Appunti per il corso di Quanti

g.longhi

a.a. 2002-2003

Indice

Capitolo 1

Radiazione termica. La teoria di Planck.

Lo studio della radiazione termica è stato l'ambito nel quale storicamente è stata introdotta l'idea di quantizzazione,dovuta a Planck.

Se si pensa ad una cavità, che sia mantenuta a temperatura costante T, a causa dell'emissione e dell'assorbimento di radiazione elettromagnetica da parte delle pareti avremo un campo elettromagnetico all'interno della cavità in equilibrio termodinamico.

Un foro nella parete apparirà dall'esterno come una porzione di superficie completamente assorbente, ed emetterà una radiazione che dipenderà solo dalla radiazione emessa internamente dalle pareti e quindi, in definitiva, solo dalla cavità.

Questa si può pensare come una realizzazione di un corpo nero, definito come un corpo totalmente assorbente, ma che emette una radiazione dipendente dalla temperatura del corpo.

Si può dimostrare, con una ragionamento termodinamico dovuto a Kirchhoff, che la radiazione nella cavità dipende solo dalla temperatura delle pareti e non dalle loro caratteristiche. È inoltre una radiazione isotropa e non polarizzata.

Più precisamente, se si definisce la densità di energia $u(\nu, T)$ all'interno della cavità, per unità di intervallo di frequenza ν, in modo che

$$u(\nu, T)d\nu \tag{1.1}$$

sia l'energia per unità di volume della radiazione, con frequenza nell'intervallo $(\nu,\ \nu + d\nu)$, l'energia totale per unità di volume sarà data da

$$\mathcal{U}(T) = \int_0^\infty u(\nu, T) d\nu, \tag{1.2}$$

quindi, sia $u(\nu, T)$ che $\mathcal{U}(T)$ sono funzioni universali, nel senso che dipendono solo dalla temperatura e dalla frequenza e non dalla natura della cavità.

Questo fatto, chiamato legge di Kirchhoff, si può dimostrare con il seguente ragionamento termodinamico: consideriamo due cavità A e B diverse tra di loro, ma alla stessa temperatura T. Supponiamo per assurdo che la densità $u(\nu, T)$ sia maggiore in A, nell'intervallo di frequenza $(\nu, \nu + d\nu)$. Se si connette A a B mediante un tubo opaco a tutte le frequenze eccetto che alla frequenza ν, che sia cioè un filtro di colore, avremo un flusso di calore da A a B fino al raggiungimento di un equilibrio, con la temperatura di A più bassa del valore iniziale e quella di B maggiore.

Verrebbe così creata spontaneamente una differenza di temperatura, senza che sia fatto alcun lavoro sul sistema delle due cavità, in contrasto col secondo principio della termodinamica.

Si può concludere che $u(\nu, T)$ è una funzione solo di T e di ν, cioè una funzione universale, e quindi anche $U(T)$, che è quello che si voleva dimostrare.

Si può ora definire un'energia d'irraggiamento $k(\nu, T)$ in modo tale che

$$k(\nu, T) d\Omega (dS \cos\theta) dt d\nu \tag{1.3}$$

sia l'energia della radiazione polarizzata emessa dalla superficie dS nell'angolo solido $d\Omega$ nel tempo dt e nell'intervallo di frequenza $(\nu,\ \nu + d\nu)$. θ è l'angolo formato dalla normale alla superficie e dalla direzione di $d\Omega$.

In modo analogo si definisce l'energia totale irradiata, emessa dalla superficie dS nell'angolo solido $d\Omega$ e nel tempo dt, con qualsiasi frequenza e polarizzazione

$$K(T) = 2 \int_0^\infty k(\nu, T) d\nu, \tag{1.4}$$

dove il fattore 2 è dovuto alla somma sui due stati di polarizzazione.

Si può dimostrare che, all'equilibrio termodinamico, si ha (Kirchhoff)

$$u(\nu, T) = \frac{4\pi}{c} 2k(\nu, T), \tag{1.5}$$

e quindi

$$\mathcal{U}(T) = \frac{4\pi}{c} K(T). \tag{1.6}$$

Per sola via termodinamica si possono dimostrare i risultati che seguono:

1.1 legge di Stefan-Boltzmann.

$$\mathcal{U}(T) = aT^4. \tag{1.7}$$

Questa legge si può esprimere anche in termini dell'energia totale irraggiata dal foro della cavità $E(T)$ per unità di tempo e di superficie, in modo da riferirla ad una quantità direttamente misurabile:

$$\begin{aligned} E(T) \quad &= \textstyle\int_0^\infty d\nu \left[\int_0^{\pi/2} \sin(\theta) d\theta \int_0^{2\pi} d\phi\right] \cos(\theta) \left[\frac{c}{4\pi} u(\nu, T)\right] = \\ &= \tfrac{c}{4\pi} \textstyle\int_{\text{semisfera}} d\Omega \, \cos(\theta) \mathcal{U}(T) = \\ &= \tfrac{c}{4} \mathcal{U}(T) = \tfrac{ca}{4} T^4, \end{aligned} \tag{1.8}$$

cioè

$$E(T) = \sigma T^4, \quad (\sigma = \frac{ca}{4}), \tag{1.9}$$

dove σ è la costante di Stefan-Boltzmann.

Un secondo risultato riguarda la pressione p della radiazione nella cavità:

$$p = \frac{1}{3} \mathcal{U}(T), \tag{1.10}$$

che è l'equazione di stato per la radiazione termica.

1.2 Legge di Wien.

$$u(\nu, T) = \nu^3 f(\frac{\nu}{T}), \tag{1.11}$$

anche questa dedotta per via termodinamica, dove f resta una funzione da determinare.

Da questa si può subito dedurre la legge di Stefan-Boltzmann. Infatti

$$\mathcal{U}(T) = \int_0^\infty d\nu \nu^3 f(\frac{\nu}{T}) = T^4 \int_0^\infty dx x^3 f(x), \tag{1.12}$$

cioè

$$a = \int_0^\infty dx x^3 f(x). \tag{1.13}$$

1.3 Legge dello spostamento di Wien.

Si deduce anch'essa dalla legge di Wien. Questa legge stabilisce la seguente relazione tra la temperatura e la posizione $\lambda_{\rm max}$ del massimo della distribuzione della radiazione in lunghezza d'onda:

$$\lambda_{\rm max} T = \text{costante} \quad (= 0,290 \text{ cm}^\circ K). \tag{1.14}$$

Si ha infatti

$$u(\nu, T) d\nu = \tilde{u}(\lambda, T) d\lambda, \quad (\nu = \frac{c}{\lambda}), \tag{1.15}$$

è

$$\tilde{u}(\lambda, T) = -\frac{c^4}{\lambda^5} f(\frac{c}{\lambda T}). \tag{1.16}$$

Ora, il massimo di $\tilde{u}$ è dato da

$$\frac{c}{\lambda T} f'(\frac{c}{\lambda T}) + 5 f(\frac{c}{\lambda T}) = 0, \tag{1.17}$$

che quindi dipende solo da λT. Quindi, se α è la soluzione dell'equazione (17), si ha

$$\lambda_{\rm max} T = \alpha = \text{costante}. \tag{1.18}$$

Dalla (1.7) e dalla (1.10) si può ricavare l'entropia della radiazione termica

$$S(V,T) = \frac{4a}{3} V T^3, \tag{1.19}$$

dove V è il volume.

1.4 Determinazione della funzione $f(\nu/T)$, teoria di Planck (1900).

Poichè f è indipendente dalla natura delle pareti della cavità, potremo determinarla usando il modello più semplice e cioè un sistema di oscillatori armonici con una distribuzione di frequenza da determinare.

All'equilibrio avremo che la frequenza della radiazione emessa da ogni singolo oscillatore sarà uguale alla frequenza propria dell'oscillatore.

L'energia della radiazione sarà data dall'energia media degli oscillatori $\bar{\epsilon}$ per il numero di oscillatori con frequenza propria nell'intervallo $(\nu, \nu + d\nu)$ per unità di volume.

Questo numero di oscillatori si può calcolare contando i modi normali di un'onda stazionaria nella cavità, assimilandola, per semplicità, ad un cubo di lato L. Infatti, questo numero sarà lo stesso del numero di oscillatori che, tramite il processo di assorbimento e riemissione, sono in equilibrio radiativo con la radiazione nella cavità.

Ponendo condizioni di periodicità alle pareti (analisi di Fourier) avremo che le componenti k_i $(i = 1, 2, 3)$ del vettore di propagazione $\vec{k}$ della radiazione soddisfano la condizione

$$k_i L = 2\pi n_i, \quad n_i = 1, 2, 3, ... \tag{1.20}$$

cioè

$$\Delta k_1 \Delta k_2 \Delta k_3 = (2\pi/L)^3 \Delta n_1 \Delta n_2 \Delta n_3, \tag{1.21}$$

dove $L^3 = V$.

Quindi, il numero di oscillatori nel volume V con frequenza nell'intervallo $(\nu, \nu + d\nu)$ e con vettore di propagazione orientato nell'angolo solido $d\Omega$ è

$$dN = \frac{V}{8\pi^3} k^2 dk d\Omega. \tag{1.22}$$

Poichè la radiazione è isotropa, possiamo integrare sull'angolo solido e, poichè non è polarizzata, possiamo sommare sui due stati di polarizzazione

$$dN = 2\frac{V}{8\pi^3} 4\pi k^2 dk, \tag{1.23}$$

o anche, essendo $k = \frac{2\pi}{c}\nu$

$$dN = \frac{V}{\pi^2}(\frac{2\pi}{c})^3 \nu^2 d\nu. \tag{1.24}$$

Infine si ha per la densità di energia

$$u(\nu, T) = \bar{\epsilon}\frac{dN}{V d\nu} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\bar{\epsilon}, \tag{1.25}$$

dove $\bar{\epsilon}$ è, come già detto, l'energia media degli oscillatori con frequenza nell'intervallo $(\nu, \nu + d\nu)$.

Se ora si applica la meccanica statistica classica, si ha, per l'energia media di un oscillatore alla temperatura T,

$$\bar{\epsilon} = kT, \tag{1.26}$$

dove k è la costante di Boltzmann ($k \simeq 1,38\ 10^{-16} \text{erg}^\circ K$);
(è anche $k = R/N_A$, dove R è la costante dei gas e N_A è il numero di Avogadro, $R = 8,31 J/(^\circ K\text{mole})$, $N_A = 6,022\ 10^{23}\text{mole}^{-1}$).

La (1.26) implica

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT, \tag{1.27}$$

che è la legge di Rayleigh-Jeans. La (1.27) è in accordo con la legge di Wien, eq.(1.11), e riproduce i risultati sperimentali solamente per piccole frequenze.

Il risultato (1.27) è in contraddizione con la legge di Stefan-Boltzamann, infatti la $\mathcal{U}(T)$ risulta infinita.

Se invece, seguendo Planck, si pone, per l'energia dei singoli oscillatori

$$\epsilon = n\epsilon_\circ, \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{1.28}$$

dove $\epsilon_\circ$ resta da determinare, e si calcola il valore medio $\bar{\epsilon}$ con il peso statistico di Boltzmann

$$\bar{\epsilon} = \sum_{n\geq 0} n\epsilon_\circ e^{-\beta n\epsilon_\circ} / \left(\sum_{n\geq 0} e^{-\beta n\epsilon_\circ}\right), \tag{1.29}$$

dove $\beta = \frac{1}{kT}$, si ha

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon} = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln\left(\sum_{n\geq 0} e^{-\beta\epsilon_\circ}\right) &= -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln\left(\sum_{n\geq 0}\left(e^{-\beta\epsilon_\circ}\right)^n\right) = \\ &= -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln\frac{1}{1-e^{-\beta\epsilon_\circ}} = \frac{\partial}{\partial\beta}\ln(1-e^{-\beta\epsilon_\circ}) = \\ &= \frac{\epsilon_\circ e^{-\beta\epsilon_\circ}}{1-e^{-\beta\epsilon_\circ}} = \frac{\epsilon_\circ}{e^{\beta\epsilon_\circ}-1}, \end{aligned} \tag{1.30}$$

cioè

$$\bar{\epsilon} = \frac{\epsilon_\circ}{e^{\beta\epsilon_\circ}-1}. \tag{1.31}$$

Ora, per la legge di Wien, occorre porre

$$\epsilon_\circ = h\nu, \tag{1.32}$$

dove h è una costante con le dimensioni di un'azione (erg sec).

Con la posizione (32) si ha infatti

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}, \tag{1.33}$$

in accordo con la legge di Wien.

Il limite termodinamico (classico) si otterrebbe per $\epsilon_\circ \to 0$; tuttavia, in questo limite si otterrebbe nuovamente la legge di Rayleigh-Jeans, che è sbagliata per frequenze arbitrarie. Viceversa, con un valore di h finito si ottiene accordo con i risultati sperimentali.

Questo valore è

$$h \simeq 6,63\ 10^{-27}\text{erg sec}, \quad \hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,0545\ 10^{-27}\text{erg sec}. \tag{1.34}$$

Nel limite di basse frequenze si ha

$$\frac{h\nu}{kT} \ll 1, \quad u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT, \tag{1.35}$$

di ritrova cioè la legge di Rayleigh-Jeans (1.27) invece nel limite di alte frequenze si ha

$$\frac{h\nu}{kT} \gg 1, \quad u(\nu, T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} e^{-\frac{h\nu}{kT}}, \tag{1.36}$$

che era già stata ottenuta da Wien.

