

Misure con amplificatori operazionali

Fabio Berti, Matteo Poggi e Simone Valdré *

16 luglio 2008

1 Integratore di Miller

Consideriamo lo schema di un integratore di Miller alimentato all'ingresso N da un generatore di tensione V_{in} in serie con una resistenza R . Innanzi tutto valutiamo la tensione di uscita: essa dovrà esser ogni istante

$$V_{out} = -V_{off} - V_C \quad (1.1)$$

dove $V_C = Q/C_f$ è la tensione ai capi del condensatore C_f . Per le correnti sussisterà la seguente relazione

$$i_f = -i_{in} - i_{bias}, \quad i_{in} = \frac{V_{in}}{R} \quad (1.2)$$

dunque con questi dati l'espressione per V_{out} diventa

$$V_{out} = \frac{1}{C} \left[- \int_{t_0}^t \frac{V_{in} + V_{off}}{R} dt + i_{bias} \Delta t \right] - V_{off} \quad (1.3)$$

dove si è posto $\Delta t = t - t_0$.

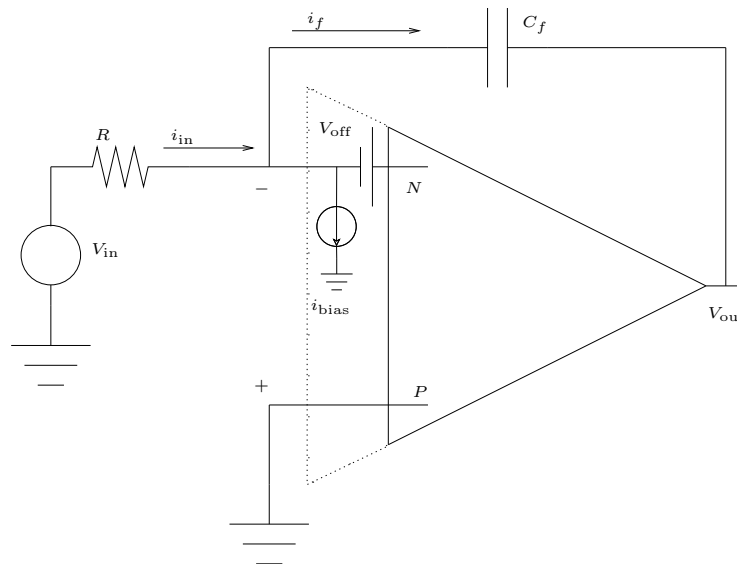


Figura 1.1: Integratore di Miller

*ringraziamo Vladislav Gavryusev per l'attenta e costruttiva critica del presente testo.

1.1 Misura di un condensatore incognito tramite l'integrazione di una corrente nota

Supponiamo adesso che il nostro condensatore sia incognito: $C_f = C_x$ un modo per misurarlo è quello di fargli integrare per un tempo Δt noto una corrente i_{in} . Sempre con riferimento al nostro schema avremo, supponendo costante la tensione erogata da V_{in} :

$$\Delta V_{out} = \frac{\Delta t}{C_x} \left[-\frac{V_{in} + V_{off}}{R} + i_{bias} \right]. \quad (1.4)$$

Il fatto che sia scomparsa la tensione di offset da dentro la parentesi quadra deriva dal fatto che si presuppone fatta una misura *differenziale* di V_{out} , poichè nell'azzerare l'integratore cortocircuitando il condensatore, non si ha controllo completo della carica residua. Andando a riportare in grafico i valori di tensione trovati dopo vari intervalli di tempo si potrà ricavare una stima grafica del fit lineare:

$$m = \frac{\Delta V_{out}}{\Delta t} = \frac{1}{C_x} \left[-\frac{V_{in} + V_{off}}{R} + i_{bias} \right] \quad (1.5)$$

da cui finalmente si può ricavare

$$C_x = \frac{1}{m} \left[-\frac{1}{R} (V_{in} + V_{off}) + i_{bias} \right]. \quad (1.6)$$

Ne ricaviamo anche la propagazione degli errori. Sostituiamo all'usuale simbolo ' Δ ' il simbolo ' δ ' per non ingenerare confusione:

$$\delta C_x = \frac{C_x}{m} \delta m + \frac{V_{in} + V_{off}}{mR^2} \delta R + \frac{\delta V_{in} + \delta V_{off}}{mR} + \frac{\delta i_{bias}}{m}. \quad (1.7)$$

