

# **Appunti di Relatività Speciale**

Roberto Casalbuoni

Dipartimento di Fisica dell'Università di Firenze  
a.a. 2004-2005

# Indice

<b>1</b>	<b>Le deviazioni dalla meccanica newtoniana</b>	<b>3</b>
1.1	Esiste un limite superiore alla velocità? . . . . .	3
1.2	Fotoni . . . . .	9
1.3	L'inerzia dell'energia . . . . .	11
1.4	Energia, impulso e massa . . . . .	14
1.5	Commenti . . . . .	18
<b>2</b>	<b>L'affermazione del principio di relatività</b>	<b>19</b>
2.1	Il principio di relatività in meccanica e le trasformazioni di Galileo . . . . .	19
2.2	L'invarianza della fase di un'onda piana . . . . .	23
2.3	Effetto Doppler . . . . .	25
2.4	Velocità di fase, velocità di gruppo e aberrazione della luce . . . . .	27
2.4.1	La velocità di fase e la velocità di gruppo . . . . .	27
2.4.2	Legge di trasformazione della velocità di gruppo . . . . .	29
2.4.3	L'aberrazione della luce . . . . .	30
2.5	L'esperimento di Michelson . . . . .	33
<b>3</b>	<b>La critica della simultaneità e la cinematica relativistica</b>	<b>36</b>
3.1	Critica della simultaneità . . . . .	36
3.1.1	Dimostrazione della consistenza della definizione di sincronizzazione . . . . .	38
3.1.2	Relatività della simultaneità . . . . .	40
3.1.3	Le trasformazioni di Lorentz . . . . .	40
<b>4</b>	<b>Le proprietà delle trasformazioni di Lorentz</b>	<b>48</b>
4.1	Forma generale delle trasformazioni di Lorentz . . . . .	48
4.2	Contrazione delle lunghezze e dilatazione dei tempi . . . . .	49

4.2.1	Orologio a luce . . . . .	51
4.2.2	Inversione temporale . . . . .	54
4.3	La legge di composizione delle velocità . . . . .	56
4.4	Effetto Doppler relativistico e aberrazione della luce . . . . .	57
<b>5</b>	<b>Elementi di calcolo tensoriale</b>	<b>60</b>
5.1	Spazi vettoriali . . . . .	60
5.2	Tensori . . . . .	62
5.3	Spazi metrici . . . . .	67
5.4	Lo spazio di Minkowski . . . . .	69
<b>6</b>	<b>Meccanica relativistica</b>	<b>75</b>
6.1	Quadriforza e dinamica relativistica. . . . .	75
6.2	Impulso ed energia . . . . .	79
6.3	Sistema del centro di massa ed equivalenza massa-energia . . .	83
6.4	Difetto di massa . . . . .	85
6.5	Applicazioni di meccanica e cinematica relativistiche . . . . .	88
<b>7</b>	<b>Elettrodinamica nel vuoto.</b>	<b>94</b>
7.1	La corrente e la densità elettromagnetiche . . . . .	94
7.2	La forma covariante delle equazioni di Maxwell. . . . .	96
7.3	Le proprietà di trasformazione dei campi. . . . .	98
7.4	Potenziali di gauge . . . . .	100
<b>A</b>	<b>Appendice sulle unità di misura.</b>	<b>102</b>
A.1	Equazioni di Maxwell . . . . .	102
A.2	Unità di energia . . . . .	105

# Capitolo 1

## Le deviazioni dalla meccanica newtoniana

### 1.1 Esiste un limite superiore alla velocità?

In accordo alle legge di Newton non c'è un limite superiore per le velocità. Infatti possiamo pensare di esercitare una forza costante ad un corpo e la sua velocità aumenterà linearmente con il tempo. Per esempio, se applichiamo al corpo una accelerazione pari a quella di gravità,  $g = 9.8m/s^2$ , la sua velocità al tempo  $t$  sarà

$$v(t) = gt = 9.8t \text{ m/s} \quad (1.1)$$

Dato che in un anno ci sono

$$1 \text{ anno} = 365 \times 24 \times 3600 \text{ s} \approx 3.15 \times 10^7 \text{ s} \approx \pi \times 10^7 \text{ s} \quad (1.2)$$

vediamo che dopo un anno la velocità raggiunta sarà pari a

$$v \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s} \quad (1.3)$$

che è circa la velocità della luce. È però possibile ottenere velocità molto grandi in tempi brevi se si dispone di una forza più intensa di quella gravitazionale e se l'oggetto che vogliamo accelerare ha massa piccola (perché questo non è vero nel caso della forza gravitazionale?), dato che per una forza costante

$$v(t) = \frac{F}{m} t \quad (1.4)$$

dove  $F$  è la forza agente e  $m$  è la massa dell'oggetto che stiamo accelerando. A titolo di esempio consideriamo un elettrone che vada dal catodo all'anodo di un tubo a vuoto con una differenza di potenziale pari a  $\Delta V = 100 \text{ V}$ . L'energia cinetica che acquista un elettrone sarà

$$\frac{1}{2}mv^2 = e\Delta V \approx 1.6 \times 10^{-19} \times 100 \text{ J} = 1.6 \times 10^{-17} \text{ J} \quad (1.5)$$

Vediamo che

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{2e\Delta V}{m}} \approx \sqrt{\frac{2 \times 1.6 \times 10^{-17} \text{ J}}{9.1 \times 10^{-31} \text{ Kg}}} \\ &\approx \sqrt{36 \times 10^{12}} \text{ m/s} = 6 \times 10^6 \text{ m/s} = 6000 \text{ Km/s} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Se la distanza tra catodo e anodo fosse  $2 \text{ mm}$ , da

$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}vt \quad (1.7)$$

segue

$$t = \frac{2s}{v} \quad (1.8)$$

e quindi

$$a = \frac{v}{t} = \frac{v^2}{2s} = \frac{36 \times 10^{12} \text{ m}^2/\text{s}^2}{4 \times 10^{-3} \text{ m}} = 9 \times 10^{15} \text{ m/s}^2 \quad (1.9)$$

Si può vedere subito che l'accelerazione in questo caso è enormemente più grande che nel caso gravitazionale. Infatti

$$\frac{a}{g} \approx \frac{9 \times 10^{15}}{9.8} \approx 10^{15} \quad (1.10)$$

Sperimentalmente si vede che anche in una situazione di questo tipo, cioè a queste velocità, la dinamica di Newton fornisce una ottima descrizione. Le cose vanno però diversamente se la differenza di potenziale applicata è molto più grande, dell'ordine dei milioni di Volts. A questo proposito vale la pena di ricordare che una unità di misura conveniente nel campo microscopico è l'elettronvolt ( $eV$ ), definito come l'energia acquisita da una carica elettrica pari a quella dell'elettrone attraverso la differenza di potenziale di un Volt. Quindi

$$1 \text{ eV} = 1.602176 \times 10^{-19} \text{ C} \times 1 \text{ V} = 1.602176 \times 10^{-19} \text{ J} \quad (1.11)$$

Una accelerazione tale da dar luogo ad elettroni con energie dell'ordine di  $10^6 \text{ eV} = 1 \text{ MeV}$  si può ottenere con un generatore Van de Graaf. Se il Van de Graaf si accoppia ad un misuratore di tempo di volo, come illustrato nella figura 1.1, si ottiene un dispositivo che ci permette di esplorare cosa succeda agli elettroni a velocità altissime, dell'ordine della velocità della luce. Gli elettroni accelerati nel Van de Graaf sino a  $1.5 \text{ MeV}$  vengono inviati nel LINAC, dove vengono ulteriormente accelerati nel primo tratto tramite un sistema di radiofrequenze. Viene misurato il tempo di volo tra i punti  $A$  e  $B$  tramite i corrispondenti elettrodi che danno un segnale nell'oscilloscopio (vedi fig. 1.2). Dato che i cavi che portano all'oscilloscopio sono di uguale lunghezza, la differenza temporale misurata tra gli impulsi in  $A$  e  $B$  rappresenta effettivamente il tempo impiegato dagli elettroni per andare da  $A$  a  $B$ . Stiamo facendo qui una approssimazione, che è quella di non tener conto della variazione di velocità nel primo tratto del LINAC a causa della ulteriore accelerazione. D'altra parte si vede che l'accelerazione successiva provoca solo una piccola variazione della velocità. La velocità si ottiene dunque dalle dimensioni del LINAC,  $\ell = 8.4 \text{ m}$  divise per il tempo di volo

$$v = \frac{\ell}{t} \quad (1.12)$$

Nel caso di accelerazione sino a  $0.5 \text{ MeV}$ , che corrisponde ad impulsi come in fig. 1.2, si ha  $t \approx 3.3 \times 10^{-8} \text{ s}$  e quindi

$$v \approx \frac{8.4}{3.3 \times 10^{-8} \text{ s}} \approx 2.5 \times 10^8 \text{ m/s} \quad (1.13)$$

. D'altra parte la velocità, in accorda alla fisica di Newton, si può anche ottenere uguagliando l'energia cinetica  $K$  all'energia acquisita nel Van de Graaf

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = e\Delta V \quad (1.14)$$

Si può dunque costruire la tabella 1.1. È subito chiaro che i risultati sono in contraddizione con quanto ci aspettiamo. Infatti nel passare da  $0.5 \text{ MeV}$  a  $15 \text{ MeV}$  di accelerazione ci saremmo aspettati che il quadrato della velocità cambiasse di un fattore 30, mentre cambia solo di 1.3. In effetti, data la non grande accuratezza di una misura di questo tipo, la differenza di velocità tra  $0.5$  e  $4.5 \text{ MeV}$  è difficilmente rivelabile. Il risultato è illustrato in figura 1.3.

Ovviamente occorre essere sicuri che gli elettroni ricevono effettivamente l'energia pari a  $e\Delta V$ , ma questo viene verificato sperimentalmente effettuando una misura di tipo calorimetrico dell'energia degli elettroni che arrivano

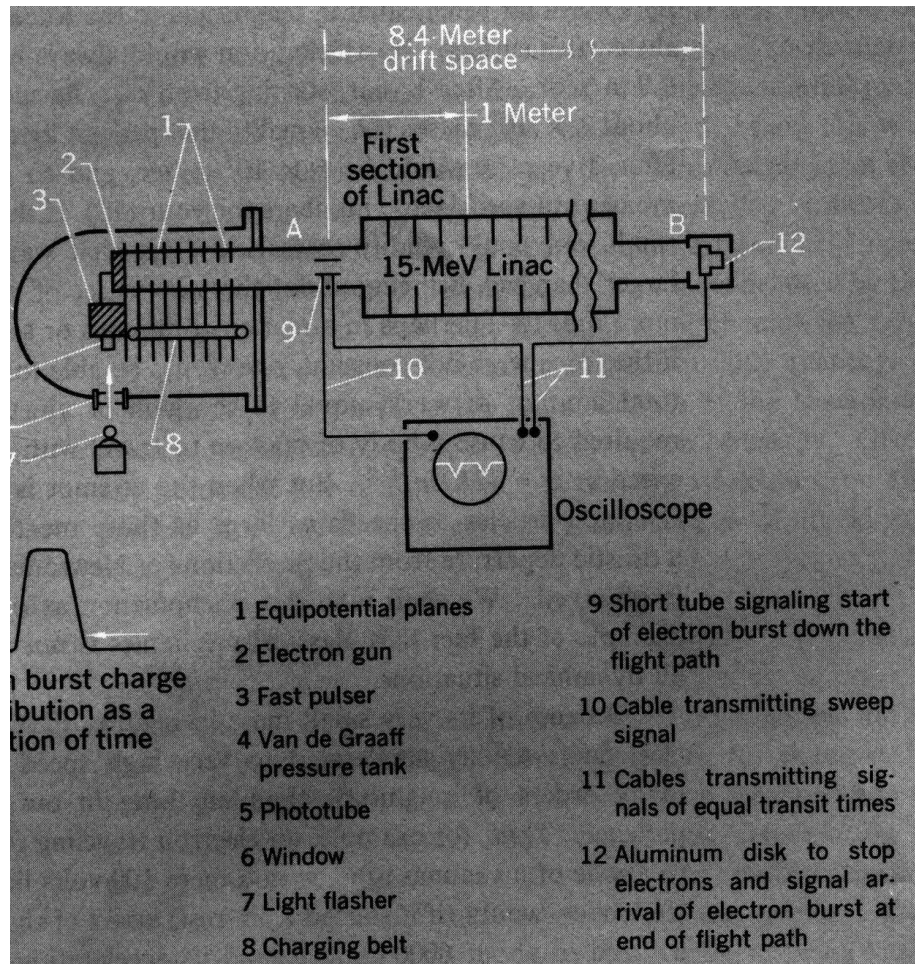


Figura 1.1: Diagramma di un apparato per la misura del tempo di volo di un elettrone

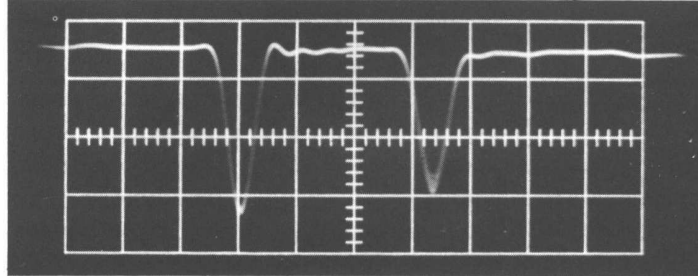


Figura 1.2: La traccia dell'oscilloscopio mostra gli impulsi dovuti agli elettroni da  $0.5 \text{ MeV}$  all'inizio e alla fine del tratto di volo di  $8.4 \text{ m}$ . Da notare che una divisione della scala corrisponde a circa  $10^{-8} \text{ s}$ .

Energia fornita $e\Delta V$	Tempo di volo $t \times 10^{-8} \text{ s}$	Velocità dell'elettrone $v \times 10^8 \text{ m/s}$	$v^2 \times 10^{16} \text{ m}^2/\text{s}^2$
0.5	3.23	2.60	6.8
1.0	3.08	2.73	7.5
1.5	2.92	2.88	8.3
4.5	2.84	2.96	8.8
15	2.80	3.00	9.0

Tabella 1.1: Le quantità misurate nell'esperimento al LINAC.

in  $B$ . In figura 1.3 abbiamo riportato anche la linea che corrisponde alla predizione newtoniana, cioè

$$v^2 = \frac{2e\Delta V}{m} \approx 3.5 \times 10^{17} \Delta V (\text{MeV}) \quad (1.15)$$

Vediamo che anche all'energia più bassa,  $0.5 \text{ MeV}$ , la formula newtoniana predice  $v^2 \approx 1.75 \times 10^{17}$  che è più di un fattore 2 maggiore del valore sperimentale dato in Tabella 1.1. Mentre la formula newtoniana funziona bene sino ad energie dell'ordine del  $\text{KeV}$ , vediamo che fallisce completamente ad energie più elevate. Inoltre, mentre non c'è un limite superiore alla velocità nella dinamica di Newton, l'andamento trovato mostra che la curva satura verso una velocità di  $\approx 3 \times 10^8 \text{ m/s}$  cioè alla velocità della luce. Questo è ancora più evidente se si considera la misura fatta a  $15 \text{ MeV}$ , non riportata nel grafico. Il risultato sperimentale è quindi consistente con la seguente affermazione: **Esiste una velocità limite per gli oggetti materiali e questa è la velocità della luce.**



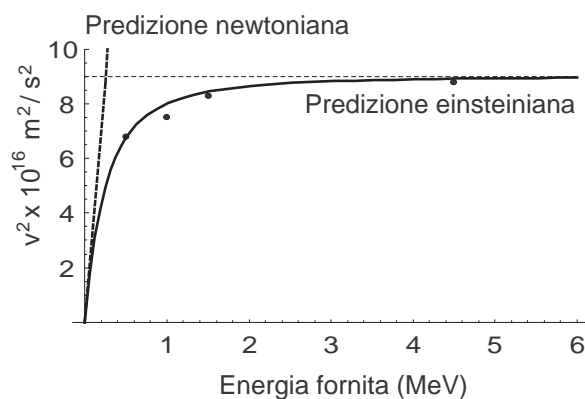


Figura 1.3: Il grafico mostra il quadrato della velocità misurata dal tempo di volo, in funzione dell'energia fornita dal van de Graaf e dal LINAC. La linea tratteggiata è la predizione che segue dalle equazioni di Newton. I punti sono i dati sperimentali, e la linea continua è la predizione che segue dalla relatività di Einstein (vedi dopo).

Per quanto sorprendente possa essere questo risultato lo è ancora di più se lo esaminiamo da un altro punto di vista. Supponiamo di avere un LINAC molto lungo nel quale si accelerano continuamente gli elettroni. Supponiamo inoltre di essere in un riferimento che si muove solidalmente con gli elettroni accelerati da una differenza di potenziale di 0.5 MV. Possiamo allora facilmente immaginare che gli elettroni continueranno ad accelerare fino a raggiungere ancora la velocità equivalente a 0.5 MeV nel riferimento in moto, cioè  $2.6 \times 10^8 \text{ m/s}$  (vedi Tabella 1.1). Ma questo significa che questi elettroni avranno una velocità, rispetto al riferimento fisso data  $2 \times 2.6 \times 10^8 \text{ m/s}$  che è più grande della velocità della luce, in contraddizione con il risultato sperimentale. Dunque questo risultato mette in dubbio la formula newtoniana di addizione delle velocità. ma quale è l'origine profonda di questa formula? Come vedremo è nella natura stessa della nostra concezione di spazio e di tempo. L'analisi profonda di Einstein fa infatti riferimento a queste concezioni e mostra come il problema delle misure di spazio e di tempo debba

essere reimpostato.

Una domanda che nasce spontanea dall'esperimento che abbiamo studiato è che fine faccia l'energia che forniamo agli elettroni se esiste una velocità limite. Dato che questa velocità coincide sperimentalmente con la velocità della luce, sembra ragionevole andare ad esaminare più in dettaglio alcune proprietà della luce stessa.

## 1.2 Fotoni

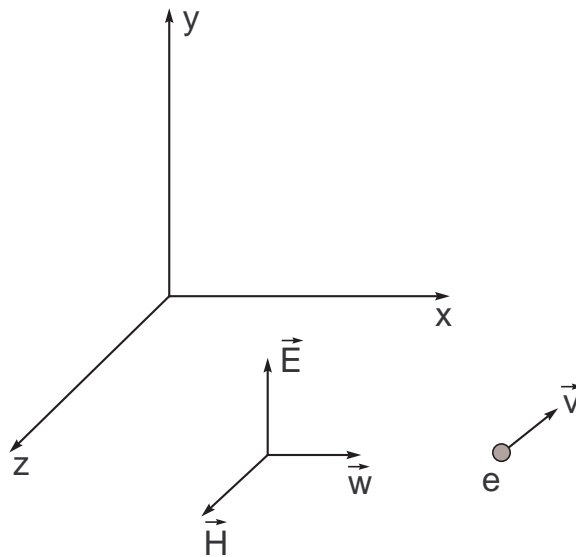


Figura 1.4: La figura mostra la propagazione di un'onda elettromagnetica che incide su una particella di carica  $e$ .

Come vedremo meglio in seguito nella parte di Quanti di questo corso Einstein ipotizzò che l'energia luminosa  $U$  che compete alla banda di frequenze compresa tra  $\nu$  e  $\nu + d\nu$ , fosse composta da un numero di fotoni pari a

$$n = \frac{U}{h\nu} \quad (1.16)$$

dove  $h$  è la costante di Planck

$$h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \quad (1.17)$$

È da notare che la costante di Planck ha le dimensioni di un'azione cioè di una energia per un tempo. L'affermazione precedente è equivalente a dire che ogni fotone ha una energia pari a

$$E = h\nu \quad (1.18)$$

Una conferma a queste idee venne anche dall'effetto Compton (1923), cioè nello studio della diffusione di un fotone su elettroni. Tutto succede come se la radiazione fosse composta da particelle (fotoni) con energia pari a quella della formula (1.18) ed impulso pari a

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} \quad (1.19)$$

Questa relazione tra energia ed impulso trasportato da un'onda elettromagnetica è facilmente dimostrabile nel contesto della teoria di Maxwell. Supponiamo infatti di avere un'onda e.m. che si propaga nella direzione dell'asse delle  $x$  con campi elettrico e magnetico diretti rispettivamente lungo l'asse  $y$  e l'asse  $z$ , come mostrato in figura 1.4. Quindi

$$\vec{E} = (0, E, 0), \quad \vec{H} = (0, 0, H), \quad E = H \quad (1.20)$$

Il lavoro fatto nel tempo  $dt$  dal campo elettrico su una particella di carica  $e$  che si muove con velocità  $\vec{v}$  è dato da

$$dL = e\vec{E} \cdot \vec{v}dt = eEv_ydt \quad (1.21)$$

D'altra parte la forza che agisce lungo l'asse  $x$  (direzione di propagazione) è data da

$$F_x = e \left( \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \wedge \vec{H} \right) = \frac{e}{c} v_y H \quad (1.22)$$

Pertanto l'impulso trasmesso dall'onda alla particella è dato da

$$dp = \frac{e}{c} v_y H dt = \frac{dL}{c} \quad (1.23)$$

Dunque l'impulso trasferito alla particella è uguale all'energia trasferita divisa per la velocità della luce.

Se quanto detto sopra è corretto vediamo che la velocità dei fotoni è sempre uguale alla velocità della luce indipendentemente dalla loro energia. Questo è stato verificato sperimentalmente a partire da fotoni di energia

$10^{-7} eV$  sino ad energie dell'ordine di  $10^8 eV$ , cioè su 15 ordini di grandezza in energia. Quindi i fotoni appaiono molto simili agli elettroni di alta energia la cui velocità, come abbiamo visto, è indipendente dall'energia e pari alla velocità della luce. È interessante osservare che nel caso newtoniana, la relazione tra energia ed impulso è data da

$$K = \frac{1}{2}vp \quad (1.24)$$

che differisce per un fattore 2 da quella dei fotoni. In realtà anche per gli elettroni di alta energia si osserva sperimentalmente (tramite collisioni atomiche) che il loro impulso è dato da  $K/c$ , in accordo con quanto vale per i fotoni.

Nella prossima Sezione cercheremo di dare una risposta al quesito su dove vada a finire l'energia degli elettroni o dei fotoni se non si ha un aumento della velocità.

### 1.3 L'inerzia dell'energia

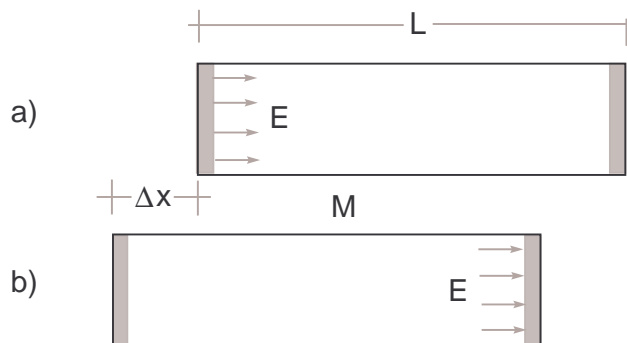


Figura 1.5: La scatola passa dalla posizione a) alla posizione b) per effetto dell'emissione luminosa dal lato sinistro.

Consideriamo il seguente esperimento pensato (gedanken experiment) inventato da Einstein nel 1906. Immaginiamo che una quantità di energia luminosa sia emessa dal lato sinistro della scatola nella posizione a) in figura 1.5. Per la conservazione dell'impulso la scatola deve acquistare un impulso

opposto a quello della radiazione e si muoverà verso sinistra. Quando la radiazione viene assorbita sul lato destro la scatola si fermerà in una posizione diversa da quella iniziale. Riesce però difficile immaginare che il centro di massa del sistema si sia spostato, dato che si ha un sistema isolato. La sola soluzione possibile sembra essere quella in cui il fotone trasporta una massa dal lato sinistro al lato destro. Per calcolare questa massa, osserviamo che l'impulso acquistato dalla scatola sarà pari a  $-E/c$  e quindi si muoverà con velocità

$$v = -\frac{E}{Mc} \quad (1.25)$$

In buona approssimazione la radiazione arriva sull'altro lato della scatola dopo un tempo pari a

$$\Delta t = \frac{L}{c} \quad (1.26)$$

e quindi lo spostamento della scatola in questo tempo sarà

$$\Delta x = v\Delta t = -\frac{E}{Mc} \times \frac{L}{c} = -\frac{EL}{Mc^2} \quad (1.27)$$

Se associamo alla radiazione una massa equivalente  $m$ , che passa dal lato sinistro al lato destro, la condizione che il centro di massa sia rimasto nella posizione iniziale richiede

$$mL + M\Delta x = 0 \quad (1.28)$$

da cui

$$m = -\frac{M}{L}\Delta x = \frac{E}{c^2} \quad (1.29)$$

Quindi

$$E = mc^2 \quad (1.30)$$

Sebbene qui  $m$  venga associata alla radiazione, in realtà le implicazioni sono molto più grandi. Infatti occorre riconoscere che quando la radiazione viene emessa dal lato sinistro, questo subisce una perdita di massa pari a  $m$ , che viene trasportata via sotto forma di radiazione e che viene ritrasformata in massa all'altra estremità. Quindi l'implicazione è che all'energia sia associata una massa e viceversa. In definitiva ad ogni variazione  $\Delta E$  dell'energia di un corpo corrisponde una variazione della massa inerziale tale che  $\Delta E = \Delta mc^2$ .

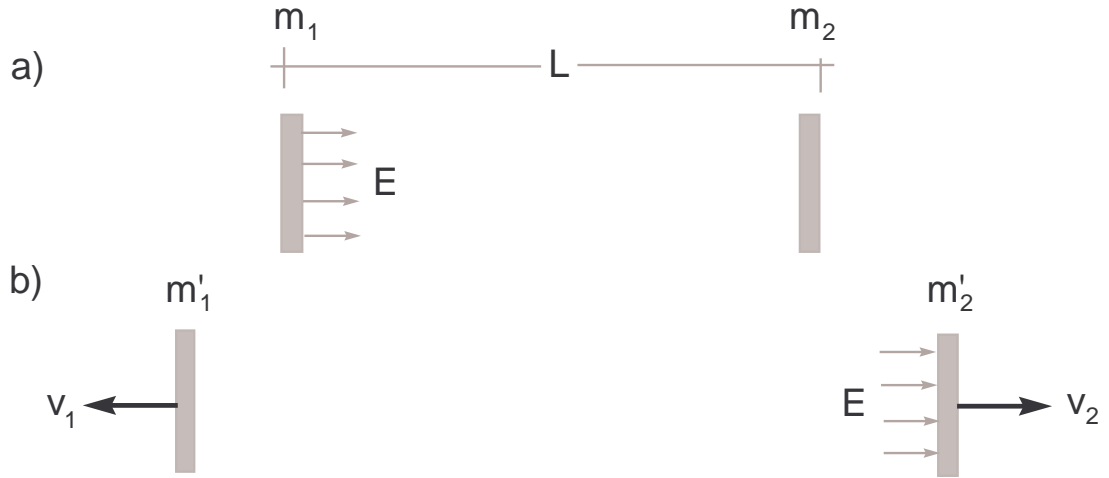


Figura 1.6: Versione migliorata dell'esperimento di Einstein.

