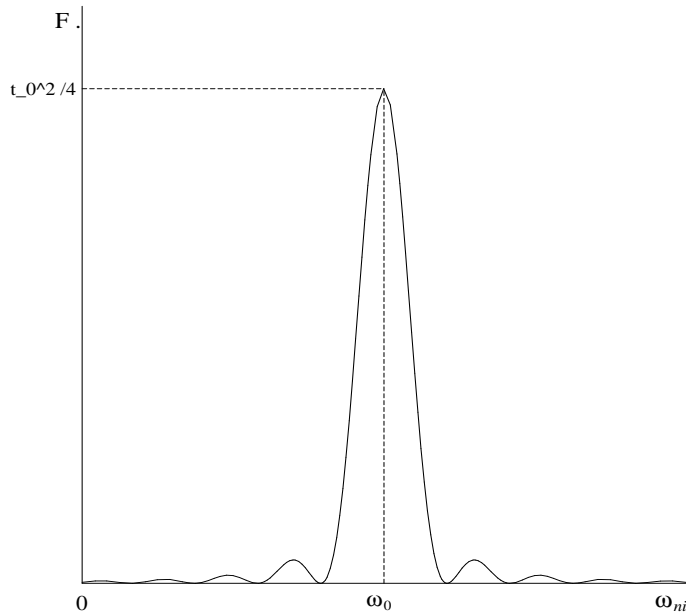
Si osserva che le frazioni nella parentesi quadra presentano un massimo, che diventa molto pronunciato per  $t_0$  grande, rispettivamente per  $\omega_{ni} = -\omega_0$  e per  $\omega_{ni} = +\omega_0$ . La relazione  $\omega_{ni} = -\omega_0$  equivale per la (9) a  $E_n = E_i - \hbar\omega_0$  e corrisponde alla transizione dal livello superiore  $E_i$  al livello inferiore  $E_n$  con l'emissione di un quanto di energia  $\hbar\omega_0$ . Il secondo massimo si ha per  $\omega_{ni} = +\omega_0$ , ovvero per  $E_n = E_i + \hbar\omega_0$ , e corrisponde alla transizione dal livello inferiore  $E_i$  al livello superiore  $E_n$ , con l'assorbimento di un quanto  $\hbar\omega_0$ .

La probabilità di transizione è data da  $|a_n^{(1)}|^2$ , che si può approssimare prendendo solo il modulo quadro del termine dominante. Si ha allora

$$(23) \quad P_{i \rightarrow n} \simeq \frac{4}{\hbar^2} |\langle u_n | V_1 | u_i \rangle|^2 \frac{\sin^2 [(\omega_{ni} \pm \omega_0)t_0/2]}{(\omega_{ni} \pm \omega_0)^2},$$

dove i segni  $+$  e  $-$  corrispondono rispettivamente ai casi dell'emissione e dell'assorbimento, come si è detto sopra.

Discutiamo in particolare il caso delle transizioni con assorbimento. La frazione  $F(\omega_{ni}, t_0) = \frac{\sin^2 [(\omega_{ni} - \omega_0)t_0/2]}{(\omega_{ni} - \omega_0)^2}$  è riportata nel grafico qui sotto in funzione di  $\omega_{ni}$ , per  $\omega_{ni} > 0$ .



Si vede che il grafico presenta un grosso picco per  $\omega_{ni} = \omega_0$ , di altezza uguale a  $t_0^2/4$  e semilarghezza alla base —corrispondente alla distanza fra  $\omega_0$  e il primo zero— pari a  $2\pi/t_0$ . Al crescere di  $t_0$  questo picco diventa più alto e più stretto e in esso si concentra praticamente l'intera probabilità di transizione. Indicando con  $\Delta E$  un piccolo intervallo di energia degli stati finali (per esempio, nel caso di transizioni atomiche, la distanza fra il livello  $E_n$  e il livello più vicino), si vede che per  $t_0 \simeq (2\pi\hbar)/\Delta E$  si possono avere transizioni solo verso gli stati con energia entro l'intervallo  $\Delta E$  attorno a  $E_n$ . Si dice che in questo caso si ha un fenomeno di *risonanza*. Considerazioni del tutto analoghe valgono per il caso dell'emissione, con il picco di risonanza a  $\omega_{ni} = -\omega_0$ .

Su questo punto vogliamo fare un'altra osservazione importante. La relazione fra  $t_0$  e  $\Delta E$  si può scrivere nella forma

$$(24) \quad \Delta E \Delta t \gtrsim 2\pi\hbar,$$

che rappresenta la relazione di indeterminazione fra energia e tempo. Infatti, pensando alla perturbazione  $H_1$  come all'interazione con lo strumento per la misura dell'energia, per l'indeterminazione dell'energia si ha  $\Delta E \gtrsim \hbar\Delta\omega$ , dove  $\Delta\omega$  è la semilarghezza del picco di risonanza, mentre  $\Delta t = t_0$  corrisponde alla durata dell'interazione. Se ne conclude che l'indeterminazione sulla misura di  $E$  è inversamente proporzionale alla durata della misura.

