In un campo elettrico non ci sono punti di equilibrio stabile

Matteo Poggi

26 Febbraio 2008

Ovviamente il tiolo ha senso se nel punto in questione non sono localizzate cariche. In questo caso si avrà:

$$\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$$

Supponiamo per assurdo che l'equilibrio sia stabile, questo equivale ad affermare che

$$\langle \mathbf{E}(\mathbf{r} + d\mathbf{r}), d\mathbf{r} \rangle < 0$$

questa affermazione può essere ben vista in termini di lavoro virtuale $\delta L < 0$. Andando però a sviluppare l'espressione abbiamo:

$$\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}) + (\nabla\mathbf{E}(\mathbf{r})|d\mathbf{r})\,, d\mathbf{r} \rangle = \langle (\nabla\mathbf{E}(\mathbf{r})|d\mathbf{r})\,, d\mathbf{r} \rangle < 0$$

poichè per definizione di equilibrio (e di campo elettico) $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$ andiamo ad esplicitare la precedente scrittura:

$$\frac{\partial E_i(\mathbf{r})}{\partial u_j} du_j du_i < 0.$$

Quindi adesso possiamo prendere gli spostamenti elementari lungo le direzioni degli assi ed ottenere così

$$\frac{\partial E_k(\mathbf{r})}{\partial u_k} (du_k)^2 < 0 \qquad k = 1, 2, 3$$

adesso sommando i termini ottenuti precedentemente abbiamo

$$\frac{\partial E_i(\mathbf{r})}{\partial u_i} (du_i)^2 < 0$$

d'altronde la precedente espressione avrà lo stesso segno della seguente:

$$\frac{\partial E_i(\mathbf{r})}{\partial u_i} = \operatorname{tr} \nabla\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}) < 0$$

che è assurdo essendo contrario all'ipotesi.

Intuitivamente si può pensare quanto sopra in maniera semplice: se l'equilibrio fosse stabile vorrebbe dire che muovendo la carica esploratrice dalla posizione di equilibrio si manifesterebbero delle forze che tenderebbero a riportarla in tale posizione. Se così fosse in un intorno del punto di equilibrio le linee di forza sarebbero tutte entranti, ma questo contraddice il teorema di Gauss.