Nella discussione precedente abbiamo trattato la scatola come un corpo rigido. L'idea di corpo rigido non ha però significato se si accetta l'idea di una velocità limite. Infatti un corpo può essere rigido solo se le informazioni tra le sue parti vengono trasmesse a velocità infinita. In figura 1.6 è rappresentata una versione dell'esperimento di Einstein che non fa uso di una scatola, ma di due masse  $m_1$  e  $m_2$ . La massa  $m_1$  emette radiazione e quindi si muove verso sinistra con velocità  $v_1$  e contemporaneamente varia la sua massa da  $m_1$  a  $m'_1$ . Quando la radiazione arriva sulla massa a destra, viene assorbita conferendole una velocità  $v_2$ . Anche in questo caso la massa cambia da  $m_2$  a  $m'_2$ . Richiedendo che la massa totale del sistema non cambi e che il baricentro rimanga nella posizione originaria si ritrova la relazione di Einstein. Infatti si ha

$$v_1 = -\frac{E}{m'_1 c} \quad (1.31)$$

e la posizione di al tempo  $t$  sarà (usando un sistema di coordinate tale che  $x_1(0) = 0$  e  $x_2(0) = L$ )

$$x(t) = -\frac{E}{m'_1 c} t \quad (1.32)$$

Analogamente si ha

$$v_2 = \frac{E}{m'_2 c} \quad (1.33)$$

e

$$x_2(t) = L + \frac{E}{m'_2 c} \left( t - \frac{L}{c} \right) \quad (1.34)$$

dove si è tenuto conto che la massa  $m_2$  inizia a muoversi al tempo  $L/c$  quando la radiazione la raggiunge (anche in questo caso si assume che le velocità delle due acquisite dalle due masse siano piccole rispetto a  $c$ ). La posizione del centro di massa prima dell'emissione era ( $M = m_1 + m_2 = m'_1 + m'_2$ )

$$M\bar{x} = m_1 \cdot 0 + m_2 L \quad (1.35)$$

mentre dopo l'assorbimento

$$M\bar{x}' = m'_1 \left( -\frac{E}{m'_1 c} t \right) + m'_2 \left( L + \frac{E}{m'_2 c} \left( t - \frac{L}{c} \right) \right) = m'_2 L - \frac{EL}{c^2} \quad (1.36)$$

Richiedendo  $\bar{x} = \bar{x}'$  segue

$$m_2 L = m'_2 L - \frac{EL}{c^2} \quad (1.37)$$

da cui

$$\Delta m = m'_2 - m_2 = \frac{E}{c^2} \quad (1.38)$$

e dato che  $M$  non cambia si ha anche

$$\Delta m_1 = -\Delta m_2 = -\frac{E}{c^2} \quad (1.39)$$

## 1.4 Energia, impulso e massa

Usando i risultati precedenti si vede facilmente che l'energia di un corpo aumenta tanto più rapidamente quanto più il corpo ha velocità vicina a quella della luce. Ricordiamo che abbiamo visto che per i fotoni  $E = cp$  ed inoltre associata all'energia  $E$  c'è una massa  $m = E/c^2$ . Sostituendo la prima relazione nella seconda segue

$$m = \frac{p}{c} \quad (1.40)$$

Questa relazione è identica a quelle per particelle ordinarie

$$m = \frac{p}{v} \quad (1.41)$$

Quindi la (1.40) può essere vista come un caso particolare della (1.41). Combinando questa relazione con  $m = E/c^2$  ed eliminando  $m$  si ottiene

$$E = \frac{c^2 p}{v} \quad (1.42)$$

In meccanica si è usualmente interessati nella variazioni di energia prodotte da forze. Questa variazione si calcola con

$$dE = F dx = \frac{dp}{dt} dx = v dp \quad (1.43)$$

Usando questa relazione con la (1.42) si trova

$$E dE = E v dp = c^2 p dp \quad (1.44)$$

che integrata da

$$E^2 = c^2 p^2 + E_0^2 \quad (1.45)$$

da questa possiamo trovare  $E$  in funzione della velocità riesprimendo  $p$  in funzione di  $v$  tramite la (1.42). Si trova

$$E = c^2 \left( \frac{vE}{c^2} \right)^2 + E_0^2 \quad (1.46)$$

da cui

$$E(v) = \frac{E_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (1.47)$$

per velocità piccole rispetto a quelle della luce,  $v \ll c$ , si trova

$$E(v) \approx E_0 + \frac{1}{2} \left( \frac{E_0}{c^2} \right) v^2 \quad (1.48)$$

Se identifichiamo  $E_0/c^2$  con la massa inerziale del corpo si ottiene

$$E(v) \approx m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2, \quad E_0 = m_0 c^2 \quad (1.49)$$

Vediamo che il secondo termine non è altro che l'energia cinetica newtoniana, mentre il primo termine è l'energia associata alla massa inerziale. In meccanica newtoniana il primo termine viene ignorato perchè è una costante, mentre adesso abbiamo visto che ci può essere un trasferimento tra la parte



di massa e la parte di energia cinetica. Infatti possiamo definire, nel caso in esame, l'energia cinetica come la differenza tra l'energia della particella in moto e l'energia della particella ferma. Il risultato è

$$K = m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right) \quad (1.50)$$

Se da questa si ricava  $v$  in funzione di  $K$

$$v^2 = c^2 \left( 1 - \frac{m_0^2 c^4}{(K + m_0 c^2)^2} \right) \quad (1.51)$$

si trova la curva continua di figura 1.3 indicata come predizione einsteiniana. Quindi abbiamo riprodotto correttamente i risultati sperimentali. Usando ancora  $p = vE/c^2$  si trova

$$p(v) = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (1.52)$$

Questa, assieme

$$E(v) = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (1.53)$$

definisce completamente la cinematica relativistica. In alcuni testi il fattore contenente la radice viene attribuito alla massa. In questo caso le formule precedenti diventano

$$p = m(v)v, \quad E = m(v)c^2 \quad (1.54)$$

In questo contesto  $m_0$  assume il significato di massa del corpo a riposo, dato che

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (1.55)$$

Ovviamente questa è solo una questione di linguaggio. Noi non introdurremo una massa dipendente dalla velocità, ma il linguaggio precedente può essere utile per un confronto con il caso newtoniano. Infatti vediamo che facendo tendere la velocità a quella della luce l'energia e l'impulso di una particella diventano sempre più grandi. Se si reinterpreta questo in termini newtoniani è come se fornendo energia agli elettroni nel LINAC convertissimo la gran parte di questa energia in massa della particella invece che in aumento di

velocità. D'altra parte, nel linguaggio einsteiniano, poichè massa ed energia possono trasformarsi l'una nell'altra e non esistono più due quantità conservate, la massa e l'energia, ma solo l'energia totale, risulta più conveniente non introdurre il concetto di massa dipendente dalla velocità, ma parlare solo dell'energia totale. In questo contesto anche l'energia cinetica perde di valore teorico, sebbene sia ancora importante ai fini sperimentali.

Possiamo vedere sotto queste nuove assunzioni cosa succede ad un corpo soggetto ad una forza costante. Nel caso classico abbiamo visto che la sua velocità cresce senza limite. Nel caso relativistico invece ci aspettiamo che la velocità tenda a  $c$ . Per dimostrare questo risultato assumeremo che valga ancora la seconda legge di Newton, ma con il valore relativistico dell'impulso. Cioè

$$F\Delta t = \Delta p \quad (1.56)$$

e nel caso in cui la forza sia costante e la si applichi per un tempo  $t$  ad una particella inizialmente ferma

$$Ft = p(v) = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (1.57)$$

Da cui

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \left(\frac{m_0 v}{Ft}\right)^2 \quad (1.58)$$

da cui

$$1 = \frac{v^2}{c^2} \left[1 + \left(\frac{m_0 c}{Ft}\right)^2\right] \quad (1.59)$$

e finalmente

$$v(t) = \frac{c}{\sqrt{1 + (m_0 c / Ft)^2}} \quad (1.60)$$

Per tempi sufficientemente piccoli tali che  $Ft \ll m_0 c$  segue

$$v(t) \approx \frac{c}{(m_0 c / Ft)} = \frac{F}{m_0} t \quad (1.61)$$

che è il risultato newtoniano. Per tempi  $t$  tali che  $Ft \gg m_0 c$  invece

$$v \approx c \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{m_0 c}{Ft}\right)^2\right] \rightarrow c \quad (1.62)$$

## 1.5 Commenti

Come abbiamo visto, i risultati dell'esperimento sul LINAC ci hanno portato a cambiare alcuni risultati della meccanica di Newton, nel caso di velocità vicine a quella della luce. In particolare abbiamo visto l'equivalenza massa-energia e quindi la possibilità di trasformazione dell'una nell'altra. La più importante differenza è però nel fatto che l'esperimento ci porta a concludere che debba esistere una velocità limite, quella della luce, mentre nella meccanica newtoniana tale limite non esiste. Abbiamo anche fatto vedere nella sezione precedente, come, pur facendo uso delle equazioni di Newton con una modifica nell'espressione dell'impulso, si ritrovi effettivamente il fatto sperimentale che allorché si sottoponga una particella ad una forza costante, questa aumenta la sua energia, ma la velocità tende a  $c$ . Ovviamente vorremmo ottenere questo risultato nell'ambito di una teoria unitaria e non facendo uso di informazioni sperimentali unite in modo *ad hoc* alla meccanica di Newton. Sembra quindi necessario un riesame completo delle basi stesse della meccanica. Infatti, abbiamo già accennato al fatto che l'esistenza di una velocità limite richiede che la legge di composizione delle velocità di un corpo rispetto ad un riferimento,  $S'$ , in moto rispetto ad un riferimento  $S$ , e la velocità del riferimento  $S'$  rispetto ad  $S$  non possa essere semplicemente la somma delle due velocità, come richiederebbe l'intuizione che noi abbiamo dello spazio e del tempo. La necessità di questa analisi originò già alla metà dell'ottocento in relazione ai successi della teoria di Maxwell dell'elettromagnetismo. Per dirla in breve, la velocità della luce appare nelle equazioni di Maxwell come un coefficiente legato alla permeabilità magnetica ed alla costante dielettrica del vuoto. Pertanto se effettuiamo una trasformazione da un riferimento  $S$  ad un altro in moto rettilineo uniforme  $S'$  rispetto ad  $S$ , la velocità della luce in  $S$  ed in  $S'$  non può essere la stessa. Ne risulterebbe quindi che le equazioni di Maxwell non sono invarianti e quindi sarebbero valide in un solo sistema di riferimento. Questo fu il punto di vista adottato inizialmente. Una delle ragioni fu anche dovuta al fatto che le equazioni di Maxwell hanno soluzioni di tipo ondulatorio e quindi, da un punto di vista meccanicistico, questo richiedeva l'esistenza di un mezzo che in qualche modo vibrasse, come succede per le onde elastiche. Un tale mezzo fu denominato con la parola etere e nacque il problema di identificare questo mezzo ed in particolare la velocità con la quale noi ci muoviamo rispetto a tale mezzo.

## Capitolo 2

# L'affermazione del principio di relatività

### 2.1 Il principio di relatività in meccanica e le trasformazioni di Galileo

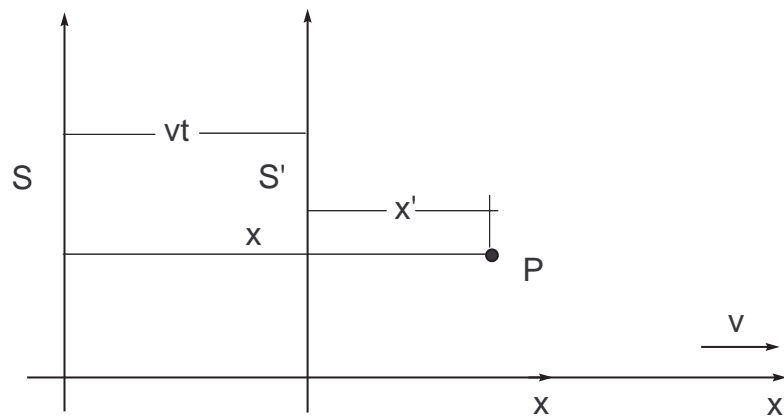


Figura 2.1: Il punto  $P$  come descritto dai due riferimenti  $S$  e  $S'$  in moto uno rispetto all'altro con velocità costante  $v$ .

Ricordiamo che il principio di relatività di Galileo richiede che le leggi della meccanica siano le stesse quando le si descrivono da due sistemi di riferimento  $S$  e  $S'$  in moto rettilineo uniforme uno rispetto all'altro. Se

consideriamo i due sistemi in moto come descritti in figura 2.1 si ha

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z \quad (2.1)$$

dove abbiamo assunto che all'istante  $t = 0$  i due riferimenti coincidano. A questa relazione si aggiunge l'ulteriore condizione che i tempi misurati nei due riferimenti coincidano

$$t' = t \quad (2.2)$$

Le equazioni (2.1) e 2.2) costituiscono le **trasformazioni di Galileo**. La relazione tra la velocità di  $P$  nel sistema  $S$ ,  $\vec{u}$  e  $S'$ ,  $\vec{u}'$  si trova immediatamente per differenziazione

$$\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v} \quad (2.3)$$

Come si vede la legge di composizione delle velocità è conseguenza immediata delle trasformazioni di Galileo. Verifichiamo adesso che le leggi della dinamica sono invarianti rispetto a trasformazioni di Galileo se facciamo l'ulteriore assunzione che la massa e le forze siano assolute, cioè

$$m' = m, \quad \vec{F}' = \vec{F} \quad (2.4)$$

Infatti si ha subito dalla (2.1)

$$\frac{d^2x'}{dt'^2} = \frac{d^2x}{dt^2} \quad (2.5)$$

ed analoghe per le altre coordinate. Pertanto

$$m' \frac{d^2\vec{x}'}{dt'^2} = \vec{F}' \quad (2.6)$$

La proprietà della massa di essere invariante di Galileo è legata alla legge di conservazione della massa, che è sperimentalmente corretta per velocità piccole rispetto a quella della luce. Per quanto riguarda la forza, notiamo che tipicamente le forze derivano da interazioni a due corpi (vedi il principio di azione e reazione). Ma la distanza relativa tra due corpi non cambia rispetto ad una trasformazione di Galileo e questo giustifica l'assunzione che anche la forza sia una grandezza assoluta.

Occorre qui fare una precisazione, cioè che le leggi di Newton stesse sono valide solo in una categoria di sistemi di riferimento, i così detti **riferimenti inerziali**, cioè quei riferimenti in cui un corpo libero, non soggetto a forze delle quali sia possibile rintracciare la causa, si muove di moto rettilineo

uniforme. L'invarianza galileiana ci dice che di tali riferimenti ne esistano infiniti, tutti quelli collegati da una trasformazione di Galileo. Non è facile definire, o determinare sperimentalmente, un riferimento inerziale. Sicuramente la terra non è un tale riferimento. In genere si assume che un tale riferimento possa essere costituito da uno con l'origine nel sole e gli assi orientati secondo le stelle fisse.

Una volta chiarita la struttura delle trasformazioni di Galileo è evidente la loro incompatibilità con le equazioni di Maxwell, che prevedono che nel vuoto le onde e.m. si muovano sempre con velocità pari a  $c$  indipendentemente dal moto della sorgente delle onde stesse. Più formalmente si può verificare esplicitamente che le equazioni di Maxwell non sono invarianti rispetto a trasformazioni di Galileo. Se d'altro canto richiediamo alle equazioni di Maxwell di soddisfare il principio di relatività, è evidente che sotto le corrispondenti trasformazioni la velocità della luce non può cambiare. Quindi queste trasformazioni non possono coincidere con le trasformazioni di Galileo. Infatti Poincaré determinò queste trasformazioni (dette adesso trasformazioni di Lorentz) che sono tali da ridursi a quelle di Galileo per  $v \ll c$ . Ritorneremo in seguito sulla forma di queste equazioni. Vediamo dunque che si aprono due possibilità

- La fisica è invariante sotto trasformazioni di Galileo. In questo caso la meccanica di Newton è corretta, ma esiste un riferimento privilegiato in cui valgono le equazioni di Maxwell.
- La fisica è invariante sotto trasformazioni che lasciano invariate le equazioni di Maxwell. In questo caso la velocità della luce è invariante ed occorre modificare la meccanica di Newton

Ovviamente esiste una terza possibilità, cioè che nessuna delle due precedenti sia corretta. Per quanto riguarda il primo caso l'ovvio punto a cui mirare è quello di determinare se la velocità della luce sia la stessa in tutti i riferimenti inerziali, oppure se cambi da un riferimento ad un altro. Prima di passare a questa discussione ci sarà però utile ricavare dalla (2.3) le leggi di trasformazione dei moduli e degli angoli delle velocità. facendo uso della (2.3) con le definizioni in figura 2.2 si ha

$$\begin{aligned} u \cos \theta - v &= u' \cos \theta' \\ u \sin \theta &= u' \sin \theta' \end{aligned} \tag{2.7}$$

Da queste ricaviamo: dividendo la seconda per la prima

$$\tan \theta' = \frac{\sin \theta}{\cos \theta - v/u} \quad (2.8)$$

e, quadrando e sommando:

$$u' = (u^2 + v^2 - 2uv \cos \theta)^{1/2}$$

o anche

$$u' = u \left[ 1 + \left( \frac{v}{u} \right)^2 - 2 \left( \frac{v}{u} \right) \cos \theta \right]^{1/2} \quad (2.9)$$

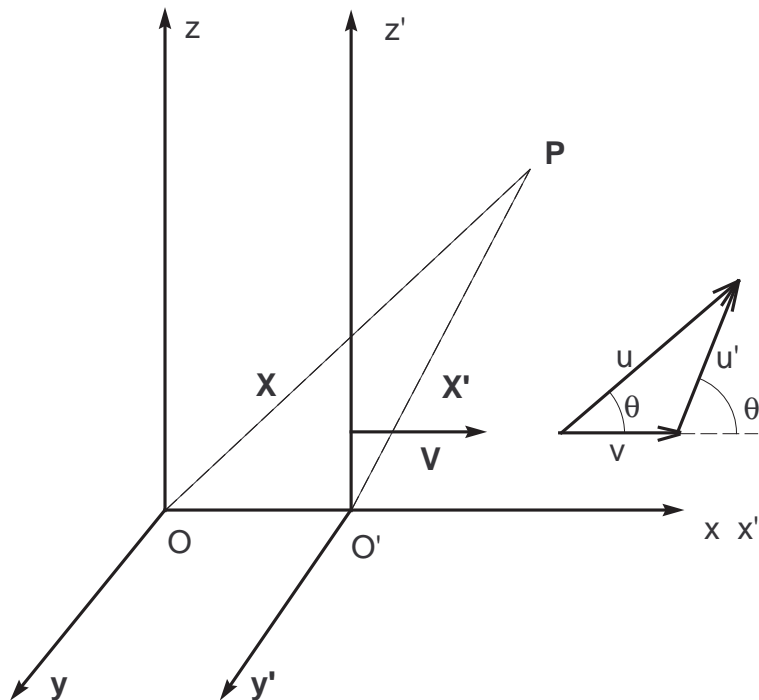


Figura 2.2: La figura illustra due riferimenti inerziali in moto relativo e la composizione delle velocità.

## 2.2 L'invarianza della fase di un'onda piana

Assumiamo per il momento l'atteggiamento che le equazioni di Maxwell siano vere in un riferimento privilegiato, quello dell' **etere**. Quindi in ogni riferimento diverso da questo le equazioni di Maxwell devono avere delle correzioni, che ci aspettiamo essere piccole, almeno di ordine  $v/c$ , dove  $v$  è la velocità del riferimento in relazione a quello dell'etere. Ci aspettiamo dunque di poter mettere in evidenza queste correzioni con esperimenti di tipo **ottico**. Ai fini di questa discussione introduciamo una proprietà particolare delle onde piane, cioè l' **invarianza della fase**.

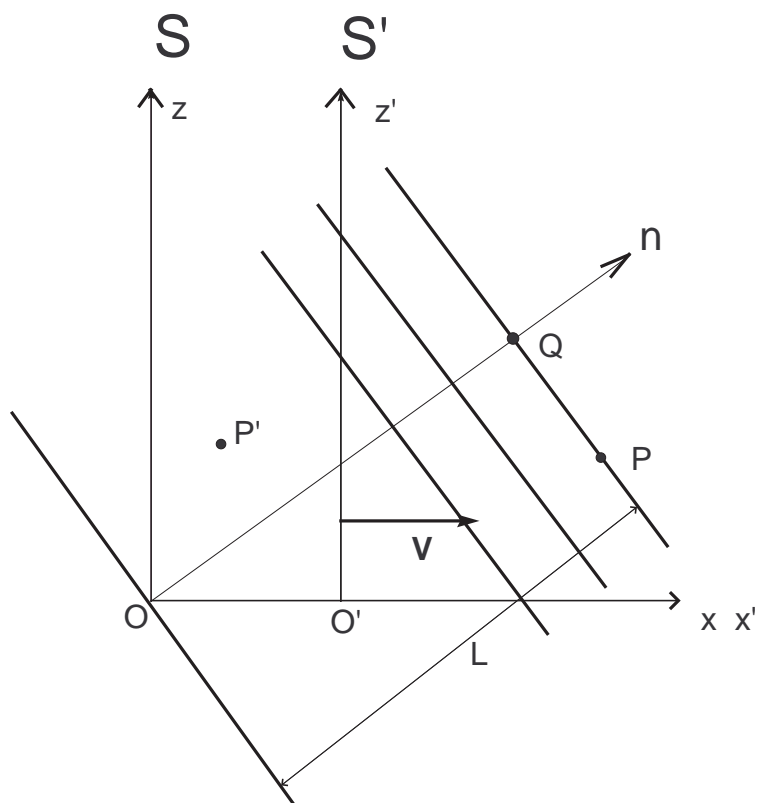


Figura 2.3: La figura illustra il principio dell'invarianza della fase di un'onda piana.



Nel riferimento  $S$  l'onda piana è descritta dalla funzione

$$\psi(\vec{x}, t) = A \cos \left[ \omega \left( t - \frac{\vec{n} \cdot \vec{x}}{c} \right) \right] \quad (2.10)$$

dove

$$\omega = 2\pi\nu; \quad \frac{\omega\vec{n}}{c} = \vec{k}; \quad |\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}; \quad \vec{n}^2 = 1 \quad (2.11)$$

e dove  $\vec{k}$  è il vettore di propagazione e  $c$  è la velocità della luce,  $c \approx 3 \times 10^{10} \text{ cm/s}$ . Si definisce fase dell'onda piana la quantità

$$F(\vec{x}, t) = \nu \left( t - \frac{\vec{n} \cdot \vec{x}}{c} \right) \quad (2.12)$$

La fase ha un significato fisico molto interessante. Supponiamo, vedi figura 2.3, di aver marcato l'onda che a  $t = 0$  passa dall'origine  $O$  del riferimento  $S$ . Supponiamo di aver posizionato un osservatore nel punto  $P$  solidale con  $S$ . Si ha allora che il numero di onde che  $P$  conta a partire dall'istante in cui l'onda marcata passa per  $P$  sino al tempo  $t$  è dato esattamente dalla fase  $F$  calcolata in  $P$ . Infatti l'onda marcata impiega un tempo pari a  $L/c$  per arrivare in  $P$  che quindi conterà per un tempo pari a  $t - L/c$ . Dato che arrivano  $\nu$  onde al secondo, il numero di onde contate sarà pari a

$$\nu \left( t - \frac{L}{c} \right) = F(\vec{x}, t) \quad (2.13)$$

dato che

$$L = \vec{n} \cdot \vec{x} \quad (2.14)$$

Consideriamo adesso un riferimento  $S'$  che si muova rispetto ad  $S$  con velocità  $v$  come in figura 2.3 ed un punto  $P'$ , solidale con  $S'$  che coincida con  $P$  al tempo  $t' = t$ . È evidente che il numero di onde che  $P'$  conta a partire dall'onda marcata sino a quando coincide con  $P$  sarà identico a quello contato da  $P$ . D'altra parte anche nel riferimento  $S'$  vale il ragionamento fatto in  $S$  e quindi il numero di onde contato da  $S'$  sarà pari a  $F(\vec{x}', t)$  con

$$F(\vec{x}', t) = \nu' \left( t' - \frac{\vec{n}' \cdot \vec{x}'}{c'} \right) = F(\vec{x}, t) = \nu \left( t - \frac{\vec{n} \cdot \vec{x}}{c} \right) \quad (2.15)$$

---

<sup>1</sup>Attualmente la velocità della luce viene usata per definire l'unità di lunghezza. Il metro è definito come la distanza percorsa da un raggio luminoso in un intervallo di tempo pari a  $1/299792458$  secondi. Dunque per definizione si ha  $c = 2.99792458 \cdot 10^{10} \text{ cm/s}$ .

Usando le trasformazioni di Galileo (eq. (2.1))

$$\vec{x}' = \vec{x} - \vec{v}t \quad (2.16)$$

segue

$$\nu' \left( t' - \frac{\vec{n}' \cdot \vec{x}'}{c'} \right) = \nu \left( t - \frac{\vec{n} \cdot (\vec{x}' + \vec{v}t')}{c} \right) \quad (2.17)$$

Uguagliando i coefficienti di  $\vec{x}'$  e di  $t'$  si ottiene

$$\nu' = \nu \left( 1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}}{c} \right) \quad (2.18)$$

e

$$\nu' \frac{\vec{n}'}{c'} = \nu \frac{\vec{n}}{c} \quad (2.19)$$

Quest'ultima ci dice che  $\vec{n}$  e  $\vec{n}'$  sono vettori paralleli, ma essendo versori dovranno essere uguali. Quindi

$$\vec{n} = \vec{n}', \quad \frac{\nu'}{c'} = \frac{\nu}{c} \quad (2.20)$$

La seconda relazione in congiunzione con la (2.18) ci permette di determinare  $c'$ :

$$c' = c \frac{\nu'}{\nu} = c \left( 1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}}{c} \right) = c - \vec{n} \cdot \vec{v} \quad (2.21)$$

## 2.3 Effetto Doppler

la (2.18) è l'espressione matematica dell'effetto Doppler, che è l'effetto che si verifica quando l'osservatore e la sorgente sono in moto relativo. Però questa equazione non può essere usata direttamente perché se assumiamo le trasformazioni di Galileo dobbiamo anche assumere l'esistenza dell'etere e sia l'osservatore che la sorgente potrebbero essere in moto rispetto al riferimento dell'etere. Consideriamo allora tre sistemi di riferimento  $S_0$ , il riferimento in cui la sorgente è a riposo,  $S$ , il riferimento dell'etere e  $S'$ , il riferimento dell'osservatore. Detto questo, possiamo applicare la (2.18) al moto della sorgente rispetto all'etere. Quindi

$$\nu_0 = \nu \left( 1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}_0}{c} \right) \quad (2.22)$$

dove  $\vec{v}_0$  è la velocità della sorgente rispetto all'etere. Possiamo usare questa equazione per eliminare la frequenza  $\nu$  che è la frequenza dell'onda considerata nel riferimento dell'etere. Usando ancora la (2.18) tra  $S'$  e  $S$  ed eliminando  $\nu$  si ha

$$\nu' = \nu_0 \frac{1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}}{c}}{1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}_0}{c}} \quad (2.23)$$

con  $\vec{v}$  la velocità dell'osservatore rispetto all'etere. Dato che è possibile misurare la velocità relativa tra la sorgente e l'osservatore

$$\vec{v}_r = \vec{v} - \vec{v}_0 \quad (2.24)$$

e le due frequenze  $\nu_0$  e  $\nu'$  dalla equazione precedente possiamo determinare la velocità assoluta della sorgente  $\vec{v}$ . D'altra parte se sia  $\vec{v}$  che  $\vec{v}_0$  sono piccoli rispetto alla velocità della luce (come è praticamente il caso), sviluppando al primo ordine in  $\vec{v}/c$  e  $\vec{v}_0/c$  segue

$$\begin{aligned} \nu' &\approx \nu_0 \left(1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}}{c}\right) \left(1 + \frac{(\vec{n} \cdot \vec{v}_0)}{c} + \left(\frac{(\vec{n} \cdot \vec{v}_0)}{c}\right)^2\right) \\ &\approx \nu_0 \left(1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}_r}{c} - \frac{(\vec{n} \cdot \vec{v}_0)(\vec{n} \cdot \vec{v}_r)}{c^2}\right) \end{aligned} \quad (2.25)$$

Quindi la velocità assoluta  $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_r$  è contenuta solo nei termini del secondo ordine. L'effetto Doppler viene osservato negli spettri stellari dove le linee sono spostate verso il rosso o verso il violetto a seconda che la terra si allontani o si avvicini alla stella. Dato che la velocità della terra sulla sua orbita è dell'ordine di  $3 \times 10^6$  cm/s e le velocità stellari sono dello stesso ordine di grandezza, si ha tipicamente  $v/c \approx 10^{-4}$ . Dunque gli effetti del secondo ordine sono circa  $10^{-8}$ , praticamente inosservabili. Questo effetto si può misurare anche in sorgenti terrestri. Stark [1] nel 1906 misurava le frequenze emesse da atomi idrogenoidi in movimento con velocità dell'ordine di  $10^8$  cm/s. Adesso si hanno valori tipici  $v/c \approx 1/300$  che danno però effetti del secondo ordine ancora inosservabili. Nel 1938 Ives [2] sfruttando i notevoli miglioramenti tecnici fu in grado di osservare gli effetti del secondo ordine dimostrando che questi non erano in accordo con il risultato da noi trovato, ma che invece dipendevano dalla sola velocità relativa in accordo con la teoria della relatività di Einstein (vedi dopo).

## 2.4 Velocità di fase, velocità di gruppo e aberrazione della luce

Ricordiamo dalla (2.21)

$$c' = c - (\vec{n} \cdot \vec{v}) \quad (2.26)$$

Questa equazione permetterebbe in linea di principio la determinazione della velocità assoluta della terra  $v$ , misurando  $c'$  e data  $c$ . Queste misure furono fatte (Fizeau 1848; Foucault 1865), ma non fu rilevata alcuna influenza del moto della terra sulla velocità della luce. In altre parole la velocità della luce risultò invariata, in accordo con il principio di relatività speciale, per cui il valore di  $c$ , che compare nelle equazioni di Maxwell, non può variare da un sistema di riferimento inerziale ad un altro.