Si noti altresì che nel caso che $V_{off}, i_{bias}R < \delta V_{in}$, allora si potrà trascurare sia il contributo della corrente di bias che della tensione di offset e di conseguenza la (1.6) si ridurrà semplicemente a

$$C_x = -\frac{V_{in}}{mR}. \quad (1.8)$$

Veniamo a delle osservazioni di carattere pratico: questa esperienza prevede solo la scelta di due fattori: V_{in} ed R . In particolare un adeguato rapporto V_{in}/R permetterà di trascurare i_{bias} ; tuttavia, se questo risulterà troppo elevato osserveremo l'operazionale andare presto in saturazione, e perderemo quindi precisione nelle misure. Al contrario se questo rapporto venisse impostato troppo basso, dovremmo attendere un lungo periodo di tempo per avere dei risultati apprezzabili. Per quanto riguarda il montaggio del circuito dei valori si converrà che vista l'instabilità che certi generatori in continua presentano al minimo della partate il la resistenza a loro inserie avrà un balore $R \approx 10 \text{ M}\Omega$. Converrà poi inserire un tasto dopo la resistenza stessa per agevolare la lettura periodica di V_{out} . Così facendo ci rendiamo conto che gli sforzi per rendere i_{bias} trascurabile non sono stati vani: difatti se così non fosse, quando, agendo sul testo stacciamo la corrente, il condensatore si continua a caricare con la corrente di bias, rendendo il fit inagibile.

1.2 Misura di un condensatore incognito e della sua resistenza di fuga

Si voglia adesso effettuare la misura della capacità di un condensatore C_x e determinarne anche la sua resistenza di fuga $R_x \approx G\Omega$. Montando il circuito in figura, la prima cosa da fare è misurare la capacità: per prima cosa si fa caricare il nostro C_x sul generatore V_{gen} (S in posizione 1). Successivamente commuta il deviatore alla posizione 3 : analizziamo cosa succede. Prima di tutto delle considerazioni sulla carica; detta Q_x la carica di C_x avremo:

$$Q_x(0) = Q_0 \quad (1.9a)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} Q_x(t) = Q_\infty. \quad (1.9b)$$

Avendo queste condizioni al contorno, sappiamo che un condensatore chiuso su una resistenza R avrà una carica in funzione del tempo descritta dall'equazione:

$$Q_x(t) = Q_\infty + (Q_0 - Q_\infty) \exp\left(-\frac{t}{RC_x}\right). \quad (1.10)$$

e dunque nel processo di scarica la carica trasferita sarà:

$$Q_T = Q_0 - Q_\infty. \quad (1.11)$$

Ritornando al nostro circuito, per il principio di conservazione della carica e quello di massa virtuale, questa Q_T si andrà ad accumulare in C_f sommandosi algebricamente con l'integrale nel tempo della corrente di bias. Ricordando la (1.1) si avrà:

$$V_{\text{out}} = -\frac{Q_f}{C_f} - V_{\text{off}} = -\frac{Q_T - i_{\text{bias}}\Delta t_{\text{mis}}}{C_f} - V_{\text{off}} \quad (1.12)$$

dove Q_f è la carica di C_f e Δt_{mis} è il tempo di misura. A proposito di questo si noti che affinché praticamente tutta la carica di C_x si sia trasferita in C_f si dovrà avere $\Delta t_{\text{mis}} \gg RC_x$. Questa condizione è facilmente soddisfatta, perchè avendo pure dei condensatori di capacità elevata $C \approx mF$, e considerando la resistenza quella offerta dai collegamenti $R \approx 0.1\Omega$, avremo $\tau = RC_x \approx 0.1ms$ un tempo molto minore del tempo di campionamento di un comune strumento di misura. Specializziamo le (1.9) nel nostro caso:

$$Q_0 = V_{\text{gen}}C_x \quad (1.13a)$$

$$Q_\infty = -V_{\text{off}}C_x. \quad (1.13b)$$

Mettendo insieme quanto detto avremo che la lettura del segnale di uscita alla fine della misura sarà:

$$V_{\text{out}} = \frac{1}{C_f} [-C_x (V_{\text{gen}} + V_{\text{off}}) + i_{\text{bias}}\Delta t_{\text{mis}}] - V_{\text{off}}. \quad (1.14)$$

Anche in questo caso si presenta il problema del non controllabile azzeramento del condensatore. Eseguendo quindi una misura differenziale avremo:

$$\Delta V_{\text{mis}} = \frac{1}{C_f} [-C_x (V_{\text{gen}} + V_{\text{off}}) + i_{\text{bias}}\Delta t_{\text{mis}}]. \quad (1.15)$$

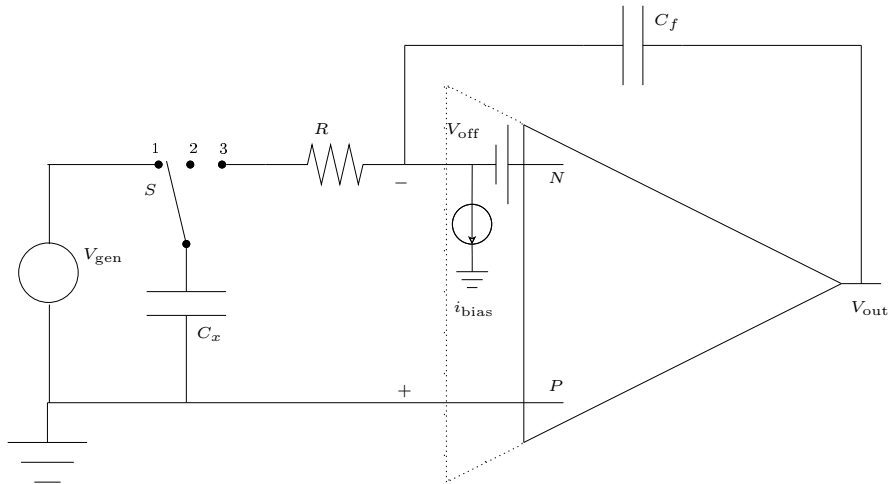


Figura 1.2: Scarica di un condensatore su un integratore di Miller

possiamo dunque ricavare quanto richiesto:

$$C_x = \frac{i_{\text{bias}}\Delta t_{\text{mis}} - C_f\Delta V_{\text{mis}}}{V_{\text{gen}} + V_{\text{off}}}. \quad (1.16)$$