La formula di Planck (1.33) non è più in contraddizione con le legge di Stefan-Boltzmann e permette di calcolare la costante σ:

$$\sigma = \frac{ca}{4}, \quad \text{dove} \quad \mathcal{U}(T) = aT^4, \tag{1.37}$$

$$\mathcal{U}(T) = \int_0^\infty \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}-1}} d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \left(kT/h\right)^4 \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1}. \tag{1.38}$$

Poichè

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}, \tag{1.39}$$

si ha

$$\mathcal{U}(T) = \frac{8\pi^5 k^4}{15 c^3 h^3} T^4, \tag{1.40}$$

da cui

$$\sigma = \frac{\pi^2 k^4}{60 c^2 \hbar^3} = 5,67\ 10^{-5} \frac{\text{erg}}{\text{cm}^2\text{sec}} (^\circ K)^4. \tag{1.41}$$

Capitolo 2

Effetto fotoelettrico. Teoria di Einstein.

I principali fatti sperimentali che riguardano l'effetto fotoelettrico sono i seguenti:

1)-esiste una frequenza di soglia $\nu_\circ$, che dipende dalla natura del metallo irraggiato.

2)-La velocità degli elettroni emessi varia tra 0 ed un massimo, il quale dipende dalla frequenza ν, ma non dipende dall'intensità della radiazione.

3)-Il numero degli elettroni emessi (per cm^2 e per sec), per una data frequenza ν della radiazione incidente, è proporzionale all'intensità della radiazione.

2.1 Modello classico.

Si può ammettere che alla superficie del metallo vi sia un doppio strato di cariche che determina una barriera di potenziale e che gli elettroni siano praticamente liberi all'interno del metallo (tipicamente un metallo alcalino). Per estrarre un elettrone dal metallo sarà perciò necessario un certo lavoro $w_\circ$, che dipenderà dalla natura del metallo, chiamato lavoro di estrazione.

Se si ammette che l'energia incidente sia uniformemente distribuita sulla superficie del metallo, dovremmo avere come risultato che occorra un certo tempo affinchè un singolo elettrone accumuli l'energia sufficiente per superare la barriera di potenziale ed essere emesso.

Si può fare una stima grossolana del tempo necessario, ammettendo che l'energia che incide su di un cm^2 di superficie del metallo sia pari, ad esempio, ad 1 erg/sec.

Se si considera ad esempio la luce del doppietto del sodio avremo che la frequenza è $\nu \simeq 0,5\ 10^{15}\text{sec}^{-1}$. A questa frequenza corrisponde un lavoro di estrazione che le misure indicano in circa 2 eV (eV = elettronvolt $= 1,6\ 10^{-12}$ erg, pari all'energia acquistata da un elettrone attraversando la differenza di potenziale di un volt):

$$w_\circ = 3,2\ 10^{-12}\text{erg}.$$

L'energia che investe un atomo, del diametro dell'ordine di $1\ \mathring{A} = 10^{-8}$ cm , è circa 10^{-16} erg/sec.

Assumendo perciò che l'energia sia distribuita uniformemente su di una superficie con diametro di $1\ \mathring{A}$ e che l'elettrone possa accumulare l'energia, si avrebbe un tempo dell'ordine di

$$\frac{3,2\ 10^{-12}\text{erg}}{10^{-16}\ \text{erg/sec}} \simeq 3,2\ 10^{4}\text{sec},$$

cioè circa 9 ore.

Il processo avviene invece in modo pressocché istantaneo.

Inoltre, con questo modello, non si riesce a spiegare l'indipendenza della velocità massima degli elettroni dall'intensità della radiazione.

2.2 Teoria di Einstein (1905).

Supponiamo ora che l'energia della radiazione sia quantizzata, non solo come si ha nella teoria di Planck e cioè all'atto dell'assorbimento-emissione della radiazione da parte dei costituenti delle pareti della cavità, ma anche in generale, per radiazione non termica.

Ciò significa che, nel caso dell'effetto fotoelettrico, l'interazione della radiazione con un singolo elettrone avverrà con l'assorbimento di un intero quanto di energia $h\nu$, cioè di un fotone da parte dell'elettrone, e questo processo sarà locale e praticamente istantaneo.

Ne segue che l'elettrone potrà essere emesso solo se l'energia $h\nu$ è maggiore del lavoro necessario per estrarre l'elettrone dal metallo

$$h\nu \geq w_\circ = h\nu_\circ, \tag{2.1}$$

dove $w_\circ$ è il lavoro di estrazione e $\nu_\circ$ è la frequenza di soglia.

Ne segue ancora che l'energia cinetica massima degli elettroni emessi sarà data da

$$w_{\max} = h(\nu - \nu_\circ). \tag{2.2}$$

Al variare dell'intensità della radiazione varia soltanto il numero dei fotoni e quindi il numero degli elettroni emessi, mentre non varia l'energia di un singolo fotone. Ne segue che, aumentando l'intensità della radiazione, mantenendo invariata la frequenza, aumenterà il numero degli elettroni emessi, ma non la loro energia. Si spiegano così i fatti sperimentali osservati. La dipendenza dell'energia massima dalla frequenza è lineare, come si vede dalla (2.2), e questo fu poi confermato dall'esperimento (Millikan, 1916).

Dal fatto poi che un'onda elettromagnetica (e.m.) trasporta un impulso dato dall'energia diviso c (c = velocità della luce), secondo la teoria di Maxwell, Einstein dedusse che un fotone ha un impulso ben definito dato da

$$p = \frac{h\nu}{c}. \tag{2.3}$$

Ora, la relazione impulso-energia di una particella relativistica di massa a riposo m è data da

$$E = \sqrt{c^2 p^2 + m^2 c^4}. \tag{2.4}$$

Ne segue

$$\text{massa del fotone} = 0. \tag{2.5}$$

Capitolo 3

Il calore specifico dei solidi. Teoria di Einstein (1907).

Per il calore specifico dei solidi era nota la legge di Dulong-Petit:

$$c_v \simeq 6 \frac{\text{Calorie}}{\text{gradi mole}}, \tag{3.1}$$

dove c_v è il calore specifico molare a volume costante.

Questo valore per c_v si può giustificare classicamente osservando che l'energia media statistica $\bar{\epsilon}$ di un'oscillatore 1-dimensionale è kT; ne segue che, assimilando il solido ad un insieme di oscillatori armonici tridimensionali, avremo un'energia interna di una mola del solido data da

$$U(T) = 3N_A\bar{\epsilon} = 3N_AkT, \tag{3.2}$$

dove N_A è il numero di Avogadro.

Da questa segue

$$c_v = \frac{\partial U(T)}{\partial T} = 3N_Ak = 3R \simeq 6 \text{ Cal/(mole gradi)}, \tag{3.3}$$

dove R è la costante dei gas e 1 Cal $\simeq 4,2\ J$, (Cal = caloria termochimica).

La legge di Dulong-Petit è valida a temperature ordinarie, ma a basse temperature si hanno deviazioni da questo valore.

Einstein propose di sostituire ad $\bar{\epsilon}$ l'espressione di Planck

$$\bar{\epsilon} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}. \tag{3.4}$$

In questo modo si ottiene

$$U(T) = 3N_A \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}, \tag{3.5}$$

e, per $\frac{h\nu}{kT} \ll 1$

$$U(T) = 3N_A kT \left(1 - \frac{h\nu}{2kT} + O((\frac{h\nu}{kT})^2\right), \tag{3.6}$$

dove il primo termine riproduce la legge di Dulong-Petit.

Notare che il secondo termine è indipendente da T

$$-\frac{3}{2} N_A h\nu, \tag{3.7}$$

e corrisponde ad assegnare ad ogni grado di libertà un'energia (negativa) $\frac{1}{2}h\nu$.

Quest'energia di zero non contribuisce a c_v, ma va tenuta presente, come vedremo nel seguito del corso con la trattazione quantistica dell'oscillatore armonico.

In definitiva, si ha un calore specifico dato dalla formula

$$c_v = 3N_A k (\frac{h\nu}{kT})^2 \frac{e^{\frac{h\nu}{kT}}}{(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1)^2}, \tag{3.8}$$

che, pur non essendo precisa, rende conto della deviazione a basse temperature.

In realtà, per avere una teoria più realistica, occorre tener conto di tutto lo spettro di frequenze $f(\nu)$ del reticolo cristallino, scrivendo $U(T)$

$$U(T) = \int_0^\infty \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} f(\nu) d\nu, \tag{3.9}$$

con

$$\int_0^\infty f(\nu) d\nu = 3N_A, \tag{3.10}$$

e dove, per ottenere il caso di una frequenza singola $\nu_\circ$, basta porre

$$f(\nu) = 3N_A\delta(\nu - \nu_\circ), \tag{3.11}$$

ottenendo così la (3.5).

La teoria completa fu sviluppata da Debye.

Capitolo 4

L'effetto Compton (1922).

Benchè questo argomento non segua l'ordine cronologico è utile inserirlo a questo punto per porre in evidenza l'aspetto corpuscolare della radiazione e.m.

L'esperimento consiste nella determinazione dello spettro della radiazione secondaria nella diffusione di raggi X da parte di un materiale (nell'esperimento si trattava di paraffina).

Ciò che si osserva è che, ad angoli $< 90°$, si ha una lunghezza d'onda della radiazione secondaria maggiore della lunghezza d'onda della radiazione incidente.

Secondo la teoria classica dovremmo avere la stessa lunghezza d'onda; infatti il processo viene spiegato con un regime di oscillazioni forzate degli elettroni nel campo e.m. incidente.

Il risultato sperimenatle si può invece spiegare con l'ipotesi corpuscolare (Compton-Debye).

Se un fotone di energia

$$h\nu = \hbar\omega,$$

collide con un elettrone, che si può considerare praticamente a riposo (energia di legame dell'elettrone nell'atomo $\simeq 10 - 100$ eV; energia di un fotone X $\simeq 2\ 10^4$ eV, corrispondente ad una lunghezza d'onda di circa $0,7$ Å), si ha un processo d'urto di particelle, che si può trattare con la conservazione dell'energia e dell'impulso (relativistici). Poichè parte dell'energia incidente verrà acquistata dall'elettrone come energia cinetica (l'elettrone non viene

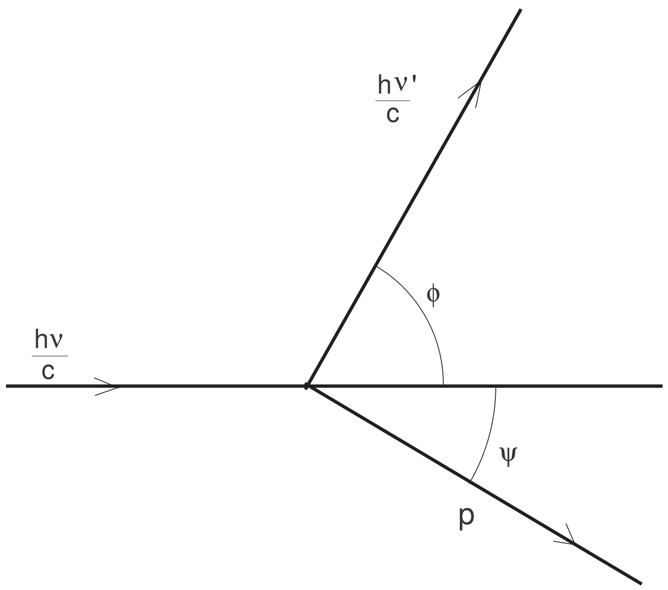

Figura 4.1: La cinematica dell'effetto Compton

osservato in quanto viene riassorbito nel materiale irraggiato), avremo che il fotone secondario avrà un'energia

$$h\nu' < h\nu, \tag{4.1}$$

e quindi con

$$\lambda' > \lambda. \tag{4.2}$$

(In realtà si osservano due tipi di radiazione: una di frequenza uguale a quella incidente, dovuta agli elettroni che restano legati, e quella considerata).

Tratteremo il processo come l'urto di un fotone, di energia $h\nu$ e di impulso $\frac{h\nu}{c}$ (vedi l'ipotesi di Einstein nella sezione sull'effetto fotoelettrico), con un elettrone a riposo, vedi la figura (4.1) (in realtà si tratta di un processo di assorbimento e riemissione di radiazione).

Avremo, per la conservazione dell'energia

$$h\nu + mc^2 = h\nu' + \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{4.3}$$

dove m è la massa a riposo dell'elettrone.

Per la conservazione dell'impulso, nella direzione del fotone incidente, avremo

$$\frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c}\cos\phi + \frac{mv}{\sqrt{1-\beta^2}}\cos\psi, \tag{4.4}$$

e, nella direzione trasversa

$$0 = \frac{h\nu'}{c}\mathrm{sen}\phi - \frac{mv}{\sqrt{1-\beta^2}}\mathrm{sen}\psi, \tag{4.5}$$

dove ϕ è l'angolo di diffusione del fotone e ψ l'angolo con il quale l'elettrone viene emesso, rispetto alla direzione della radiazione incidente. v è la velocità dell'elettrone emesso e $\beta = \frac{v}{c}$ (vedi la figura (4.1)).