Tuttavia va osservato che la (2.26) è ricavata dalle formule di trasformazione delle caratteristiche di un'onda, mentre gli esperimenti sulla velocità della luce devono essere interpretati in termini di pacchetti d'onda, e quindi in termini di velocità di gruppo. Poiché queste due grandezze hanno importanza di carattere generale, apriamo una parentesi per discuterle.

### 2.4.1 La velocità di fase e la velocità di gruppo

Sia  $f(\vec{x}, t)$  un segnale e.m.. Per esempio si può considerare una componente del campo elettrico o magnetico. Possiamo rappresentarlo come trasformata di Fourier

$$f(\vec{x}, t) = \int A(\vec{k}) e^{-i[\omega(\vec{k})t - \vec{k} \cdot \vec{x}]} d^3\vec{k} \quad (2.27)$$

In questa relazione  $\omega$  è una funzione assegnata di  $\vec{k}$ , determinata dall'equazione d'onda. Questa relazione tra la frequenza angolare  $\omega$  e il vettore di propagazione  $\vec{k}$  si chiama relazione di dispersione. Il rapporto  $\omega/|\vec{k}|$  è la velocità di fase  $v_f$  ed è la velocità di propagazione di quell'onda che ha come vettore di propagazione  $\vec{k}$  e come lunghezza d'onda  $\lambda = 2\pi/k$ . Nel caso della propagazione della luce nel vuoto si ha  $\omega = c|\vec{k}|$ . Quindi, la velocità di fase è costante ed è uguale a  $c$ .

Se  $f$  rappresenta un pacchetto l'ampiezza di Fourier  $A$  è una funzione con un massimo ben definito per un determinato valore di  $\vec{k} = \vec{k}_0$ . Poniamo  $\omega_0 = \omega(\vec{k}_0)$ .

L'esponente si può approssimare nel modo seguente

$$\begin{aligned} & \omega(\vec{k})t - \vec{k} \cdot \vec{x} = \\ & = \left( \omega_0 + \vec{\nabla}\omega(\vec{k}_0) \cdot (\vec{k} - \vec{k}_0) \right) t - \vec{k} \cdot \vec{x} = \\ & = \left( \omega_0 - \vec{k}_0 \cdot \vec{\nabla}\omega(\vec{k}_0) \right) t - \left( \vec{x} - \vec{\nabla}\omega(\vec{k}_0)t \right) \cdot \vec{k} \end{aligned} \quad (2.28)$$

e poniamo

$$f(\vec{x}, t) = e^{-i(\omega_0 - \vec{k}_0 \cdot \vec{\nabla}\omega(\vec{k}_0))t} M(\vec{x}, t), \quad (2.29)$$

$$M(\vec{x}, t) = \int A(\vec{k}) e^{+i[(\vec{x} - \vec{\nabla}\omega(\vec{k}_0)t) \cdot \vec{k}]} d^3k \quad (2.30)$$

dove  $M$  è il fattore modulante, mentre l'esponenziale a fattore rappresenta l'onda portante. Comparando la (2.27) con la (2.30) vediamo che

$$M(\vec{x}, t) = f(\vec{x} - \vec{\nabla}\omega(\vec{k}_0)t, 0) \quad (2.31)$$

Pertanto  $M(\vec{x}, t)$  soddisfa l'equazione delle onde con velocità pari a

$$\vec{v}_g = \vec{\nabla}\omega(\vec{k}_0) \quad (2.32)$$

Dato che l'energia trasportata dall'onda è proporzionale al modulo quadro dell'ampiezza vediamo che il fattore di fase in fronte non è rilevante a questi fini e quindi l'energia si propaga con velocità pari a  $\vec{v}_g$ , la **velocità di gruppo**. È interessante notare che la (2.31) può essere interpretata nel seguente modo: consideriamo il valore del fattore modulante in un dato punto  $\vec{x}_0$  a  $t = 0$ ,  $M(\vec{x}_0, 0)$  e consideriamo al tempo  $t$  il punto che si muove con velocità  $\vec{v}_g$  a partire da  $\vec{x}_0$ , cioè

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_0 + \vec{v}_g t \quad (2.33)$$

segue allora immediatamente dalla (2.31) che

$$M(\vec{x}(t), t) = M(\vec{x}_0, 0) \quad (2.34)$$

Dunque lungo i punti che si muovono a velocità  $\vec{v}_g$  il fattore modulante è costante e quindi il profilo dell'onda è trasportato senza alterazioni con velocità  $\vec{v}_g$ .

La velocità di fase e la velocità di gruppo in generale non coincidono. Nel caso di una relazione di dispersione non dispersiva, cioè quando  $\omega$  è proporzionale a  $|\vec{k}|$ , le due velocità coincidono, altrimenti si dice che si ha dispersione.

## 2.4.2 Legge di trasformazione della velocità di gruppo

Se osserviamo un segnale e.m. in un sistema di riferimento inerziale  $S'$ , in moto rettilineo e uniforme rispetto al sistema  $S$ , nel quale osserviamo lo stesso segnale  $f(\vec{x}, t)$ , sappiamo che le sue caratteristiche si trasformano secondo equazioni (2.18), (2.20) e (2.21). Queste valgono nel caso di un'onda e.m. e permettono di determinare la regola di trasformazione della velocità di gruppo.

Si può però dimostrare che la regola così determinata vale in generale, anche per altri tipi di onde.

Poiché nel caso e.m. il modulo del vettore di propagazione è dato da

$$|\vec{k}| = \frac{\omega}{c} \quad (2.35)$$

e  $\vec{n}$  è la sua direzione, l'equazione (2.18) si può scrivere

$$\omega' = \omega - \vec{k} \cdot \vec{v} \quad (2.36)$$

Questa è la legge di trasformazione di  $\omega$  dal sistema  $S$  al sistema  $S'$ . Tenuto conto dell'espressione per la velocità di gruppo (2.32), si ha che la velocità di gruppo in  $S'$  cioè  $\vec{v}'_g$  è data da

$$\vec{v}'_g = \vec{v}_g - \vec{v} \quad (2.37)$$

cioè la velocità di gruppo segue la stessa legge di trasformazione della velocità di una particella materiale.

Se si confronta la legge di trasformazione (2.37) con la legge di trasformazione per le velocità di fase (2.26), si vede che sono diverse, salvo il caso molto particolare in cui  $\vec{v}$  e  $\vec{n}$  sono paralleli (si può però mostrare che differiscono solo per termini del secondo ordine in  $v/c$  (vedi referenza [3] e sezione seguente).

### 2.4.3 L'aberrazione della luce

Tornando alla determinazione della velocità assoluta della terra, gli esperimenti fatti a questo scopo non dettero alcun risultato, pur tenendo conto che la velocità da considerare è la velocità di gruppo e non quella di fase. È però da tener presente che ciò è vero per gli effetti del primo ordine in  $v/c$ . Negli esperimenti citati (Fizeau), nei quali si misurava la velocità di un raggio di luce su di un cammino chiuso, la precisione della misura permetteva di tener conto dei soli termini del primo ordine.

Questi esperimenti furono condotti anche in presenza di un mezzo rifrattivo, con gli stessi risultati.

In conclusione, solo con esperimenti in grado di misurare termini di ordine superiore si poteva sperare di ottenere un risultato significativo, perché allora, come mostra l'equazione (2.25), si possono misurare termini che dipendono dalla velocità assoluta.

Prima di passare alla descrizione del più famoso di questi esperimenti, cioè quello di Michelson, discutiamo l'altro effetto che si può ricavare dalla legge di trasformazione di un pacchetto di radiazione e.m. (2.37), cioè la variazione della direzione di un raggio luminoso dovuta al moto della sorgente; questo effetto si chiama aberrazione della luce.

Se  $\theta$  e  $\theta'$  sono gli angoli tra la direzione di  $\vec{v}$  con  $\vec{v}_g$  e  $\vec{v}'_g$  rispettivamente, dalla (2.37) si ricava, tenendo conto della Fig. (2.4),

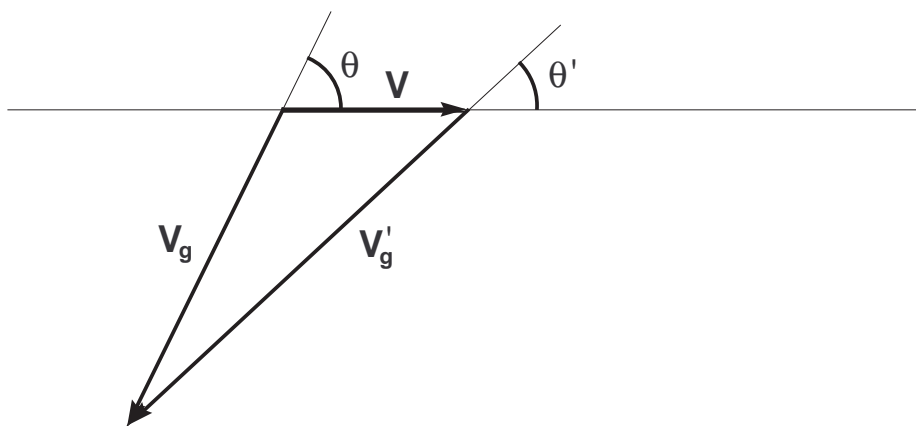


Figura 2.4: L'aberrazione stellare

$$\begin{cases} v'_g \cos \theta' = v_g \cos \theta + v \\ v'_g \sin \theta' = v_g \sin \theta \end{cases} \quad (2.38)$$

dalle quali, dividendo membro a membro

$$\tan \theta' = \frac{\sin \theta}{\cos \theta + v/v_g} \quad (2.39)$$

che è l'espressione per l'aberrazione della luce proveniente da una stella, dove  $\theta'$  è l'angolo sotto il quale si osserva la stella dal riferimento terrestre e  $\theta$  è l'angolo sotto il quale apparirebbe la stella in un riferimento assoluto.  $\vec{v}$  è la velocità del riferimento terrestre rispetto allo spazio assoluto.

Questa formula è corretta al primo ordine in  $v/c$ , se con  $v$  si intende la velocità della terra rispetto al riferimento astronomico delle stelle fisse.

Osservare che la (2.39) si può ricavare dall'analoga (2.8) con la sostituzione

$$\theta \rightarrow \theta + \pi; \quad \theta' \rightarrow \theta' + \pi \quad (2.40)$$

che è dovuta al fatto che gli angoli che si misurano sono appunto quelli indicati in Fig. (2.4), mentre gli angoli che i vettori  $\vec{v}_g$  e  $\vec{v}'_g$  formano con la direzione di  $\vec{v}$ , coerentemente con la Fig. (2.2), sarebbero quelli aumentati di  $\pi$  nel senso positivo (antiorario).

Dalle (2.38) si può ricavare anche il modulo di  $\vec{v}'_g$ . Portando  $v$  a primo membro e poi quadrando e sommando si ottiene

$$v'^2_g + v^2 - 2vv'_g \cos(\theta') = v^2_g \quad (2.41)$$

che, risolta in  $v'_g$  (e scegliendo il ramo opportuno) fornisce

$$v'_g = \sqrt{v^2_g - v^2 + (v \cos(\theta'))^2} + v \cos(\theta') \quad (2.42)$$

che si può anche riscrivere

$$v'_g = \sqrt{v^2_g - v^2 + (\vec{v} \cdot \vec{e}')^2} - (\vec{v} \cdot \vec{e}') \quad (2.43)$$

dove  $\vec{e}'$  è il versore di  $\vec{v}'_g$ . Notiamo che sviluppando questa formula al primo ordine in  $v/c$  si ha

$$v'_g = v_g - (\vec{v} \cdot \vec{e}') + \mathcal{O}((v/c)^2) \quad (2.44)$$



Quindi vediamo che a meno di termini del secondo ordine la velocità di fase e quella di gruppo si trasformano nello stesso modo.

Possiamo anche verificare che per esperimenti effettuati su percorsi chiusi di un raggio luminoso non ci sono effetti del primo ordine dovuti al moto rispetto all'etere. In un arrangiamento sperimentale come in figura 2.5, se indichiamo con  $\vec{e}_i$  i versori dei lati del poligono e con  $l_i$  i lati si ha:

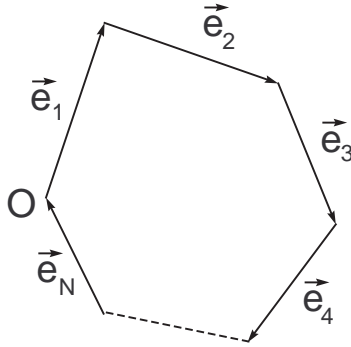


Figura 2.5: Percorso chiuso di un raggio luminoso come usato negli esperimenti di Fizeau e di Foucault.

$$\sum_i \vec{e}_i l_i = 0 \quad (2.45)$$

Il tempo necessario al raggio luminoso a percorrere il cammino chiuso sarà dato da

$$t = \sum_i \frac{l_i}{u_i'} = \sum_i \frac{l_i}{\sqrt{c^2 - v^2 + (\vec{v} \cdot \vec{e}_i)^2} - \vec{v} \cdot \vec{e}_i} \quad (2.46)$$

dove  $\vec{v}$  è la velocità del riferimento terrestre rispetto all'etere. Espandendo al primo ordine in  $v/c$  si ha

$$t \approx \sum_i \frac{l_i}{c - \vec{v} \cdot \vec{e}_i} \approx \sum_i \frac{l_i}{c} + \sum_i \frac{(\vec{v} \cdot \vec{e}_i) l_i}{c^2} = \sum_i \frac{l_i}{c} \quad (2.47)$$

Quindi non sono visibili effetti al primo ordine. Questo completa gli argomenti precedenti.

## 2.5 L'esperimento di Michelson

Abbiamo visto che tutti gli esperimenti citati mostrano accordo con il principio di relatività esteso ai fenomeni e.m. (indipendenza del moto del sistema rispetto al sistema assoluto). Tuttavia non avevano l'accuratezza necessaria per testare i termini del secondo ordine in  $v/c$ .

Fu Michelson (A.A.Michelson, 1881, e poi A.A.Michelson e E.W.Morley, 1887) che misurò la velocità della luce con un interferometro con una precisione che permetteva di determinare i termini del secondo ordine in  $v/c$ .

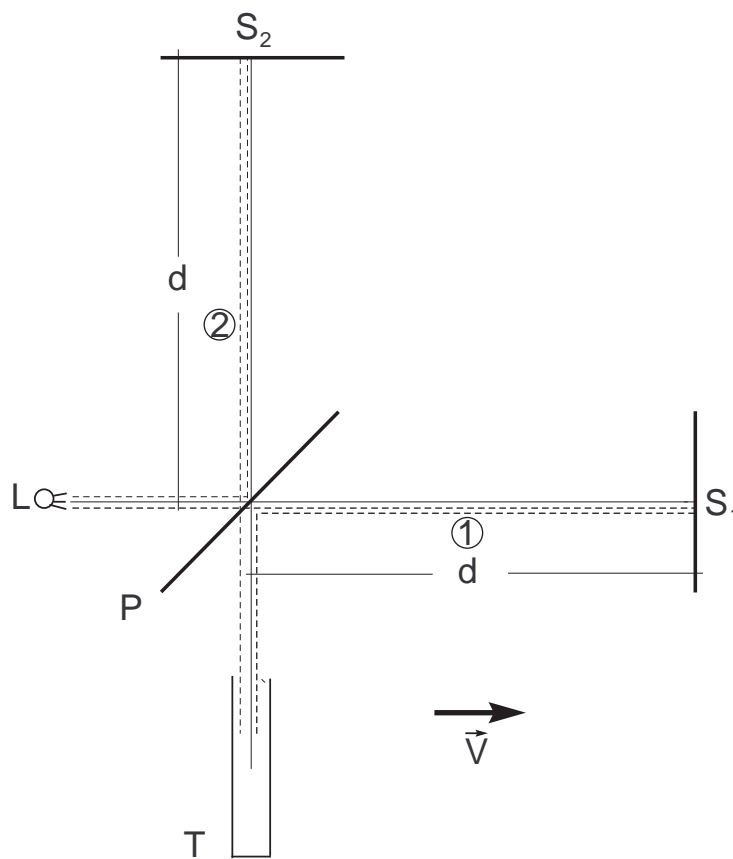


Figura 2.6: Schema dell'interferometro di Michelson

In modo estremamente schematico l'interferometro era come indicato in figura 2.6.

Mediante lo specchio semitrasparente  $P$  un raggio di luce proveniente dalla sorgente  $L$  viene diviso in due parti, un raggio 1 e un raggio 2, mutuamente perpendicolari.

Il raggio 1 viene riflesso dallo specchio  $S_1$  verso  $P$ , dove una sua parte viene riflessa ulteriormente nel telescopio  $T$ .

Il raggio 2 viene riflesso dallo specchio  $S_2$  verso  $P$  e una sua parte attraverso  $P$  ed entra nel telescopio  $T$ , dove interferisce col raggio 1.

Anche se l'apparato fosse a riposo rispetto all'etere dovremmo osservare delle frange d'interferenza in  $T$ , a causa delle inevitabili differenza nei due bracci  $PS_1$  e  $PS_2$ .

Supponiamo ora che l'apparato sia disposto con il braccio  $PS_1$  parallelo alla direzione del moto della terra rispetto all'etere e siano i due bracci uguali a  $d$  (in realtà vi sarà una piccola differenza responsabile dell'interferenza di cui abbiamo già parlato, il cui effetto sarà però eliminato come vedremo più sotto).

Per mezzo dell'equazione (2.43) con  $v_g = c$  si può calcolare la differenza di fase  $\Delta F$  dei raggi 1 e 2, dovuta al moto dell'apparato sperimentale nell'etere.

Applicando la (2.43) al caso del percorso  $PS_1$ , si ha che  $\vec{e}'$  è parallelo a  $\vec{v}$ , dove  $\vec{v}$  è la velocità della terra rispetto all'etere.

Quindi, per il percorso da  $P$  a  $S_1$  si ha

$$v'_g = c - v \quad (2.48)$$

mentre per il percorso inverso si ha

$$v'_g = c + v \quad (2.49)$$

Quindi il tempo  $t_1$  che il raggio 1 impiega per andare da  $P$  a  $S_1$  e ritorno è

$$t_1 = \frac{d}{c - v} + \frac{d}{c + v} = \frac{2d}{c(1 - v^2/c^2)} \quad (2.50)$$

Per il percorso  $PS_2$  ed anche per il ritorno  $S_2P$  si ha

$$v'_g = \sqrt{c^2 - v^2} \quad (2.51)$$

e il tempo  $t_2$  impiegato è

$$t_2 = 2d \frac{1}{\sqrt{c^2 - v^2}} \quad (2.52)$$

Per  $\Delta F$  si ha

$$\Delta F = \nu(t_1 - t_2) = \nu \left[ \frac{2d}{c(1 - v^2/c^2)} - \frac{2d}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right] = \frac{2d\nu}{c} \frac{1 - \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - v^2/c^2} \quad (2.53)$$

Se si calcola  $\Delta F$  al secondo ordine, si ha

$$\Delta F = \nu d \frac{v^2}{c^3} \quad (2.54)$$

Se ora si ruota tutto l'apparato di  $90^\circ$  i due percorsi si scambiano e la differenza di fase diventa  $-\Delta F$ . Viceversa, la differenza di fase dovuta alla piccola differenza dei due bracci resta identica. Quindi, facendo la differenza, si ottiene  $2\Delta F$  e l'effetto della differenza dei bracci si elide.

Il risultato dell'esperimento di Michelson fu che questa differenza di fase era zero, nonostante che il valore aspettato, dato dalla (2.54), fosse due ordini di grandezza superiore alla precisione dell'apparato.

Quindi si ha un risultato che indica che il principio di relatività, nella sua forma estesa, è valido almeno fino al secondo ordine in  $v/c$ .

# Capitolo 3

## La critica della simultaneità e la cinematica relativistica

### 3.1 Critica della simultaneità

L'insieme degli esperimenti sulla velocità della luce avevano determinato se non la certezza almeno la convinzione della validità del principio di relatività esteso a tutti i fenomeni (meccanici ed elettromagnetici). In particolare, se si assumono valide le equazioni di Maxwell, si ha come conseguenza la costanza del valore numerico  $c$  della velocità della luce, che compare nella forma delle equazioni. Ma questa costanza è in conflitto con il consueto concetto di velocità e della sua legge di composizione. Ne viene di conseguenza che dobbiamo rivedere questo concetto.

La misura della velocità in un dato sistema di riferimento inerziale  $S$  richiede la misura di una distanza, per esempio tra un punto A e un punto B e la misura di una differenza di tempi. Mentre la misura della distanza non pone particolari problemi, ma solo l'ipotesi di disporre di regoli calibrati a riposo nel sistema  $S$ , la misura della differenza tra il tempo  $t_2$  di arrivo in B di una particella partita da A, della quale si vuol misurare la velocità, e il tempo  $t_1$  di partenza da A, presenta qualche difficoltà.

Il problema è quello della sincronizzare di due orologi situati in punti diversi, in A e in B. Il metodo di inviare un segnale da A a B, in modo che se un orologio in A segna il tempo  $t$  si possa allora regolare un orologio in B al tempo di arrivo del segnale cioè al tempo  $t + l/v$ , dove  $v$  è la velocità

del segnale di sincronizzazione e  $l$  è la distanza  $AB$ , richiede a sua volta la misura di una velocità (quella del segnale di sincronizzazione).

Si potrebbe vedere che altri metodi di sincronizzazione portano a conclusioni analoghe, per cui siamo in un circolo vizioso.

Il punto è che il concetto di simultaneità deve essere definito, altrimenti, come si è visto, non ha significato. La stessa conclusione si ha naturalmente per il concetto di velocità.

Il punto di partenza per definire cosa si intende per simultaneità è un insieme di fatti sperimentali sulla propagazione luminosa, tra i quali in particolare indicheremo l'esperimento di Fizeau, nel quale si misurava la velocità della luce su di un percorso chiuso, come particolarmente utile al nostro ragionamento. Il risultato dell'esperimento fu che la velocità della luce risultava  $c$ , cioè lo stesso valore della costante che compare nelle equazioni di Maxwell.

Se eleviamo questo fatto sperimentale a postulato, postulato della costanza della velocità della luce, allora potremo usare questo per definire cosa si intende per simultaneità.

Possiamo ora usare la luce come segnale per sincronizzare tutta una collezione di orologi, disposti nel riferimento inerziale  $S$  in tutti i punti nei quali si intende effettuare delle misure. Se  $t_0$  è un istante iniziale segnato dall'orologio posto in un punto  $O$  di riferimento, origine del nostro sistema, inviando da  $O$  un segnale luminoso verso un punto arbitrario  $P$ , a distanza  $l$  da  $O$ , distanza misurata a riposo in  $S$ , regoleremo l'orologio in  $P$  al tempo  $t_0 + l/c$ .

In ogni punto dove abbiamo disposto un orologio potremo sincronizzarlo con questo procedimento. Per ciò che riguarda la definizione di simultaneità avremo che due eventi, cioè due avvenimenti che si verificano in due determinati punti dello spazio e a due dati tempi, si diranno simultanei se gli orologi situati nei due punti corrispondenti segnano lo stesso tempo.

Compare qui per la prima volta la parola evento, che esprime un concetto centrale in tutta la teoria della relatività. Il suo significato è facile da spiegare: si tratta di un fatto (un fatto fisico) che si manifesta in un determinato punto dello spazio e ad un determinato istante. Come tale precede l'eventuale descrizione che di esso ne possiamo dare. Se abbiamo scelto un sistema di riferimento e un sistema di orologi sincronizzati allora potremo assegnare all'evento una quaterna di numeri  $(t, x, y, z)$ .

Tutto ciò suona molto naturale. Il punto è che, perché si possa affermare che questa è una sincronizzazione consistente, occorre dimostrare che è indipendente dalla scelta del tempo iniziale  $t_0$  e che è anche indipendente dalla

scelta del punto  $O$  di riferimento. Il procedimento di sincronizzazione dovrà poi essere ripetuto in ogni sistema di riferimento inerziale.

Sono in particolare questi ultimi due punti che richiedono il ricorso all'esperimento citato di Fizeau, e quindi è qui che si rivela il carattere particolare della luce come mezzo per trasmettere i segnali di sincronizzazione.

### 3.1.1 Dimostrazione della consistenza della definizione di sincronizzazione

a)-Il primo punto da dimostrare è l'indipendenza della sincronizzazione dal tempo iniziale  $t_0$ . Questo punto è sicuramente soddisfatto poichè se si hanno due orologi sincronizzati nel punto  $O$ , se uno dei due viene spostato in un altro punto  $P$ , sotto alcune ipotesi del tutto naturali, riacquisterà lo stesso ritmo.

Va notato che non si sta affermando che il ritmo del secondo orologio resta invariato durante il trasporto, anzi si lascia aperta la possibilità che possa essere alterato in funzione della velocità, ma una volta posto nuovamente a riposo in  $P$ , non vi è nessun motivo di ritenere che non abbia nuovamente lo stesso ritmo, se nel trasporto non è stato danneggiato.

E' chiaro allora che, se si varia il tempo iniziale dell'orologio in  $O$  da  $t_0$  a  $t_0 + \tau$ , avremo che anche l'orologio in  $P$  misurerà un tempo aumentato di  $\tau$ .

Quindi il primo punto è verificato.

Per ciò che riguarda il secondo punto facciamo un'osservazione preliminare.

b)-Se un segnale luminoso è inviato dal punto  $O$  al punto  $P$  e viene rimandato da  $P$  verso  $O$ , idealmente senza alcun ritardo, se il tempo iniziale di sincronizzazione, segnato dall'orologio in  $O$  è  $t_0$ , allora, facendo appello all'esperienza di Fizeau già citata, possiamo dire che il tempo impiegato per tornare in  $O$  dal raggio luminoso è

$$t_0 + 2(l/c) \tag{3.1}$$

Se allora si calcola la differenza del tempo di arrivo in  $O$  e del tempo in cui il segnale era arrivato in  $P$ , si ha

$$[t_0 + 2(l/c)] - [t_0 + (l/c)] = l/c \tag{3.2}$$

cioè il tempo necessario per il percorso  $OP$  è uguale a quello per il percorso inverso  $PO$ .

c)-A questo punto passiamo a dimostrare il secondo punto e cioè che la sincronizzazione è indipendente dalla scelta del punto di riferimento  $O$ . Per vedere questo consideriamo un secondo punto  $O'$ , oltre ad  $O$  e  $P$  e dimostriamo che il tempo che impiega un raggio luminoso emesso da  $O'$  per raggiungere  $P$  è dato da  $l'/c$ , dove  $l'$  è la distanza tra  $O'$  e  $P$ .

Se dimostriamo questo è chiaro che potremo usare il nuovo punto  $O'$  come nuova origine, essendo poi  $P$  del tutto arbitrario.

Richiamando ancora una volta l'esperienza di Fizeau, avremo che il tempo di arrivo in  $O$  di un segnale luminoso emesso da  $O$  verso  $O'$ , rimesso da  $O'$  verso  $P$  e poi rimesso da  $P$  verso  $O$  sarà dato da

$$t_{OO'PO} = t_0 + (l_0 + l' + l)/c \quad (3.3)$$

dove  $l_0$  è la distanza tra  $O$  e  $O'$  e  $l'$  è la distanza tra  $O'$  e  $P$ .

Se  $t_{OO'P}$  è il tempo in cui questo segnale transita dal punto  $P$ , allora si ha

$$t_{OO'PO} = t_{OO'P} + (l/c) \quad (3.4)$$

per quanto detto in (b). Poiché il tempo in cui il segnale transita per  $O'$  è dato da  $t_{OO'} = t_0 + (l_0/c)$ , eliminando  $t_{OO'PO}$  dalle due equazioni (3.3), (3.4) si ha

$$t_{OO'P} - t_0 = \frac{l_0 + l'}{c} \quad (3.5)$$

e ricavando  $t_0$  in termini di  $t_{OO'}$

$$t_{OO'P} - \left( t_{OO'} - \frac{l_0}{c} \right) = \frac{l_0 + l'}{c} \quad (3.6)$$

e quindi

$$t_{OO'P} - t_{OO'} = t_{O'P} = \frac{l'}{c} \quad (3.7)$$

che è quello che si voleva dimostrare.



### 3.1.2 Relatività della simultaneità

Passiamo ora a considerare un secondo sistema inerziale  $S'$ . Anche in  $S'$  potremo costruire un sistema di orologi sincronizzati disposti in vari punti dello spazio come nel caso di  $S$ . Il valore della velocità della luce sarà ancora  $c$ , come sappiamo dai vari esperimenti. Questo sistema di sincronizzazione sarà consistente nel modo precedentemente discusso e per le stesse ragioni. In particolare le distanze saranno misurate mediante regoli a riposo in  $S'$ . Così come per  $S$  anche in  $S'$  due eventi saranno considerati simultanei se gli orologi situati nelle corrispondenti posizioni segnano lo stesso tempo.

Ora, ciò che avviene è che due eventi simultanei in  $S$  non saranno più necessariamente simultanei in  $S'$ .