Calcoliamo dunque l'errore da cui tale grandezza risulta affetta:

$$\delta C_x = \frac{\delta i_{\text{bias}}\Delta t_{\text{mis}} + i_{\text{bias}}\delta\Delta t_{\text{mis}} + \delta C_f\Delta V_{\text{mis}} + C_f\delta\Delta V_{\text{mis}} + C_x(\delta V_{\text{gen}} + \delta V_{\text{off}})}{V_{\text{gen}} + V_{\text{off}}}. \quad (1.17)$$

Adesso è d'uopo fare alcune osservazioni che faciliteranno il proseguio della nostra trattazione: dalla (1.15) possiamo vedere che sia il contributo di V_{off} che quello di i_{bias} sono indipendenti dalla capacità C_f usata. Se si vuol dunque fare in modo che questi due contributi abbiano un peso minimo nella misura occorrerà massimizzare V_{gen} . Vediamo come praticamente questo possa essere realizzato: innanzi tutto possiamo subito fornire una stima in generale grossolana di C_x trascurando sistematicamente V_{off} e i_{bias} avendo così

$$\tilde{C}_x = -C_f \frac{\Delta V_{\text{mis}}}{V_{\text{gen}}} \quad (1.18)$$

da cui possiamo ricavarci:

$$V'_{\text{gen}} \simeq -V_{\text{ott}} \frac{C_f}{\tilde{C}_x} \quad (1.19)$$

dove V_{ott} è una tensione inferiore a quella di saturazione, più alta possibile¹. Nei casi fortunati dove, a posteriori, $V_{\text{off}} < \delta V_{\text{in}}$ e $i_{\text{bias}}\Delta t_{\text{mis}} < C_f\delta V_{\text{out}}$ (i pedici stanno ad indicare rispettivamente il multimetro all'ingresso del circuito e quello all'uscita) si potrà scrivere:

$$C_x = \tilde{C}_x \quad (1.20)$$

dove il segno di uguaglianza ha senso fisico. Passiamo adesso a discutere brevemente le possibili cause di insuccesso della misura: una prima può presentare il sintomo della saturazione dell'operazione, se avviene ciò si dovrà aumentare il valore di C_f (oppure diminuire V_{gen} , ma questa operazione potrebbe rendere non trascurabili i contributi parassiti); un'altra, agli antipodi della prima, si può manifestare con una crescita irrilevante della V_{out} , in questo caso si potrà aumentare V_{gen} (oppure diminuire C_f). Potrebbe anche verificarsi che a causa dei numerosi collegamenti utilizzati, ci siano degli effetti induttivi su alcuni cavi, questi effetti si manifesteranno maggiormente al diminuire del valore di C_f . Passiamo adesso alla misura della resistenza di fuga R_x del condensatore. Per eseguirla sarà necessario tenere conto delle misura or ora descritta di C_x , per cui, per chiarezza di notazione, tutte le grandezze riferite alla misura precedente recheranno ad apice l'indice '(1)' mentre quelle riferite alla misura che ci accingiamo a descrivere recheranno ad apice l'indice '(2)'. Per iniziare questa misura occorrerà spostare il deviatore S nella posizione 2, ed aspettare un tempo \bar{t} durante il quale esso si scaricherà appunto sulla sua resistenza di fuga; vediamone l'equazione:

$$Q^{(2)}(t) = Q_i^{(2)} \exp\left(-\frac{t}{R_x C_x}\right) \quad (1.21)$$

dove $Q_i^{(2)}$ rappresenta la carica iniziale del condensatore. Dopo aver aspettato il tempo \bar{t} la carica rimasta sarà

$$Q_0^{(2)} = Q^{(2)}(\bar{t}) = V_{\text{gen}}^{(2)} C_x \exp\left(-\frac{\bar{t}}{R_x C_x}\right) \quad (1.22)$$

dove abbiamo posto $Q^{(2)}(0) = C_x V_{\text{gen}}^{(2)}$ che in generale potrà essere $V_{\text{gen}}^{(2)} \neq V_{\text{gen}}^{(1)}$ anche se, come vedremo non si rivelerà una scelta troppo oculata. Quindi dopo tale attesa (ne daremo una

¹Dipenderà ovviamente anche dalle caratteristiche dello strumento di misura utilizzato.