Eliminiamo da queste equazioni l'angolo ψ e la velocità v , poichè l'elettrone non viene osservato; quadrando e sommando le (4.4) e (4.5) si ha

$$(\frac{h\nu}{c} - \frac{h\nu'}{c}\cos\phi)^2 + (\frac{h\nu'}{c}\mathrm{sen}\phi)^2 = m^2\gamma^2v^2, \tag{4.6}$$

dove

$$\gamma = \sqrt{1-\beta^2}.$$

Si ha perciò

$$m^2\gamma^2v^2c^2 = h^2\left[\nu^2 + (\nu')^2 - 2\nu\nu'\cos\phi\right], \tag{4.7}$$

e, dalla (4.3)

$$m\gamma c^2 = h(\nu - \nu') + mc^2. \tag{4.8}$$

Eliminiamo ora v quadrando quest'ultima e sottraendola dalla (4.6), cioè

$$m^2\gamma^2c^4\left(\frac{v^2}{c^2} - 1\right) = 2h^2\nu\nu'(1-\cos\phi) - 2mc^2h(\nu-\nu') - m^2c^4,$$

da cui

$$h\nu\nu'(1-\cos\phi) = mc^2(\nu-\nu'),$$

o anche

$$\frac{1}{\nu'} - \frac{1}{\nu} = \frac{h}{mc^2}(1 - \cos\phi), \tag{4.9}$$

che si può anche riscrivere ($\lambda = c/\nu$)

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\phi), \tag{4.10}$$

ovvero

$$\Delta\lambda = 2\lambda_c \mathrm{sen}^2(\frac{\phi}{2}), \tag{4.11}$$

dove

$$\lambda_c = \frac{h}{mc} = \text{lunghezza d'onda Compton per l'elettrone}, \tag{4.12}$$

$$(\frac{\lambda}{2\pi} = 3,8\ 10^{-11}\ \text{cm}).$$

La (4.12) è confermata dall'esperimento.

Capitolo 5

Il modello dell'atomo di idrogeno.

5.1 Lo spettro dell'atomo di idrogeno.

La lunghezze d'onda di una serie di righe spettrali dell'atomo d'idrogeno vengono riprodotte con grande accuratezza dalla formula di Balmer (1885)

$$\frac{1}{\lambda} = R(\frac{1}{4} - \frac{1}{m^2}), \tag{5.1}$$

dove m è un mumero intero > 2 e R è una costante empirica detta costante di Rydberg, la cui misura aveva dato il risultato

$$R = 109678 \text{ cm}^{-1}. \tag{5.2}$$

Più in generale si hanno, sempre per l'atomo d'idrogeno, le seguenti serie di righe spettrali

$$\frac{1}{\lambda} = R(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}), \tag{5.3}$$

dove:
per n=1 si ha la serie di Lyman (nell'u.v.),
per n=2 la serie di Balmer (nel visibile),
per n=3 la serie di Paschen (nell'i.r.),

per n=4 la serie di Brackett (nell'i.r.), ecc.

La (5.3) aveva suggerito la definizione dei termini spettrali

$$R\frac{1}{n^2}, \qquad n = 1, 2, 3, ... \tag{5.4}$$

per combinazione dei quali si potevano ottenere (per differenza) le varie lunghezze d'onda delle varie serie spettrali. Ciò andava sotto il nome di principio di ricombinazione di Ritz.

Ritz stesso aveva sottolineato che la sua formula non poteva essere giustificata in termini di teoria classica; se infatti si pensa che l'emissione di radiazione da parte degli atomi sia dovuta ad un qualche moto periodico di cariche all'interno dell'atomo, accanto ad una frequenza fondamentale dovrebbero essere presenti anche le frequenza armoniche superiori, che viceversa non compaiono nella (5.3).

5.2 L'esperimento di Rutherford (1911).

Nel 1911 Rutherford ottenne un risultato importante riguardante la struttura dell'atomo.

Consideriamo i raggi α emessi dal radio (Ra), che attraversano un qualche materiale con una velocità elevata.

La carica di una particella α è data da +2e (e = valore assoluto della carica dell'elettrone $= 1,6\ 10^{-19}$ Coulomb $= 4,8\ 10^{-10}$ u.e.s., dove 1 Coulomb $\simeq 3\ 10^9$ u.e.s. $= \frac{1}{10}$ u.e.m.).

Quando le particelle α attraversano la materia, la loro direzione viene modificata a causa delle cariche presenti (cariche -e degli elettroni e cariche positive, multipli di +e, con atomi globalmente neutri). La presenza di elettroni nella materia era ben nota; ciò che non si sapeva era come tali cariche fossero distribuite all'interno dell'atomo.

La deflessione delle particelle α era principalmente dovuta alle cariche positive, a causa della loro massa molto maggiore di quella dell'elettrone ($m_e = 0,911\ 10^{-27}$ gr., mentre la massa dell'atomo di idrogeno H è circa 1836 volte più grande). Perciò lo studio della diffusione α poteva fornire informazioni sulla distribuzione della carica positiva all'interno dell'atomo.

Erano già stati proposti due modelli di atomo:
modello di Thomson, con la carica positiva distribuita uniformemente nell'atomo e con gli elettroni immersi in tale distribuzione. La dimensione della distribuzione di carica positiva dava la dimensione dell'atomo.
modello di Nagaoka, con la carica positiva concentrata al centro e la carica negativa distribuita attorno.

Già un'osservazione qualitativa favoriva il modello di Nagaoka, in quanto la concentrazione della carica positiva al centro dell'atomo poteva fornire campi elettrici abbastanza intensi da spiegare le forti deviazioni della particelle α osservate.

Rutherford sviluppò un modello classico di atomo con la carica positiva al centro e mostrò che questo modello forniva una formula per la diffusione α, la formula di scattering di Rutherford, che rendeva conto dei risultati sperimentali.

5.3 Difficoltà del modello di Rutherford.

Vi sono essenzialmente tre tipi di difficoltà.
a)- Ammettendo che l'atomo sia a riposo, con il centro di massa praticamente coincidente col centro della carica positiva, si ha che le uniche grandezze a disposizione con le quali spiegare le dimensioni dell'atomo ($\sim \mathring{A} = 10^{-8}$ cm) sono la carica $-$e e la massa m dell'elettrone. Ma con queste due grandezze non si può formare una lunghezza.
b)- Se in qualche modo le orbite elettroniche sono determinate si avrebbe che, secondo la teoria di Maxwell, essendo gli elettroni cariche accelerate, dovranno emettere radiazione e.m.; perderanno perciò progressivamente energia ed infine collasseranno sul nucleo.

Proviamo a stimare il tempo di collasso in base alla teoria classica. La perdita di energia per unità di tempo dovuta all'irraggiamento e.m. è data da (vedi, per esempio, W.K.Panofsky e M.Phillips,Elettricità e magnetismo, pag. 359; usiamo qui unità gaussiane, con le quali si ha che il quadrato della carica elettrica è e^2 invece di $e^2/4\pi$, come nel sistema di unità di Heaviside-Lorentz).

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{2}{3}\frac{e^2 a^2}{c^3}, \tag{5.5}$$

dove a è l'accelerazione della carica e c è la velocità della luce.

D'altra parte, l'energia totale dovuta al campo coulombiano di una carica positiva +e (atomo d'idrogeno) agente sull'elettrone è

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{e^2}{r}, \quad \text{(unità u.e.s.)}, \tag{5.6}$$

e, se si considerano orbite circolari, per le quali l'accelerazione è costante, la condizione di equilibrio tra la forza centrifuga e la forza elettrostatica è

$$m\frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{r^2} \Rightarrow v^2 = \frac{e^2}{rm}. \tag{5.7}$$

Quindi si ha anche

$$E = -\frac{1}{2}\frac{e^2}{r}. \tag{5.8}$$

Da questa, confrontando con la (5.5) e ponendo

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{mr^2}, \tag{5.9}$$

si ha

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}\frac{e^2}{r^2}\frac{dr}{dt} = -\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\left(\frac{e^2}{mr^2}\right)^2, \tag{5.10}$$

cioè

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{4}{3}\frac{e^4}{m^2c^3r^2}. \tag{5.11}$$

Se si integra tra $t = 0$, quando $r = a_\circ$, dove $a_\circ$ è il raggio atomico, e $t = \tau$, con τ tempo di collasso, quando $r = 0$, si ha

$$\int_{a_\circ}^{0} r^2 dr = -\frac{4}{3}\frac{e^4}{m^2c^3}\tau, \tag{5.12}$$

cioè

$$\tau = \frac{1}{4}\frac{m^2c^3a_\circ^3}{e^4}. \tag{5.13}$$

Questa si può riscrivere

$$\tau = \frac{1}{4} \left(\frac{a_\circ}{r_\circ} \right)^2 \frac{a_\circ}{c}, \tag{5.14}$$

dove

$$r_\circ = \frac{e^2}{mc^2} \simeq 2,8 \; 10^{-13} \text{ cm}, \tag{5.15}$$

detto raggio classico dell'elettrone (poichè nella sua espressione non compare la costante di Planck).

Se si pone

$$a_\circ \sim 0,5 \; 10^{-8} \text{ cm}, \tag{5.16}$$

si ha

$$\tau \simeq 1,3 \; 10^{-11} \text{ sec}, \tag{5.17}$$

cioè un tempo ridicolmente piccolo in vista della stabilità degli atomi.

c)- La frequenza della radiazione emessa risulta proporzionale a $r^{-\frac{3}{2}}$ (poichè dalla (5.7) segue $\omega = v/r = e/(r\sqrt{mr})$ e, a regime, la radiazione verrà emessa con la frequenza di rotazione dell'elettrone attorno al nucleo) in accordo con la terza legge di Keplero (cioè: periodo di rotazione T tale che $T^2 \propto r^3$). Quindi ω aumenta con $r \to 0$. Non si spiegano ancora le righe spettrali, che hanno frequenze caratteristiche ben definite.

5.4 La teoria di Bohr (1913).

L'idea di base di Bohr fu quella di usare la costante di Planck, insieme alla carica dell'elettrone e alla sua massa, per formare una lunghezza del corretto ordine di grandezza, per dar conto delle dimensioni dell'atomo

$$\frac{\hbar^2}{me^2} = a_\circ, \tag{5.18}$$

cioè il raggio atomico di Bohr

$$a_\circ \simeq 5,3 \; 10^{-9} \text{ cm}. \tag{5.19}$$

Bohr fece inoltre l'ipotesi che l'emissione e l'assorbimento di radiazione da parte degli elettroni atomici avvenisse per quanti $h\nu$.

Ne segue che solo stati di energia dell'elettrone che differiscono di $h\nu$ sono permessi. Detto altrimenti, se E_1, E_2 con $E_1 < E_2$ sono le energie di due stati permessi, nella transizione dell'elettrone dal livello d'energia E_1 a quello di energia E_2 si avrà assorbimento di radiazione con frequenza

$$\nu_{1\to 2} = \frac{E_2 - E_1}{h}, \tag{5.20}$$

mentre nella transizione $E_2 \to E_1$ si avrà emissione con frequenza

$$\nu = \frac{E_2 - E_1}{h}. \tag{5.21}$$

Riassumendo, le ipotesi sono:

I- Un atomo, o un sistema atomico, può avere solo un insieme discreto di stati di energia (detti anche livelli di energia), caratteristico di ogni specie atomica. In tali stati non vi è emissione di radiazione (N.B. ciò è postulato, senza quindi spiegare la contraddizione con la teoria classica in alcun modo).

II- L'emissione o l'assorbimento di radiazione da parte di un atomo può avvenire solo quando l'atomo compie una transizione (o meglio un elettrone dell'atomo) tra due stati permessi. Se i livelli di energia sono $E_1, E_2, ..., E_n, ...$ si hanno le possibili frequenze (di Bohr)

$$h\nu_{mn} = E_m - E_n, \tag{5.22}$$

se $E_m > E_n$.

Tali frequenze corrispondono a radiazione emessa (righe spettrali di emissione) se si ha la transizione $E_m \to E_n$, oppure a radiazione assorbita (righe di assorbimento) se si ha la transizione $E_n \to E_m$.

Consideriamo un atomo idrogenoide, cioè un atomo con un nucleo di carica Z (Z = numero atomico) e con un solo elettrone.

Per orbite circolari si ha

$$\frac{Ze^2}{r^2} = m\frac{v^2}{r} = m\omega^2 r, \tag{5.23}$$

che è la condizione di stabilità per l'orbita. L'energia totale è

$$E = \frac{1}{2}mr^2\omega^2 - \frac{Ze^2}{r}, \tag{5.24}$$

(con il potenziale coulombiano $V(r)$ scelto in modo tale che sia $V(r) \to 0$ per $r \leftarrow \infty$, quindi

$$E = -\frac{1}{2} m\omega^2 r^2, \tag{5.25}$$

come già visto (equazione analoga alla (5.8)).