Per convincersi di ciò consideriamo due eventi che si manifestano in due punti  $A$  e  $B$ , a distanza fissa in  $S$ ; per esempio gli estremi di una sbarra dai quali vengono emessi due raggi luminosi verso il suo centro. Questi due eventi si diranno simultanei, relativamente a  $S$ , se i due raggi di luce emessi da  $A$  e  $B$  si incontrano nel punto di mezzo.

Questo criterio di simultaneità vale anche per  $S'$ . Ora, supponiamo che  $S'$  si muova rispetto a  $S$  con velocità  $v$  parallela alla congiungente dei due punti, ovvero alla sbarra. In  $S'$  la velocità della luce è ancora  $c$ . Quindi, il punto in  $S'$ , che all'istante iniziale coincideva col punto di mezzo e che si muove solidalmente con  $S'$  con velocità  $v$  verso il punto  $B$  è il punto di mezzo per  $S'$ , ma, poichè va incontro alla sorgente sarà raggiunto dal raggio emesso da  $B$  prima del raggio luminoso emesso da  $A$ . Si vede perciò che due eventi simultanei in  $S$  non lo sono più in  $S'$ .

Si conclude che il concetto di simultaneità è relativo (al sistema di riferimento).

### 3.1.3 Le trasformazioni di Lorentz

Riassumendo la discussione precedente, la relatività di Einstein (o relatività ristretta) si basa sui seguenti due postulati:

1. **Le leggi della fisica sono le stesse in tutti i sistemi inerziali**
2. **La velocità della luce è la stessa in tutti i sistemi inerziali**

Consideriamo adesso due riferimenti inerziali  $S$  e  $S'$  che si muovano di moto rettilineo uniforme uno rispetto all'altro, come in figura 3.1. Vogliamo

costruire le trasformazioni (dette di Lorentz) che connettono i due riferimenti e che soddisfano ai due postulati precedenti. In base al postulato di relatività (postulato 1) se  $P$  è un punto di  $S$  che si muove di moto rettilineo uniforme anche  $S'$  lo vedrà muoversi di moto rettilineo uniforme. Dunque il cambiamento di coordinate tra  $S$  e  $S'$  dovrà essere lineare

$$\begin{aligned}x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t + c_1 \\y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}t + c_2 \\z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}t + c_3 \\t' &= a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t + c_4\end{aligned}\tag{3.8}$$

Se i due riferimenti sono tali che le origini coincidono a  $t = t' = 0$  avremo

$$c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0\tag{3.9}$$

Inoltre i piani  $y = 0$  e  $y' = 0$  così come i piani  $z = 0$  e  $z' = 0$  coincidono per tutta la durata del moto e quindi dovremo avere

$$a_{21} = a_{23} = a_{24} = 0\tag{3.10}$$

e

$$a_{31} = a_{32} = a_{34} = 0\tag{3.11}$$

Infine, per le scelte fatte, i piani  $x = 0$  e  $x' = 0$  coincidono a  $t = t' = 0$ . Pertanto

$$a_{12} = a_{13} = a_{42} = a_{43} = 0\tag{3.12}$$

In definitiva si ha

$$\begin{aligned}x' &= a_{11}x + a_{14}t \\y' &= a_{22}y \\z' &= a_{33}z \\t' &= a_{41}x + a_{44}t\end{aligned}\tag{3.13}$$

Ovviamente  $a_{22}$  (ed anche  $a_{33}$ ) possono dipendere solo dalla velocità. Dunque se ricaviamo le coordinate di  $P$  in  $S$  dalle coordinate in  $S'$  dovremo avere

$$y = a(-v)y'\tag{3.14}$$

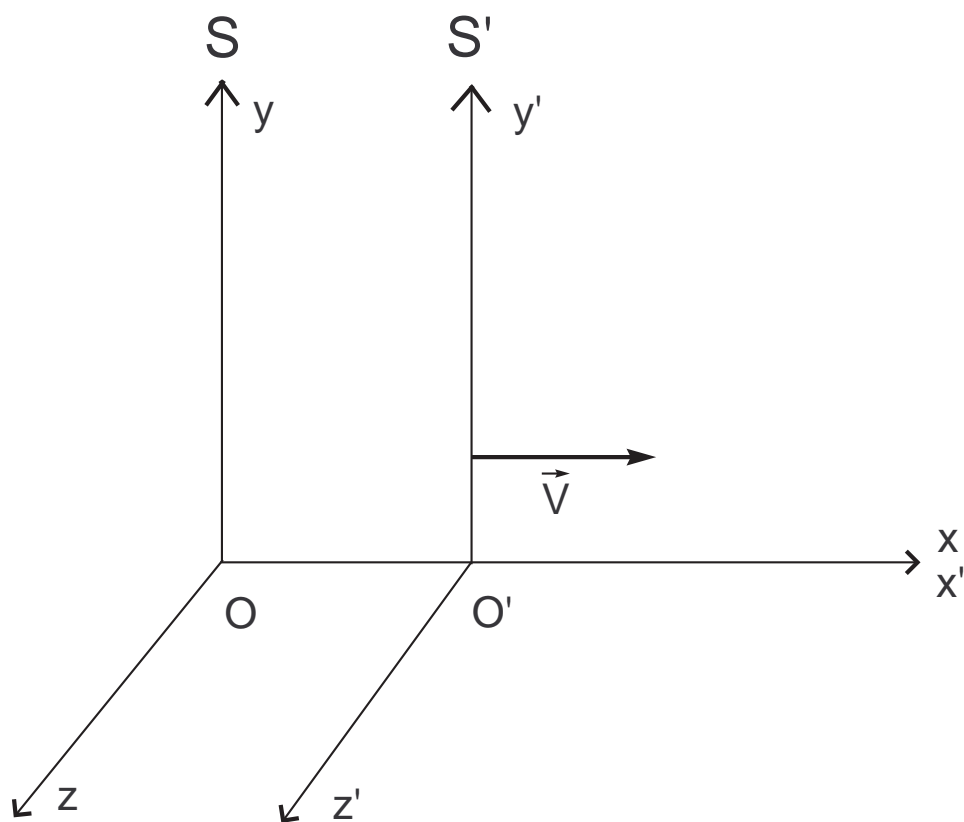


Figura 3.1: I sistemi di riferimento  $S$  e  $S'$ .

dato che  $S$  si muove con velocità  $-v$  rispetto a  $S'$ . Ma dalle (3.13) segue

$$y = \frac{1}{a(v)}y' \quad (3.15)$$

e quindi

$$a(v)a(-v) = 1 \quad (3.16)$$

Se ora invertiamo gli assi  $x$ ,  $x'$ ,  $z$  e  $z'$  vediamo che  $S'$  si muove con velocità  $-v$  rispetto a  $S$  ma dato che  $y$  e  $y'$  rimangono invariate avremo

$$y' = a(-v)y \quad (3.17)$$

e quindi

$$a^2(v) = 1 \quad (3.18)$$

. Dunque avremo  $a_{22} = 1$  (e per lo stesso motivo  $a_{33} = 1$ ). Si ottiene così

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{14}t \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= a_{41}x + a_{44}t \end{aligned} \quad (3.19)$$

Per determinare i coefficienti rimanenti consideriamo un'onda luminosa emessa a  $t = t' = 0$  dall'origine comune di  $S$  e  $S'$ . In virtù della costanza della velocità della luce in ogni sistema inerziale, le equazioni dei fronti d'onda nei due riferimenti saranno

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2, \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2 \quad (3.20)$$

Sottraendo membro a membro queste due equazioni si ha

$$c^2t^2 - x^2 = c^2t'^2 - x'^2 \quad (3.21)$$

Sostituendo la (3.19) si trovano le condizioni

$$\begin{aligned} a_{11}^2 - c^2a_{41}^2 &= 1 \\ c^2a_{44}^2 - a_{14}^2 &= c^2 \\ a_{11}a_{14} - c^2a_{41}a_{44} &= 0 \end{aligned} \quad (3.22)$$

La prima si risolve immediatamente in forma parametrica ponendo

$$a_{11} = \cosh \chi, \quad ca_{41} = \sinh \chi \quad (3.23)$$

Sostituendo nella terza delle (3.22) si ha

$$a_{14} \cosh \chi - ca_{44} \sinh \chi = 0 \quad (3.24)$$

da cui

$$a_{14} = ca_{44} \tanh \chi \quad (3.25)$$

Sostituendo questa relazione nella seconda delle (3.22) si ha infine

$$a_{44} = \cosh \chi, \quad a_{14} = c \sinh \chi \quad (3.26)$$

Pertanto le trasformazioni di Lorentz risultano

$$\begin{aligned}x' &= x \cosh \chi + ct \sinh \chi \\t' &= t \cosh \chi + \frac{x}{c} \sinh \chi\end{aligned}\quad (3.27)$$

Determiniamo adesso il parametro  $\chi$ . Consideriamo i punti del piano  $x = 0$ . Questi sono visti da  $S'$  allontanarsi con velocità  $-v$  e soddisfano la relazione

$$x' = -vt' \quad (3.28)$$

Segue dunque, per  $x = 0$ ,

$$t' = t \cosh \chi, \quad x' = ct \sinh \chi \quad (3.29)$$

da cui

$$x' = (c \tanh \chi)t \quad (3.30)$$

e quindi

$$\tanh \chi = -\frac{v}{c} \quad (3.31)$$

Segue

$$\sinh \chi = -\frac{v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \cosh \chi = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (3.32)$$

Dunque le (3.27) diventano

$$\begin{aligned}x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\y' &= y \\z' &= z \\t' &= \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\end{aligned}\quad (3.33)$$

Le trasformazioni di Lorentz assumono un significato geometrico più trasparente se introduciamo coordinate con le stesse dimensioni. Possiamo cioè trasformare la coordinata temporale in una coordinata con le dimensioni di una lunghezza moltiplicandola per la velocità della luce. Introducendo allora la notazione

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z \quad (3.34)$$

si ha

$$\begin{aligned}x'^0 &= x^0 \cosh \chi + x^1 \sinh \chi \\x'^1 &= x^0 \sinh \chi + x^1 \cosh \chi\end{aligned}\tag{3.35}$$

Risulta così evidente che questa trasformazione lascia invariata la forma quadratica  $(x^0)^2 - (x^1)^2$ , infatti per le proprietà delle funzioni iperboliche si ha subito

$$(x'^0)^2 - (x'^1)^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2\tag{3.36}$$

È anche interessante notare che se si introduce formalmente una coordinata  $x^4$  tale che

$$x^4 = ix^0\tag{3.37}$$

allora le trasformazioni di Lorentz assumono la forma

$$\begin{aligned}x'^1 &= x^1 \cosh \chi - ix^4 \sinh \chi \\x'^4 &= ix^1 \sinh \chi + x^4 \cosh \chi\end{aligned}\tag{3.38}$$

Ponendo

$$\chi = i\phi\tag{3.39}$$

e osservando che

$$\cosh \chi = \cos \phi, \quad \sinh \chi = i \sin \phi\tag{3.40}$$

si ha

$$\begin{aligned}x'^1 &= x^1 \cos \phi + x^4 \sin \phi \\x'^4 &= -x^1 \sin \phi + x^4 \cos \phi\end{aligned}\tag{3.41}$$

Inoltre nelle nuove variabili la forma quadratica che è lasciata invariante risulta

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2\tag{3.42}$$

che è una forma quadratica definita positiva. Questa è lasciata invariata da trasformazioni ortogonale che altro non sono che combinazioni di rotazioni attorno ai vari assi coordinati, Nel particolare caso in esame si ha a che fare con una rotazione di un angolo  $\phi$  del piano  $x^1 - x^4$ . Una forma quadratica reale è sempre diagonalizzabile ed i segni dei suoi autovalori costituiscono la segnatura della forma quadratica. Una forma quadratica positiva ha segnatura positiva e nel caso in esame sarà  $(+, +, +, +)$ . D'altra parte questo è

formale perché in realtà non si ha a che fare con coordinate reali, visto che  $x^4$  è immaginaria pura. Infatti nelle coordinate reali  $(x^0, x^1, x^2, x^3)$  la forma quadratica ha segnatura  $(-, +, +, +)$ . Poiché una forma quadratica definisce anche una forma metrica, cioè una forma per la distanza tra due punti in uno spazio assegnato, le forme quadratiche definite positive corrispondono a metriche a segnatura positiva, o metriche euclidee. Le metriche a segnatura non definita positiva sono dette anche metriche pseudo-euclidee, dato che si possono riportare a metriche euclidee ridefinendo come immaginarie pure le coordinate corrispondenti alla parte negativa della segnatura. Dunque l'equazione che definisce la propagazione del fronte d'onda di un raggio luminoso da luogo ad una metrica pseudoeuclidea. Le trasformazioni che lasciano invariate le metriche pseudoeuclidee sono dette pseudo-ortogonali perché si riducono ovviamente a trasformazioni ortogonali passando a coordinate immaginarie. In sostanza si passa da trasformazioni ortogonali a pseudo-ortogonali considerando parte degli angoli delle rotazioni come immaginari puri. L'uso della coordinata tempo di tipo  $x^4$ , cioè immaginaria pura, è usato nei testi più vecchi ma oggi è quasi sempre sostituita dalla versione reale, cioè  $x^0$ .

Concludiamo questo paragrafo con alcune osservazioni. Primo che le trasformazioni di Lorentz inverse si possono ottenere semplicemente osservando che la situazione relativa di  $S$  e di  $S'$  si può ottenere mandando  $v$  in  $-v$ . Infatti se  $S$  vede  $S'$  muoversi con velocità  $v$ ,  $S'$  vede  $S$  muoversi con velocità  $-v$ . Quindi le formule inverse si ottengono immediatamente con questo scambio

$$\begin{aligned} x &= \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{aligned} \tag{3.43}$$

Secondo che nel limite  $c \rightarrow \infty$  si ha dalle (3.33)

$$\begin{aligned} x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned} \tag{3.44}$$

si riottengono cioè le trasformazioni di Galileo.

Osserviamo anche che un modo standard di scrivere le trasformazioni di Lorentz è quello che fa uso delle notazioni

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (3.45)$$

Si ottiene cioè

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma(t - \beta x/c) \end{aligned} \quad (3.46)$$

Dal procedimento seguito risulta chiaro che, se si ammette l'esistenza di un tipo di segnale con velocità costante in ogni riferimento, questo può essere usato al posto della luce, dando luogo ad una trasformazione della forma della (3.33), ma con questa velocità al posto di  $c$ .

Tuttavia, poiché solo una trasformazione può essere valida, cioè o la (3.33) o quest'ultima, ne segue che questo segnale dovrà propagarsi alla velocità  $c$  e ciò sarà vero per ogni tipo di segnale con queste caratteristiche (per esempio le onde gravitazionali).

Notare che in quanto precede abbiamo fatto uso del principio di costanza della velocità della luce, che in effetti deve essere formulato indipendentemente dal principio di relatività, così come fece Einstein ed abbiamo fatto noi all'inizio di questo paragrafo. Potrebbe sembrare che il principio di relatività, che afferma l'invarianza delle equazioni di Maxwell, implichi la costanza della velocità della luce. Ma per poter parlare di invarianza delle equazioni di Maxwell occorre prima aver definito i nostri sistemi di riferimento, con le loro sincronizzazioni.

Osserviamo che per  $v \rightarrow c$  la trasformazione è singolare, nel senso che il fattore  $\gamma$  diventa infinito. Ciò significa che un sistema di riferimento non si potrà muovere rispetto ad un altro sistema con velocità uguale o superiore a quella della luce.

Ora, un sistema di riferimento si può pensare costituito da corpi materiali, per cui ne segue che una particella materiale non può muoversi con velocità uguale o maggiore di quella della luce, rispetto ad un qualsiasi sistema di riferimento.



# Capitolo 4

## Le proprietà delle trasformazioni di Lorentz

### 4.1 Forma generale delle trasformazioni di Lorentz

Abbiamo ottenuto con la (3.46) un caso particolare di trasformazione di Lorentz, corrispondente alla figura (3.1). Si può però ottenere un caso più generale e cioè il caso in cui gli assi di  $S'$  sono paralleli a quelli di  $S$ , ma  $\vec{v}$  è orientata in modo generico.

Basta per questo decomporre il vettore di posizione  $\vec{x}'$  del punto generico  $P$  nel sistema  $S'$  in una parte parallela ed in una perpendicolare a  $\vec{v}$ . Si comprende come la parte perpendicolare rimanga invariata, così come le coordinate  $y$  e  $z$  restavano invariate nella (3.46), mentre la parte parallela si trasformerà in modo analogo alla  $x$  delle (3.46). In questo modo si ottiene la trasformazione

$$\begin{cases} \vec{x}' = \vec{x} - \frac{(\vec{v} \cdot \vec{x})}{v^2} \vec{v} + \gamma \left[ \frac{(\vec{v} \cdot \vec{x})}{v^2} \vec{v} - \vec{v}t \right], \\ t' = \gamma \left[ t - \frac{(\vec{v} \cdot \vec{x})}{c^2} \right]. \end{cases} \quad (4.1)$$

Infatti i primi due termini della prima equazione dicono che la parte di  $\vec{x}$  perpendicolare a  $\vec{v}$  è inalterata, mentre la parte in parentesi mostra che la

parte parallela a  $\vec{v}$  si trasforma come la  $x$  nella (3.46). Se poi gli assi di  $S'$  sono ruotati rispetto a  $S$ , allora occorre preventivamente ruotare gli assi di  $S$  in modo da portarli ad essere paralleli a quelli di  $S'$ . Ma questo caso non lo discuteremo.

Ovviamente la trasformazione più generale lascia invariata l'espressione (così come la (3.46))

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (x^0)^2 \equiv (x, x) \quad (4.2)$$

Come si verifica subito vale la proprietà

$$(y + z, y + z) = (y, y) + (z, z) + 2(y, z) \quad (4.3)$$

dove

$$(y, z) = y^1 z^1 + y^2 z^2 + y^3 z^3 - y^0 z^0 \quad (4.4)$$

Dunque dato che abbiamo visto che una trasformazione di Lorentz lascia invariata l'espressione  $(x, x)$ , lascerà invariate sia  $(y + z, y + z)$  che  $(y, y)$  e  $(z, z)$ . Dalla formula (4.3) vediamo che anche l'espressione (4.4) è invariante. Quest è molto importante perché si può dimostrare che le trasformazioni di Lorentz nella loro forma estesa, che comprende anche il caso delle inversioni spaziali e dell'inversione temporale, sono le più generali trasformazioni che lasciano invariata questa forma quadratica.

## 4.2 Contrazione delle lunghezze e dilatazione dei tempi

Possiamo ora ricavare alcune conseguenze della legge di trasformazione di Lorentz (3.46), che riguardano il confronto di misure effettuate nei due sistemi di riferimento  $S$  ed  $S'$ .

Considereremo le due situazioni: a) un regolo a riposo in  $S'$  disposto parallelamente all'asse delle  $x'$  e b) un orologio, opportunamente sincronizzato come già spiegato, posto a riposo in  $S'$  su di punto dell'asse delle  $x'$  con ascissa  $x'_1$ .

a) **Contrazione delle lunghezze** - Come illustrato in figura (4.1), gli estremi del regolo in  $S'$  abbiano le coordinate  $x'_1$  e  $x'_2$  rispettivamente. La lunghezza del regolo misurata in  $S$  è perciò data da

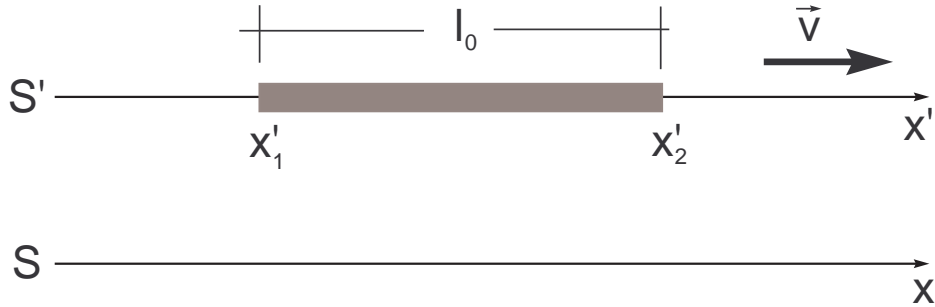


Figura 4.1: Illustrazione dei due riferimenti coinvolti nella discussione sulla contrazione delle lunghezze.

$$l_0 = x'_2 - x'_1. \quad (4.5)$$

Questa la chiameremo la lunghezza a riposo o semplicemente la lunghezza del regolo.

Ponendoci in  $S$ , è naturale definire come lunghezza del regolo  $l = x_2 - x_1$ , dove le misure dei due estremi  $x_1, x_2$  sono effettuate allo stesso istante  $t_1 = t_2 = t$ . Usando allora le (3.46) si ha

$$x'_1 = \gamma(x_1 - vt), \quad x'_2 = \gamma(x_2 - vt). \quad (4.6)$$

da cui, sottraendo membro a membro, si trova la lunghezza del regolo,  $l$ , in  $S$ :

$$l = x_2 - x_1 = \frac{1}{\gamma}(x'_2 - x'_1), \quad (4.7)$$

cioè

$$l = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad (4.8)$$

che è indipendente da  $t$ . Questa è la famosa espressione della contrazione delle lunghezze.

E' chiaro dalla derivazione che se il regolo fosse stato perpendicolare alla velocità  $\vec{v}$ , la sua lunghezza sarebbe rimasta invariata. Quindi, se si considera un corpo esteso di volume  $V$ , misurato in  $S$  e di volume  $V^0$  se misurato in  $S'$ , avremo la seguente relazione

$$V = V^0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (4.9)$$

dove la contrazione del corpo avviene nella direzione del moto.

b) **Dilatazione dei tempi** - Supponiamo adesso che due eventi si verifichino in  $S'$  nello stesso punto  $x'$  e agli istanti  $t'_1$  e  $t'_2$ . Usando le trasformazioni di Lorentz inverse (vedi equazioni (3.43)) si ottiene

$$\begin{cases} t_1 = \gamma(t'_1 + vx'/c^2), \\ t_2 = \gamma(t'_2 + vx'/c^2), \end{cases} \quad (4.10)$$

e quindi

$$t_2 - t_1 = \gamma(t'_2 - t'_1) = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (4.11)$$

La (4.11) è l'espressione della dilatazione dei tempi. Il termine a fattore è adesso invertito rispetto al caso delle lunghezze (4.8).

Possiamo introdurre il concetto di **tempo proprio** considerando una particella nel suo sistema di riposo  $S'$ . L'intervallo di tempo infinitesimo in questo sistema  $d\tau$  è connesso con l'intervallo di tempo  $dt$  misurato da un osservatore  $S$  rispetto al quale la particella si muove con velocità  $\vec{u}$ , tramite la (4.11)

$$d\tau = \sqrt{1 - u^2/c^2} dt \quad (4.12)$$

Si assume che questa relazione sia valida per un moto arbitrario, con  $\vec{u}$  data dalla velocità istantanea dell'orologio. Quindi si assume che l'accelerazione dell'orologio relativa ad un sistema inerziale non abbia influenza sul suo ritmo. Il tempo  $\tau$  così definito si chiama tempo proprio.

Notare che, per il modo nel quale è stato definito, il tempo proprio è un invariante. Infatti si tratta di una misura eseguita in un determinato sistema di riferimento, quello di riposo della particella. Non ha perciò senso parlare di proprietà di trasformazione! Sarà la sua relazione con il tempo misurato da un orologio fisso in un sistema inerziale a cambiare se si cambia sistema inerziale.

### 4.2.1 Orologio a luce

Un orologio si basa sull'idea di osservare un fenomeno periodico e contare il numero delle volte che, in un certo tempo, il fenomeno si ripete. Questo numero si può prendere a misura del tempo in un sistema di unità di misura in cui l'unità è il periodo del fenomeno. Per esempio, negli orologi a pendolo si sfrutta l'isocronismo delle piccole oscillazioni del pendolo che assicurano un

periodo costante (trascurando gli attriti), ecc. Un orologio concettualmente semplice, sebbene di difficile realizzazione pratica, è il così detto orologio a luce. Nel tubo indicato in Figura 4.2, un raggio luminoso parte dal basso, viene riflesso dallo specchio in alto e ritorna all'origine dove viene riflesso ancora. In questo modo, misurando con un contatore le volte in cui il raggio ritorna in basso, abbiamo a disposizione un orologio. Il periodo di questo orologio, o il tempo  $\Delta t$  che la luce impiega a percorrere andata e ritorno è, per un osservatore  $S'$  solidale con l'orologio, dato da

$$\Delta t' = \frac{2\ell_0}{c} \quad (4.13)$$

dove  $\ell_0$  è la lunghezza dell'orologio misurata in  $S'$ . Se il riferimento  $S'$  (solidale con l'orologio) si muove di velocità  $v$  (vedi Figura 4.2) rispetto ad un riferimento fisso  $S$ , l'osservatore in  $S$  vedrà il raggio luminoso fare il percorso ABC, rappresentato nella Figura. Se  $\Delta t$  è il tempo impiegato dalla luce a fare questo percorso, come visto in  $S$ , avremo

$$AN = NC = \frac{v\Delta t}{2} \quad (4.14)$$

Se assumiamo, come ragionevole e come visto quando abbiamo studiato le trasformazioni di Lorentz, che le coordinate perpendicolari al moto non cambino, la lunghezza  $\ell_0$  dell'orologio vista in  $S'$  coinciderà con la lunghezza vista in  $S$ . Quindi

$$AB + BC = 2\sqrt{(BN)^2 + (AN)^2} = 2\sqrt{\ell_0^2 + v^2\Delta t^2/4} \quad (4.15)$$

Ma, dato che la velocità della luce è la stessa in  $S$  e in  $S'$  si ha anche

$$AB + BC = c\Delta t \quad (4.16)$$

Uguagliando le ultime due relazioni segue

$$c^2\Delta t^2 = 4\ell_0^2 + v^2\Delta t^2 \quad (4.17)$$

da cui

$$\Delta t = \frac{2\ell_0}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (4.18)$$

Confrontando con la (4.13) si ottiene

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (4.19)$$

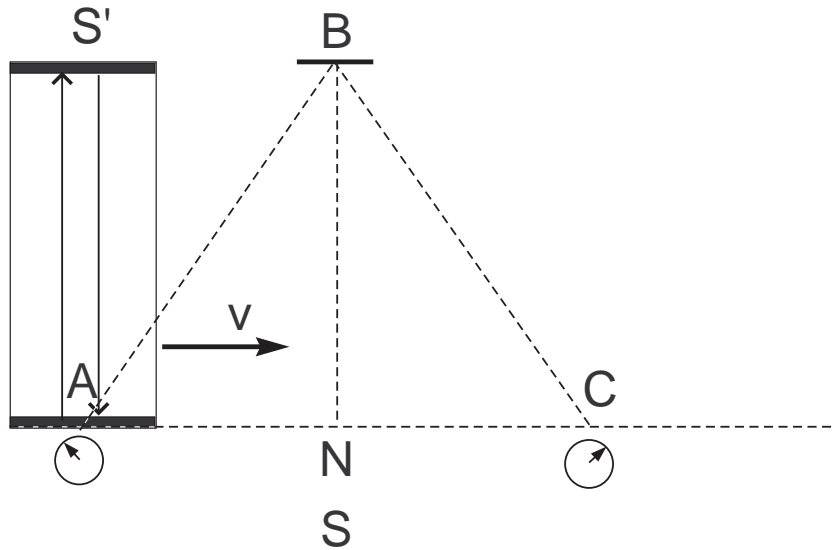


Figura 4.2: L'orologio luce descritto nel testo.

Riotteniamo dunque la legge di dilatazione dei tempi ma vista in un contesto più fisico rispetto a quello un pò formale considerato in precedenza.