valutazione quantitativa in seguito) si commuterà S nella posizione β e dunque il condensatore C_x si scaricherà su C_f similmente a quanto visto in precedenza: avremo

$$Q_\infty^{(2)} = -V_{\text{off}}C_x \quad (1.23)$$

e conseguentemente

$$Q_T^{(2)} = Q_0^{(2)} - Q_\infty^{(2)} = C_x \left(V_{\text{gen}}^{(2)} \exp\left(-\frac{\bar{t}}{R_x C_x}\right) + V_{\text{off}} \right) \quad (1.24)$$

da cui, seguendo il procedimento già affrontato per ricavare $\Delta V_{\text{gen}}^{(1)}$ abbiamo

$$\Delta V_{\text{mis}}^{(2)} = \frac{1}{C_f} \left[-C_x \left(V_{\text{gen}}^{(2)} \exp\left(-\frac{\bar{t}}{R_x C_x}\right) + V_{\text{off}} \right) \right] \quad (1.25)$$

dove adesso però C_x è noto dalla (1.16). Possiamo dunque ricavare quando ci eravamo prefissi:

$$R_x = \frac{\bar{t} \left(V_{\text{gen}}^{(1)} + V_{\text{off}} \right)}{\left(C_f \Delta V_{\text{mis}}^{(1)} - i_{\text{bias}} \Delta t_{\text{mis}}^{(1)} \right) \ln \left[\frac{C_f \Delta V_{\text{mis}}^{(2)} - i_{\text{bias}} \Delta t_{\text{mis}}^{(2)}}{C_f \Delta V_{\text{mis}}^{(1)} - i_{\text{bias}} \Delta t_{\text{mis}}^{(1)}} \left(\frac{V_{\text{gen}}^{(1)} + V_{\text{off}}}{V_{\text{gen}}^{(2)}} \right) - \frac{V_{\text{off}}}{V_{\text{gen}}^{(2)}} \right]} \quad (1.26)$$

adesso si sarà capita la bramosia apparentemente ingiustificata che avevamo quando volevamo a tutti i costi trascurare i_{bias} e se possibile anche V_{off} . Facciamo adesso delle ipotesi semplificatrici ragionevoli: innanzi tutto i_{bias} potrà essere resa trascurabile (almeno lo si potrà sperare), seconda cosa assumiamo che $V_{\text{gen}}^{(1)} = V_{\text{gen}}^{(2)} := V_{\text{gen}}$, ciò può essere realizzato non toccando il generatore durante l'intero svolgimento dell'esperienza; fatte tali semplificazioni l'abominevole espressione suscritta diventa:

$$R_x = \frac{1}{C_f} \frac{V_{\text{gen}} + V_{\text{off}}}{V_1} \frac{\bar{t}}{\ln \left[\frac{V_2}{V_2} \left(1 + \frac{V_{\text{off}}}{V_{\text{gen}}} \right) - \frac{V_{\text{off}}}{V_{\text{gen}}} \right]}. \quad (1.27)$$

Riportiamo qui anche la sua propagazione dell'errore:

$$\begin{aligned} \delta R_x = & R_x \frac{\delta \bar{t}}{\bar{t}} + R_x \left| \frac{1}{V_{\text{gen}} + V_{\text{off}}} - \frac{V_{\text{off}}}{V_{\text{gen}}} \left(1 - \frac{V_2}{V_1} \right) \right| \delta V_{\text{gen}} + R_x \left| \frac{1}{V_{\text{gen}} + V_{\text{off}}} - \frac{\left(\frac{V_2}{V_1} - 1 \right)}{V_{\text{gen}} \gamma \ln \gamma} \right| \delta V_{\text{off}} + \\ & + R_x \left| 1 - \frac{V_2 \left(1 + \frac{V_{\text{off}}}{V_{\text{gen}}} \right)}{V_1 \gamma \ln \gamma} \right| \frac{\delta V_1}{V_1} + R_x \frac{\left(1 + \frac{V_{\text{off}}}{V_{\text{gen}}} \right)}{V_1 \gamma \ln \gamma} \delta V_2 + R_x \frac{\delta C_f}{C_f} \end{aligned} \quad (1.28)$$

dove, per semplificare la notazione abbiamo posto:

$$\gamma := \frac{V_2}{V_1} \left(1 + \frac{V_{\text{off}}}{V_{\text{gen}}} \right) - \frac{V_{\text{off}}}{V_{\text{gen}}} \quad (1.29a)$$

$$V_1 \leftarrow \Delta V_{\text{mis}}^{(1)} \quad (1.29b)$$

$$V_2 \leftarrow \Delta V_{\text{mis}}^{(2)}. \quad (1.29c)$$

Adesso vediamo un'ultima versione della formula ricavata dalla precedente quando anche la tensione di offset si può trascurare; utilizzando sempre le (1.29) abbiamo:

$$R_x = \frac{V_{\text{gen}} \bar{t}}{C_f V_1 \ln \left[\frac{V_2}{V_1} \right]} \quad (1.30)$$

$$\delta R_x = R_x \left(\frac{\delta \bar{t}}{\bar{t}} + \frac{\delta C_f}{C_f} + \frac{\delta V_{\text{gen}}}{V_{\text{gen}}} + \left| \frac{1}{\ln \left[\frac{V_2}{V_1} \right]} \right| \frac{\delta V_2}{V_2} + \left| 1 - \frac{1}{\ln \left[\frac{V_2}{V_1} \right]} \right| \frac{\delta V_1}{V_1} \right). \quad (1.31)$$