Se ora si elimina r tra la (5.24) e la (5.23) si ha

$$\frac{2|E|}{m\omega^2} = r^2, \qquad \frac{Ze^2}{m\omega^2} = r^3, \tag{5.26}$$

cioè

$$\frac{8|E|^3}{m^3\omega^6} = \frac{(Ze^2)^2}{m^2\omega^4}, \tag{5.27}$$

o anche

$$\frac{|E|^3}{\omega^2} = \frac{Z^2 e^4 m}{8} = \text{costante}. \tag{5.28}$$

Dalla formula (5.3) per i termini spettrali di Ritz si ha

$$\frac{R}{n^2} - \frac{R}{m^2} = \frac{1}{\lambda_{mn}} = \frac{\nu_{mn}}{c}, \tag{5.29}$$

che, combinata con la (5.22), fornisce

$$\nu_{mn} = \frac{1}{h}(E_m - E_n) = cR(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}). \tag{5.30}$$

Si può allora fare l'ipotesi

$$E_n = -\frac{hcR}{n^2}. \tag{5.31}$$

Facciamo ora con Bohr l'ulteriore ipotesi che, nel limite di grandi n, si possa trattare il sistema come classico (principio di corrispondenza di Bohr). In tale limite i livelli di energia tenderanno ad un continuo.

In questo limite si può calcolare la costante di Ridberg R in ternimi di h, e, m e Z e confrontarlo con il valore sperimentale (5.2).

Per fare ciò va tenuto presente che classicamente la radiazione emessa a regime da un sistema oscillante ha la stessa frequenza della frequenza propria del sistema. Se perciò ω è la frequenza angolare dell'elettrone che orbita attorno al nucleo dell'atomo, la radiazione emessa (in questo limite) sarà

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi}. \tag{5.32}$$

Ricaviamo la stessa frequenza dalla (99) per grandi valori di m ed n

$$\nu = cR(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}) = cR\frac{(m+n)(m-n)}{n^2m^2}, \tag{5.33}$$

che, se $m - n$ è piccolo, si potrà approsssimare con

$$\nu \simeq \frac{2cR(m-n)}{n^3}. \tag{5.34}$$

Con $m - n = 1$ si ha

$$\nu = \nu_\circ = \frac{2cR}{n^3}, \quad \omega_\circ = 2\pi\nu_\circ = \frac{4\pi Rc}{n^3}, \tag{5.35}$$

cioè

$$n = (\frac{4\pi Rc}{\omega_\circ})^{\frac{1}{3}}. \tag{5.36}$$

Sostituendo nell'espressione dell'energia (5.31):

$$|E| = hRc(\frac{4\pi Rc}{\omega_\circ})^{-\frac{2}{3}}. \tag{5.37}$$

Da questa, sostituendo nella (5.28) si ha

$$\frac{|E|^3}{\omega^2} = \frac{(hRc)^3}{(4\pi Rc)^2} = \frac{Z^2e^4m}{8}, \tag{5.38}$$

da cui infine

$$R = \frac{2\pi^2Z^2e^4m}{h^3c}. \tag{5.39}$$

Si può poi correggere la formula sostituendo ad m la massa ridotta dell'elettrone $\mu = \frac{Mm}{M+m}$, dove M è la massa del nucleo , e si ha (per Z = 1, atomo d'idrogeno)

$$R = \frac{2\pi^2e^4\mu}{h^3c}, \tag{5.40}$$

che è in accordo con il valore sperimentale (5.2)

$$\left[1,09\ 10^5 \mathrm{cm}^{-1}, \quad \text{contro } 109678\ \mathrm{cm}^{-1}\right].$$

Questo risultato è il grande successo del modello atomico di Bohr.

Si possono ora determinare i livelli d'energia permessi ed i raggi delle orbite corrispondenti:

$$E_n = -\frac{2\pi^2 Z^2 e^4 \mu}{h^2}\frac{1}{n^2}, \tag{5.41}$$

o anche, con $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,054\ 10^{-27}$ erg sec,

$$E_n = -\frac{Z^2 e^4 \mu}{2\hbar^2}\frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, ... \tag{5.42}$$

Si ha poi dalla (5.25)

$$E_n = -\frac{1}{2}\frac{Ze^2}{r_n}, \tag{5.43}$$

da cui

$$r_n = \frac{\hbar^2}{Ze^2\mu}n^2, \tag{5.44}$$

(per $n = 1$, $Z = 1$ si ha $r = \frac{\hbar^2}{e^2\mu} \equiv a_\circ$ raggio atomico di Bohr).

Si ha infine dalla (5.23)

$$\omega_n = \left(\frac{Ze^2}{\mu r_n^3}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{5.45}$$

e si può calcolare il modulo del momento angolare

$$p_n = \mu v_n r_n = \mu(r_n\omega_n)r_n = \mu r_n^2 \left(\frac{Ze^2}{\mu r_n^3}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\mu r_n Z e^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{5.46}$$

ovvero

$$p_n = \left(\mu Z e^2 \frac{\hbar^2 n^2}{Ze^2\mu}\right)^{\frac{1}{2}} = \hbar n,$$

cioè

$$p_n = \hbar n. \tag{5.47}$$

La (5.47) è chiamata condizione di quantizzazione per il momento angolare.

Capitolo 6

L'esperimento di Franck e Hertz (1914).

(verifica sperimentale dell'esistenza dei livelli d'energia)

L'esperimento di Franck-Hertz consiste nello studio della diffusione elastica ed anelastica di elettroni da parte delle molecole di un gas rarefatto.

Si sfrutta l'effetto termoionico per avere un flusso di elettroni in un tubo contenente il gas. Gli elettroni vengono accelerati da una griglia G e raccolti da una placca P, quest'ultima si trova ad un potenziale leggermente inferiore a quello cui viene mantenuta la griglia G, vedi la figura (6.1). La corrente di placca viene misurata in A.

In assenza di urti anelastici con le molecole del gas gli elettroni emessi da F vengono accelerati fino a G e poi decelerati da G a P.

Sia $V = V_G - V_F$ la differenza di potenziale tra la griglia e il filamento. Se si trascura la velocità iniziale di emissione si ha che l'energia cinetica massima che gli elettroni possono raggiungere quando arrivano in G è data da

$$T_{\max} = \frac{1}{2} m_e v_{\max}^2 = eV. \tag{6.1}$$

Si può regolare il potenziale di P in modo che questa energia cinetica sia appena sufficiente a far superare agli elettroni il cammino da G a P. Avremo in A una corrente che aumenterà se si aumenta V finchè non si raggiunge la prima soglia di eccitazione delle molecole del gas. A questo punto si avrà una

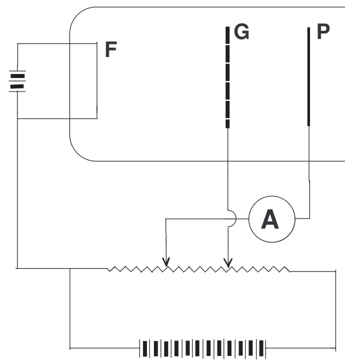

Figura 6.1: Schema dell'esperimento di Franck e Hertz

brusca caduta della corrente, dovuta al fatto che gli elettroni, avendo perso parte della loro energia in un eventuale urto anelastico con le molecole, non sono tutti in grado di raggiungere P.

Il valore V_1 al quale si ha la caduta di corrente fornisce l'energia di eccitazione corrispondente al primo livello eccitato del gas. Se E_1 è questa energia e se $E_\circ$ è l'energia del livello fondamentale, avremo

$$eV_1 = E_1 - E_0. \tag{6.2}$$

Se si aumenta ancora V avremo che gli elettroni che hanno subito un urto anelastico, con perdita di energia $E_1 - E_0$, torneranno ad essere sufficientemente accelerati verso G e la corrente tornerà ad aumentare. Ciò finchè non si raggiunge una nuova soglia di eccitazione E_2.

Se, per esempio, le energie dei livelli delle molecole del gas sono $E_1, E_2, E_3, ...,$ con

$$E_1 - E_0 < E_2 - E_0 < 2(E_1 - E_0), ... \tag{6.3}$$

avremo, dopo la prima caduta, una crescita della corrente per V crescente nell'intervallo:

$$E_1 - E_2 < eV < E_2 - E_0, \tag{6.4}$$

una seconda caduta di corrente per

$$eV \simeq E_2 - E_0, \tag{6.5}$$

un'ulteriore crescita per

$$E_2 - E_0 < eV < 2(E_2 - E_0), \tag{6.6}$$

e ancora una caduta di corrente quando gli elettroni subiscono un doppio urto anelastico, per

$$eV \simeq 2(E_2 - E_0), \tag{6.7}$$

e così via.

Quindi questo esperimento dimostra l'esistenza dei livelli d'energia.

Capitolo 7

Esperimento di Stern-Gerlach e quantizzazione spaziale.

(O.Stern (1921), W.Gerlach (1922))

Descrizione dell'esperimento: un fascio di atomi di argento, prodotto da un forno, viene opportunamente diaframmato e fatto passare tra le espansioni polari di un magnete, il quale ha uno delle due espansioni polari conformato ad angolo acuto, in modo da dar luogo ad un campo magnetico H fortemente disomogeneo trasversale al fascio.

[L'Ag ha numero atomico Z = 47, peso atomico A = 108; ha un solo elettrone con spin spaiato e la sua struttura elettronica è [Kr] $4d^{10}5s^1$, (Kr: Z=36); ricordiamo la notazione spettroscopica dei livelli elettronici

$l = 0$	corrisponde a s	molteplicità 2
$l = 1$	corrisponde a p	molteplicità 6
$l = 2$	corrisponde a d	molteplicità 10
$l = 3$	corrisponde a f	molteplicità 14
...	......	......].

Gli atomi di Ag hanno un nucleo con massa circa 2 10^5 volte più grande della massa dell'elettrone. Agli effetti dell'esperimento un atomo di Ag può essere considerato come una particella con lo spin dato dallo spin del singolo elettrone spaiato e con massa A = 108 in unità atomiche.

Il momento magnetico $\vec{\mu}$ dell'atomo è proporzionale allo spin $\vec{S}$ (momento angolare intrinseco) dell'elettrone. Per una carica q si ha $\vec{\mu} = \frac{q}{mc}\vec{S}$; per un elettrone ($q = -e$) si ha

$$\vec{\mu} = -\frac{e\hbar}{2m_e c}\mathrm{vers}\vec{S}, \tag{7.1}$$

dove ricordiamo che e è il valore assoluto della carica dell'elettrone.

Il momento $\vec{\mu}$ contribuisce all'energia totale con un termine

$$-\vec{\mu} \cdot \vec{H}, \tag{7.2}$$

dove $\vec{H}$ è il campo magnetico del magnete.

Si può trascurare il contributo del momento magnetico del nucleo, poichè nell'espressione analoga alla (7.1) avremmo al posto di m_e a denominatore una massa M con $M \simeq 2\ 10^5\ m_e$.

Se si sceglie come asse z la direzione del campo magnetico $\vec{H}$, perpendicolare al fascio, e se si suppone che H dipenda praticamente solo da z, $H = H(z)$, ad ogni singolo atomo verrà applicata una forza

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}(-\vec{\mu} \cdot \vec{H}) = \mu_z \vec{\nabla} H_z \equiv \mu_z \vec{\nabla} H(z) = \mu_z \frac{\partial H(z)}{\partial z}\vec{k}, \tag{7.3}$$

dove $\vec{k}$ è il versore dell'asse z.

Questa forza determina una deviazione del fascio verso la direzione della z positiva o negativa secondo il segno di μ_z (supponendo il gradiente di H positivo), cioè secondo il segno di S_z:

$$F_z = -\frac{e\hbar}{2m_e c}\hat{S}\frac{\partial H(z)}{\partial z}, \tag{7.4}$$

dove $\hat{S}$ è la componente z del versore di $\vec{S}$.

Quindi l'esperimento consente la misura di μ_z, ovvero del valore di S_z degli atomi di Ag.

Ora gli atomi del fascio incidente hanno la direzione di $\vec{\mu}$, e quindi di $\vec{S}$, distribuita in modo casuale. Classicamente ci si aspetta che il fascio si <u>allarghi</u> secondo l'asse z, poichè gli atomi verranno parzialmente deviati in alto o in basso lungo l'asse z secondo che abbiano μ_z positivo o negativo.

Ciò che invece si osserva è una <u>separazione</u> del fascio in <u>due fasci</u> ben distinti, di uguale intensità.

Questo fenomeno fu chiamato di quantizzazione spaziale. La sua interpretazione si basa sull'ipotesi che S_z possa assumere solo due valori, che indicheremo con $S_z^{(+)}$ e $S_z^{(-)}$ e più precisamente risulta

$$S_z^{(\pm)} = \pm \frac{1}{2}\hbar, \tag{7.5}$$

(N.B. Un momento angolare ha le dimensioni di un'azione come $\hbar$. Nella (7.1) e (7.4) si ha: $\frac{1}{2}\hbar\hat{S} = \vec{S}$, essendo $\hat{S}$ il versore).

Quindi l'elettrone ha uno spin (momento angolare intrinseco) pari a $\frac{1}{2}$ in unità $\hbar$.

Supponiamo ora di avere <u>due</u> apparati di Stern-Gerlach in serie.