In maniera analoga possiamo descrivere la contrazione delle lunghezze. Consideriamo ancora l'orologio di luce in posizione orizzontale rispetto alla velocità del riferimento  $S'$  (solidale con l'orologio) ed il riferimento  $S$ . Al tempo  $t = \Delta t_1$ , in  $S$ , quando il raggio luminoso raggiunge l'estremità  $B$  avremo la relazione

$$\ell + v\Delta t_1 = c\Delta t_1 \quad (4.20)$$

con  $\ell$  la lunghezza dell'orologio vista in  $S$ . Dopo un tempo  $\Delta t_2$  il raggio luminoso ritorna in  $A$  e abbiamo

$$\ell - v\Delta t_2 = c\Delta t_2 \quad (4.21)$$

Dunque il tempo impiegato dal raggio luminoso a percorrere l'intero tragitto è dato da

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \frac{\ell}{c-v} + \frac{\ell}{c+v} = \frac{2\ell}{c} \frac{1}{1-v^2/c^2} \quad (4.22)$$

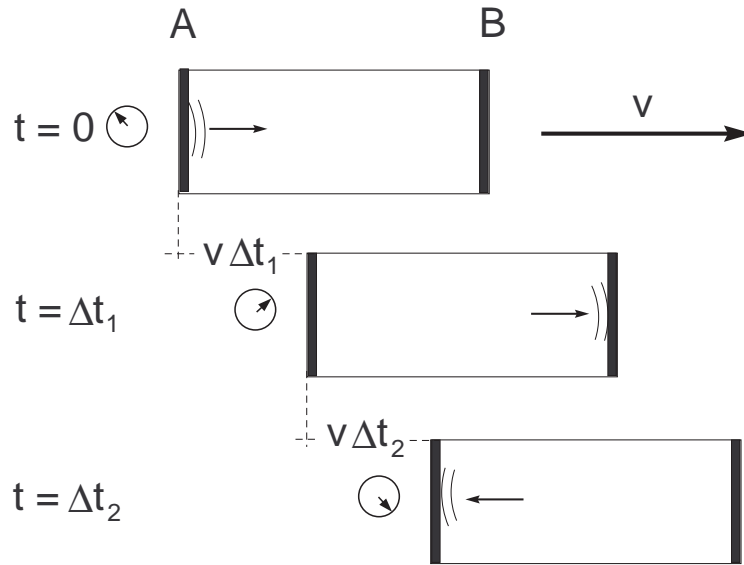


Figura 4.3: In questo caso l'orologio luce serve per illustrare la contrazione delle lunghezze.

Ma poiché si ha

$$\Delta t = \frac{2l_0}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (4.23)$$

segue

$$l = \sqrt{1 - v^2/c^2} l_0 \quad (4.24)$$

### 4.2.2 Inversione temporale

Vogliamo ora studiare le condizioni sotto le quali un evento  $A$  che nel riferimento  $S$  precede temporalmente l'evento  $B$  possa essere osservato, da un osservatore  $S'$  in moto rispetto a  $S$ , come posteriore a  $B$ . Le coordinate di  $A$  saranno  $(x_A, t_A)$  e quelle di  $B$ ,  $(x_B, t_B)$ . Per ipotesi  $t_A < t_B$ . Nel riferimento  $S'$  dovremmo avere

$$t'_A - t'_B = \gamma \left( t_A - \frac{\beta}{c} x_A \right) - \gamma \left( t_B - \frac{\beta}{c} x_B \right) = \gamma \left[ (t_A - t_B) - \frac{\beta}{c} (x_A - x_B) \right] > 0 \quad (4.25)$$

Questa relazione richiede

$$(t_B - t_A) < \frac{\beta}{c}(x_B - x_A) \quad (4.26)$$

Nel caso limite  $\beta = 1$  cioè quando  $S'$  si muove a velocità  $c$  rispetto ad  $S$  si ha

$$(t_B - t_A) < \frac{(x_B - x_A)}{c} \quad (4.27)$$

Questa relazione mostra che è possibile vedere l'inversione temporale degli eventi solo se la distanza temporale tra gli eventi è più piccola del tempo che impiega la luce a percorrere la distanza tra gli eventi stessi. Possiamo

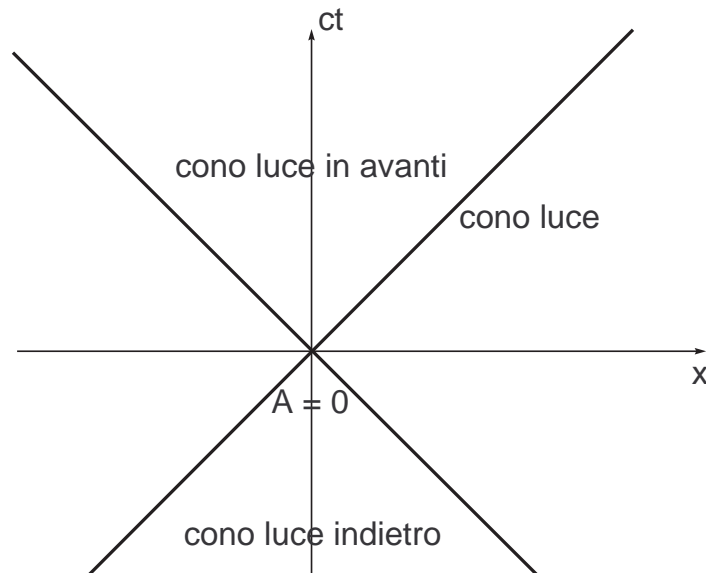


Figura 4.4: Il cono di luce relativo all'evento  $A$ .

illustrare queste considerazioni nella figura 4.4 dove abbiamo posto l'evento  $A$  nel punto  $x_A = 0$  ed al tempo  $t_A = 0$ . Le bisettrici danno l'equazione di un raggio di luce ( $x^2 - c^2t^2 = 0$ ). Se  $B$  si trova nel cono luce in avanti si ha

$$ct_B > x_B : \quad \text{cono luce in avanti} \quad (4.28)$$

e non è possibile trovare un riferimento in cui  $B$  preceda  $A$ . Se invece  $B$  è fuori del cono di luce, allora

$$ct_B < x_B \quad (4.29)$$



ed è possibile trovare un riferimento in cui gli eventi si invertono. Se assumiamo la validità del principio di causalità, cioè che la causa deve precedere l'effetto, segue che nessun agente fisico (o segnale) che trasporti informazioni può propagarsi a velocità superiori a quelle della luce, perché in questo caso la connessione tra i due eventi soddisfa

$$t_B - t_A < \frac{(x_B - x_A)}{c} \quad (4.30)$$

e quindi si potrebbe invertire l'ordine temporale di causa ed effetto.

### 4.3 La legge di composizione delle velocità

Un'altra proprietà importante delle trasformazioni di Lorentz è la legge di composizione delle velocità. Questa, nel caso particolare delle trasformazioni (3.43), si può ottenere differenziando le (3.43) stesse

$$\begin{cases} dx' &= \gamma(dx - vdt), \\ dy' &= dy, \\ dz' &= dz, \\ dt' &= \gamma(dt - vdx/c^2), \end{cases} \quad (4.31)$$

dalle quali, ponendo  $\vec{u} = d\vec{x}/dt$  e  $\vec{u}' = d\vec{x}'/dt'$ , si ha subito

$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \\ u'_y &= \frac{u_y}{\gamma(1 - \frac{vu_x}{c^2})} \\ u'_z &= \frac{u_z}{\gamma(1 - \frac{vu_x}{c^2})} \end{aligned} \quad (4.32)$$

che si riducono a quelle Galileiane nel limite  $c \rightarrow \infty$ .

Notare che questa legge di composizione delle velocità non contraddice il fatto che la velocità della luce sia la velocità limite. Infatti si verifica che se si pone, per esempio,  $u_x = c$  e  $u_y = u_z = 0$  si ha  $u'_x = c$ .

In modo analogo possiamo anche ricavare l'analogia formula per la trasformazione (4.1):

$$\vec{u}' = \frac{\vec{u} + \vec{v} \left[ (\gamma - 1) \frac{(\vec{v} \cdot \vec{u})}{v^2} - \gamma \right]}{\gamma \left( 1 - \frac{(\vec{v} \cdot \vec{u})}{c^2} \right)}, \quad (4.33)$$

che si riduce, per  $\vec{u}$  parallelo a  $\vec{v}$ , a  $\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v}$  nel limite  $c \rightarrow \infty$ .

## 4.4 Effetto Doppler relativistico e aberrazione della luce

Per ottenere le formule relativistiche dell'effetto Doppler è necessario studiare prima la legge di trasformazione delle caratteristiche di un'onda, cioè determinare la versione relativistica delle formule (2.18) e (2.20). Consideriamo ancora un'onda monocromatica nel sistema inerziale  $S$

$$\psi(\vec{x}, t) = A \cos \left[ \omega \left( t - \frac{\vec{n} \cdot \vec{x}}{c} \right) \right], \quad (4.34)$$

Esattamente lo stesso ragionamento usato in sezione (2.2) dimostra l'invarianza della fase di quest'onda, dove però questa volta la trasformazione è una trasformazione di Lorentz, cioè

$$\omega' \left( t' - \frac{\vec{n}' \cdot \vec{x}'}{c} \right) = \omega \left( t - \frac{\vec{n} \cdot \vec{x}}{c} \right), \quad (4.35)$$

dove le grandezze con l'apice sono misurate nel sistema  $S'$ , che al solito si muove rispetto a  $S$  di moto rettilineo uniforme con velocità  $\vec{v}$ .

Se si considera la trasformazione di Lorentz (3.43) e si identificano i coefficienti di  $x'$  e  $t'$ , si ha

$$\omega' = \omega \gamma \left( 1 - \frac{n_x v}{c} \right), \quad (4.36)$$

per ciò che riguarda i coefficienti di  $t'$  e

$$\begin{aligned}
\frac{\omega}{c}\gamma(n_x - \frac{v}{c}) &= \frac{\omega'}{c}n'_x \\
\frac{\omega}{c}n_y &= \frac{\omega'}{c}n'_y \\
\frac{\omega}{c}n_z &= \frac{\omega'}{c}n'_z
\end{aligned}
\tag{4.37}$$

per ciò che riguarda i coefficienti di  $x'$ ,  $y'$  e  $z'$  rispettivamente.

Tenuto conto che  $\vec{v}$  è parallela all'asse delle  $x$ , la prima di queste equazioni si può riscrivere

$$\omega' = \omega\gamma(1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}}{c}). \tag{4.38}$$

Se poi si sceglie l'asse delle  $y$  nel piano formato dall'asse delle  $x$  e  $\vec{n}$  e ponendo

$$\vec{n} = \cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j}, \tag{4.39}$$

si ha che le altre equazioni si riducono a

$$\omega\gamma(\cos \alpha - \frac{v}{c}) = \omega' \cos \alpha', \tag{4.40}$$

$$\omega \sin \alpha = \omega' \sin \alpha' \tag{4.41}$$

Dividendo membro a membro queste due equazioni, si ha

$$\tan \alpha' = \frac{\sin \alpha}{\gamma(\cos \alpha - v/c)} \tag{4.42}$$

L'equazione (4.38) si riduce alla corrispondente equazione non relativistica (2.18) nel limite  $c \rightarrow \infty$ . Essa rende conto dell'effetto Doppler relativistico. Infatti, se in  $S'$  c'è un osservatore e in  $S$  una sorgente, per esempio di luce con frequenza  $\nu = \omega/2\pi$ , la sorgente si allontana dall'osservatore con velocità costante  $v$ . Allora l'osservatore osserva una radiazione con frequenza  $\nu' = \omega'/2\pi$ , data da

$$\nu' = \nu\gamma(1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}}{c}) \tag{4.43}$$

Per quanto riguarda l'aberrazione della luce abbiamo già osservato che ciò che conta non è la velocità di fase, cioè la velocità  $w$  che compare nella (4.34), ma la velocità di gruppo. Abbiamo anche visto che la velocità di gruppo si trasforma come la velocità di una particella nel caso non relativistico. Si può dimostrare che ciò vale anche nel caso relativistico, per cui dobbiamo usare le equazioni (4.32) piuttosto che l'equazione (4.42).

Dalle (4.32), prendendo  $\vec{u}$  e quindi  $\vec{u}'$  nel piano  $(x, y)$ , e chiamando con  $\theta$  e  $\theta'$  gli angoli che  $\vec{u}$  e  $\vec{u}'$  formano con l'asse delle  $x$ , si ha

$$\begin{aligned} u' \cos \theta' &= \frac{u \cos \theta - v}{1 - vu \cos \theta / c^2} \\ u' \sin \theta' &= \frac{u \sin \theta}{\gamma(1 - vu \cos \theta / c^2)} \end{aligned} \quad (4.44)$$

e, dividendo membro a membro

$$\tan \theta' = \frac{\sin \theta}{\gamma(\cos \theta - v/u)} \quad (4.45)$$

Questa formula rende conto dell'aberrazione della luce se, come nel caso della (2.39), si opera la sostituzione (2.40)

$$\theta \rightarrow \theta + \pi; \quad \theta' \rightarrow \theta' + \pi, \quad (4.46)$$

dove adesso  $\theta$  e  $\theta'$  sono gli angoli come in figura (2.4). Si ottiene allora

$$\tan \theta' = \frac{\sin \theta}{\gamma(\cos \theta + v/u)}. \quad (4.47)$$

Si vede che questa formula differisce da quella non relativistica per il fattore  $\gamma$ , cioè per termini del secondo ordine in  $v/c$ .

# Capitolo 5

## Elementi di calcolo tensoriale

### 5.1 Spazi vettoriali

Consideriamo uno spazio vettoriale  $V$  ad  $n$  dimensioni e sia  $\underline{e}_a$  una base in tale spazio ( $a = 1, 2, \dots, n$ ). Un generico vettore  $\underline{v}$  sarà allora esprimibile come<sup>1</sup>

$$\underline{v} = v^a \underline{e}_a \quad (5.1)$$

Chiameremo i vettori di  $V$  vettori controvarianti. Dato  $V$  è possibile costruire uno spazio vettoriale associato, detto il duale di  $V$  e che sarà indicato con  $V^*$ . Lo spazio  $V^*$  è lo spazio delle applicazioni lineari da  $V \rightarrow R$  dove  $R$  è lo spazio dei reali. Se indichiamo con  $f$  l'applicazione, avremo

$$f(\underline{v}) \equiv \langle \underline{f}, \underline{v} \rangle \in R \quad (5.2)$$

dove la notazione introdotta anticipa il fatto che le applicazioni lineari di  $V \rightarrow R$  sono elementi dello spazio vettoriale  $V^*$ . Poiché  $f$  è lineare avremo

$$f(\alpha \underline{v} + \beta \underline{w}) = \alpha f(\underline{v}) + \beta f(\underline{w}) \quad (5.3)$$

od anche

$$\langle \underline{f}, \alpha \underline{v} + \beta \underline{w} \rangle = \alpha \langle \underline{f}, \underline{v} \rangle + \beta \langle \underline{f}, \underline{w} \rangle \quad (5.4)$$

Vediamo ora come sia possibile assegnare a  $V^*$  la struttura di spazio vettoriale. Definiamo a questo scopo la somma di due applicazioni

$$(f + g)(\underline{v}) = f(\underline{v}) + g(\underline{v}), \quad (\langle \underline{f} + \underline{g}, \underline{v} \rangle = \langle \underline{f}, \underline{v} \rangle + \langle \underline{g}, \underline{v} \rangle) \quad (5.5)$$

---

<sup>1</sup>Qui e nel seguito adotteremo la convenzione di Einstein, cioè quando si scriva una coppia di indici uguali, uno in alto ed uno in basso, una somma su questo indice è sottintesa.

ed il prodotto di un'applicazione per un numero reale

$$(\alpha f)(\underline{v}) = \alpha f(\underline{v}), \quad (\langle \alpha f, \underline{v} \rangle = \alpha \langle f, \underline{v} \rangle) \quad (5.6)$$

Dove in parentesi abbiamo anche usato l'altra definizione di  $f(\underline{v})$ . Questa quantita' viene anche chiamata la valutazione dell'applicazione  $f$  in quanto calcola l'applicazione al punto  $\underline{v}$ . Notiamo che le definizioni date hanno senso poiche' il risultato dell'applicazione  $f$  e' un numero reale ed i reali possono essere addizionati e moltiplicati tra loro. A questo proposito si puo' notare che se lo spazio vettoriale invece di essere definito su  $R$  fosse definito su un generico campo numerico  $F$ , le applicazioni  $f$  dovrebbero essere considerate come applicazioni da  $V \rightarrow F$ . Dalle definizioni date di somma di applicazioni e di prodotto di un'applicazione per un numero e' immediato verificare che  $V^*$  soddisfa gli assiomi di spazio vettoriale.

Data una base in  $V$  si puo' costruire una base in  $V^*$  nel seguente modo: consideriamo le applicazioni  $\underline{\omega}^a$  tali che

$$\langle \underline{\omega}^a, \underline{e}_b \rangle = \delta_b^a \quad (5.7)$$

Notiamo anche che il piu' generale mapping lineare potra' essere rappresentato nella forma

$$f(\underline{v}) = f_a v^a \quad (5.8)$$

dove  $v^a$  sono le componenti di  $\underline{v}$  nella base data. Pertanto l'applicazione  $f$  potra' essere sempre decomposta nella forma

$$\underline{f} = f_a \underline{\omega}^a \quad (5.9)$$

dato che

$$\langle f_a \underline{\omega}^a, \underline{v} \rangle = f_a \langle \underline{\omega}^a, v^b \underline{e}_b \rangle = f_a v^b \delta_b^a = f_a v^a \quad (5.10)$$

Questo mostra che in effetti le  $\underline{\omega}^a$  formano una base per  $V^*$  e quindi anche  $V^*$  e' uno spazio vettoriale  $n$ -dimensionale.

Se consideriamo il caso  $V = R^n$ , potremo scrivere il generico elemento come il vettore riga

$$\underline{v} = (v^1, v^2, \dots, v^n) \quad (5.11)$$

Una base e' data allora da

$$\underline{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, \underline{e}_n = (0, 0, \dots, 1) \quad (5.12)$$

Possiamo allora rappresentare la generica applicazione come

$$f(\underline{v}) = v^a f_a = (v^1, v^2, \dots, v^n) \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

Pertanto i vettori duali possono essere pensati come vettori colonna. Il generico elemento del duale potrà allora essere scritto come  $\underline{f} = f_a \underline{\omega}^a$ , con la base duale data da

$$\underline{\omega}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \underline{\omega}^n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

I vettori dello spazio duale  $V^*$  saranno chiamati vettori covarianti.

## 5.2 Tensori

Usando una procedura analoga a quella seguita per la costruzione del duale e' possibile costruire altri spazi vettoriali che ci permetteranno di definire i tensori di rango  $(r, s)$ . A tal fine costruiamo il seguente spazio ottenuto come prodotto cartesiano di  $r$  copie di  $V^*$  e di  $s$  copie di  $V$ :

$$\Pi_r^s = (V^*)^r (V)^s \quad (5.15)$$

Consideriamo poi le applicazioni multilineari da  $\Pi_r^s \rightarrow R$  (cioe' lineari in tutti gli argomenti). Lo spazio di queste applicazioni lineari sara' indicato con  $T(r, s)$  e sara' detto lo spazio dei tensori di rango  $(r, s)$ . Per esempio  $T(0, 1) = V^*$  poiche' questo e' lo spazio delle applicazioni da  $V \rightarrow R$ . Analogamente si ha  $T(1, 0) = V$ , poiche' le applicazioni da  $V^* \rightarrow R$  danno il duale del duale che come noto coincide con lo spazio vettoriale di partenza. Il generico elemento di  $T(r, s)$  sara' allora indicato con

$$T(\underline{\eta}^1, \underline{\eta}^2, \dots, \underline{\eta}^r; \underline{Y}_1, \underline{Y}_2, \dots, \underline{Y}_s), \quad \underline{\eta}^i \in V^*, \quad \underline{Y}_i \in V \quad (5.16)$$

Lo spazio  $T(r, s)$  puo' essere dotato della struttura di spazio vettoriale cosi' come abbiamo fatto per lo spazio duale. Definiremo cioe' la somma di due elementi  $T(r, s)$

$$\begin{aligned} & (T + T')(\underline{\eta}^1, \underline{\eta}^2, \dots, \underline{\eta}^r; \underline{Y}_1, \underline{Y}_2, \dots, \underline{Y}_s) \\ &= T(\underline{\eta}^1, \underline{\eta}^2, \dots, \underline{\eta}^r; \underline{Y}_1, \underline{Y}_2, \dots, \underline{Y}_s) \\ &+ T'(\underline{\eta}^1, \underline{\eta}^2, \dots, \underline{\eta}^r; \underline{Y}_1, \underline{Y}_2, \dots, \underline{Y}_s) \end{aligned} \quad (5.17)$$

ed il prodotto di un elemento di  $T(r, s)$  per un numero reale

$$(\alpha T)(\underline{\eta}^1, \underline{\eta}^2, \dots, \underline{\eta}^r; \underline{Y}_1, \underline{Y}_2, \dots, \underline{Y}_s) = \alpha T(\underline{\eta}^1, \underline{\eta}^2, \dots, \underline{\eta}^r; \underline{Y}_1, \underline{Y}_2, \dots, \underline{Y}_s) \quad (5.18)$$

Introduciamo ora un insieme speciale di elementi di  $T(r, s)$

$$t_{a_1 a_2 \dots a_r}^{b_1 b_2 \dots b_s} \equiv \underline{e}_{a_1} \otimes \underline{e}_{a_2} \otimes \dots \otimes \underline{e}_{a_r} \otimes \underline{\omega}^{b_1} \otimes \underline{\omega}^{b_2} \otimes \dots \otimes \underline{\omega}^{b_s} \quad (5.19)$$

definiti come quelle applicazioni che mappano

$$(\underline{\eta}^1, \underline{\eta}^2, \dots, \underline{\eta}^r; \underline{Y}_1, \underline{Y}_2, \dots, \underline{Y}_s) \quad (5.20)$$

in

$$\langle \underline{\eta}^1, \underline{e}_{a_1} \rangle \dots \langle \underline{\eta}^r, \underline{e}_{a_r} \rangle \langle \underline{\omega}^{b_1}, \underline{Y}_1 \rangle \dots \langle \underline{\omega}^{b_s}, \underline{Y}_s \rangle \quad (5.21)$$

Cioe'

$$\begin{aligned} & t_{a_1 a_2 \dots a_r}^{b_1 b_2 \dots b_s} (\underline{\eta}^1, \underline{\eta}^2, \dots, \underline{\eta}^r; \underline{Y}_1, \underline{Y}_2, \dots, \underline{Y}_s) \\ &= \langle \underline{\eta}^1, \underline{e}_{a_1} \rangle \dots \langle \underline{\eta}^r, \underline{e}_{a_r} \rangle \langle \underline{\omega}^{b_1}, \underline{Y}_1 \rangle \dots \langle \underline{\omega}^{b_s}, \underline{Y}_s \rangle \end{aligned} \quad (5.22)$$

Possiamo vedere facilmente che gli  $n^{r+s}$  elementi di  $T(r, s)$  costituiscono una base. Infatti la generica applicazione multilineare sara'

$$T(\underline{\eta}^1, \underline{\eta}^2, \dots, \underline{\eta}^r; \underline{Y}_1, \underline{Y}_2, \dots, \underline{Y}_s) = T_{b_1 b_2 \dots b_s}^{a_1 a_2 \dots a_r} \eta_{a_1}^1 \eta_{a_2}^2 \dots \eta_{a_r}^r Y_1^{b_1} Y_2^{b_2} \dots Y_s^{b_s} \quad (5.23)$$

dove abbiamo introdotto le componenti degli  $\underline{\eta}^i$  e degli  $\underline{Y}_i$ :

$$\underline{\eta}^i = \eta_a^i \underline{\omega}^a, \quad \underline{Y}_i = Y_i^a \underline{e}_a \quad (5.24)$$

Si vede allora che l'applicazione  $T$  puo' essere decomposta come

$$T = T_{b_1 b_2 \dots b_s}^{a_1 a_2 \dots a_r} t_{a_1 a_2 \dots a_r}^{b_1 b_2 \dots b_s} \quad (5.25)$$



Infatti

$$\begin{aligned}
& T(\underline{\eta}^1, \underline{\eta}^2, \dots, \underline{\eta}^r; \underline{Y}_1, \underline{Y}_2, \dots, \underline{Y}_s) \\
&= T_{b_1 b_2 \dots b_s}^{a_1 a_2 \dots a_r} t_{a_1 a_2 \dots a_r}^{b_1 b_2 \dots b_s}(\underline{\eta}^1, \underline{\eta}^2, \dots, \underline{\eta}^r; \underline{Y}_1, \underline{Y}_2, \dots, \underline{Y}_s) \\
&= T_{b_1 b_2 \dots b_s}^{a_1 a_2 \dots a_r} \eta_{a_1}^1 \eta_{a_2}^2 \dots \eta_{a_r}^r Y_1^{b_1} Y_2^{b_2} \dots Y_s^{b_s}
\end{aligned} \tag{5.26}$$

Le quantità  $T_{b_1 b_2 \dots b_s}^{a_1 a_2 \dots a_r}$  sono le componenti del tensore  $T$ . E' ovvio dalle definizioni date che:

$$(T + T')_{b_1 b_2 \dots b_s}^{a_1 a_2 \dots a_r} = T_{b_1 b_2 \dots b_s}^{a_1 a_2 \dots a_r} + T'_{b_1 b_2 \dots b_s}^{a_1 a_2 \dots a_r} \tag{5.27}$$

e

$$(\alpha T)_{b_1 b_2 \dots b_s}^{a_1 a_2 \dots a_r} = \alpha T_{b_1 b_2 \dots b_s}^{a_1 a_2 \dots a_r} \tag{5.28}$$

Consideriamo ora lo spazio  $\mathcal{T}$  costituito dall'insieme di tutti gli spazi  $T(r, s)$ . È allora possibile definire in questo spazio una operazione che prende il nome di prodotto tensoriale. Questa e' una operazione che mappa la coppia  $T(r, s)T(r', s')$  in  $T(r + r', s + s')$  e se  $T \in T(r, s)$  e  $T' \in T(r', s')$ , e' definita dalla relazione

$$\begin{aligned}
& (T \otimes T')(\underline{\eta}^1, \dots, \underline{\eta}^{r+r'}, \underline{Y}_1, \dots, \underline{Y}_{s+s'}) \\
&= T(\underline{\eta}^1, \dots, \underline{\eta}^r, \underline{Y}_1, \dots, \underline{Y}_s) \times \\
&\quad \times T'(\underline{\eta}^{r+1}, \dots, \underline{\eta}^{r+r'}, \underline{Y}_{s+1}, \dots, \underline{Y}_{s+s'})
\end{aligned} \tag{5.29}$$

o, in componenti

$$(T \otimes T')_{b_1 \dots b_{s+s'}}^{a_1 \dots a_{r+r'}} = T_{b_1 \dots b_s}^{a_1 \dots a_r} \cdot T_{b_{s+1} \dots b_{s+s'}}^{a_{r+1} \dots a_{r+r'}} \tag{5.30}$$

Questa definizione giustifica la scrittura usata nella formula (5.19) per indicare gli elementi della base di  $T(r, s)$  che possono dunque essere ottenuti come prodotto tensoriale delle basi di  $V$  e di  $V^*$ . Pertanto le regole del calcolo per i prodotti tensoriali sono molto semplici poiche' e' sufficiente decomporre ogni tensore nella propria base e poi moltiplicare tensorialmente tra loro le basi stesse. Per esempio

$$\underline{v} \otimes \underline{w} = v^a \underline{e}_a \otimes w^b \underline{e}_b = v^a w^b \underline{e}_a \otimes \underline{e}_b \tag{5.31}$$

da cui, come deve essere

$$(\underline{v} \otimes \underline{w})^{ab} = v^a w^b \tag{5.32}$$

Poiche' un vettore ha una definizione intrinseca non dipende dalla scelta della base. Naturalmente in una base diversa da quella fissata originariamente le componenti del vettore saranno diverse. La variazione delle componenti puo' essere facilmente calcolata a partire dalla trasformazione della base. Supponiamo allora che la base sia trasformata nel modo seguente:

$$\underline{e}_a \rightarrow \underline{e}_{a'} = \Lambda_{a'}^a \underline{e}_a \quad (5.33)$$

con  $\Lambda_{a'}^a$  una matrice nonsingolare. Per calcolare la trasformazione delle componenti usiamo il fatto che  $\underline{v}$  non dipende dalla base e quindi

$$\underline{v} = v^a \underline{e}_a = v^{a'} \underline{e}_{a'} = v^{a'} \Lambda_{a'}^a \underline{e}_a \quad (5.34)$$

e pertanto

$$v^a = \Lambda_{a'}^a v^{a'} \quad (5.35)$$

Congiuntamente alla base  $\underline{e}_a$ , la base duale  $\underline{\omega}^a$  subira' una trasformazione, visto che la base duale e' definita in riferimento alla base usata per  $V$  (vedi equazione (5.7)). Avremo dunque

$$\underline{\omega}^a \rightarrow \underline{\omega}^{a'} = \tilde{\Lambda}_a^{a'} \underline{\omega}^a \quad (5.36)$$

con  $\tilde{\Lambda}_a^{a'}$  un'altra matrice nonsingolare. Ma usando la (5.7) nella nuova base si ha

$$\langle \underline{\omega}^{a'}, \underline{e}_{b'} \rangle = \tilde{\Lambda}_a^{a'} \Lambda_{b'}^b \langle \underline{\omega}^a, \underline{e}_b \rangle = \tilde{\Lambda}_a^{a'} \Lambda_{b'}^a \quad (5.37)$$