Osserviamo infine che la relazione  $E_n = E_i \pm \hbar\omega_0$ , che vale al picco di risonanza, rappresenta la conservazione dell'energia nei processi di emissione o di assorbimento dal campo periodico di un quanto  $\hbar\omega_0$ . Questa legge di conservazione emerge automaticamente dal formalismo, nel senso che per  $t_0 \rightarrow \infty$  non si possono avere transizioni verso stati che non conservino l'energia. Tuttavia per  $t_0$  finito la conservazione dell'energia non è esatta, ma vale entro i limiti della relazione d'indeterminazione (24).

## 4 Transizioni verso il continuo

Consideriamo il caso di transizioni verso stati finali con energia  $E_n$  nel continuo. Supporremo che sia  $E_n > E_i$  e che si tratti quindi di un processo di assorbimento. In questo caso non ha senso parlare di transizioni verso un singolo stato  $n$ , ma piuttosto verso gli stati entro un dato intervallo di energia. D'altra parte si è visto che l'energia dello stato finale è automaticamente limitata a un intervallo  $\Delta E$ , che tende a zero per  $t_0 \rightarrow \infty$ . Consideriamo allora la probabilità di transizione verso gli stati finali di tutte le possibili energie<sup>4</sup>, che indicheremo con  $W_{i \rightarrow n}(t_0)$ . Questa si otterrà dalla probabilità  $P_{i \rightarrow n}(t_0)$  della (23), sommando su tutti gli stati finali, ovvero integrando sull'energia nel modo seguente:

$$(25) \quad W_{i \rightarrow n}(t_0) = \int P_{i \rightarrow n}(t_0) \rho(E_n) dE_n,$$

dove  $\rho(E) = dN/dE$  rappresenta il numero di stati per unità di intervallo di energia.

Usando l'espressione (23) per  $P_{i \rightarrow n}(t_0)$ , con il segno  $-$  per il caso considerato, si ottiene

$$(26) \quad W_{i \rightarrow n}(t_0) = \frac{4}{\hbar^2} \int |\langle E_n, \alpha_n | V_1 | u_i \rangle|^2 \frac{\sin^2 [(\omega_{ni} - \omega_0)t_0/2]}{(\omega_{ni} - \omega_0)^2} \rho(E_n) dE_n.$$

---

<sup>4</sup>Lo stato finale  $|u_n\rangle = |E_n, \alpha_n\rangle$  dipenderà dall'energia  $E_n$  e da altri parametri indicati complessivamente con  $\alpha_n$ . Qui si intende integrare su  $E_n$ , lasciando  $\alpha_n$  fissato.

Quando  $t_0$  diventa molto grande, l'integrando è dominato dal picco di risonanza della frazione  $F$  che abbiamo discusso nel paragrafo precedente. Nel limite di  $t_0 \rightarrow \infty$  questo picco diventa proporzionale alla delta di Dirac. Per trovare la costante di proporzionalità integriamo su  $\omega_{ni}$  ottenendo:

$$(27) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 [(\omega_{ni} - \omega_0)t_0/2]}{(\omega_{ni} - \omega_0)^2} d\omega_{ni} = \frac{t_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi t_0}{2},$$

dove si è usato il cambiamento di variabile  $x = (\omega_{ni} - \omega_0)t_0/2$ . Si può allora scrivere

$$(28) \quad \frac{\sin^2 [(\omega_{ni} - \omega_0)t_0/2]}{(\omega_{ni} - \omega_0)^2} \xrightarrow{t_0 \rightarrow \infty} \frac{\pi t_0}{2} \delta(\omega_{ni} - \omega_0)$$

e per la (26) si ottiene

$$(29) \quad W_{i \rightarrow n}(t_0) \xrightarrow{t_0 \rightarrow \infty} \frac{2\pi t_0}{\hbar} |\langle u_n | V_1 | u_i \rangle|^2 \rho(E_n),$$

dove s'intende che al secondo membro l'energia  $E_n$  è calcolata alla risonanza, cioè  $E_n = E_i + \hbar\omega_0$ .

La (29) ci mostra che la probabilità di transizione cresce uniformemente e proporzionalmente a  $t_0$ . Conviene allora definire la (*densità di*) *probabilità di transizione per unità di tempo*, che è data da

$$(30) \quad w_{i \rightarrow n} = \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{t_0} W_{i \rightarrow n}(t_0) = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle u_n | V_1 | u_i \rangle|^2 \rho(E_n).$$

Questa formula è di grande importanza per le applicazioni e va sotto il nome di *regola d'oro di Fermi*.