Se si blocca uno dei due fasci all'uscita del primo apparato, per esempio quello corrispondente a $S_z^{(-)}$, e se si lascia che l'altro passi attraverso il secondo apparato, si osserva un <u>solo</u> fascio $S_z^{(+)}$ emergente (ulteriormente deviato). Ciò è quello che ci saremmo aspettati.

Se però si modifica l'orientazione del secondo apparato rispetto al primo, per esempio lo si dispone con il campo magnetico lungo l'asse x, perpendicolare rispetto al fascio incidente, ciò che si osserva è qualcosa di inaspettato. Si hanno <u>due fasci</u> di uguale intensià, che indicheremo con $S_x^{(\pm)}$.

Sarebbe stato naturale aspettarsi un fascio praticamente inalterato, essendo lo spin selezionato lungo l'asse z e quindi con componente nulla lungo l'asse x.

Il risultato dell'esperimento diventa ancora più sorprendente se si blocca il fascio $S_x^{(-)}$ uscente dal secondo apparato e si fa passare il fascio $S_x^{(+)}$ attraverso un terzo apparato di Stern-Gerlach, ma orientato nuovamente lungo l'asse z. Ciò che si osserva è ancora una separazione in due fasci $S_z^{(\pm)}$ di uguale intensità.

Si può stabilire una certa analogia con la polarizzazione della luce. E' ben noto che, se un raggio di luce attraversa un mezzo polarizzante, che per semplicità di discussione abbia un'efficienza del 100%, orientato per esempio lungo l'asse x, e successivamente attraverso un'altro mezzo polarizzante orientato lungo l'asse y, ambedue trasversi al raggio incidente, non si ha alcun raggio emergente. Se però tra i due mezzi se ne interpone un terzo orientato a 45°, si ha in uscita un raggio ridotto di un fattore $(\frac{1}{\sqrt{2}})^2$ in campo elettrico, ovvero $\frac{1}{4}$ in intensità.

Ciò suggerisce di rappresentare gli stati $S_z^{(\pm)}$ degli atomi di Ag, cioè in definitiva dell'elettrone, in uno spazio vettoriale a <u>2 dimensioni</u>, così come gli stati di polarizzazione della luce si rappresentano con vettori nel piano perpendicolare alla direzione di propagazione.

Vedremo però nel seguito del corso che lo spazio vettoriale 2-dimensionale che dovremo usare per lo spin dell'elettrone sarà uno spazio vettoriale complesso.

Capitolo 8

Onde di De Broglie (1923).

L'ipotesi di De Broglie era che ad una particella materiale con massa a riposo m fosse associata un'onda

$$\psi(\vec{x},\ t) = Ae^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}, \tag{8.1}$$

con $\vec{k}$, vettore di propagazione, parallelo all'impulso $\vec{p}$ della particella e ω legato all'energia dalla stessa relazione valida per la radiazione e.m., cioè dalla relazione di Planck

$$E = h\nu = \hbar\omega. \tag{8.2}$$

Partendo da questa ipotesi si trattava di ricavare la relazione tra impulso e lunghezza d'onda, in modo da stabilire una relazione tra le caratteristiche corpuscolari E e $\vec{p}$ e quelle ondulatorie ω e $\vec{k}$, dove $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, $\omega = 2\pi\nu$.

Per il fotone (caso a massa zero) questa relazione era già stata stabilita da Planck ed Einstein

$$E = h\nu = \hbar\omega, \qquad \vec{p} = \hbar\vec{k}, \tag{8.3}$$

con

$$p = \hbar k = \frac{h}{\lambda} = \frac{h\nu}{c}. \tag{8.4}$$

Per una particella materiale libera l'onda associata sarà la (8.1), o più precisamente un pacchetto d'onde, la cui velocità è perciò data dalla velocità di gruppo

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}, \tag{8.5}$$

supposta nota la relazione tra ω e k: $\omega = \omega(k)$, cioè la relazione di dispersione.

De Broglie identificò v_g con la velocità della particella.; ricordiamo che, come si è visto nella parte dedicata alla relatività speciale, le velocità di gruppo si compongono con la stessa legge delle velocità di particella.

Notare che l'esistenza di una relazione di dispersione $\omega = \omega(k)$ presuppone che il fenomeno sia governato da un'equazione differenziale per $\psi(\vec{x}, t)$ alle derivate parziali (a coefficienti costanti), come avviene in tutti i fenomeni ondulatori. Dalla (8.5), se v_g è la velocità v della particella, segue

$$v_g = v = \frac{d\omega}{dv}\frac{dv}{dk}, \tag{8.6}$$

ovvero

$$\frac{dk}{dv} = \frac{1}{v}\frac{d\omega}{dv}. \tag{8.7}$$

Usando la (8.2) si ha

$$\hbar\omega = E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad \beta = \frac{v}{c}, \tag{8.8}$$

per cui si ha

$$\frac{d\omega}{dv} = \frac{mc^2}{\hbar}\frac{1}{(1-\beta^2)^{3/2}}\frac{v}{c^2}; \tag{8.9}$$

sostituendo nella (8.7) si ha

$$\frac{dk}{dv} = \frac{m}{\hbar(1-\beta^2)^{3/2}}. \tag{8.10}$$

Se si integra quest'espressione, supponendo che

$$k(v=0) = 0, \tag{8.11}$$

si ha

$$k = \int_0^v \frac{m dv}{\hbar(1-\beta^2)^{3/2}} = \frac{mc}{\hbar}\int_0^\beta \frac{d\beta}{(1-\beta^2)^{3/2}}. \tag{8.12}$$

Posto $\beta = \mathrm{sen}(\alpha)$

$$\int_0^\beta \frac{d\beta}{(1-\beta^2)^{3/2}} = \int_0^\alpha \frac{\cos(\alpha)}{\cos^3(\alpha)} d\alpha = \tan(\alpha), \tag{8.13}$$

cioè

$$\int_0^\beta \frac{d\beta}{(1-\beta^2)^{3/2}} = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{8.14}$$

e quindi

$$k = \frac{m}{\hbar} \frac{v}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{p}{\hbar} \tag{8.15}$$

(essendo $p = m\gamma v$, $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$).

Dalla (8.15) segue la relazione di De Broglie

$$\lambda = \frac{h}{p}, \qquad (k = \frac{2\pi}{\lambda}). \tag{8.16}$$

Quindi anche per le particelle materiali si ha

$$E = \hbar\omega, \qquad \vec{p} = \hbar\vec{k}, \tag{8.17}$$

identiche alle (8.3).

Si può verificare la consistenza relativistica delle (8.17). Se si calcolano E e $\vec{p}$ per una particella, osservata in un riferimento (inerziale) in moto rettilineo uniforme, con velocità $-\vec{v}$ rispetto al riferimento in cui la particella è a riposo, indicando con ($E_0 = mc^2$, $\vec{p}_0$) l'energia e l'impulso della particella nel suo sistema di riposo e con (E, $\vec{p}$) l'energia e l'impulso nel sistema in moto, si ha

$$E = m\gamma c^2, \qquad \vec{p} = m\gamma\vec{v}. \tag{8.18}$$

Per verificare le (8.18) ricordiamo che la trasformazione di Lorentz ha la seguente forma

$$\begin{cases} ct &= \gamma(ct_0 - \vec{\beta}\cdot\vec{x}_0), \\ \vec{x}_\parallel &= \gamma(\vec{x}_{0\parallel} - \vec{\beta} ct_0), \\ \vec{x}_\perp &= \vec{x}_{0\perp}, \end{cases} \tag{8.19}$$

$$\begin{cases} \frac{E}{c} & = \gamma(\frac{E_0}{c} - \vec{\beta} \cdot \vec{p}_0), \\ \vec{p}_{\parallel} & = \gamma(\vec{p}_{0\parallel} - \vec{\beta}\frac{E_0}{c}), \\ \vec{p}_{\perp} & = \vec{p}_{0\perp}, \end{cases} \tag{8.20}$$

dove $(\vec{x}_0,\ t_0)$, $(\vec{x},\ t)$ sono le coordinate dello stesso evento visto nei due sistemi di riferimento, di riposo e di moto rispettivamente. In queste formule $\vec{x}_{\parallel}$ e $\vec{x}_{\perp}$ indicano rispettivamente la parte parallela e perpendicolare del vettore $\vec{x}$ rispetto a $\vec{\beta}$; analogamente per $\vec{p}$.

Le relazioni inverse si hanno scambiando semplicemente $\vec{\beta}$ con $-\vec{\beta}$.

Posto allora

$$\begin{cases} E_0 & = mc^2, \qquad \vec{p}_0 = 0, \\ \vec{k}_0 & = 0, \qquad \omega_0 = \frac{mc^2}{\hbar}, \end{cases} \tag{8.21}$$

dove si è usata la (8.17), si ha, con

$$c\vec{\beta} = -\vec{v}, \tag{8.22}$$

le espressioni

$$E = m\gamma c^2, \qquad \vec{p} = m\gamma\vec{v}, \qquad \vec{p}_{\perp} = 0, \tag{8.23}$$

cioè le (8.18).

Per verificare la consistenza delle (8.17) usiamo il fatto che la fase dell'onda ψ

$$\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t, \tag{8.24}$$

è invariante, cioè

$$\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t = \vec{k}_0 \cdot \vec{x}_0 - \omega_0 t_0. \tag{8.25}$$

Questo fatto è stabilito nella teoria delle relatività per le onde e.m. Qui viene in modo naturale generalizzato alle onde materiali.

Usando la (8.25), con le posizioni (8.21), si ha

$$\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t = -\omega_0 t_0 = -\frac{mc^2}{\hbar} t_0. \tag{8.26}$$

Si può esprimere t_0 in termini di t e $\vec{x}$ con l'inversa delle (8.19) ($\vec{\beta} \to -\vec{\beta}$):

$$t_0 = \gamma(t - \frac{\vec{v} \cdot \vec{x}}{c^2}) \tag{8.27}$$

e quindi

$$\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t = -\frac{mc^2}{\hbar}\gamma(t - \frac{\vec{v} \cdot \vec{x}}{c^2}), \tag{8.28}$$

e, identificando i coefficienti di $\vec{x}$ e t si ha

$$\vec{k} = \frac{m\vec{v}}{\hbar\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad \omega = \frac{mc^2}{\hbar\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{8.29}$$

cioè

$$E = \hbar\omega = m\gamma c^2, \qquad \vec{p} = \hbar\vec{k} = m\gamma\vec{v}, \tag{8.30}$$

che sono le (8.17) nel riferimento in moto, dove la particella ha velocità $\vec{v}$.

La relazione di De Broglie (8.16) implica una dipendenza della lunghezza d'onda λ dalla velocità

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m\gamma v} = \frac{h}{mc}\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta}, \tag{8.31}$$

dove

$$\frac{h}{mc} = \lambda_c \tag{8.32}$$

è la lunghezza d'onda Compton dell'elettrone, se m è la massa dell'elettrone, che si può anche leggere come una dipendenza di ω da k, cioè una relazione di dispersione.

La relazione $\omega = \omega(k)$ si può ricavare dalla prima delle (8.17), ricordando la relazione energia-impulso

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}, \tag{8.33}$$

cioè

$$\hbar\omega = \sqrt{c^2\hbar^2k^2 + m^2c^4}, \tag{8.34}$$

e si vede che <u>non</u> è lineare, cioè è una relazione di dispersione <u>dispersiva</u>, con velocità di fase

$$v_f = \frac{\omega}{k}, \tag{8.35}$$

<u>non costante</u> e quindi diversa dalla velocità di gruppo v_g.

La (8.31) ci dice che la lunghezza d'onda di una particella materiale è inversamente proporzionale alla massa e decrescente con la velocità.

Nel limite non relativistico, cioè per $\beta \simeq 0$, se si definisce l'energia cinetica T della particella con

$$E = T + mc^2 \tag{8.36}$$

cioè

$$\begin{aligned} T \quad &= E - mc^2 = mc^2(\gamma - 1) = mc^2 \left(\tfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) = \\ &= mc^2 \left(\tfrac{1}{2}\beta^2 + O(\beta^4) \right) = \tfrac{1}{2} mv^2 + O(\beta^4); \end{aligned} \tag{8.37}$$

si ha dalla (8.31)

$$\lambda = \frac{h}{m\gamma c} = \frac{h}{mv} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + O(c^{-4}) \right), \tag{8.38}$$

cioè

$$\lambda_{n.r.} = \frac{h}{mv} = \frac{h}{p}. \tag{8.39}$$

Quindi la relazione di De Broglie vale anche nel caso non relativistico.

Capitolo 9

L'esperimento di Davisson e Germer (1927).

La verifica sperimentale dell'esistenza delle onde di De Broglie fu data da Davisson e Germer (1927), che utilizzarono un fascio di elettroni a 50 eV incidente su di un cristallo di Nichel.

L'impulso degli elettroni era perciò

$$\begin{aligned} p &= \sqrt{2mT} = 3,8\ 10^{-19}\ \frac{\text{gr cm}}{\text{sec}}, \\ v &= \frac{p}{m} = 4,2\ 10^{8}\ \frac{\text{cm}}{\text{sec}}, \end{aligned} \tag{9.1}$$

dove il valore di v, pari a 4/100 di c, giustifica l'uso delle relazioni non relativistiche.