Diamo adesso qualche consiglio pratico per determinare in maniera più indolore possibile R_x . Innanzi tutto si deve tener conto che il suo ordine di grandezza è assai elevato di conseguenza $\tau_x = R_x C_x$ in generale sarà un tempo dell'ordine dei minuti o delle ore. Si rivela assai utile, prima di aspettare un tempo esageratamente grande, od, al contrario piccolo, dare una stima di questo valore incognito. Questo può essere fatto usando la (1.30) ed aspettando ad esempio un tempo $\bar{t} \approx 20$ min. Questa stima, pur rimandando nella maggior parte dei casi intrattabile per quanto concerne gli errori da cui è affetta (se ad esempio $C_x \simeq 0.5 \mu\text{F}$, $R_x \simeq 10 \text{ G}\Omega$ allora $\tau_x \simeq 1\text{h}20\text{min}$, e quindi aspettando solo 20 min il rapporto $V_2/V_1 \simeq 1$) risulterà utile per capire il tempo ottimale da aspettare per fare una misura più precisa. Si consiglia, in linea di massima, di aspettare all'incirca una costante di tempo $\tilde{\tau}_x$ stimata precedentemente. Se si esegue subito una misura 'lunga' corrono due rischi antitetici: da una parte, questa misura pur essendo non di breve durata potrebbe risultare insufficiente per una determinazione di R_x senza errori astronomici, dall'altra, il condensatore potrebbe già essere quasi completamente scarico, ed anche in questo caso gli errori sarebbero piuttosto elevati.

2 Filtri attivi

Ci occuperemo adesso di filtri attivi, in particolare di *passa-basso*, *passa-alto* e *passa-banda*. Vista la notevole varietà di configurazioni esamineremo qui quelle più salienti. In tutti i casi noi *non* prenderemo in considerazione la resistenza interna del generatore poiché, per le misure che ci riguardano, prenderemo il canale 1 dell'oscilloscopio all'ingresso del filtro ed il canale 2 all'uscita. Per effettuare questi tipi di misure, come già accennato dovremo usare degli oscilloscopi; diamo quindi adesso alcune buone norme da seguire per l'utilizzo di questi strumenti.

1. Prima di tutto alcuni esemplari hanno una banda passante molto ampia (≈ 100 MHz), quindi sarà molto facile che possano raccattare disturbi ad alta frequenza. Per limitare questo fenomeno si potrà usare, ove previsto, il tasto "20 MHz BW Probe" che limita la banda passante a 20 MHz. Si noti che questa limitazione non è affatto restrittiva poiché i nostri operazionali hanno un $GBW \approx 3$ MHz;
2. sarà possibile usare la modalità *AC* quando tratteremo dei segnali con frequenza superiore a $\bar{\nu} \simeq 50$ Hz. In questa modalità difatti viene aggiunto un fitro passa-alto in entrata all'oscilloscopio con una frequenza di taglio di qualche decina di Hertz. Tuttavia sarà bene tenersi un po' sopra tale frequenza per non osservare effetti di taglio indesiderati. Si potrà anche trovare sperimentalmente tale frequenza;
3. su alcuni oscilloscopi sono presenti dei cursori che visualizzano sullo schermo le misure con parecchie cifre decimali. Senz'altro tali cursori faciliteranno la lettura, tuttavia si deve tener conto del limite di sensibilità dello strumento per cui, ad esempio, sarà bene considerare la mezza divisione dello strumento come errore di sensibilità, nonostante le cifre che appaiono sullo schermo si spingano molto oltre;
4. per misurare gli sfasamenti occorrerà che *entrambi i segnali abbiano media nulla*, quindi, qualora fosse presente una parte di tensione continua occorrerà eliminarla o tramite la modalità *AC* o scalibrando opportunamente il *GND* del canale interessato;
5. sempre per gli sfasamenti si potrà, nel caso si abbia un filtro invertente, invertire il canale di uscita in modo da ridurre (nella maggior parte dei casi) la distanza tra le intersezioni dei grafici dei segnale con la retta di riferimento dello strumento. Facendo così si dovrà ricordare di aggiungere (o sottrarre) un fattore π alla fase;
6. qualora si avesse bisogno di magnificare la parte centrale dello schermo si potrà azionare il tasto " $\times 10$ mag" che, come apparirà sullo schermo dilata di un fattore 10 la scala dei tempi. In questo caso l'errore sarà del 4% anziché dell'usuale 3%.

Adotteremo, nel seguito lettere corsive per le quantità complesse, mentre lettere stampate per quelle puramente reali (componenti continue).