## 5 Ampiezze agli ordini successivi nella rappresentazione d'interazione

Torniamo allo sviluppo perturbativo (12) dell'ampiezza di transizione. Fin qui ci siamo limitati al termine del primo ordine  $a_n^{(1)}$ , ma l'equazione (14) ci permette di calcolare facilmente i termini successivi dello sviluppo. Per fare questo, tuttavia, è conveniente passare alla cosiddetta *rappresentazione d'interazione*, detta anche *rappresentazione di Dirac*. Questa fornisce uno schema per i vettori di stato e le osservabili della meccanica quantistica analogo a quello della rappresentazione di Heisenberg. Esplicitamente si passa dalla consueta rappresentazione di Schrödinger  $S$  a quella di interazione  $I$  operando la seguente trasformazione unitaria, simultaneamente sui vettori *ket* e sugli operatori:

$$(31) \quad |\psi(t)\rangle_I = e^{iH_0 t/\hbar} |\psi(t)\rangle_S$$

$$(32) \quad A_I(t) = e^{iH_0 t/\hbar} A_S e^{-iH_0 t/\hbar}$$

Si riconosce che in assenza della perturbazione  $H_1$  la rappresentazione d'interazione coincide con quella di Heisenberg. In particolare i vettori di stato risulterebbero indipendenti dal tempo e quindi la loro evoluzione viene a dipendere soltanto dall'interazione  $H_1$ . L'equazione del moto risulta infatti

$$(33) \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle_I = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} e^{iH_0 t/\hbar} |\psi(t)\rangle_S = e^{iH_0 t/\hbar} (-H_0 + H) |\psi(t)\rangle_S = H_{1I} |\psi(t)\rangle_I.$$

Torniamo allo sviluppo (5) di  $|\psi(t)\rangle_S$  nella base  $\{|u_n\rangle\}$ . Applicando ad ambo i membri l'operatore  $e^{iH_0t/\hbar}$  si ottiene

$$(34) \quad |\psi(t)\rangle_I = \sum_n a_n(t) |u_n\rangle,$$

da cui si vede che i coefficienti  $a_n(t)$  definiti dalla (5) sono proprio i coefficienti dello sviluppo del vettore di stato nella rappresentazione d'interazione. Mettendo questo sviluppo nella (33) si ottiene per questi coefficienti il sistema di equazioni

$$(35) \quad \dot{a}_n(t) = \frac{1}{i\hbar} \sum_m (H_{1I}(t))_{nm} a_m(t),$$

che coincide con la (8), poiché si ha

$$(36) \quad (H_{1I}(t))_{nm} = \langle u_n | H_{1I}(t) | u_m \rangle = e^{i\omega_{nm}t} \langle u_n | H_{1S}(t) | u_m \rangle.$$

Introducendo lo sviluppo perturbativo (12), si riottengono le equazioni (13) e (14), che riscriviamo nella forma

$$(37) \quad \dot{a}_n^{(r)}(t) = \frac{1}{i\hbar} \sum_m (H_{1I}(t))_{nm} a_m^{(r-1)}(t).$$

Le soluzioni fino al primo ordine sono ancora date dalle (15) e (17), ovvero

$$(38) \quad a_n^{(1)}(t) = \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^t (H_{1I}(t_1))_{ni} dt_1.$$

La (37) si può iterare facilmente e si ottiene

$$(39) \quad a_n^{(2)}(t) = \frac{1}{(i\hbar)^2} \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \sum_m (H_{1I}(t_1))_{nm} (H_{1I}(t_2))_{mi} \\ = \frac{1}{(i\hbar)^2} \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \langle u_n | H_{1I}(t_1) H_{1I}(t_2) | u_i \rangle$$

$$(40) \quad a_n^{(r)}(t) = \frac{1}{(i\hbar)^r} \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{-\infty}^{t_{r-1}} dt_r \langle u_n | H_{1I}(t_1) H_{1I}(t_2) \cdots H_{1I}(t_r) | u_i \rangle.$$

Osserviamo che per i coefficienti  $a_n$  della (34) e per  $t \rightarrow +\infty$  vale la relazione

$$(41) \quad a_n(+\infty) = \langle u_n | \psi(+\infty) \rangle_I = \langle u_n | U_I | u_i \rangle,$$

dove  $U_I = U_I(+\infty, -\infty)$  è l'operatore di evoluzione nella rappresentazione d'interazione e si è usato il fatto che per  $t \rightarrow -\infty$  si ha  $|\psi(-\infty)\rangle_I = |u_i\rangle$ . Allora allo sviluppo perturbativo di  $a_n$  corrisponde il seguente sviluppo perturbativo di  $U_I$ :

$$(42) \quad U_I = \mathbb{1} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{(i\hbar)^r} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{-\infty}^{t_{r-1}} dt_r H_{1I}(t_1) H_{1I}(t_2) \cdots H_{1I}(t_r),$$

che viene chiamata *serie di Dyson*.