Gli elettroni avevano quindi una lunghezza d'onda data da

$$\lambda = \frac{h}{mv} \simeq 1,7\ 10^{-8}\ \text{cm}. \tag{9.2}$$

Questa lunghezza d'onda è dello stesso ordine di grandezza di quella dei raggi X utilizzati in un analogo esperimento e che danno luogo a figure di diffrazione.

Davisson e Germer ottennero delle figure di diffrazione simili, dimostrando così l'aspetto ondulatorio degli elettroni.

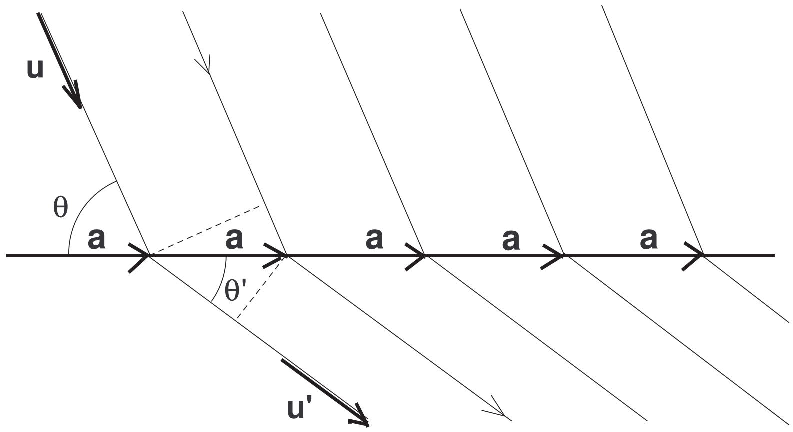

Figura 9.1: Diffrazione da una catena di atomi.

Vediamo più in dettaglio questo esperimento.

Un cristallo di Nichel viene investito da un fascio di elettroni emessi da un cannone elettronico, nel quale vengono accelerati ad un'energia di $50eV$. Il cristallo è posto nel vuoto e può essere fatto ruotare attorno alla direzione del fascio e un rivelatore, posto ad un angolo θ rispetto all'asse, può anch'esso essere ruotato attorno all'asse.

Vediamo ora come si può descrivere l'interazione degli elettroni con la struttura cristallina. Questa, essendo una struttura periodica tridimensionale, può essere pensata come ottenuta dalla ripetizione di un cella unitaria, che ha la forma di un parallelepipedo, nei cui vertici possiamo immaginare gli atomi. Se indichiamo con $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ e $\vec{e}_3$ tre vettori, linearmente indipendenti, che individuano i vertici della cella, possiamo rappresentare la posizione di ogni atomo del cristallo con

$$\vec{x} = n_1\vec{e}_1 + n_2\vec{e}_2 + n_3\vec{e}_3, \tag{9.3}$$

dove n_1, n_2 e n_3 sono tre numeri <u>interi</u>.

Prendiamo in esame per ora una catena unidimensionale di atomi, come indicata in figura (9.1)), dove $\vec{u}$ e $\vec{u}'$ sono le direzioni del raggio incidente e uscente rispettivamente e dove la lunghezza d'onda λ del raggio incidente è la <u>stessa</u> di quello uscente (si esclude qui il contributo dell'effetto Compton, nel quale si ha un raggio uscente con frequenza minore e quindi con lunghezza d'onda maggiore).

Vedremo dopo come si ottiene il caso tridimensionale.

La differenza di cammini ottici di due raggi adiacenti, come si vede dalla figura (9.1), è data da

$$a\cos\theta' - a\cos\theta, \tag{9.4}$$

e, per due raggi che investono due atomi a una distanza $n_1 a$, avremo

$$n_1(a\cos\theta' - a\cos\theta). \tag{9.5}$$

Poiché

$$a\cos\theta = \vec{a}\cdot\vec{u}, \qquad a\cos\theta' = \vec{a}\cdot\vec{u}', \tag{9.6}$$

si ha anche che la differenza dei cammini è data da

$$n_1\vec{a}\cdot(\vec{u}' - \vec{u}), \tag{9.7}$$

e la condizione di Bragg, affinché si abbia un massimo d'intensità nella direzione di $\vec{u}'$, è

$$n_1\vec{a}\cdot(\vec{u}' - \vec{u}) = m\lambda, \tag{9.8}$$

dove m è un numero intero.

Notare che questa condizione fissa solo l'angolo che il vettore $\vec{u}'$ forma con $\vec{a}$ e quindi i vettori $\vec{u}'$ che eventualmente soddisfano la relazione di Bragg formano un cono attorno alla direzione di $\vec{a}$.

Se si chiede che questa condizione valga per ogni valore di n_1, cosicchè tutti i raggi diffusi da tutti gli atomi della catena emettano in fase e non solo per due, allora la (9.8) equivale a

$$\vec{a}\cdot(\vec{u}' - \vec{u}) = m_1\lambda, \tag{9.9}$$

dove m_1 è un numero intero, infatti solo in questo caso la (9.8) è soddisfatta per ogni n_1, poiché solo un numero intero, moltiplicato per un numero intero qualsiasi da un numero intero.

Nel caso tridimensionale, se $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ e $\vec{e}_3$ si indicano tre vettori linearmente indipendenti che definiscono la cella elementare, avremo

$$\begin{cases} \vec{e}_1\cdot(\vec{u}' - \vec{u}) & = m_1\lambda, \\ \vec{e}_2\cdot(\vec{u}' - \vec{u}) & = m_2\lambda, \\ \vec{e}_3\cdot(\vec{u}' - \vec{u}) & = m_3\lambda, \end{cases} \tag{9.10}$$

con m_1, m_2 e m_3 numeri interi. Infatti, così come si richiedeva che la (9.9) valesse per ogni n_1, cioè per ogni atomo della catena 1-dimensionale in direzione di $\vec{a}$, per avere un effetto cumulativo, ora si richiede che anche i raggi incidenti lungo le altre direzioni e quindi su tutto il volume del cristallo siano diffusi in fase.

E' chiaro che potremmo avere un effetto osservabile anche se ciò avvenisse solo parzialmente, ma noi studiamo qui le condizioni affinch'e tutti gli atomi diffondano in fase.

Riassumendo, data una cella elementare e quindi la base $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, le equazioni (9.10) determinano, eventualmente per ogni direzione incidente, la direzione dei raggi uscenti per i quali si ha un massimo d'intensità.

Per risolvere le (9.10) introduciamo la terna duale $\vec{v}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ alla terna $\vec{e}_i$, definita dalle equazioni

$$\vec{v}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{i,j}, \qquad i, j = 1, 2, 3. \tag{9.11}$$

Si dimostra che la terna di vettori linearmente indipendenti $\vec{v}_i$ esiste ed è unica.

(La dimostrazione è immediata se si osserva che la matrice che ha le colonne formate dai vettori $\vec{e}_i$ è non singolare, poichè i vettori $\vec{e}_i$ sono linearmente indipendenti. Quindi ammette un'inversa e questa inversa è unica. La base duale è detta anche reciproca).

Prima però di utilizzare la base duale facciamo un'osservazione. Se passiamo al caso della diffrazione di particelle materiali, si ha che, in base alla relazione di De Broglie (8.31), l'impulso $\vec{p}$ di una particella materiale è legato al vettore di propagazione $\vec{k}$ dalla relazione

$$\vec{p} = \hbar \vec{k}, \qquad |\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}, \qquad (\hbar = \frac{h}{2\pi}) \tag{9.12}$$

dove, nel nostro caso

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{u}, \qquad \vec{k}' = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{u}'. \tag{9.13}$$

Ne segue che le (9.10) si possono scrivere

$$\vec{e}_i \cdot (\vec{p}' - \vec{p}) = m_i h, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{9.14}$$

Se adesso si sviluppa la variazione d'impulso sulla base duale,

$$\vec{p}' - \vec{p} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + a_3\vec{v}_3, \tag{9.15}$$

e si sostituisce nelle (9.14), si ha

$$a_i = m_i h, \qquad i = 1, 2, 3, \tag{9.16}$$

e quindi

$$\vec{q} = \vec{p}' - \vec{p} = h(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3), \tag{9.17}$$

dova $\vec{q}$ è l'impulso <u>trasferito</u> al reticolo cristallino.

Dalla (9.17) si vede che l'impulso trasferito è quantizzato. Quest'equazione ci mostra quali sono le direzioni in cui si hanno i massimi di diffrazione e anche che non tutte le direzioni (di $\vec{p}'$) danno luogo a massimi di diffrazione.

Capitolo 10

Il principio d'ideterminazione di Heisenberg (1927).

(Il microscopio di Heisenberg)

Supponiamo di avere una particella praticamente a riposo e di volerne determinare posizione e velocità.

Ciò non è possibile con precisione arbitraria, come dimostra il seguente esperimento concettuale.

Immaginiamo di osservare la particella con un microscopio (per esempio a raggi γ) con l'obbiettivo disposto come in figura (10.1) e la particella sia in O sull'asse x.

La posizione sull'asse x della particella non potrà essere determinata con una precisione maggiore di

$$\Delta x \simeq \frac{\lambda'}{\sin\epsilon}, \tag{10.1}$$

che è il potere risolutivo del microscopio e dove λ' è la lunghezza d'onda della radiazione usata per osservarla (indichiamo con λ la lunghezza d'onda della radiazione incidente e con λ' quella della radiazione diffusa dalla particella). Infatti si ha dalla figura (10.1)

$$\sin\epsilon \simeq \frac{f}{2a}; \tag{10.2}$$

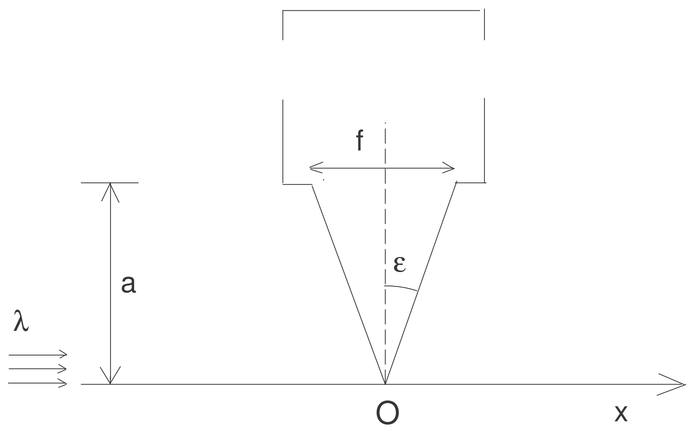

Figura 10.1: Il microscopio di Heisenberg

d'altra parte la direzione dei fotoni diffusi dalla particella non potrà essere determinata con precisione superiore (in angolo) a ϵ_1, con

$$\sin\epsilon_1 \simeq \frac{\lambda'}{f}, \tag{10.3}$$

poichè sullo schermo (o lastra fotografica) si formerà una figura di diffrazione, vedi la figura (10.2), dove $\Delta b = \lambda' = f\sin\epsilon_1$.

Avremo perciò

$$\Delta x \simeq 2a\sin\epsilon_1 = 2a\frac{\lambda'}{f} = \frac{\lambda'}{\sin\epsilon}, \tag{10.4}$$

cioè la (10.1).

L'indeterminazione Δx potrà essere ridotta riducendo λ, per esempio se si usano raggi γ ($\lambda \simeq 10^{-11}$ cm), ma la diffusione da parte della particella (per esempio un elettrone) è in accordo con il risultato dato dall'effetto Compton. Quindi l'impulso della particella viene modificato. La componente x dell'impulso della particella p_x, dopo l'interazione con la radiazione, è determinata da

$$\frac{h\nu}{c} = p_x + \frac{h\nu'}{c}\cos\phi, \tag{10.5}$$

(vedi l'equazione (4.4)), dove si è supposto che la radiazione incida in direzione x e dove ϕ è l'angolo di diffusione.

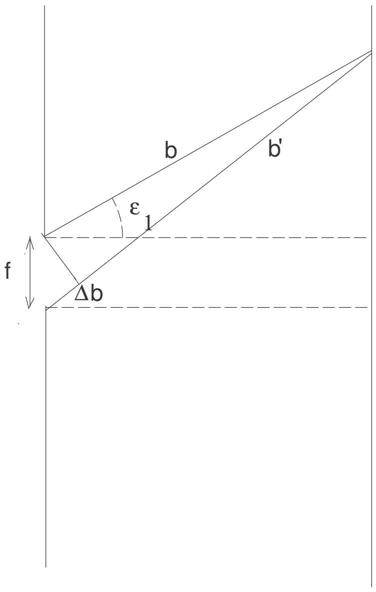

Figura 10.2: Diffrazione dovuta ad una fenditura

Quindi

$$p_x = \frac{h\nu}{c}(1 - \frac{\nu'}{\nu}\cos\phi). \tag{10.6}$$

Ora, per poter essere osservato, il fotone dovrà avere l'angolo ϕ nell'intervallo

$$\frac{\pi}{2} - \epsilon < \phi < \frac{\pi}{2} + \epsilon, \tag{10.7}$$

quindi

$$\frac{h\nu}{c}\left[1 - \frac{\nu'}{\nu}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \epsilon\right)\right] \leq p_x \leq \frac{h\nu}{c}\left[1 - \frac{\nu'}{\nu}\cos\left(\frac{\pi}{2} + \epsilon\right)\right], \tag{10.8}$$

cioè

$$\frac{h\nu}{c}\left(1 - \frac{\nu'}{\nu}\sin\epsilon\right) \leq p_x \leq \frac{h\nu}{c}\left(1 + \frac{\nu'}{\nu}\sin\epsilon\right), \tag{10.9}$$

e quindi avrà l'indeterminazione

$$\Delta p_x \simeq \frac{h\nu'}{c}\mathrm{sen}\epsilon. \tag{10.10}$$

Insieme con la (10.1) si ha

$$\Delta x \Delta p_x \simeq \frac{\lambda'}{\mathrm{sen}\epsilon}\frac{h\nu'}{c}\mathrm{sen}\epsilon, \tag{10.11}$$

dove λ' è la lunghezza d'onda della radiazione diffusa, cioè

$$\lambda' = \frac{c}{\nu'}, \tag{10.12}$$

quindi

$$\Delta x \Delta p_x \simeq h. \tag{10.13}$$

Questa è la <u>relazione d'indeterminazione</u> di Heisenberg.