Segue dunque

$$\tilde{\Lambda}_a^{a'} \Lambda_{b'}^a = \delta_{a'}^{b'} \quad (5.38)$$

Dunque la matrice che trasforma la base e quella che trasforma la base duale sono l'una l'inversa dell'altra. Facendo attenzione alla posizione degli indici scriveremo

$$\Lambda_a^{a'} \equiv (\Lambda^{-1})_a^{a'} \quad (5.39)$$

Possiamo allora invertire la relazione (5.34)

$$v^{a'} = \Lambda_a^{a'} v^a \quad (5.40)$$

Questa formula puo' anche essere ottenuta osservando che in generale le componenti di un tensore possono essere ottenute valutando il tensore sulla base duale, cioe'

$$T_{b_1 b_2 \dots b_s}^{a_1 a_2 \dots a_r} = T(\underline{\omega}^{a_1}, \underline{\omega}^{a_2}, \dots, \underline{\omega}^{a_r}, \underline{e}_{b_1}, \underline{e}_{b_2}, \dots, \underline{e}_{b_s}) \quad (5.41)$$

come segue subito dalla (5.25). Per esempio

$$v^a = \langle \underline{\omega}^a, \underline{v} \rangle \quad (5.42)$$

Usando quest'ultima relazione si ha

$$v^{a'} = \langle \underline{\omega}^{a'}, \underline{v} \rangle = \Lambda_a^{a'} \langle \underline{\omega}^a, \underline{v} \rangle = \Lambda_a^{a'} v^a \quad (5.43)$$

Segue allora

$$\begin{aligned} T_{b_1' b_2' \dots b_s'}^{a_1' a_2' \dots a_r'} &= T(\underline{\omega}^{a_1'}, \underline{\omega}^{a_2'}, \dots, \underline{\omega}^{a_r'}, \underline{e}_{b_1'}, \underline{e}_{b_2'}, \dots, \underline{e}_{b_s'}) \\ &= \Lambda_{a_1}^{a_1'} \Lambda_{a_2}^{a_2'} \dots \Lambda_{a_r}^{a_r'} \Lambda_{b_1}^{b_1'} \Lambda_{b_2}^{b_2'} \dots \Lambda_{b_s}^{b_s'} T_{b_1 b_2 \dots b_s}^{a_1 a_2 \dots a_r} \end{aligned} \quad (5.44)$$

Dato un tensore in  $T(r, s)$  con  $r > 1, s > 1$  e' possibile definire un tensore appartenente a  $T(r-1, s-1)$  tramite la cosi' detta operazione di contrazione  $C_1^1$ . Dunque per definizione  $C_1^1$  e' una applicazione  $T(r, s) \rightarrow T(r-1, s-1)$  cosi' definita: dato un tensore  $\underline{T}$  di  $T(r, s)$

$$\underline{T} = T_{b_1 b_2 \dots b_s}^{a_1 a_2 \dots a_r} \underline{e}_{a_1} \otimes \underline{e}_{a_2} \otimes \dots \otimes \underline{e}_{a_r} \otimes \underline{\omega}^{b_1} \underline{\omega}^{b_2} \otimes \dots \otimes \underline{\omega}^{b_s} \quad (5.45)$$

$C_1^1(\underline{T}) \in T(r-1, s-1)$  e' dato da

$$C_1^1(\underline{T}) = \underline{T}_{ab_2 \dots b_s}^{aa_2 \dots a_r} \underline{e}_{a_2} \otimes \dots \otimes \underline{e}_{a_r} \otimes \underline{\omega}^{b_2} \dots \otimes \underline{\omega}^{b_s} \quad (5.46)$$

Affinche' la contrazione sia ben definita e' necessario verificare che la definizione data sia indipendente dalla base. Infatti si ha

$$\begin{aligned} C_1^1(\underline{T})' &= T_{a'b_2' \dots b_s'}^{a'a_2' \dots a_r'} \underline{e}_{a_2'} \otimes \dots \otimes \underline{e}_{a_r'} \otimes \underline{\omega}^{b_2'} \dots \otimes \underline{\omega}^{b_s'} \\ &= \Lambda_a^{a'} \Lambda_{a'}^b T_{bb_2 \dots b_s}^{aa_2 \dots a_r} \underline{e}_{a_2'} \otimes \dots \otimes \underline{e}_{a_r'} \otimes \underline{\omega}^{b_2'} \dots \otimes \underline{\omega}^{b_s'} \\ &= C_1^1(\underline{T}) \end{aligned} \quad (5.47)$$

Altre operazioni che si possono definire su un tensore sono le operazioni di simmetrizzazione ed antisimmetrizzazione. Per esempio, dato un tensore di tipo  $(2, 0)$ ,  $T(\underline{\eta}_1, \underline{\eta}_2)$ , la sua parte simmetrica e' data da

$$(ST)(\underline{\eta}_1, \underline{\eta}_2) = \frac{1}{2} \left( T(\underline{\eta}_1, \underline{\eta}_2) + T(\underline{\eta}_2, \underline{\eta}_1) \right) \quad (5.48)$$

e la sua parte antisimmetrica da

$$(AT)(\underline{\eta}_1, \underline{\eta}_2) = \frac{1}{2} \left( T(\underline{\eta}_1, \underline{\eta}_2) - T(\underline{\eta}_2, \underline{\eta}_1) \right) \quad (5.49)$$

Si verifica immediatamente che  $ST$  ed  $AT$  sono tensori (cioe' che le definizioni date non dipendono dalla base). Le componenti di questi tensori sono rispettivamente

$$(ST)^{ab} = \frac{1}{2} (T^{ab} + T^{ba}), \quad (AT)^{ab} = \frac{1}{2} (T^{ab} - T^{ba}) \quad (5.50)$$

### 5.3 Spazi metrici

Un altro tensore che ci sara' utile nel seguito e' il tensore metrico. Questi e' un tensore simmetrico di rango (0,2), cioe' una applicazione  $g$  di  $V \times V \rightarrow R$ . Le componenti di  $g$  si ottengono valutandolo su una base

$$g(\underline{e}_i, \underline{e}_j) = g_{ij} \quad (5.51)$$

e quindi potremo scrivere

$$\underline{g} = g_{ij} \underline{\omega}^i \otimes \underline{\omega}^j, \quad g_{ij} = g_{ji} \quad (5.52)$$

Se  $\det |g_{ij}| \neq 0$  si dice che la metrica e' non degenera. L'assegnazione di un tensore metrico permette di definire un mapping da  $V \rightarrow V^*$ , che indicheremo ancora con  $g$ , definito come

$$\langle g(\underline{v}), \underline{w} \rangle = g(\underline{v}, \underline{w}) \quad (5.53)$$

Le componenti di  $g(\underline{v})$  possono essere calcolate immediatamente notando che si puo' scrivere

$$g(\underline{v}, \underline{w}) = g_{ij} v^i w^j = g(\underline{v})_j w^j \quad (5.54)$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato la definizione di  $g(\underline{v})$ . Per confronto vediamo che

$$g(\underline{v})_i = g_{ij} v^j \quad (5.55)$$

Queste quantita' sono anche dette le componenti covarianti del vettore  $\underline{v}$  (mentre le  $v^i$  sono le componenti controvarianti) e saranno indicate con l'indice in basso:

$$v_i \equiv g_{ij} v^j \quad (5.56)$$

Osserviamo che il numero  $g(\underline{v}, \underline{w})$  puo' anche essere calcolato usando il mapping tra  $V$  e  $V^*$  e la contrazione. Infatti

$$g(\underline{v}, \underline{w}) = \langle g(\underline{v}), \underline{w} \rangle = g_{ij} v^i w^j = v_j w^j = C_1^1(g(\underline{v}) \otimes \underline{w}) \quad (5.57)$$

Si ha anche immediatamente che

$$g(\underline{e}_i) = g_{ij}\underline{\omega}^j \quad (5.58)$$

Notiamo che se  $g$  e' non degenera allora il mapping tra  $V$  e  $V^*$  definito dalla metrica e' invertibile, e si puo' introdurre il mapping inverso. La sua azione sulla base duale sara'

$$g^{-1}(\underline{\omega}^i) = g^{ij}\underline{e}_j \quad (5.59)$$

dove  $g^{ij}$  e' la matrice inversa di  $g_{ij}$

$$g^{ij}g_{jk} = \delta_k^i \quad (5.60)$$

Tramite la matrice inversa possiamo definire le componenti controvarianti di un vettore covariante come

$$g^{-1}(\underline{\eta})^i = g^{ij}\eta_j \quad (5.61)$$

Chiaramente il mapping  $g$ , quando e' non degenera, stabilisce un isomorfismo tra  $V$  e  $V^*$ . Notiamo infine che  $g^{-1}$  puo' essere considerato come un tensore di rango (2,0), definendolo  $(\underline{\eta}_1, \underline{\eta}_2 \in V^*)$

$$g^{-1}(\underline{\eta}_1, \underline{\eta}_2) = \langle \underline{\eta}_1, g^{-1}(\underline{\eta}_2) \rangle \quad (5.62)$$

Se introduciamo l'elemento di linea come un vettore covariante

$$d\underline{x} = dx_\mu \underline{\omega}^\mu \quad (5.63)$$

Possiamo introdurre la distanza infinitesima tra due punti usando l'inverso del tensore metrico:

$$ds^2 = g^{-1}(d\underline{x}, d\underline{x}) = g^{-1}(dx_\mu \underline{\omega}^\mu, dx_\nu \underline{\omega}^\nu) = g^{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu \quad (5.64)$$

nel caso in cui

$$ds^2 = \sum_{\mu} dx_\mu dx_\mu \quad (5.65)$$

(cioe'  $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ ) si dice che si ha una metrica euclidea.

Un altro tensore importante e' il cosi' detto tensore di Ricci, che puo' essere definito a partire dall'elemento di volume in uno spazio  $n$ -dimensionale

$$dV = \epsilon^{\mu_1 \dots \mu_n} dx_{\mu_1} \dots dx_{\mu_n} \quad (5.66)$$

Il tensore  $\epsilon^{\mu_1 \dots \mu_n}$  e' definito essere zero quando una o piu' coppie di indici sono uguali, e' completamente antisimmetrico (cambia di segno scambiando tra loro due indici contigui) ed e' uguale a +1 quando gli indici sono in una permutazione pari rispetto alla permutazione fondamentale  $(1, 2, \dots, n)$ . Si vede allora facilmente che data una matrice  $|A^\nu_\mu|$ , il tensore di Ricci soddisfa la relazione

$$\epsilon^{\mu_1 \dots \mu_n} A^{\nu_1}_{\mu_1} \dots A^{\nu_n}_{\mu_n} = \epsilon^{\nu_1 \dots \nu_n} \det |A| \quad (5.67)$$

Pertanto cambiando la base

$$\epsilon^{\mu_1 \dots \mu_n} dx_{\mu_1} \dots dx_{\mu_n} \rightarrow \det |\Lambda| \epsilon^{\mu'_1 \dots \mu'_n} dx_{\mu'_1} \dots dx_{\mu'_n} \quad (5.68)$$

In generale dunque il simbolo  $\epsilon^{\mu_1 \dots \mu_n}$  non e' un tensore ma quello che si chiama una densita' tensoriale. Se pero' il cambiamento di base ha determinante unita' allora  $\epsilon^{\mu_1 \dots \mu_n}$  e' un tensore vero e per di piu' isotropo poiche' le sue componenti non cambiano. Un altro esempio di tensore isotropo e' la delta di Kronecker che puo' essere pensato come quel tensore di rango (1,1) definito dalla valutazione.

## 5.4 Lo spazio di Minkowski

Nel caso della relativita' ristretta ricordiamo che abbiamo ottenuto le trasformazioni di Lorentz usando l'invarianza dell'onda sferica al variare del sistema di riferimento. Poiche' l'equazione che descrive tale onda e'

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0 \quad (5.69)$$

e dato che sotto una trasformazione di Lorentz il vettore infinitesimo

$$(cdt, dx, dy, dz) \quad (5.70)$$

si trasforma come le coordinate di un evento  $(ct, x, y, z)$  vediamo che le trasformazioni di Lorentz lasciano invariante la distanza infinitesima

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 \quad (5.71)$$

Interpreteremo questa distanza (che pero' non e' definita positiva) come una distanza nello spazio-tempo a quattro dimensioni. Se facciamo uso di coordinate reali  $x^\mu \equiv (x_0 = ct, x, y, z)$  possiamo allora introdurre una metrica nello spazio-tempo come

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (5.72)$$

Pertanto

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (5.73)$$

Chiaramente avremo (notiamo che la matrice  $|g_{\mu\nu}|$  non cambia con il riferimento)

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{\mu'\nu'} dx^{\mu'} dx^{\nu'} = g_{\mu'\nu'} \Lambda_\mu^{\mu'} \Lambda_\nu^{\nu'} dx^\mu dx^\nu \quad (5.74)$$

da cui

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu'\nu'} \Lambda_\mu^{\mu'} \Lambda_\nu^{\nu'} \quad (5.75)$$

Se scriviamo  $\Lambda_{,\nu}^\mu \equiv \Lambda_\nu^\mu$  al fine di individuare le righe e le colonne della matrice della trasformazione<sup>2</sup>, e' possibile scrivere la relazione precedente nella forma matriciale

$$\Lambda^T g \Lambda = g \quad (5.76)$$

Segue da  $\det |g| = -1$  che  $\det |\Lambda| = \pm 1$ .

Dunque lo spazio-tempo della relatività ristretto è uno spazio pseudo-euclideo a quattro dimensioni, detto anche spazio di Minkowski. I vettori

$$x^\mu = (ct, x, y, z), \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \quad (5.77)$$

sono detti **quadrivettori**. Studiamone alcune proprietà fondamentali. Il quadrato di un quadrivettore  $v^\mu$  è definito dalla relazione

$$v^2 = g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu \quad (5.78)$$

È conveniente introdurre la notazione

$$v_\mu = g_{\mu\nu} v^\nu \equiv (v^0, -v^1, -v^2, -v^3) \quad (5.79)$$

Questa operazione viene chiamata di **abbassamento degli indici**. Si può introdurre l'operazione inversa se definiamo l'inverso della metrica come

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = \delta_\lambda^\mu \quad (5.80)$$

Chiaramente

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \quad (5.81)$$

---

<sup>2</sup>Ricordiamo che  $x'^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu \equiv \Lambda_{,\nu}^\mu x^\nu$ .

Quindi si ha

$$v^\mu = g^{\mu\nu} v_\nu \quad (5.82)$$

Con queste notazioni il quadrato di un quadrivettore può essere scritto anche nella forma

$$v^2 = v^\mu v_\mu = g^{\mu\nu} v_\mu v_\nu \quad (5.83)$$

Vediamo che in componenti

$$v^2 = v_0^2 - |\vec{v}|^2 \quad (5.84)$$

dove abbiamo introdotto il modulo del vettore spaziale  $\vec{v} = (v^1, v^2, v^3)$ .

Studiamo adesso le proprietà geometrica di una trasformazione di Lorentz nello spazio di Minkowski. Consideriamo solo trasformazioni della coordinata  $x$  e del tempo, cioè trasformazioni nel piano  $(x^0, x^1)$ . La trasformazione di Lorentz ad un riferimento che si muove con velocità  $v$  lungo l'asse delle  $x$  è data da

$$\begin{aligned} x^{0'} &= \frac{x^0 - \beta x^1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ x^{1'} &= \frac{-\beta x^0 + x^1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned} \quad (5.85)$$

Le equazioni degli assi coordinati  $(x'_0, x'_1)$  nel nuovo riferimento sono rispettivamente

$$x^{0'} : \quad x^{1'} = 0 \Rightarrow x^1 = \beta x^0 \quad (5.86)$$

e

$$x^{1'} : \quad x^{0'} = 0 \Rightarrow x^0 = \beta x^1 \quad (5.87)$$

Abbiamo rappresentato i nuovi assi in Fig. 5.1 introducendo un angolo  $\phi$  tale che

$$\tan \phi = \beta \quad (5.88)$$

da questo tipo di rappresentazione appare particolarmente evidente che due eventi simultanei in un riferimento non lo sono più in un altro in moto rispetto al primo. Vediamo anche che quando la velocità tra i due sistemi tende a quella della luce il piano si restringe sino a degenerare in una retta a  $45^\circ$ . Questa retta fa parte del così detto cono di luce (vedi dopo). Un'altra proprietà evidente è che se si considera un punto fuori del cono di luce (come il punto  $C$  in Figura 5.1) con una trasformazione di Lorentz è possibile invertirlo



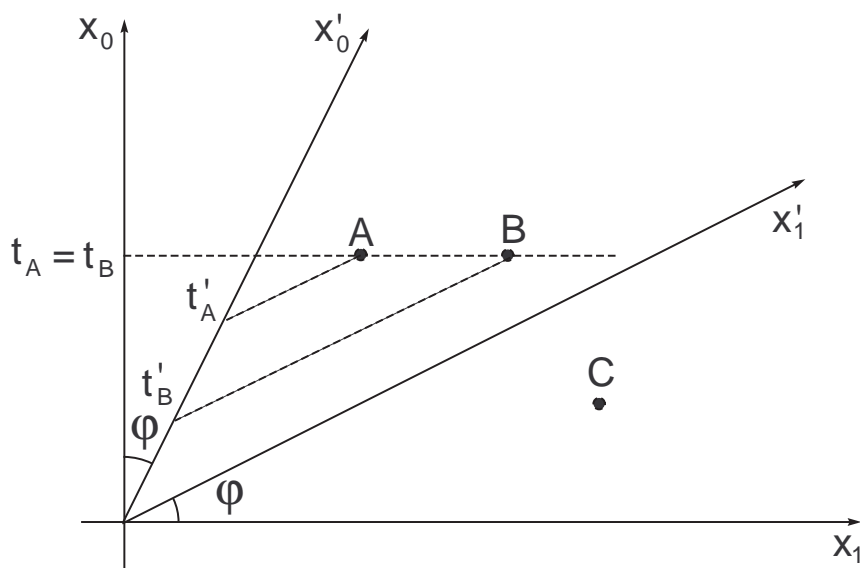


Figura 5.1: Il piano di Minkowski. In particolare si è mostrato come due eventi simultanei nel riferimento  $S$  non lo siano più nel riferimento  $S'$ .

temporalmente rispetto all'origine (nel caso specifico far diventare negativa la sua coordinata temporale  $x^{0'}$ ).

Chiaramente il quadrato di un quadrivettore è invariante sotto trasformazioni di Lorentz, ma non è una forma definita positiva. Possiamo dunque distinguere tre casi:

1.  $v^2 > 0$ . Questi vettori vengono detti di **tipo-tempo** (o time-like). Si vede subito che in questo caso anche il segno di  $v^0$  è un invariante di Lorentz. Consideriamo infatti una rotazione spaziale che allinei la parte spaziale di  $\vec{v}$  lungo l'asse  $x$ . Segue  $v^\mu = (v^0, |\vec{v}|, 0, 0)$ , con  $(v^0)^2 > |\vec{v}|^2$ . Pertanto se  $v^0$  è positivo si trova nel cono luce in avanti, mentre se è negativo nel cono luce indietro (vedi figura 5.2). In ogni caso abbiamo visto nella Sezione (4.2) una trasformazione di Lorentz non può invertire l'ordine temporale di due eventi che siano uno dentro il cono di luce dell'altro. Mostriamo anche che in questo caso è sempre possibile trovare un riferimento in cui il quadrivettore ha solo la componente 0 (o componente temporale). Questo riferimento è chiamato anche il **riferimento di riposo** del quadrivettore (o rest-frame). Infatti, se dopo la rotazione che

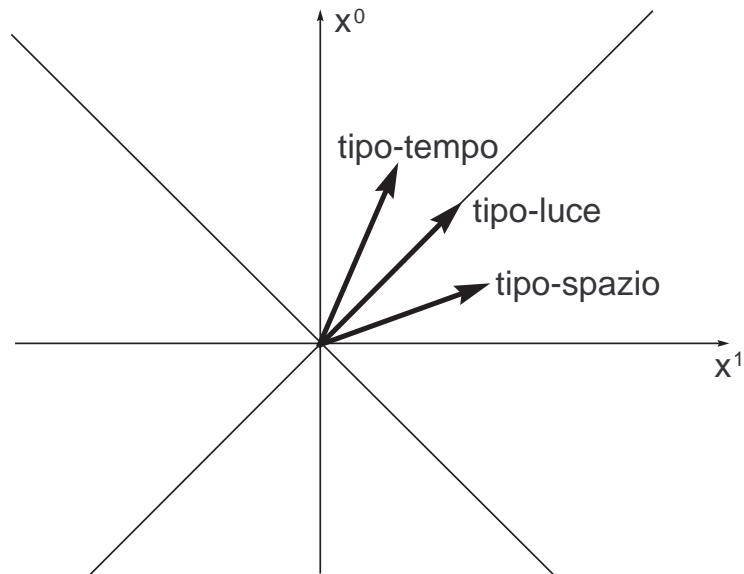


Figura 5.2: Esempi di quadrivettori nello spazio di Minkowski.

allinea la parte spaziale lungo l'asse  $x$  effettuiamo una trasformazione di Lorentz come in eq. (3.35) segue

$$v'^0 = v^0 \cosh \chi + |\vec{v}| \sinh \chi, \quad v'^1 = v^0 \sinh \chi + |\vec{v}| \cosh \chi \quad (5.89)$$

Scegliendo quindi

$$\tanh \chi = -\frac{|\vec{v}|}{v^0} \quad (5.90)$$

si ha

$$v'^0 = \sqrt{v^2}, \quad v'^1 = 0 \quad (5.91)$$

Questa è una trasformazione ammissibile ricordando che in generale  $\tanh \chi = -\beta$  dove  $\beta$  è il rapporto della velocità con cui un  $S'$  si muove rispetto a  $S$  con la velocità della luce. Quindi si deve avere  $|\tanh \chi| < 1$ , condizione soddisfatta nel nostro caso. Per inciso, questo mostra anche in modo semplice l'invarianza del quadrato di un quadrivettore, dato che dalla (5.91) segue  $v'^2 = v^2$ .

2.  $v^2 < 0$ . Questi vettori vengo detti di **tipo-spazio** (o space-like). In questo caso il vettore sta fuori del cono di luce e quindi è possibile

trovare una trasformazione di Lorentz che fa cambiare di segno a  $v^0$  (vedi ancora la discussione in Sezione (4.2)). Dunque per un vettore di tipo spazio la il segno della quarta componente non è invariante di Lorentz. In questo caso si può trovare un riferimento in cui la parte temporale è nulla. Procedendo come prima con una rotazione spaziale che riduca  $v^\mu$  alla forma  $v'^\mu = (v^0, |\vec{v}|, 0, 0)$  e facendo la trasformazione di Lorentz lungo l'asse  $x$  caratterizzata da

$$\tanh \chi = -\frac{v^0}{|\vec{v}|} \quad (5.92)$$

si trova

$$v'^0 = 0, \quad v'^1 = \sqrt{-v^2} \quad (5.93)$$

3.  $v^2 = 0$ . Questi vettori vengo detti di **tipo-luce** (o light-like). Anche in questo caso il segno di  $v^0$  è invariante di Lorentz. Si vede facilmente che si può sempre trovare un riferimento in cui

$$v^\mu = (\pm|\vec{v}|, |\vec{v}|, 0, 0) \quad (5.94)$$

Infatti è sufficiente effettuare una rotazione spaziale per allineare la parte spaziale di  $v^\mu$  lungo l'asse  $x$  ed usare  $v^2 = 0$  da cui

$$v^0 = \pm|\vec{v}| \quad (5.95)$$

# Capitolo 6

## Meccanica relativistica

### 6.1 Quadriforza e dinamica relativistica.

Abbiamo visto che l'elemento di linea nello spazio di Minkowski

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (6.1)$$

è invariante di Lorentz. Osserviamo che risulta invariante anche se si traslano le coordinate spaziali od il tempo

$$\vec{x} \rightarrow \vec{x} + \vec{a}, \quad t \rightarrow t + b \quad (6.2)$$

L'insieme delle trasformazioni di Lorentz e delle traslazioni spazio-temporali prende il nome di trasformazioni di Poincaré. Se scriviamo esplicitamente il  $ds^2$  vediamo che

$$ds = \sqrt{c^2 dt^2 - |d\vec{x}|^2} \quad (6.3)$$

Ricordando che il tempo proprio è definito dalla relazione

$$d\tau = \sqrt{1 - |\vec{v}|^2/c^2} dt = \sqrt{dt^2 - |d\vec{x}|^2/c^2} \quad (6.4)$$

si ha

$$d\tau = \frac{ds}{c} \quad (6.5)$$

che tra l'altro mostra esplicitamente l'invarianza del tempo proprio.

Come abbiamo detto, le trasformazioni di Lorentz lasciano invariate le equazioni di Maxwell, per cui queste ultime soddisfano al principio di relatività. La contropartita è che le equazioni della dinamica di Newton non

soddisfano più il principio di relatività, se non nel limite di velocità piccole rispetto alla velocità della luce. Occorre allora modificare le equazioni di Newton in modo che lo soddisfino.

Supponiamo che una particella materiale si muova in un campo di forze a velocità relativistica, per cui non sia possibile applicare ad essa la seconda legge della dinamica. Supponiamo però di saper calcolare la forza in un riferimento in cui la particella sia momentaneamente ferma. Possiamo allora effettuare una trasformazione di Lorentz in modo da portarci in tale riferimento e determinare così il moto della particella. L'idea è cioè quella di utilizzare le trasformazioni di Lorentz per porci in una situazione in cui possiamo applicare la dinamica di Newton. Ora noi sappiamo come si trasformano le velocità e da ciò possiamo determinare la legge di trasformazione dell'accelerazione. Vediamo subito però che questa legge sarà alquanto complicata (basta dare uno sguardo alle (4.32) per rendersene conto).

Allo scopo di semplificare la trattazione, possiamo sfruttare il fatto che il tempo proprio  $d\tau$  è un invariante e che si riduce a  $dt$  se la particella è a riposo.

Allora, invece di studiare il comportamento sotto trasformazioni di Lorentz dell'accelerazione possiamo studiare la grandezza

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2}, \quad (6.6)$$

che, data appunto l'invarianza di  $d\tau$ , si trasforma come  $x^\mu$ :

$$\frac{d^2 x'^\mu}{d\tau^2} = \Lambda^\mu{}_\nu \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2}, \quad (6.7)$$

essendo  $\Lambda$  costante in  $\tau$ . L'idea è allora quella di definire un quadrivettore, la **quadriforza**, tramite la relazione

$$f^\mu = m \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} \quad (6.8)$$

dove  $f$  sarà chiamata la forza relativistica, che, per quanto detto sopra, si trasforma secondo la legge

$$f'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu f^\nu \quad (6.9)$$

La (6.8) ci fornirà la generalizzazione relativistica della seconda legge di Newton e, ovviamente, dovremo riottenere le equazioni di Newton nel limite  $v \ll c$ . Ora la  $f^\mu$  si può calcolare osservando che, se la particella è momentaneamente ferma, l'intervallo di tempo proprio  $d\tau$  coincide con  $dt$ . Ne segue

che, poichè  $x^0 = ct$ , la sua derivata seconda rispetto a  $t$  è nulla e quindi, dalla (6.8) con  $\mu = 0$ , si ha

$$f^0 = 0, \quad (6.10)$$

inoltre

$$f^i = m \frac{d^2 x^i}{dt^2}, \quad (6.11)$$

per cui  $\vec{f} = \vec{F}$ , cioè  $\vec{f}$  è la forza di Newton nel riferimento in cui la particella è momentaneamente ferma. Se ora la particella ha velocità  $\vec{v}$  invece che zero, basterà effettuare una trasformazione di Lorentz tale che, nel nuovo riferimento, la particella abbia velocità  $\vec{v}$ . Evidentemente questo riferimento dovrà avere velocità  $-\vec{v}$  rispetto a quello in cui la particella è a riposo. Se indichiamo con  $\Lambda(\vec{v})$  questa trasformazione, avremo che la  $f^\mu$  sarà data da

$$f^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu(\vec{v}) F^\nu, \quad (6.12)$$

con  $F^\mu = (0, \vec{F})$ . Possiamo leggere la  $\Lambda(\vec{v})$  dalle (4.1) (scrivendole per  $x^0 = ct$ ), ponendo le componenti di  $f^\mu$  al posto di quelle di  $\vec{x}'$  e  $ct'$  e quelle di  $F^\nu$  al posto di quelle di  $\vec{x}$  e  $ct$ . Inoltre andrà posto  $\vec{v} \rightarrow -\vec{v}$ . In questo modo si ottiene

$$\begin{aligned} \vec{f} &= \vec{F} - \vec{v} \frac{(\vec{v} \cdot \vec{F})}{v^2} + \vec{v} \gamma \left[ \frac{(\vec{v} \cdot \vec{F})}{v^2} + \frac{F^0}{c} \right] \\ f^0 &= \gamma \left[ F^0 + \frac{(\vec{v} \cdot \vec{F})}{c} \right] \end{aligned} \quad (6.13)$$

dove però  $F^0 = 0$ . In definitiva, tenendo conto che dalla prima di queste equazioni segue

$$\vec{v} \cdot \vec{f} = \gamma(\vec{v} \cdot \vec{F})$$

Quindi

$$\begin{aligned} \vec{f} &= \vec{F} + \vec{v}(\gamma - 1) \frac{(\vec{v} \cdot \vec{F})}{v^2} \\ f^0 &= \gamma \frac{(\vec{v} \cdot \vec{F})}{c} = \frac{(\vec{v} \cdot \vec{f})}{c} \end{aligned} \quad (6.14)$$

Inserendo queste espressioni nella (6.8) si ha la generalizzazione della seconda legge della dinamica di Newton, espressa come un sistema di equazioni differenziali in  $\tau$ . Se si risolvono e si determinano le  $x^\mu$  in termini di  $\tau$ , si può poi eliminare  $\tau$  a favore di  $t$  e ottenere le consuete equazioni orarie per  $\vec{x}$ . In realtà queste sono quattro equazioni, mentre le equazioni di Newton sono solo tre. Ma si vede che queste equazioni non sono indipendenti. Infatti, definendo la quadrivelocità

$$V^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = (\gamma c, \gamma \vec{v}) \quad (6.15)$$

si ha

$$V^2 = \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx_\mu}{d\tau} = \frac{ds^2}{d\tau^2} = c^2 \quad (6.16)$$

e quindi

$$0 = \frac{d}{d\tau} V^2 = V^\mu \frac{dV_\mu}{d\tau} = V^\mu \frac{d^2 x_\mu}{d\tau^2} \quad (6.17)$$

Inoltre si ha

$$V^\mu f_\mu = \gamma c f^0 - \gamma \vec{v} \cdot \vec{f} = 0 \quad (6.18)$$

dove si è fatto uso della (6.14). Quindi la componente delle equazioni del moto (6.8) lungo la direzione di  $V^\mu$  (ottenuta moltiplicando le equazioni del moto (6.8) per  $V^\mu$ ) è soddisfatta identicamente per qualunque forma delle  $x^\mu(\tau)$  e le equazioni che determinano il moto del sistema sono solo tre.