Capitolo 11

L'analogia tra ottica geometrica e dinamica del punto.

11.1 L'equazione di Hamilton-Jacobi per sistemi conservativi.

Questo paragrafo è un richiamo di nozioni di meccanica analitica necessarie per lo sviluppo dell'argomento successivo.

Consideriamo l'azione di un sistema con n gradi di libertà, descritto dalle coordinate lagrangiane q_i, $i = 1, ..., n$, con Lagrangiana L

$$W[q, t) = \int_0^t dt' L(q(t'), \dot{q}(t')). \tag{11.1}$$

W in generale è un funzionale delle coordinate $q_i(t)$ e una funzione del tempo finale t e finale come indica la notazione usata. Per semplicità abbiamo fissato a zero il tempo iniziale, in quanto non dovremo variarlo.

L non dipende esplicitamente dal tempo, ne dipende solo attraverso le coordinate, quindi il sistema è conservativo.

Consideriamo adesso una variazione del tempo finale t e dei valori finali delle coordinate:

$$q_i(t') \to \bar{q}_i(t') = q_i(t') + \delta_\circ q_i(t'), \tag{11.2}$$

dove con $\delta_\circ$ abbiamo indicato la variazione di q_i a tempo fissato. Dobbiamo infatti considerare una variazione sia dell'argomento (tempo finale) che della forma della funzione $q_i(t')$.

Per W si ha

$$\delta W(q,t) = \int_0^t [\frac{\partial L}{\partial q_i(t')} - \frac{d}{dt'}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(t')}]\delta_\circ q_i(t')dt' + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(t)}\delta_\circ q_i(t) + L\delta t, \quad (11.3)$$

dove $\delta_\circ q_i(t)$ e δt sono le variazioni di q_i e t finali.:

$$t \to \bar{t} = t + \delta t, \quad q_i(t) \to \bar{q}_i(t) = q_i(t) + \delta_\circ q_i(t). \quad (11.4)$$

Osserviamo che si ha

$$\begin{aligned} \delta_\circ q_i(t) = \bar{q}_i(t) - q_i(t) = \\ = \bar{q}_i(\bar{t}) - q_i(t) - (\bar{q}_i(\bar{t}) - \bar{q}_i(t)) = \\ = \bar{q}_i(\bar{t}) - q_i(t) - \dot{\bar{q}}_i(t)\delta t, \end{aligned} \quad (11.5)$$

dove, a meno di termini di ordine superiore, si può porre $\dot{\bar{q}}_i(t)\delta t = \dot{q}_i(t)\delta t$.

Poniamo

$$\delta q_i(t) = \bar{q}_i(\bar{t}) - q_i(t), \quad (11.6)$$

che è la variazione totale, quindi

$$\delta_\circ q_i(t) = \delta q_i(t) - \dot{q}_i(t)\delta t. \quad (11.7)$$

Se ora si calcola l'azione W lungo le traiettorie, quando cioè le equazioni del moto

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_t} = 0 \quad (11.8)$$

sono soddisfatte, si ha dalla (11.3)

$$\delta W(q,t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(t)}\delta q_i(t) - \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(t)}\dot{q}_i(t) - L\right]\delta t \quad (11.9)$$

e, ricordando che è

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad H = p_i \dot{q}_i - L, \tag{11.10}$$

si ha

$$\delta W(q,t) = p_i \delta q_i - H \delta t, \tag{11.11}$$

dove δq_i e δt sono variazioni dei valori finali.

Dalla (11.11) si ha

$$\frac{\partial W}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial W}{\partial t} = -H(p,q), \tag{11.12}$$

o anche

$$\frac{\partial W}{\partial t} + H(\frac{\partial W}{\partial q}, q) = 0, \tag{11.13}$$

che è l'equazione di Hamilton-Jacobi.

Quindi l'equazione di Hamilton-Jacobi è un'equazione differenziale alle derivate parziali del primo ordine, in generale non lineare, per l'azione W calcolata lungo le traiettorie.

Vediamo quale forma assume quest'equazione per un sistema conservativo, la cui Hamiltoniana sia

$$H(p,q) = \sum_i^n \frac{1}{2m_i} p_i^2 + V(q), \quad p_i = m_i \dot{q}_i; \tag{11.14}$$

si ha

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \sum_i^n \frac{1}{2m_i} (\frac{\partial W}{\partial q_i})^2 + V(q) = 0. \tag{11.15}$$

Poiché H non dipende da t, si può provare a separare le variabili q_i e t ponendo

$$W = -Et + S(q), \tag{11.16}$$

con E costante di separazione, da cui

$$-E + H(\frac{\partial S}{\partial q}, q) = 0. \tag{11.17}$$

S è detta l'azione ridotta e l'equazione (11.17) equazione di Hamilton-Jacobi per i sistemi conservativi.

Nel caso (11.14) si ha, per una singola particella di massa m e $(q_i) \equiv (x, y, z)$, $(\dot{q}_i) = \vec{v}$

$$\frac{1}{2m}(\vec{\nabla}S)^2 + V(x, y, z) = E, \tag{11.18}$$

cioè

$$(\vec{\nabla}S)^2 = 2m(E - V) = 2mT, \tag{11.19}$$

dove T è l'energia cinetica.

Poiché S dipende solo da x, y, z e non dipende dal tempo, le superfici $S(x, y, z) =$ costante sono fisse nello spazio e coincidono per la (11.16) con le superfici $W(x, y, z; t) =$ costante a $t = 0$.

Fissato un tempo $t \neq 0$ si avrà che la superficie $W(x, y, z; t) = c$ coinciderà con la superficie $S(x, y, z) = c + Et$, e ad un istante $t' > t$ la superficie $W(x, y, z; t') = c$ coinciderà con la superficie $S(x, y, z) = c + Et'$. Cioè la superficie $W(x, y, z; t) = c$ è un fronte d'onda che si sposta nello spazio, coincidendo istante per istante con tutta la famiglia di superfici $S =$ costante, ottenuta variando questa costante. Ci possiamo chiedere qual'è la velocità di questo fronte d'onda. Si può procedere come per il calcolo della velocità di fase di un'onda con fase istantanea data da $\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t$; in quel caso si poneva

$$\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t = \vec{k} \cdot \vec{x}' - \omega t', \tag{11.20}$$

da cui

$$\vec{v}_f = \frac{\omega}{k} \mathrm{vers}\vec{k}, \tag{11.21}$$

o anche, differenziando $\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t =$ costante.

Si pu 'o allora differenziare l'equazione

$$W(x, y, z; t) = -Et + S(x, y, z) = \text{costante}, \tag{11.22}$$

ottenendo

$$-Edt + \vec{\nabla}S \cdot d\vec{x} = 0, \tag{11.23}$$

cioè, per uno spostamento $d\vec{x}$ perpendicolare alla superficie $S =$ costante, e quindi parallelo a $\vec{\nabla}S$, si ha

$$\frac{dx}{dt} = \frac{E}{|\vec{\nabla} S|}. \tag{11.24}$$

Quindi, la velocità di fase di questo fronte d'onda è

$$\vec{v}_f = \frac{E}{|\vec{\nabla} S|}\vec{n}, \tag{11.25}$$

con $\vec{n}$ versore perpendicolare alla superficie $S =$ costante, e, per la (11.19)

$$v_f = \frac{E}{\sqrt{2mT}}. \tag{11.26}$$

Se v indica la velocità della particella si ha $T = \frac{1}{2}mv^2$, $p = mv$ e la (11.32) si può riscrivere

$$v_f = \frac{E}{p}. \tag{11.27}$$

Si ha perciò che $v_f \neq v$, ma come vettori sono paralleli. Infatti v_f ha la direzione di $\vec{n}$, normale alla superficie $W =$ costante e $\vec{v}$ ha la stessa direzione poichè per la (11.12) si ha

$$\vec{v} = \frac{1}{m}\vec{p} = \frac{1}{m}\vec{\nabla} W. \tag{11.28}$$

Come si vede l'azione calcolata lungo le traiettorie, cioè la soluzione dell'equazione di Hamilton-Jacobi, ci fornisce una descrizione ondulatoria del moto di una particella materiale.

Si può verificare che la relazione (11.33) vale anche per una particella libera relativistica, purchè con E si intenda l'energia totale (l'energia cinetica più l'energia di riposo mc^2, con m massa di riposo della particella).

Si ha infatti per l'Hamiltoniana di una particella libera relativistica

$$H = \sqrt{c^2p^2 + m^2c^4}, \tag{11.29}$$

da cui per la (11.17)

$$E = \sqrt{c^2(\vec{\nabla} S)^2 + m^2c^4}, \tag{11.30}$$

o anche

$$E^2 = c^2(\vec{\nabla} S)^2 + m^2c^4. \tag{11.31}$$

L'equazione (11.25) diventa allora

$$\vec{v}_f = \frac{E}{|\vec{\nabla} S|}\vec{n} = \frac{cE}{\sqrt{E^2 - m^2c^4}}\vec{n} = \frac{E}{p}\vec{n}. \tag{11.32}$$

11.2 Il limite dell'ottica geometrica.

L'equazione d'onda per una componente del campo elettromagnetico ϕ, in un mezzo con indice di rifrazione n, è

$$\nabla^2\phi - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0, \tag{11.33}$$

dove $n/c = v_f$ è la velocità nel mezzo e c è la velocità nel vuoto.

Una soluzione della (11.33) si può porre nella forma

$$\phi(\vec{x}, t) = \exp A(\vec{x}) + ik_\circ(L(\vec{x}) - ct), \tag{11.34}$$

dove $k_\circ$ è il numero d'onde nel vuoto (modulo del vettore di propagazione)

$$k_\circ = \frac{2\pi}{\lambda_\circ} = \frac{\omega}{c} \tag{11.35}$$

e L è detta <u>iconale</u>.

Se k è il numero d'onde nel mezzo si ha

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = nk_\circ, \tag{11.36}$$

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{n}\frac{\omega}{k_\circ} = \frac{c}{n}. \tag{11.37}$$

Se n è costante e se ϕ è un'onda piana, si ha

$$L(\vec{x}) = n\vec{n'} \cdot \vec{x}, \tag{11.38}$$

dove $\vec{n}'$ è la direzione di propagazione. Cioè si ha

$$\text{fase} = k_\circ(L(\vec{x}) - ct) = \vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t. \tag{11.39}$$

Se ora si sostituisce la (11.34) nella (11.33) si ha

$$ik_\circ[2(\vec{\nabla}A)\cdot(\vec{\nabla}L) + \vec{\nabla}^2 L]\phi + [\vec{\nabla}^2 A + (\vec{\nabla}A)^2 - k_\circ^2(\vec{\nabla}L)^2 + n^2 k_\circ^2]\phi = 0 \tag{11.40}$$

e, poiché A e L sono reali, si ha

$$\vec{\nabla}^2 L + 2(\vec{\nabla}A)\cdot(\vec{\nabla}L) = 0, \tag{11.41}$$

$$\vec{\nabla}^2 A + (\vec{\nabla}A)^2 - k_\circ^2(\vec{\nabla}L)^2 + k_\circ^2 n^2 = 0. \tag{11.42}$$

Quanto detto finora è esatto, senza approssimazioni.

Se ora supponiamo che n ed A siano lentamente variabili, o più esattamente che siano circa costanti su di uno spazio pari ad una lunghezza d'onda, che è il limite dell'ottica geometrica, allora nell'equazione (11.42) si ha che i termini in $k_\circ^2$ sono dominanti e si ha

$$(\vec{\nabla}L)^2 = n^2, \tag{11.43}$$

che è l'equazione dell'iconale.

Confrontata con l'equazione (11.19) si vede che c'è un'analogia tra l'ottica geometrica e l'equazione di moto di un punto materiale. Infatti l'una equazione si trasforma nell'altra con la sostiuzione

$$L \leftrightarrow S, \quad n \leftrightarrow \sqrt{2m(E-V)}. \tag{11.44}$$

Sempre in questo limite si può vedere come il principio di Hamilton sia analogo al principio di Fermat. Infatti, il principio di Hamilton si può scrivere

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}(T-V)dt = 0, \tag{11.45}$$

e, nel caso conservativo, poiché $H = \text{costante} = E$, si ha

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}(2T-E)dt = \delta\int_{t_1}^{t_2}2T dt = 0, \tag{11.46}$$

o anche, poiché $dt = ds/v = ds/\sqrt{2T/m}$

$$\delta \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{2mT} ds = 0, \tag{11.47}$$

che, nell'analogia, diventa il principio di Fermat

$$\delta \int_{s_1}^{s_2} n ds = 0. \tag{11.48}$$

11.3 L'equazione d'onda di Schrödinger.

Trattando l'analogia tra ottica geometrica e meccanica del punto, abbiamo visto che l'analogo dell'indice di rifrazione in meccanica del punto è dato da

$$\frac{n}{c} \rightarrow \frac{\sqrt{2m(E-V)}}{E}, \tag{11.49}$$

dove

$$v_f = \frac{c}{n} \tag{11.50}$$

è la velocità di fase cui corrisponde per il punto materiale la velocità di fase

$$u = \frac{E}{\sqrt{2m(E-V)}} = \frac{E}{mv} = \frac{E}{p}, \tag{11.51}$$

dove v è la velocità della particella

$$v = \sqrt{\frac{2T}{m}}. \tag{11.52}$$

Proseguendo nell'analogia allo scopo di costruire una meccanica ondulatoria, occorre avere l'analogo della lunghezza d'onda dell'onda associata alla particella. L'ipotesi di De Broglie (1923-1925) è ciò che serve a questo scopo. Secondo De Broglie, la lunghezza d'onda associata ad una particella con impulso p è data dalla relazione

$$\lambda = \frac{h}{p}, \tag{11.53}$$

alla quale possiamo aggiungere la reazione di Planck

$$\nu = \frac{E}{h}, \tag{11.54}$$

in modo che

$$\lambda\nu = \frac{E}{p} = u \tag{11.55}$$

è la velocità di fase.

In questo modo possiamo scrivere l'analoga equazione per le onde di materia, partendo da quella per le onde elettromagnetiche:

$$\vec{\nabla}^2\psi(\vec{x},t) = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\psi(\vec{x},t)}{\partial t^2}, \tag{11.56}$$

ottenendo

$$\vec{\nabla}^2\psi(\vec{x},t) = \frac{2m(E-V)}{E^2}\frac{\partial^2\psi(\vec{x},t)}{\partial t^2}. \tag{11.57}$$

Quest'equazione, come la (11.56), non è una vera equazione d'onda, in quanto ha una dipendenza dall'energia.

È tuttavia applicabile al caso di un'onda monoenergetica, così come la (11.56) è applicabile ad un onda monocromatica. Infatti, in questo caso, si ha

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -\omega^2\psi = -4\pi^2\nu^2\psi = -\frac{4\pi^2E^2}{h^2}\psi = -(\frac{E}{\hbar})^2\psi \tag{11.58}$$

e, sostituendo nell'equazione (11.57),

$$\vec{\nabla}^2\psi(\vec{x},t) = -\frac{2m(E-V)}{\hbar^2}\psi(\vec{x},t), \tag{11.59}$$

cioè

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2 + V\right)\psi(\vec{x},t) = E\psi(\vec{x},t). \tag{11.60}$$

Questa è la prima forma dell'equazione di Schrödinger per una particella di energia totale E. E' anche detta equazione agli autovalori per l'energia, in quanto le sue soluzioni sono autostati dell'operatore

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2 + V, \tag{11.61}$$

corrispondenti all'autovalore E.

La prima applicazione dell'equazione (11.60) fu per dedurre i livelli di energia dell'atomo d'idrogeno (Schrödinger, 1926). Così come avviene nel caso classico, anche qui saranno le condizioni al contorno (in questo caso condizioni allinfinito) su ψ che fisseranno i valori dell'energia dei livelli.

Non abbiamo fatto finora nessuna ipotesi sulla realtà della ψ. Osserviamo però che la (11.60) è lineare e che perciò potremmo considerare soluzioni complesse, salvo poi prenderne la parte reale, come si fa nel caso delle onde elettromagnetiche.

Non c'è però qui alcun motivo perchè la ψ sia reale; in realtà sarà in generale considerata complessa.

Appendice A

A.1 Energia di irraggiamento.

L'equazione (1.3) definisce l'energia irraggiata dalla superficie dS nel tempo dt, nella direzione dell'angolo solido $d\Omega$ e nell'intervallo di frequenza $(\nu, \nu + d\nu)$. La superficie dS' è la proiezione della superficie dS nella direzione ortogonale a quella dell'angolo solido $d\Omega$.

Più completamente si ha che l'energia irraggiata dalla superficie $d\sigma_1$ sulla superficie $d\sigma_2$, posta a distanza $\vec{r}$, vettore che forma gli angoli θ_1 e θ_2 con le normali alle due superfici, è data da

$$\frac{k(\nu, T)}{r^2}(d\sigma_1 \cos\theta_1)(d\sigma_2 \cos\theta_2)dtd\nu. \tag{A.1}$$

Questa espressione si può scrivere indifferentemente come

$$k(\nu, T)(d\sigma_1 \cos\theta_1)d\Omega_2 dtd\nu, \tag{A.2}$$

o anche

$$k(\nu, T)(d\sigma_2 \cos\theta_2)d\Omega_1 dtd\nu, \tag{A.3}$$

poiché

$$d\Omega_2 = d\sigma_2 \cos\theta_2 \frac{1}{r^2}, \tag{A.4}$$

e analogamente scambiando gli indici 1 e 2.

Nella (1.3) è stata utilizzata la forma (A.2) (o (A.3)).

Bibliografia

[1] E.V.H.Wichmann, La fisica di Berkeley 4, Fisica Quantistica, ed. Zanichelli, Bologna, 1984.

1. PHYSICAL CONSTANTS

Table 1.1. Reviewed 2002 by P.J. Mohr and B.N. Taylor (NIST). Based mainly on the "CODATA Recommended Values of the Fundamental Physical Constants: 1998" by P.J. Mohr and B.N. Taylor, J. Phys. Chem. Ref. Data **28**, 1713 (1999) and Rev. Mod. Phys. **72**, 351 (2000). The last group of constants (beginning with the Fermi coupling constant) comes from the Particle Data Group. The figures in parentheses after the values give the 1-standard-deviation uncertainties in the last digits; the corresponding fractional uncertainties in parts per 10^9 (ppb) are given in the last column. This set of constants (aside from the last group) is recommended for international use by CODATA (the Committee on Data for Science and Technology). The full 1998 CODATA set of constants may be found at `http://physics.nist.gov/constants`

Quantity	Symbol, equation	Value	Uncertainty (ppb)
speed of light in vacuum	c	299 792 458 m s^{-1}	exact*
Planck constant	h	6.626 068 76(52)$\times 10^{-34}$ J s	78
Planck constant, reduced	$\hbar \equiv h/2\pi$	1.054 571 596(82)$\times 10^{-34}$ J s	78
		= 6.582 118 89(26)$\times 10^{-22}$ MeV s	39
electron charge magnitude	e	1.602 176 462(63)$\times 10^{-19}$ C = 4.803 204 20(19)$\times 10^{-10}$ esu	39, 39
conversion constant	$\hbar c$	197.326 960 2(77) MeV fm	39
conversion constant	$(\hbar c)^2$	0.389 379 292(30) GeV^2 mbarn	78
electron mass	m_e	0.510 998 902(21) MeV/c^2 = 9.109 381 88(72)$\times 10^{-31}$ kg	40, 79
proton mass	m_p	938.271 998(38) MeV/c^2 = 1.672 621 58(13)$\times 10^{-27}$ kg	40, 79
		= 1.007 276 466 88(13) u = 1836.152 667 5(39) m_e	0.13, 2.1
deuteron mass	m_d	1875.612 762(75) MeV/c^2	40
unified atomic mass unit (u)	(mass ^{12}C atom)/12 = (1 g)/(N_A mol)	931.494 013(37) MeV/c^2 = 1.660 538 73(13)$\times 10^{-27}$ kg	40, 79
permittivity of free space	$\epsilon_0 = 1/\mu_0 c^2$	8.854 187 817 ... $\times 10^{-12}$ F m^{-1}	exact
permeability of free space	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$ N A^{-2} = 12.566 370 614 ... $\times 10^{-7}$ N A^{-2}	exact
fine-structure constant	$\alpha = e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c$	7.297 352 533(27)$\times 10^{-3}$ = 1/137.035 999 76(50)†	3.7, 3.7
classical electron radius	$r_e = e^2/4\pi\epsilon_0 m_e c^2$	2.817 940 285(31)$\times 10^{-15}$ m	11
(e^- Compton wavelength)/2π	$\lambda\!\!\!^{-}_e = \hbar/m_e c = r_e\alpha^{-1}$	3.861 592 642(28)$\times 10^{-13}$ m	7.3
Bohr radius ($m_{\text{nucleus}} = \infty$)	$a_\infty = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/m_e e^2 = r_e\alpha^{-2}$	0.529 177 208 3(19)$\times 10^{-10}$ m	3.7
wavelength of 1 eV/c particle	$hc/(1\text{ eV})$	1.239 841 857(49)$\times 10^{-6}$ m	39
Rydberg energy	$hcR_\infty = m_e e^4/2(4\pi\epsilon_0)^2\hbar^2 = m_e c^2\alpha^2/2$	13.605 691 72(53) eV	39
Thomson cross section	$\sigma_T = 8\pi r_e^2/3$	0.665 245 854(15) barn	22
Bohr magneton	$\mu_B = e\hbar/2m_e$	5.788 381 749(43)$\times 10^{-11}$ MeV T^{-1}	7.3
nuclear magneton	$\mu_N = e\hbar/2m_p$	3.152 451 238(24)$\times 10^{-14}$ MeV T^{-1}	7.6
electron cyclotron freq./field	$\omega^e_{\text{cycl}}/B = e/m_e$	1.758 820 174(71)$\times 10^{11}$ rad s^{-1} T^{-1}	40
proton cyclotron freq./field	$\omega^p_{\text{cycl}}/B = e/m_p$	9.578 834 08(38)$\times 10^{7}$ rad s^{-1} T^{-1}	40
gravitational constant‡	G_N	6.673(10)$\times 10^{-11}$ m^3 kg^{-1} s^{-2}	1.5×10^6
		= 6.707(10)$\times 10^{-39}$ $\hbar c$ (GeV/c^2)$^{-2}$	1.5×10^6
standard gravitational accel.	g_n	9.806 65 m s^{-2}	exact
Avogadro constant	N_A	6.022 141 99(47)$\times 10^{23}$ mol^{-1}	79
Boltzmann constant	k	1.380 650 3(24)$\times 10^{-23}$ J K^{-1}	1700
		= 8.617 342(15)$\times 10^{-5}$ eV K^{-1}	1700
molar volume, ideal gas at STP	$N_A k$(273.15 K)/(101 325 Pa)	22.413 996(39)$\times 10^{-3}$ m^3 mol^{-1}	1700
Wien displacement law constant	$b = \lambda_{\text{max}} T$	2.897 768 6(51)$\times 10^{-3}$ m K	1700
Stefan-Boltzmann constant	$\sigma = \pi^2 k^4/60\hbar^3 c^2$	5.670 400(40)$\times 10^{-8}$ W m^{-2} K^{-4}	7000
Fermi coupling constant**	$G_F/(\hbar c)^3$	1.166 39(1)$\times 10^{-5}$ GeV^{-2}	9000
weak-mixing angle	$\sin^2\widehat{\theta}(M_Z)$ ($\overline{\text{MS}}$)	0.23113(15)††	6.5×10^5
$W^\pm$ boson mass	m_W	80.423(39) GeV/c^2	4.8×10^5
Z^0 boson mass	m_Z	91.1876(21) GeV/c^2	2.3×10^4
strong coupling constant	$\alpha_s(m_Z)$	0.1172(20)	1.7×10^7

π = 3.141 592 653 589 793 238 e = 2.718 281 828 459 045 235 γ = 0.577 215 664 901 532 861

1 in ≡ 0.0254 m	1 G ≡ 10^{-4} T	1 eV = 1.602 176 462(63) $\times 10^{-19}$ J	kT at 300 K = [38.681 686(67)]$^{-1}$ eV
1 Å ≡ 0.1 nm	1 dyne ≡ 10^{-5} N	1 eV/c^2 = 1.782 661 731(70) $\times 10^{-36}$ kg	0 °C ≡ 273.15 K
1 barn ≡ 10^{-28} m^2	1 erg ≡ 10^{-7} J	2.997 924 58 $\times 10^9$ esu = 1 C	1 atmosphere ≡ 760 Torr ≡ 101 325 Pa

* The meter is the length of the path traveled by light in vacuum during a time interval of 1/299 792 458 of a second.
† At $Q^2 = 0$. At $Q^2 \approx m_W^2$ the value is $\sim 1/128$.
‡ Absolute lab measurements of G_N have been made only on scales of about 1 cm to 1 m.
** See the discussion in Sec. 10, "Electroweak model and constraints on new physics."
†† The corresponding $\sin^2\theta$ for the effective angle is 0.23143(15).

Figura A.1: Costanti fisiche