Pertanto la proiezione delle equazioni del moto lungo la direzione della quadrivelocità è nulla e quindi si hanno solo tre equazioni indipendenti. Abbiamo visto che, nella forma (6.8), la seconda legge della dinamica si trasforma da un riferimento inerziale ad un altro con la legge

$$\Lambda_{\mu\nu} f^\nu = m \Lambda_{\mu\nu} \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2}, \quad (6.19)$$

dove  $\Lambda$  è la trasformazione di Lorentz che trasforma le coordinate di un riferimento in quelle di un altro.

La legge (6.8) garantisce quindi che la stessa forma della seconda legge della dinamica valga anche nel nuovo riferimento. L'utilità del formalismo vettoriale (quadri-vettoriale) risiede principalmente in questo fatto.

Si usa definire una forza  $\vec{f}_N$  con

$$\vec{f} = \gamma \vec{f}_N, \quad (6.20)$$

In termini di  $\vec{f}_N$  si ha

$$f^\mu = \left( \frac{\gamma}{c} (\vec{v} \cdot \vec{f}_N), \gamma \vec{f}_N \right) \quad (6.21)$$

e, tenuto conto della (6.4), la parte spaziale dell'equazione di moto si scrive

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{f}_N \quad (6.22)$$

dove abbiamo definito

$$p^\mu = m \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (6.23)$$

Nel limite  $c \rightarrow \infty$ , usando la (6.14) e la (6.20) si ritrova la usuale seconda legge di Newton

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad (6.24)$$

con  $\vec{F}$  la forza misurata nel riferimento istantaneamente solidale con la particella.

## 6.2 Impulso ed energia

In termini del quadri-impulso definito nella (6.23) la seconda legge (vedi equazione (6.8)) si scrive

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = f^\mu, \quad (6.25)$$

Se calcoliamo il lavoro fatto dalla forza  $\vec{f}_N$  nel tempo  $dt$  avremo

$$\delta L = \vec{f}_N \cdot \vec{v} dt = \frac{c}{\gamma} f^0 dt = c f^0 d\tau = c \frac{dp^0}{d\tau} d\tau = c dp^0 \quad (6.26)$$

Dalla (6.23) vediamo che

$$\vec{p} = m\gamma\vec{v}, \quad p^0 = mc\gamma \quad (6.27)$$

e quindi, integrando la (6.26)

$$L = c(p^0(t_2) - p^0(t_1)) = mc^2(\gamma(v_2) - \gamma(v_1)) \quad (6.28)$$



nella meccanica di Newton il lavoro fatto da una forza è uguale alla variazione di energia cinetica. Definiremo quindi l'analogo dell'energia cinetica come l'espressione

$$K = mc^2\gamma + K_0 \quad (6.29)$$

dove  $K_0$  è una costante che sceglieremo in modo tale che  $K$  si annulli a velocità zero, come nel caso classico. Quindi  $K_0 = -mc^2$  dato che  $\gamma(0) = 1$  pertanto l'energia cinetica relativistica è definita da

$$K = mc^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right) \quad (6.30)$$

Notiamo che per piccole velocità si ha

$$\begin{aligned} \vec{p} &= m\vec{v} + \mathcal{O}\left(\frac{v^2}{c^2}\right) \\ cp^0 &= mc^2 + \frac{m}{2}\vec{v}^2 + \mathcal{O}\left(\frac{v^4}{c^2}\right) \end{aligned} \quad (6.31)$$

e

$$K \approx \frac{1}{2}m\vec{v}^2 \quad (6.32)$$

Vediamo dunque che la meccanica di Einstein riproduce perfettamente i risultati della Sezione (1.4) che, come avevamo visto, sono in perfetto accordo con gli esperimenti di accelerazione fatti con il LINAC. Tra l'altro l'espressione di  $cp^0$  nel limite di basse velocità suggerisce di introdurre l'energia totale come

$$E = cp^0 = mc^2\gamma = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (6.33)$$

da cui vediamo che l'energia cinetica non è altra che l'energia totale alla quale si sottrae l'energia di riposo della particella.

$$K = E - mc^2 \quad (6.34)$$

Se si elimina la velocità dalle equazioni (6.27)

$$\vec{v}^2 = \frac{\vec{p}^2 c^2}{\vec{p}^2 + m^2 c^2} \quad (6.35)$$

si trova

$$E = c\sqrt{\vec{p}^2 + m^2 c^2}, \quad (6.36)$$

che è la forma relativistica dell'energia in funzione dell'impulso. Questa può anche essere ottenuta dalla (6.23) e dalla (6.16), cioè

$$p^2 = p^\mu p^\nu g_{\mu\nu} = m^2 c^2, \quad (6.37)$$

che equivale alla (6.36) se si prende il ramo positivo della radice.

Il caso di un raggio di luce si può inquadrare nello schema sviluppato, con delle modifiche importanti. Infatti, per un raggio di luce, si ha che l'elemento di linea (6.1) è zero

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}\right) dt^2 = 0, \quad (6.38)$$

e quindi anche il tempo proprio (6.4) è nullo. L'espressione dell'impulso (6.23) avrà allora senso solo se si fa tendere la massa a zero, cioè, dalla (6.37)

$$(p^0)^2 - (\vec{p})^2 = 0. \quad (6.39)$$

È però con la meccanica quantistica che si dà un significato preciso alla nozione di particella con massa zero nel caso della luce.

Consideriamo adesso  $n$  particelle che subiscono un processo tale che sia conservato l'impulso totale  $\vec{P}$  dato dalla somma degli impulsi delle particelle:

$$\Delta \vec{P} = \vec{P}^{(f)} - \vec{P}^{(i)} = \sum_{k=1}^n \vec{p}_k^{(f)} - \sum_{k=1}^n \vec{p}_k^{(i)} = 0, \quad (6.40)$$

dove  $k$  numera le particelle,  $\vec{p}_k^{(i)}$  sono gli impulsi iniziali e  $\vec{p}_k^{(f)}$  sono gli impulsi finali. Notare che il numero di particelle finali potrà essere in generale diverso da quello iniziale, se vi sono processi di annichilazione o creazione di particelle. È importante osservare che a livello relativistico la conservazione dell'impulso spaziale implica la conservazione delle energie.

Infatti, osserviamo che, se l'impulso totale è conservato in un riferimento, lo deve essere in un'altro riferimento, poiché la conservazione dipende solo dal fatto che il sistema è isolato e non dal riferimento in cui ciò si esprime.

Se ora indichiamo con un apice le stesse quantità determinate in un altro riferimento inerziale, avremo

$$\Delta P'^\mu = \Lambda_\nu^\mu \Delta P^\nu. \quad (6.41)$$

Ma per  $\nu = 1, 2, 3$ , tenuto conto della (6.40), si ha

$$\Delta P'^\mu = \Lambda_0^\mu \Delta P^0, \quad (6.42)$$

e, per  $\mu = 1, 2, 3$  il primo membro è zero, perché, come abbiamo osservato, la conservazione dell'impulso si ha anche nel nuovo riferimento.

Quindi

$$0 = \Lambda_0^i \Delta P^0, \quad (6.43)$$

da cui  $\Delta P^0 = 0$ , perchè quanto sopra vale per una trasformazione di Lorentz arbitraria. Questo dimostra che la conservazione dell'impulso implica quella dell'energia.

Quanto detto va sotto il nome di conservazione del quadrimpulso:

$$P^{(f)\mu} = \sum_{i=1}^n p_i^{(f)\mu} = P^{(i)\mu} = \sum_{i=1}^n p_i^{(i)\mu}. \quad (6.44)$$

Questa legge di conservazione giustifica il nome di energia dato alla grandezza  $E$  in (6.36), poiché è una quantità conservata che si riduce all'energia classica nel limite non relativistico, salvo l'aggiunta dell'energia di riposo.

Quanto alle proprietà di trasformazione queste si ricavano immediatamente dalla (6.23). Nel caso della trasformazione di Lorentz (3.46) si ha (tenuto conto dei fattori  $c$ )

$$\begin{cases} p'_x = \gamma(p_x - vE/c^2), \\ p'_y = p_y, \\ p'_z = p_z, \\ E' = \gamma(E - vp_x), \end{cases} \quad (6.45)$$

mentre nel caso di un trasformazione con  $\vec{v}$  generica, ma senza rotazione degli assi, si ha come in (4.1)

$$\begin{aligned} \vec{p}' &= \vec{p} - \vec{v} \frac{(\vec{v} \cdot \vec{p})}{v^2} + \vec{v} \gamma \left[ \frac{(\vec{v} \cdot \vec{p})}{v^2} - \frac{E}{c^2} \right] \\ E' &= \gamma [E - (\vec{v} \cdot \vec{p})] \end{aligned} \quad (6.46)$$

### 6.3 Sistema del centro di massa ed equivalenza massa-energia

Consideriamo ancora un sistema di  $n$  particelle libere. Detti  $(\vec{P}, E)$  e  $(\vec{P}', E')$  l'impulso totale e l'energia totale del sistema in due sistemi di riferimento inerziali  $S$  e  $S'$ , il quadrato del quadrimpulso totale (vedi equazione (6.37)) nel riferimento  $S$  è dato da

$$\begin{aligned} P^2 &= \frac{E^2 - c^2 \vec{P}^2}{c^2} = \sum_{i,j=1}^n g_{\mu\nu} p_i^\mu p_j^\nu = \sum_{i=1}^n m_i^2 c^2 + \sum_{i \neq j=1}^n g_{\mu\nu} p_i^\mu p_j^\nu = \\ &= \sum_{i=1}^n m_i^2 c^2 + \sum_{i \neq j=1}^n (p_i^0 p_j^0 - |\vec{p}_i| |\vec{p}_j| \cos \theta_{ij}) \end{aligned} \quad (6.47)$$

Dato che per una particella di massa  $m_i$  si ha  $p_i^2 = m_i^2 c^2 > 0$  i singoli quadrimpulsi sono di tipo tempo e quindi

$$p_i^0 > |\vec{p}_i|, \quad \forall i \quad (6.48)$$

da cui

$$p_i^0 p_j^0 - |\vec{p}_i| |\vec{p}_j| \cos \theta_{ij} > 0 \quad (6.49)$$

Pertanto il quadrimpulso totale  $P^\mu$  è di tipo tempo ( $P^2 > 0$ ).

Il fatto che sia di tipo tempo ci permette di determinare un sistema di riferimento particolare tale che  $\vec{P}$  sia zero (vedi Sezione (5.4)). Infatti, dalla legge di trasformazione inversa della (6.46) per  $\vec{P}$

$$\begin{aligned} \vec{P} &= \vec{P}' - \vec{v} \frac{(\vec{v} \cdot \vec{P}')}{v^2} + \vec{v} \gamma \left[ \frac{(\vec{v} \cdot \vec{P}')}{v^2} + \frac{E'}{c^2} \right] \\ E &= \gamma \left[ E' + (\vec{v} \cdot \vec{P}') \right] \end{aligned} \quad (6.50)$$

si vede che ciò è possibile con una velocità relativa di  $S'$  rispetto a  $S$  data da

$$\vec{v} = \frac{c^2 \vec{P}}{E}; \quad (6.51)$$

Questo si trova subito ponendo  $\vec{P}' = 0$  nelle (6.50) ed usando l'espressione di  $E'$  in termini di  $E$ .

Il fatto che l'invariante (6.37) sia positivo ci permette anche di affermare che questa velocità è minore di  $c$ . Infatti da  $E^2 - c^2 \vec{P}^2 > 0$  segue che  $E > c|\vec{P}|$  e dalla (6.51) si ha che  $v/c < 1$ . Quindi questo sistema di riferimento esiste sempre per un sistema di particelle (con massa). È il sistema del centro di massa del sistema.

Indichiamo con  $S^0$  il sistema del centro di massa e con  $S$  un sistema di riferimento generico. Allora, indicando con  $\vec{u}$  la velocità di  $S^0$ , identificato con  $S'$ , rispetto a  $S$  e applicando le formule (6.46) con  $\vec{v} = -\vec{u}$ , si trova

$$\vec{P} = \gamma \frac{\vec{u} E^0}{c^2}, \quad E = \gamma E^0 \quad (6.52)$$

dove  $\vec{P}$  e  $E$  sono l'impulso e l'energia nel sistema  $S$  e  $\vec{P}^0 = 0$  e  $E^0$  l'impulso e l'energia nel sistema  $S^0$  del centro di massa. Il fattore  $\gamma$  è naturalmente in termini della velocità  $\vec{u}$ .

Abbiamo quindi mostrato che il sistema delle  $n$  particelle come insieme si comporta come un'unica particella di impulso  $\vec{P}$  e di energia  $E$ , che si trasformano come l'impulso e l'energia di una singola particella.

Se si confrontano le (6.52) con le analoghe per una particella con massa  $m$ , cioè le (6.27), e si nota che

$$P^2 = \frac{E^2 - c^2 \vec{P}^2}{c^2} = \frac{\gamma^2 E^{02}}{c^2} (1 - u^2/c^2) = \frac{E^{02}}{c^2} \quad (6.53)$$

si vede che è naturale definire la massa totale del sistema di particelle  $M$  come

$$M = \frac{E^0}{c^2} \quad (6.54)$$

Notare che  $M$  è maggiore della somma delle masse delle singole particelle, infatti per  $E^0$  abbiamo

$$E^0 = \sum_{i=1}^n E^{i0} = \sum_{i=1}^n c \sqrt{m_i^2 c^2 + \vec{p}_i^{02}} \geq c^2 \sum_{i=1}^n m_i \quad (6.55)$$

da cui

$$M = \frac{E^0}{c^2} \geq \sum_{i=1}^n m_i \quad (6.56)$$

In questa equazione il segno di uguale si ha solo se tutte le particelle hanno impulso zero, cioè nel caso statico. Con la definizione (6.54) le (6.52) si

scrivono

$$\begin{cases} \vec{P} &= \gamma M \vec{u} \\ E &= \gamma M c^2 \end{cases} \quad (6.57)$$

Possiamo allora definire l'energia cinetica nel sistema del centro di massa  $K^0$  come

$$E^0 = \sum_{i=1}^n m_i c^2 + K^0 \quad (6.58)$$

Dalla (6.58) segue un'importante conclusione e cioè che l'energia interna del sistema contribuisce alla massa totale del sistema (salvo il caso particolare statico).

Abbiamo visto ciò nel caso di un sistema di particelle libere, in cui l'energia interna è data solo dall'energia cinetica. Ma questa conclusione si può ottenere per ogni processo fisico, si può cioè dimostrare che: ad ogni quantità di energia  $\Delta E$  corrisponde una massa

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} \quad (6.59)$$

Non daremo qui la dimostrazione di questo risultato, la dimostrazione si può trovare in [3], pagg. 78-82, e una discussione nei suoi aspetti sperimentali in [4], pagg. 220-236. In particolare valgono le considerazioni che abbiamo fatto nella Sezione (1.4), cioè che in relatività vale la conservazione dell'energia totale ma non quella della massa. Massa ed energia sono intercambiabili.

## 6.4 Difetto di massa

Una applicazione particolarmente significativa dell'equivalenza massa-energia è data dal difetto di massa dei nuclei atomici. Infatti risulta che la massa di un nucleo atomico nel suo stato fondamentale è sempre minore della somma delle masse dei nucleoni che lo costituiscono, Quindi, per separare i costituenti, è necessario fornire energia, ovvero massa, al nucleo.

Il difetto di massa si definisce allora come la differenza tra la somma delle masse dei costituenti del nucleo e la massa nucleare effettiva, cioè

$$\Delta m = Z m_p + (A - Z) m_n - M_{Z,A} \quad (6.60)$$

dove  $m_p$  è la massa del protone,  $m_n$  quella del neutrone,  $M_{Z,A}$  è la massa effettiva del nucleo,  $Z$  è il numero atomico, cioè il numero di protoni del nucleo e  $A$  è il numero di massa, cioè il numero totale di protoni e neutroni.  $A$  approssima il peso del nucleo in unità di massa atomiche (u.m.a.), con la massa del  $C^{12}$  fissata esattamente a 12 u.m.a..

Ci aspettiamo che questo difetto di massa sia tanto più grande quanto più il nucleo è stabile. Ad esso corrisponde un'energia secondo la relazione (6.59) che può essere interpretata come un'energia di legame (negativa). In altre parole, per decomporre un nucleo nei suoi costituenti occorrerà fornirgli un'energia almeno uguale all'energia di legame

$$\Delta E = \Delta mc^2 \quad (6.61)$$

dove  $\Delta m$  è il difetto di massa.

L'equazione (6.60) fornisce un'energia di legame, che, misurata in MeV risulta

$$\Delta E(\text{MeV}) = 931,494[Z \cdot 1,0078250 + (A - Z) \cdot 1,008665 - M_{Z,A}] \quad (6.62)$$

In questa formula il numero a fattore è il fattore di conversione da unità di massa atomiche a MeV<sup>1</sup>.

Com'è noto, sia i processi di fusione nucleare, nei quali nuclei leggeri si fondono in un nucleo più pesante, che di fissione nucleare, nei quali un nucleo si rompe in frammenti, sono basati sul difetto di massa. Questo è possibile perchè si può vedere sperimentalmente che nei due casi indicati i processi vanno nel senso che il difetto di massa del nucleo o dei nuclei iniziali è minore di quello del nucleo o dei nuclei finali. Per rendere chiaro l'argomento consideriamo per esempio la reazione nucleare



dove il primo termine della reazione è un protone, il secondo un isotopo del Litio, che ha l'isotopo più abbondante con numero atomico 7, e l'Elio-3 che è anch'esso un isotopo della forma usuale Elio-4. Le masse di questi elementi

---

<sup>1</sup>Si ricorda che l'unità di massa atomica é 1/12 della massa di un atomo di carbonio 12.

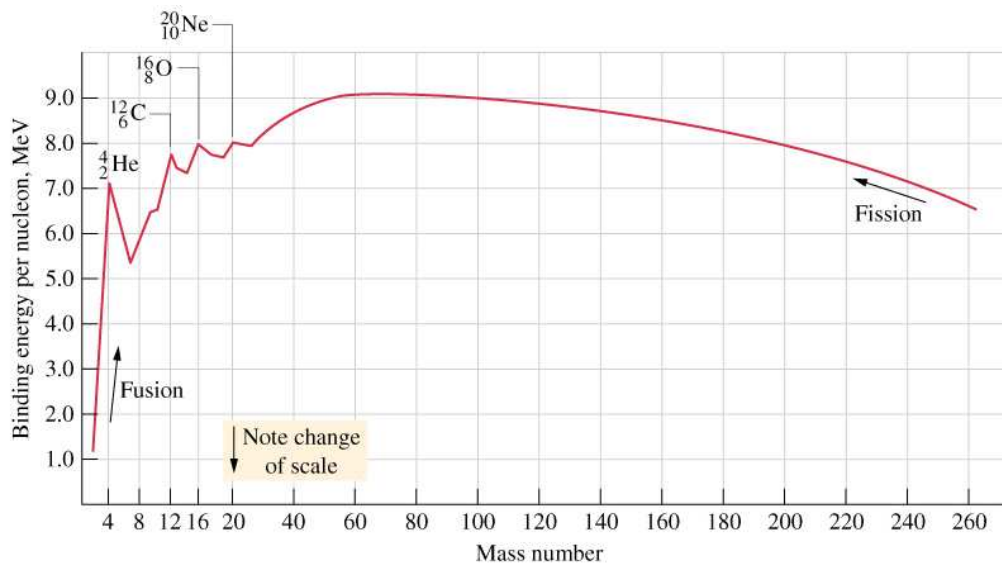


Figura 6.1: L'energia di legame media

espresse in unità di massa atomica (u.m.a.) sono<sup>2</sup>

massa	del	${}^1_1H$	=	1,0078250	
"	"	${}^6_3Li$	=	6,0151223	
"	"	${}^3_2He$	=	3,0160293	
"	"	${}^4_2He$	=	4,0026032	(6.64)

Se si calcolano i difetti di massa si ha

$$\begin{aligned} \Delta m_{{}^1_1H} &= 0, \\ \Delta m_{{}^6_3Li} &= 0,0343474 \text{ u.m.a.} \simeq 32 \text{ MeV}, \\ \Delta m_{{}^3_2He} &= 0,0082856 \text{ u.m.a.} \simeq 7,72 \text{ MeV}, \\ \Delta m_{{}^4_2He} &= 0,0303766 \text{ u.m.a.} \simeq 28,3 \text{ MeV} \end{aligned}$$

da cui si ha il difetto di massa complessivo

$$\Delta m_H + \Delta m_{Li} - \Delta m_{3He} - \Delta m_{4He} = -0,0043148 \text{ u.m.a.} \quad (6.65)$$

<sup>2</sup>Queste sono masse atomiche, che comprendono le masse degli elettroni. Però nel calcolo del difetto di massa ciò non influisce, poiché il loro contributo si elide tra primo e secondo termine della reazione. I dati sono ripresi da <http://www2.bnl.gov/ton/>.



che è negativo e quindi la reazione avviene con produzione di energia. Lo stesso risultato si ottiene facendo il bilancio delle masse, poiché le masse dei costituenti si elidono nella differenza tra il contributo del primo membro della reazione e il secondo. Il risultato sarà con il segno opposto:

$$m_H + m_{Li} - m_{3He} - m_{4He} = +0,0043148 \text{ u.m.a.} \simeq 4,02 \text{ MeV} \quad (6.66)$$

Nella figura (6.1) è riportata l'energia di legame media per nucleone (cioè il difetto di massa diviso il numero dei nucleoni) in funzione del numero atomico<sup>3</sup>.

## 6.5 Applicazioni di meccanica e cinematica relativistiche

### 1 - Moto sotto l'azione di una forza costante

Riprendiamo in considerazioni le equazioni della meccanica relativistica

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = f^\mu, \quad f^\mu = (\gamma \vec{v} \cdot \vec{f}_N / c, \gamma \vec{f}_N) \quad (6.67)$$

e

$$\vec{p} = m\gamma\vec{v}, \quad p^0 = mc\gamma, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (6.68)$$

Calcoliamo la derivata temporale dell'impulso. Si ha

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{p}}{dt} &= m \frac{d(\gamma\vec{v})}{dt} = m\gamma \frac{d\vec{v}}{dt} + m\vec{v} \frac{d\gamma}{dt} = m\gamma \frac{d\vec{v}}{dt} + m\vec{v} \frac{d(p^0/mc)}{dt} = \\ &= m\gamma \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{c\gamma} f^0 = m\gamma \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{c^2} \vec{v} \cdot \vec{f}_N \end{aligned} \quad (6.69)$$

Pertanto

$$m\gamma \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f}_N - \frac{\vec{v}}{c^2} \vec{v} \cdot \vec{f}_N \quad (6.70)$$

Supponiamo di avere una forza costante diretta, per esempio, lungo l'asse delle  $x$ . Quindi porremo

$$\vec{f}_N = (F, 0, 0) \quad (6.71)$$

---

<sup>3</sup>L'immagine è ripresa da [http://cnx.prenhall.com/petrucci/medialib/media\\_portfolio/26.html](http://cnx.prenhall.com/petrucci/medialib/media_portfolio/26.html).

Le equazioni del moto risultanti sono

$$\begin{aligned} m\gamma \frac{d\vec{v}_x}{dt} &= F \left( 1 - \frac{v_x^2}{c^2} \right) \\ m\gamma \frac{d\vec{v}_y}{dt} &= -F \frac{v_x v_y}{c^2} \\ m\gamma \frac{d\vec{v}_z}{dt} &= -F \frac{v_x v_z}{c^2} \end{aligned} \quad (6.72)$$

Se assumiamo all'istante iniziale

$$v_x(0) = v_y(0) = v_z(0) = 0 \quad (6.73)$$

vediamo che

$$v_y(t) = v_z(t) = 0, \quad \forall t \quad (6.74)$$

Dato che le equazioni del moto richiedono che anche le derivate prime siano

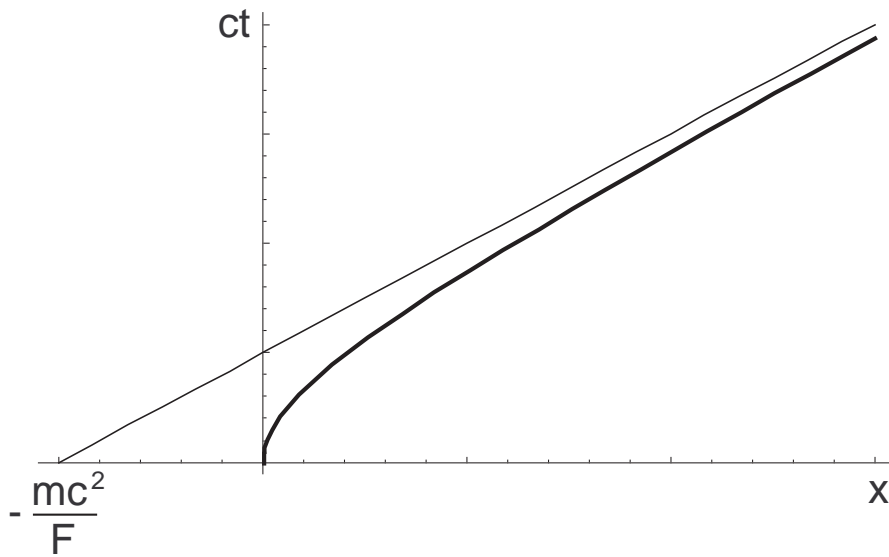


Figura 6.2: Il moto relativistico di una particella soggetta ad una forza costante.

nulle a  $t = 0$ . Dunque, il moto è unidimensionale e lungo la direzione della forza. Ponendo  $v_x = v$  segue

$$m\gamma \frac{dv}{dt} = \frac{F}{\gamma^2} \quad (6.75)$$

da cui

$$\frac{dv}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} = \frac{F}{m} dt \quad (6.76)$$

Integrando tra 0 e  $t$  segue

$$\begin{aligned} \frac{F}{m} t &= \int_0^v \frac{dv}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} = c \int_0^{v/c} \frac{dx}{(1 - x^2)^{3/2}} = \\ &= c \left[ \frac{x}{(1 - x^2)^{1/2}} \right]_0^{v/c} = \frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{aligned} \quad (6.77)$$

Risolvendo in  $v$  questa equazione si trova

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{Ft}{m} \frac{1}{\sqrt{1 + (Ft/mc)^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 + (mc/Ft)^2}} \quad (6.78)$$

L'ultima espressione per  $v$  è identica a quella che avevamo trovato in base a considerazioni euristiche nella Sezione (1.4) (vedi equazione (1.60)). Effettuando una ulteriore integrazione si ha (si assume  $x(0) = 0$ )

$$x(t) = \frac{F}{m} \int_0^t \frac{tdt}{\sqrt{1 + (Ft/mc)^2}} \quad (6.79)$$

Ponendo

$$t = \frac{mc}{F} y \quad (6.80)$$

segue

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{mc^2}{2F} \int_0^{Ft/mc} \frac{dy^2}{\sqrt{1 + y^2}} = \frac{mc^2}{2F} \left[ 2\sqrt{1 + y^2} \right]_0^{Ft/mc} = \\ &= \frac{mc^2}{F} \left( \sqrt{1 + (Ft/mc)^2} - 1 \right) \end{aligned} \quad (6.81)$$

Questa relazione può risciversi nella forma

$$\left( x + \frac{mc^2}{F} \right)^2 - c^2 t^2 = \frac{m^2 c^4}{F^2} \quad (6.82)$$

Il moto è rappresentato nella figura 6.2 ed è ovviamente detto moto iperbolico. Notiamo che per  $Ft \ll mc$ , cioè quando l'impulso della forza  $Ft$  è piccolo

rispetto al tipico impulso relativistico che è di ordine  $mc$  allora si riottiene la soluzione newtoniana. Infatti sviluppando

$$x(t) \approx \frac{mc^2}{F} \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{Ft}{mc} \right)^2 - 1 \right) = \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2 \quad (6.83)$$

che è la soluzione classica, dato che  $F/m$  è l'accelerazione newtoniana. Invece nel limite opposto (limite relativistico),  $Ft \gg mc$  segue

$$x(t) \approx ct \quad (6.84)$$

Quindi la particella si muove con velocità pari a quella della luce, come è anche evidente dalla equazione (6.78).

## 2 - Cinematica del laboratorio e del centro di massa

L'invarianza di una teoria rispetto ad un insieme di trasformazioni permette in genere una grande semplificazione dei problemi. La trattazione formale di questo aspetto è descritta da una apposita parte della matematica che si chiama teoria dei gruppi. Sebbene questa sia una teoria abbastanza sofisticata, in molte applicazioni fisiche si riduce allo studio di quelle quantità che non cambiano sotto le trasformazioni considerate. Per esempio se abbiamo una teoria invariante sotto rotazioni spaziali e sappiamo che una certa osservabile dipende solo da un vettore, risulta che può dipendere solo dal modulo. Infatti l'invarianza per rotazioni ci permette di dire che l'osservabile non dovrà cambiare ruotando il sistema di riferimento e quindi può dipendere solo dal modulo del vettore. Più in generale se dipende da un certo numero di vettori, potrà essere funzione solo dei prodotti scalari indipendenti. L'uso degli invarianti permette delle semplificazioni notevoli, per esempio può evitare di calcolare direttamente come le quantità si trasformano sotto trasformazioni di Lorentz. Come esempio consideriamo un processo d'urto tra due particelle. In generale da questo urto possono generarsi nuove particelle solo se si ha sufficiente energia nel sistema del centro di massa. Quindi all'energia totale a disposizione va sottratta l'energia del centro di massa. Nasce pertanto il problema di mettere in relazione l'energia totale nel riferimento del laboratorio con l'energia nel riferimento in cui il centro di massa è fermo (sistema del c.d.m.). Questa relazione la si può ottenere effettuando

esplicitamente la trasformazione di Lorentz o più semplicemente usando gli invarianti. per fare questo si considerano i quadri-impulsi della particella incidente,  $p_1^\mu$ , e della particella bersaglio nel sistema del laboratorio,  $p_2^\mu$ , in cui, tipicamente, il bersaglio è fermo. Avremo

$$p_1^\mu = (E/c, q, 0, 0), \quad p_2^\mu = (mc, \vec{0}) \quad (6.85)$$

Invece nel sistema del c.d.m. (assumendo le due particelle della stessa massa  $m$ )

$$p_1^\mu = (E_{cm}/c, \vec{p}), \quad p_2^\mu = (E_{cm}/2c, -\vec{p}) \quad (6.86)$$

Infatti dato che nel c.d.m. gli impulsi sono uguali ed opposti e le particelle hanno la stessa massa, segue da

$$p_1^2 = p_2^2 = m^2 c^2 \quad (6.87)$$

che le energie delle due particelle nel c.d.m. sono uguali. Inoltre abbiamo chiamato con  $E_{cm}$  l'energia totale nel c.d.m.. Calcoliamo allora il quadrato di  $(p_1 + p_2)^\mu$ . Dato che questo è un invariante ha lo stesso valore nel c.d.m. e nel laboratorio. Pertanto

$$(p_1 + p_2)^2 = \left( \frac{E}{c} + mc \right)^2 - q^2 \quad \text{nel laboratorio} \quad (6.88)$$

e

$$(p_1 + p_2)^2 = \frac{E_{cm}^2}{c^2} \quad \text{nel c.d.m.} \quad (6.89)$$

Uguagliando queste espressioni si ha

$$\left( \frac{E}{c} + mc \right)^2 - q^2 = \frac{E_{cm}^2}{c^2} \quad (6.90)$$

da cui

$$E_{cm} = c\sqrt{2m(E + mc^2)} \quad (6.91)$$

Questa relazione permette di capire la differenza tra un acceleratore a bersaglio fisso ed un collisionatore (o collider). Nel primo caso una delle particelle è ferma e l'altra viene accelerata. Nel secondo caso entrambe vengono portate allo stesso impulso ma con direzioni opposte e poi fatte collidere. Quindi nel primo caso la cinematica è quella stessa del sistema del laboratorio, mentre nel secondo caso di fatto siamo nel riferimento del cdm. Vediamo dunque

che mentre per un collisionatore per avere  $E_{cm}$  a disposizione è sufficiente accelerare i due fasci sino ad energie  $E_{cm}/2$  nel caso di bersaglio fisso occorre fornire ad un fascio una energia data da

$$E = \frac{E_{cm}^2}{2mc^2} - mc^2 \quad (6.92)$$

Pertanto l'energia da fornire va con il quadrato dell'energia sfruttabile.

### 3 - Cinematica del decadimento in due corpi

Consideriamo una particella di massa  $m_1$  che decade in due particelle di massa  $m_3$  e  $m_4$  rispettivamente, nel sistema in cui è a riposo. La conservazione dell'impulso richiede

$$p_1^\mu = (m_1c, \vec{0}), \quad p_2^\mu = (E_2/c, \vec{p}), \quad p_3^\mu = (E_3/c, -\vec{p}) \quad (6.93)$$

Il calcolo di  $E_2$  e  $E_3$  è immediata se si osserva che dalla conservazione del quadri-impulso

$$p_1^\mu = p_2^\mu + p_3^\mu \quad (6.94)$$

segue che

$$p_3^\mu = p_1^\mu - p_2^\mu, \quad p_2^\mu = p_1^\mu - p_3^\mu \quad (6.95)$$

Prendendo i quadrati di queste espressioni si ha

$$m_3^2c^2 = (m_1^2 + m_2^2)c^2 - 2m_1E_2 \quad (6.96)$$

e

$$m_2^2c^2 = (m_1^2 + m_3^2)c^2 - 2m_1E_3 \quad (6.97)$$

da cui

$$E_2 = \frac{m_1^2 + m_2^2 - m_3^2}{2m_1}c^2, \quad E_3 = \frac{m_1^2 + m_3^2 - m_2^2}{2m_1}c^2 \quad (6.98)$$

Infine quadrando la (6.94) si ha

$$m_1^2c^2 = (m_2^2 + m_3^2)c^2 + \frac{2E_2E_3}{c^2} + 2|\vec{p}|^2 \geq (m_2^2 + m_3^2 + 2m_2m_3)c^2 = (m_2 + m_3)^2c^2 \quad (6.99)$$

da cui si ha la condizione cinematica per il decadimento

$$m_1 \geq m_2 + m_3 \quad (6.100)$$

# Capitolo 7

## Elettrodinamica nel vuoto.

### 7.1 La corrente e la densità elettromagnetiche

Come è abbastanza ovvio, le equazioni di Maxwell soddisfano il principio di relatività di Einstein, quindi anche la corrente elettrica e la densità di carica dovranno avere proprietà semplici di trasformazione rispetto alle trasformazioni di Lorentz. Consideriamo per esempio la carica contenuta in un elemento infinitesimo di volume spaziale  $d^3\vec{x}$ . Tale quantità di carica non dipende chiaramente dal riferimento di Lorentz nel quale siamo. Dunque dovrà essere un invariante

$$\rho d^3\vec{x} = \rho' d^3\vec{x}' \quad (7.1)$$

Notiamo poi che anche l'elemento di volume quadri-dimensionale  $d^4x$  è invariante per trasformazioni di Lorentz, dato che dalla 5.76) segue

$$\det|\Lambda| = 1 \quad (7.2)$$

dove  $\Lambda$  è la matrice della trasformazione di Lorentz. Vediamo dunque che

$$d^4x = d^4x' \quad (7.3)$$

Questo mostra che la densità di carica si trasforma come  $dx^0$  cioè come la quarta componente di un quadrivettore. Consideriamo adesso la relazione

$$\rho d^3\vec{x} dx^\mu = \rho \frac{dx^\mu}{dx^0} d^4x \quad (7.4)$$

Poiché  $\rho d^3\vec{x}$  è invariante il primo membro di questa relazione si trasforma come un quadrivettore. E siccome  $d^4x$  è invariante, segue che

$$\rho \frac{dx^\mu}{dx^0} \quad (7.5)$$

deve trasformarsi come un quadrivettore. Definiamo allora la quadricorrente come

$$j^\mu = \rho \frac{dx^\mu}{dx^0} = (\rho, \rho \vec{v}/c) \equiv (\rho, \vec{J}/c) \quad (7.6)$$

Quindi la parte spaziale di  $j^\mu$  è la usuale densità di corrente divisa per  $c$ . Ricordiamo che vale la condizione di **continuità**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \quad (7.7)$$

Introduciamo la notazione

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \right) \quad (7.8)$$

e consideriamo la quadri-divergenza di  $j^\mu$ . Si ha

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{1}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \frac{1}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{c} \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \quad (7.9)$$

dove abbiamo usato appunto la condizione di continuità. Questa proprietà si riassume dicendo che il quadrivettore  $j^\mu$  rappresenta una corrente conservata o che ha quadri-divergenza nulla.

Osserviamo che  $j^2$  è un invariante di Lorentz che vale

$$j^2 = \rho^2 (1 - v^2/c^2) = \frac{\rho^2}{\gamma^2} \quad (7.10)$$

Dunque l'espressione

$$\rho_0 = \frac{1}{\gamma} \rho = \rho \sqrt{1 - \beta^2} \quad (7.11)$$

è un invariante di Lorentz e rappresenta la densità di carica nel riferimento in cui la particella è ferma. Potremo dunque scrivere la corrente nella forma

$$j^\mu = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{dx^\mu}{dx^0} = \frac{\rho_0}{c} \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{\rho_0}{c} v^\mu \quad (7.12)$$



Per un sistema di  $N$  particelle materiali puntiformi la densità di corrente  $\vec{J}(\vec{x}, t)$  e di carica  $\rho(\vec{x}, t)$  sono date da

$$\vec{J}(\vec{x}, t) = \sum_n e_n \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \frac{d\vec{x}_n(t)}{dt} \quad (7.13)$$

$$\rho(\vec{x}, t) = \sum_n e_n \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \quad (7.14)$$

La carica totale si ottiene integrando la componente temporale di  $j^\mu$

$$Q = \int d^3x j^0(x), \quad (7.15)$$

che è costante nel tempo. Infatti si ha

$$\frac{d}{dt} Q = \int d^3x \frac{\partial j^0(x)}{\partial t} = - \int d^3x \frac{\partial J^i(\vec{x}, t)}{\partial x^i}, \quad (7.16)$$

dove è sottintesa la somma su  $i$ . L'ultimo integrale, tramite il teorema di Stokes <sup>1</sup>, è un integrale di superficie che si può pensare estesa all'infinito, dove la corrente è nulla. Quindi è zero. Dunque l'affermazione che la quadri-divergenza della corrente è zero è equivalente ad affermare la costanza nel tempo dell'integrale spaziale della componente temporale e viceversa (come si può vedere subito).

## 7.2 La forma covariante delle equazioni di Maxwell.

Il risultato principale della sezione precedente è l'aver mostrato che  $j^\mu$  è un quadrivettore. Questo è un ingrediente essenziale per determinare la forma covariante delle equazioni di Maxwell.

Scriviamo le equazioni di Maxwell, nelle unità Heaviside-Lorentz (vedi Appendice A.1)

---

<sup>1</sup>Il teorema di Stokes si può applicare alla forma  $\omega = J^1 dx^2 dx^3 + \text{ciclic.}$ , il cui differenziale è  $d\omega = \partial J^i / \partial x^i d^3x$ .

$$\begin{aligned}
a) \quad & \nabla \cdot \vec{E} = \rho \\
b) \quad & \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\
c) \quad & \nabla \wedge \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
d) \quad & \nabla \wedge \vec{B} = \frac{1}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}
\end{aligned} \tag{7.17}$$

Notare che l'equazione di continuità è conseguenza di queste equazioni. Infatti si può ricavare prendendo la divergenza dell'equazione (d), tenendo conto del fatto che la divergenza di un rotore è zero, e infine utilizzando l'equazione (a). Definiamo adesso un tensore di Lorentz del secondo ordine, antisimmetrico

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} \tag{7.18}$$

tale che<sup>1</sup>

$$F^{0i} = -E^i, \quad F^{ij} = -\epsilon_{ijk} B^k \tag{7.19}$$

dove  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  sono rispettivamente il campo elettrico ed il campo magnetico nel vuoto. Queste equazioni possono anche essere scritte in forma matriciale

$$F = \parallel F^{\mu\nu} \parallel = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ +E_x & 0 & -B_z & +B_y \\ +E_y & +B_z & 0 & -B_x \\ +E_z & -B_y & +B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{7.20}$$

È facile verificare che le equazioni di Maxwell (a) e (d) si possono scrivere in forma compatta

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = j^\nu, \tag{7.21}$$

mentre le equazioni (b) e (c) si scrivono

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda} \frac{\partial F_{\rho\lambda}}{\partial x^\nu} = 0, \tag{7.22}$$

---

<sup>1</sup>Notiamo che al primo membro si ha un tensore di Lorentz e quindi la posizione in alto od in basso degli indici è rilevante. le quantità a secondo membro sono invece vettori spaziali e quindi la posizione degli indici è irrilevante

dove  $\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}$  è il tensore di Ricci totalmente antisimmetrico e che vale 1 o -1 secondo che gli indici siano in un ordine che sia una permutazione pari o dispari rispetto alla permutazione (0, 1, 2, 3). Il tensore

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda} F_{\rho\lambda} \quad (7.23)$$

si chiama tensore duale di  $F$ . Come abbiamo detto  $F$  è un tensore antisimmetrico di rango due. Ciò si verifica dall'equazione (7.21), dove il secondo membro sappiamo che è un quadrivettore e naturalmente  $x^\mu$  è anche un quadrivettore. Ciò garantisce il carattere tensoriale di  $F$ , come si può verificare anche esplicitamente.

Quindi le equazioni di Maxwell sono adesso scritte in forma covariante.

### 7.3 Le proprietà di trasformazione dei campi.

Un tensore di rango 2 si trasforma sotto trasformazione di Lorentz con la legge

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta F^{\alpha\beta} \quad (7.24)$$

che può essere riscritta in forma matriciale come

$$F' = \Lambda F \Lambda^T \quad (7.25)$$

con la matrice  $F$  definita in (7.20). Da questa equazione si possono ricavare le proprietà di trasformazione dei campi  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$ . Consideriamo il caso di una trasformazione di Lorentz come in (3.33) per la quale la matrice  $\Lambda$  è data da<sup>2</sup>

$$\Lambda = \|\Lambda^\mu{}_\nu\| = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.26)$$

Effettuando il prodotto matriciale si ottiene

$$F' = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -\gamma(E_y - \beta B_z) & -\gamma(E_z + \beta B_y) \\ E_x & 0 & -\gamma(B_z - \beta E_y) & \gamma(B_y + \beta E_z) \\ \gamma(E_y - \beta B_z) & \gamma(B_z - \beta E_y) & 0 & -B_x \\ \gamma(E_z + \beta B_y) & -\gamma(B_y + \beta E_z) & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (7.27)$$

---

<sup>2</sup>Ricordarsi che  $x^0 = ct$ .

Dunque

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x, & E'_y &= \gamma(E_y - \beta B_z), & E'_z &= \gamma(E_z + \beta B_y) \\ B'_x &= B_x, & B'_y &= \gamma(B_y + \beta E_z), & B'_z &= \gamma(B_z - \beta E_y) \end{aligned} \quad (7.28)$$

dove  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  sono i campi misurati nel sistema  $S$  e  $\vec{E}'$  e  $\vec{B}'$  sono i campi misurati nel sistema  $S'$ , che si muove rispetto a  $S$  con velocità  $\vec{v} = v\vec{i}$ . Possiamo facilmente estendere queste trasformazioni alle componenti parallele e perpendicolari dei campi rispetto alla velocità notando che

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\parallel} &= E_x\vec{i}, & \vec{E}_{\perp} &= E_y\vec{j} + E_z\vec{k} \\ \vec{B}_{\parallel} &= B_x\vec{i}, & \vec{B}_{\perp} &= B_y\vec{j} + B_z\vec{k} \end{aligned} \quad (7.29)$$

e

$$\begin{aligned} \vec{v} \wedge \vec{E} &= -vE_z\vec{j} + vE_y\vec{k} \\ \vec{v} \wedge \vec{B} &= -vB_z\vec{j} + vB_y\vec{k} \end{aligned} \quad (7.30)$$

Segue allora

$$\begin{aligned} \vec{E}'_{\parallel} &= \vec{E}_{\parallel}, & \vec{E}'_{\perp} &= \gamma(\vec{E}_{\perp} + \vec{v} \wedge \vec{B}/c) \\ \vec{B}'_{\parallel} &= \vec{B}_{\parallel}, & \vec{B}'_{\perp} &= \gamma(\vec{B}_{\perp} - \vec{v} \wedge \vec{E}/c) \end{aligned} \quad (7.31)$$

La trasformazione inversa si ottiene scambiando  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  con  $\vec{E}'$  e  $\vec{B}'$  e  $\vec{v}$  con  $-\vec{v}$ . Dunque le componenti parallele alla velocità non si trasformano, mentre si trasformano quelle perpendicolari. Notiamo che il secondo termine nell'espressione di  $\vec{E}'_{\perp}$  al primo ordine in  $v/c$ , altro non è che la forza di Lorentz. Anche il secondo termine in  $\vec{B}'_{\perp}$  ha una semplice interpretazione. Consideriamo una carica ferma nel riferimento  $S$ . nel riferimento  $S'$  verrà vista in moto con velocità  $-\vec{v}$ . Quindi  $S'$  vedrà un campo magnetico la cui espressione per un intervallo di percorso infinitesimo è

$$\vec{B}' = i \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{r}}{4\pi cr^3} \quad (7.32)$$

Ma

$$id\vec{\ell} = \rho dV(-\vec{v}) \quad (7.33)$$

E posto  $q = \rho dV$ , la carica nell'elemento di volume  $dV$ , il campo visto in  $S'$  risulta

$$\vec{B}' = -\frac{q}{4\pi c} \frac{\vec{v} \wedge \vec{r}}{r^3} = -\frac{1}{c} \vec{v} \wedge \vec{E} \quad (7.34)$$

che, al primo ordine in  $v/c$  coincide con il secondo termine in  $\vec{B}'_{\perp}$ .

## 7.4 Potenziali di gauge

Ricordiamo che il potenziale vettore ed il potenziale scalare sono definiti tramite le relazioni

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \phi, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \quad (7.35)$$

Con le definizioni che abbiamo dato per il tensore elettromagnetico  $F^{\mu\nu}$ , introducendo

$$A^\mu = (\phi, \vec{A}) \quad (7.36)$$

si vede subito per sostituzione che

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (7.37)$$

In questo modo le equazioni omogenee di Maxwell (7.22) sono automaticamente soddisfatte dato che

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \frac{\partial F^{\rho\sigma}}{\partial x_\nu} = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial^\nu (\partial^\rho A^\sigma - \partial^\sigma A^\rho) = 0 \quad (7.38)$$

per l'antisimmetria dl tensore di Ricci. Le equazioni non omogenee (7.21) diventano

$$\square A^\mu - \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu) = j^\mu \quad (7.39)$$

dove

$$\square = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \quad (7.40)$$

è l'operatore di D'Alembert in quattro dimensioni spazio-temporali.

Ovviamente il quadri-potenziale  $A^\mu$  non è univocamente definito, dato che se effettuiamo la trasformazione (detta di gauge)

$$\tilde{A}^\mu = A^\mu + \partial^\mu \chi \quad (7.41)$$

dove  $\chi$  è una arbitraria funzione di  $x^\mu$  si ha

$$F'_{\mu\nu} = \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu = F_{\mu\nu} \quad (7.42)$$

Quindi i campi rimangono invariati sotto una trasformazione di gauge. In termini delle componenti si ha

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} - \vec{\nabla} \chi, \quad \phi \rightarrow \phi + \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad (7.43)$$

Questa libertà permette di fissare di imporre una condizione su  $A^\mu$  o come si dice di fissare il gauge per semplificare le equazioni. Una scelta comune è quella del gauge di Lorentz

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad (7.44)$$

in cui le equazioni di Maxwell per i potenziali, equazioni (7.39) diventano le equazioni di D'Alembert

$$\square A^\mu = j^\mu \quad (7.45)$$

che, in particolare mostra che i potenziali, e quindi anche i campi, soddisfano l'equazione delle onde.

# Appendice A

## Appendice sulle unità di misura.

### A.1 Equazioni di Maxwell

Le unità di misura relative tra i campi elettrici e magnetici e le densità di carica e di corrente sono a priori arbitrarie (nel senso che dipendono dalle unità scelte). Quindi la forma più generale delle equazioni di Maxwell che tenga conto di tale ambiguità

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{E} = 4\pi k_1 \rho \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \wedge \vec{E} = -k_3 \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \wedge \vec{B} = 4\pi k_2 \alpha \vec{J} + k_4 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right. \quad (\text{A.1})$$

Alle equazioni di Maxwell occorre aggiungere l'equazione di continuità, che non contiene costanti arbitrarie, dato che fissata l'unità di carica rimane fissata anche quella di corrente, quindi

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \quad (\text{A.2})$$

Una ulteriore costante arbitraria appare nell'espressione della forza che i campi elettrici e magnetici applicano ad una carica  $q$

$$\vec{F} = q \left( \vec{E} + \frac{\vec{v}}{\alpha} \wedge \vec{B} \right) \quad (\text{A.3})$$

Nel termine del campo elettrico non appare una costante perché la si può assorbire nella definizione della carica. Queste cinque costanti sono correlate, infatti si possono stabilire tre relazioni tra di loro. Prendendo la divergenza della quarta equazione di Maxwell (A.1) si ha

$$0 = 4\pi k_2 \alpha \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + k_4 \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi k_2 \alpha \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + 4\pi k_4 k_1 \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (\text{A.4})$$

dove si è fatto uso della prima delle equazioni (A.1). La compatibilità con l'equazione di continuità richiede

$$k_4 = \alpha \frac{k_2}{k_1} \quad (\text{A.5})$$

Il calcolo della forza per unità di lunghezza che agisce tra due fili indefiniti posti a distanza  $d$  e percorsi da correnti  $I_1$  e  $I_2$  si riconduce al calcolo della forza di Lorentz del campo magnetico generato da una delle correnti. Questo campo può a sua volta essere determinato in termini della corrente dalla quarta delle (A.1). Quindi si vede subito che la forza è proporzionale a  $k_2$

$$\frac{dF}{d\ell} = 2k_2 \frac{I_1 I_2}{d} \quad (\text{A.6})$$

In modo analogo la forza tra due cariche statiche (forza coulombiana) si determina dalla prima equazione di Maxwell e dalla relazione tra forza e campo elettrico. Si trova

$$F = k_1 \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (\text{A.7})$$

Vediamo dunque che le dimensioni del rapporto  $k_1/k_2$  sono

$$\left[ \frac{k_1}{k_2} \right] = \left[ \frac{\ell^2 \cdot F \cdot Q^{-2}}{(F\ell^{-1}) \cdot \ell \cdot Q^{-2} \cdot t^2} \right] = \left[ \left( \frac{\ell}{t} \right)^2 \right] = [v^2] \quad (\text{A.8})$$

Quindi questo rapporto non dipende dalle unità di misura usata per la carica elettrica e può essere misurato sperimentalmente facendo uso solo delle definizioni di unità meccaniche. Il risultato è che

$$\frac{k_1}{k_2} = c^2 \quad (\text{A.9})$$



dove  $c$  è la velocità della luce. Prendendo poi il rotore della quarta equazione di Maxwell con corrente nulla, si ha

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = \frac{\alpha}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\alpha k_3}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \quad (\text{A.10})$$

dove abbiamo usato la terza equazione di Maxwell. D'altra parte si ha

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}))_i &= \sum_{j,k,l,m=1}^3 \epsilon_{ijk} \partial_j (\epsilon_{klm} \partial_l B_m) = \sum_{j,l,m=1}^3 (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \partial_j \partial_l B_m = \\ &= \partial_i (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \Delta^2 B_i = \Delta^2 B_i \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

dove si è usato la seconda delle (A.1). Pertanto

$$\frac{\alpha k_3}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - \Delta^2 \vec{B} = 0 \quad (\text{A.12})$$

Questa è l'equazione delle onde e dato che le onde elettromagnetiche si propagano con velocità pari a  $c$  segue

$$\alpha k_3 = 1 \quad (\text{A.13})$$

Riassumendo si sono trovate le seguenti tre relazioni tra le cinque costanti  $k_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$  e  $\alpha$

$$\frac{k_1}{k_2} = c^2, \quad k_3 = \frac{1}{\alpha}, \quad k_4 = \frac{\alpha}{c^2} \quad (\text{A.14})$$

Quindi ne possiamo fissare arbitrariamente due.

Nel sistema SI si fa la scelta

$$k_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 10^{-7} c^2, \quad k_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}, \quad k_3 = 1, \quad k_4 = \frac{1}{c^2}, \quad \alpha = 1 \quad (\text{A.15})$$

e quindi

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \wedge \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases} \quad (\text{A.16})$$

dove abbiamo definito  $\vec{D}$  e  $\vec{B}$  legati ai campi elettrici e magnetici  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  da

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (\text{A.17})$$

Nel sistema di Heaviside-Lorentz, che è quello usato nel testo, si ha

$$k_1 = \frac{1}{4\pi}, \quad k_2 = \frac{1}{4\pi c^2}, \quad k_3 = \frac{1}{c}, \quad k_4 = \frac{1}{c}, \quad \alpha = c \quad (\text{A.18})$$

e quindi le equazioni di Maxwell si scrivono in questo sistema

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = \rho \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \wedge \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \wedge \vec{B} = \frac{1}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases} \quad (\text{A.19})$$

mentre la forza di Lorentz è data da

$$\vec{F} = q \left( \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \wedge \vec{B} \right) \quad (\text{A.20})$$

Abbiamo riportato le equazioni di Maxwell in questo sistema perchè è quello spesso usato quando si discute di relatività. Infatti in questo sistema risulta più evidente il fattore  $c$ , ed è anche più utile per porre queste equazioni in una forma covariante.

## A.2 Unità di energia

Per unità di energia abbiamo usato l'eV, che è stato definito come l'energia acquistata da un elettrone nell'attraversare la differenza di potenziale di 1 Volt.

Tenuto conto che la carica di un elettrone è data da

$$e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{Coulomb}, \quad (\text{A.21})$$

si ha

$$1\text{eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{Coulomb Volt.} \quad (\text{A.22})$$

Dato che  $1\text{Coulomb Volt} = 1\text{Joule} = 10^{-7}\text{erg}$ , si ha

$$1\text{eV} = 1,602 \cdot 10^{-12}\text{erg.} \quad (\text{A.23})$$

Le masse dei nucleoni sono date da

$$\begin{cases} m_p &= 931,494 \cdot 1,007276 = 938,272 \text{ MeV,} \\ m_n &= 931,494 \cdot 1,008666 = 939,565 \text{ MeV,} \end{cases} \quad (\text{A.24})$$

dove il fattore 931,494 è il fattore di conversione da u.m.a. a MeV.

Notare che adesso la massa del protone è inferiore alla massa data nella (6.64), che è quella dell'atomo di idrogeno  ${}^1_1H$ .

# Bibliografia

- [1] J. Stark, Ann. d. Phys. **21**, 40 (1906); J. Stark and K. Siegel, *ibidem* **21**, 457 (1906); J. Stark, W. Hermann and S. Kinoshita, *ibidem* **21**, 462 (1906).
- [2] H.E. Ives and G.R. Stilwell, Journal of the Optical Society of America, **28**, 215 (1938).
- [3] C. Möller, *The Theory of Relativity*, Oxford at the Clarendon Press, 1952.
- [4] W.G.V.Rosser, An Introduction to the Theory of Relativity, London Butterworths, terza ed. 1971.