2.1 Passa basso invertente

Innanzitutto calcoliamo l'impedenza sul ramo di reazione

$$\mathcal{Z}_f = R_2 // \mathcal{Z}_C = \frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C} = \frac{R_2}{1 + j\frac{\nu}{\nu_c}} \quad (2.1)$$

dove si è posto

$$\nu_c = \frac{1}{2\pi R_2 C} \quad (2.2)$$

si noti che, dato che utilizzeremo anche componenti in continua:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \mathcal{Z}_f = R_2 \quad (2.3)$$

cioè, come si poteva aspettare l'impedenza per correnti continue viene vista solo come la resistenza R_2 . Andiamo a svolgere i conti per vedere cosa avremo all'uscita dell'operazionale:

$$\mathcal{V}_{\text{out}} = -V_{\text{off}} - \mathcal{I}_f \mathcal{Z}_f \quad (2.4)$$

dunque, dalla legge dei nodi abbiamo

$$\mathcal{I}_f = \mathcal{I}_{\text{in}} - i_{\text{bias}} = \frac{\mathcal{V}_{\text{in}} + V_{\text{off}}}{R_1} - i_{\text{bias}} \quad (2.5)$$

e dunque usando la (2.4) si ha:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{\text{out}} &= -V_{\text{off}} + \left(i_{\text{bias}} - \frac{V_{\text{off}}}{R_1} \right) \frac{R_2}{1 + j\frac{\nu}{\nu_c}} - \mathcal{V}_{\text{in}} \frac{R_2}{R_1} \frac{1}{1 + j\frac{\nu}{\nu_c}} = \\ &\stackrel{(2.3)}{=} -V_{\text{off}} + \left(i_{\text{bias}} - \frac{V_{\text{off}}}{R_1} \right) R_2 - \mathcal{V}_{\text{in}} \frac{R_2}{R_1} \frac{1}{1 + j\frac{\nu}{\nu_c}}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

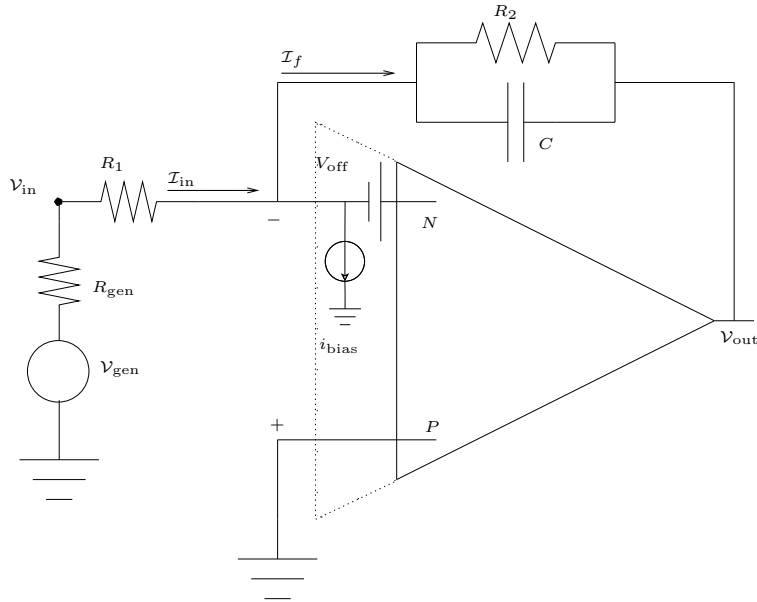


Figura 2.1: Filtro passa basso invertente

Si noti come la V_{off} venga amplificata con un guadagno di un non invertente; introducendo quindi

$$G_{NI} := \frac{R_1 + R_2}{R_1} \quad (2.7a)$$

$$G_I := -\frac{R_2}{R_1} \quad (2.7b)$$

si ottiene finalmente

$$\mathcal{V}_{\text{out}} = -V_{\text{off}}G_{NI} + i_{\text{bias}}R_2 + \mathcal{V}_{\text{in}}G_I \frac{1}{1 + j\frac{\nu}{\nu_c}}. \quad (2.8)$$

Tutto questo avviene se ci si trova sotto la condizione

$$\nu |G_I| \ll GBW \quad (2.9)$$

vale a dire se il prodotto frequenza per guadagno rimane considerevolmente minore del noto prodotto *guadagno per banda passante*. Adesso, prima di procedere, occorrerà chiarire una questione epistemologica: dalla (2.8) si vede che l'uscita del filtro non sarà una corrente alternata, ma sarà comprensiva di un gradino di tensione continua offerto dalla corrente di bias e dalla tensione di offset. Tuttavia, volendosi misurare ampiezza e sfasamento del segnale d'uscita (rispetto a quello d'ingresso) occorrerà sottrarre a \mathcal{V}_{out} le componenti in continua. Per fare ciò abbiamo due modi di operare sui nostri oscilloscopi: il primo è quello di centrare manualmente il segnale del canale 2 facendo in modo che abbia media nulla entro l'errore dello strumento²; altrimenti potremmo usare l'oscilloscopio in *AC* stando ben attenti al fatto, che così facendo viene aggiunto in parallelo un condensatore che, insieme alla resistenza di ingresso dello strumento forma un filtro passa alto con frequenza di taglio intorno alla decina di Hertz. Su alcuni modelli ci si accorge che per frequenze superiori a $\nu_o = 50$ Hz il segnale non viene praticamente attenuato, quindi questo metodo può essere usato in tutta tranquillità. Se invece si deve scendere sotto queste frequenze, l'unica possibilità è fare manualmente questa correzione. Detto ciò andiamo a calcolare la funzione di trasferimento del filtro: per quanto appena detto ed in base alla (2.8) si avrà:

$$\mathcal{A}(\nu) = -\frac{R_2}{R_1} \frac{1}{1 + j\frac{\nu}{\nu_c}}. \quad (2.10)$$

da questa discende direttamente:

$$A(\nu) = |\mathcal{A}| = \frac{R_2}{R_1} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)^2}} \quad (2.11a)$$

$$\Delta\phi_{\mathcal{A}}(\nu) = \arg \mathcal{A} = \pi - \arctan\left(\frac{\nu}{\nu_c}\right). \quad (2.11b)$$

Scriviamo la (2.11a) in in decibel:

$$|\mathcal{A}|(\nu)[\text{dB}] = 20 \log_{10} \left[\frac{R_2}{R_1} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)^2}} \right]. \quad (2.12)$$

In particolare possiamo notare che

$$|\mathcal{A}|(0) = \frac{R_2}{R_1} \quad (2.13a)$$

$$|\mathcal{A}|(0) - |\mathcal{A}|(\nu_c) \simeq -3\text{dB}. \quad (2.13b)$$

²si faccia attenzione, in questo caso a effettuare questa correzione *ogniqualevolta* si cambi scala del canale 2.

La (2.13a) suggerisce un metodo pratico di misura del guadagno massimo (detto semplicemente *guadagno*): usare la corrente continua. In questo caso si sfrutta tutta la precisione dei multimetri diminuendo così l'errore. In particolare collegheremo un generatore di tensione continua all'ingresso del filtro poi manderemo una tensione $V_{\text{gen},1}$ stando attenti a non mandare in saturazione l'amplificatore e ne prenderemo la tensione d'uscita $V_{\text{out},1}$, poi mettendo a terra l'ingresso "–" ne registreremo la tensione d'uscita $V_{\text{out},0}$ (corrispondente alla V_{off} per il corrispondente guadagno). A questo punto il guadagno in continua sarà dato da

$$|\mathcal{A}|(0) = \left| \frac{V_{\text{out},1} - V_{\text{out},0}}{V_{\text{gen},1}} \right|. \quad (2.14)$$

Si noti che a causa del fatto che il filtro è invertente la fase risulta maggiore di un fattore π rispetto ad un filtro passa basso passivo. Per agevolare la lettura sull'oscilloscopio si potrà attivare la funzione di inversione del secondo canale, ricordando poi di tenere conto di questa operazione nell'elaborazione dati. Per determinare la frequenza di taglio, oltre che graficamente potremo procedere col metodo del 70%. In questo caso non si dovrebbero avere variazioni del canale di ingresso, ad ogni modo sarà buona norma controllare sull'oscilloscopio che anche il segnale su questo canale non cambi ampiezza. Se viene richiesto di costruire un filtro passa basso con una frequenza di taglio ν_c ed un guadagno $G = 20 \log_{10} x$ occorrerà una scelta adeguata di componenti. Abbiamo due equazioni e tre variabili: R_1 , R_2 e C , avremo quindi tre modi di scegliere i valori dei componenti:

$$\begin{cases} R_1 = \frac{1}{2\pi\nu_c GC} \\ R_2 = \frac{1}{2\pi\nu_c C} \end{cases} \quad \begin{cases} C = \frac{1}{2\pi\nu_c R_2} \\ R_1 = G^{-1} R_2 \end{cases} \quad \begin{cases} C = \frac{1}{2\pi\nu_c G R_1} \\ R_2 = G R_1. \end{cases} \quad (2.15)$$

2.2 Misura di un parallelo $C_x // R_x$ incognito

Con riferimento alla figura 2.1 si supponga di avere una scatola con una resistenza ed un condensatore incogniti in parallelo, da usare come C_2 ed R_2 ; supponiamo inoltre che venga richiesto di montare un filtro passa basso con un guadagno di x dB. Vediamo un modo di procedere. Innanzi tutto potremo, con un multimetro misurare la resistenza R_x , poichè, una volta caricato, il condensatore non influirà sulla misura. Fatto ciò si dovrà scegliere R_1 in modo che

$$x = 20 \log_{10} \left(\frac{R_x}{R_1} \right) \quad (2.16)$$

quindi, almeno approssimativamente

$$R_1 = R_x 10^{(-\frac{x}{20})}. \quad (2.17)$$

Abbiamo dunque realizzato il nostro filtro. Adesso non ci resta che controllare il guadagno (magari in continua) e misurare la frequenza di taglio ν_c (metodo grafico o del 70%) quindi seguirà:

$$C_x = \frac{1}{2\pi\nu_c R_x}. \quad (2.18)$$

2.3 Passa alto invertente

Procediamo in modo analogo al precedente, questa volta calcolando l'impedenza del ramo d'ingresso:

$$Z_{\text{in}} = Z_C + R_1 = R_1 + \frac{1}{j\omega C} = R_1 \left(1 - j \frac{\nu_c}{\nu} \right) \quad (2.19)$$

dove abbiamo posto

$$\nu_c = \frac{1}{2\pi R_1 C} \quad (2.20)$$

questa volta, invece per le componenti continue avremo:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |\mathcal{Z}_{in}| = +\infty \quad (2.21)$$

vale a dire, le correnti eventuali correnti continue erogate dal generatore non proseguono, ovviamente, a causa del condensatore. Per la legge dei nodi questa volta scriviamo:

$$\mathcal{I}_f = \mathcal{I}_{in} - i_{bias} = \frac{\mathcal{V}_{in} + V_{off}}{\mathcal{Z}_{in}} - i_{bias}. \quad (2.22)$$

Ricordando la (2.4) (questa volta $\mathcal{Z}_f = R_2$) possiamo scrivere:

$$\mathcal{V}_{out} = -V_{off} - \left(\frac{\mathcal{V}_{in}}{R_1 + j\omega C} + \frac{V_{off}}{R_1 + j\omega C} - i_{bias} \right) R_2 \stackrel{(2.21)}{=} -V_{off} + i_{bias} R_2 - \frac{R_2}{R_1} \frac{1}{1 - j\frac{\nu_c}{\nu}}. \quad (2.23)$$

quindi usando le (2.7) possiamo scrivere tutto come:

$$\boxed{\mathcal{V}_{out} = -V_{off} + i_{bias} R_2 + \mathcal{V}_{in} G_I \frac{1}{1 - j\frac{\nu_c}{\nu}}}. \quad (2.24)$$

Anche in questo caso perché la compensazione a polo dominante non infici le misure bisognerà che valga la condizione

$$\nu |G_I| \ll GBW. \quad (2.25)$$

Analizzando la (2.24) si nota che questa volta la tensione d'offset, sempre presente all'uscita, non viene però amplificata, questo appunto perché ci troviamo in una situazione passa alto. Anche la tensione di bias, avrà la sua parte all'uscita; quindi per misurare frequenza e sfasamento valgono i discorsi fatti in precedenza: possiamo passare in modalità *AC* (purché ci si trovi con $\nu > 50$ Hz e fare tutte le misure che vogliamo. Si faccia però attenzione al fatto che, variando la frequenza del generatore, cambierà l'impedenza d'ingresso \mathcal{Z}_{in} quindi occorrerà tenerne conto per effettuare misure corrette. Questo fatto gioca un ruolo molto importante nella misura della frequenza di taglio col metodo del 70%: in questo caso, variando la frequenza, occorrerà mantenere il canale

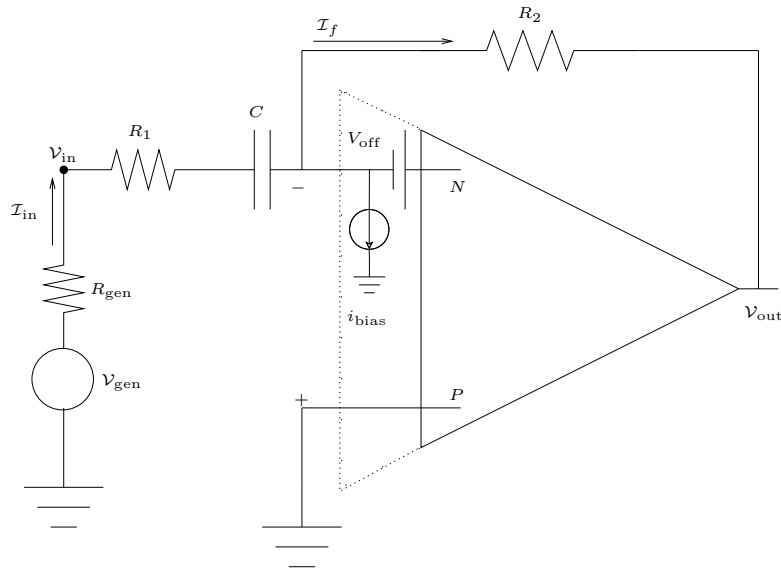


Figura 2.2: Filtro passa alto invertente

1 costante andando ad effettuare correzioni sull'ampiezza del segnale d'ingresso. Fatte queste considerazioni ed in base alla (2.24) avremo:

$$\mathcal{A}(\nu) = -\frac{R_2}{R_1} \frac{1}{1 - j\frac{\nu_c}{\nu}} \quad (2.26)$$

ovvero, per quanto riguarda ampiezza e sfasamento:

$$A(\nu) = |\mathcal{A}| = \frac{R_2}{R_1} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\nu_c}{\nu}\right)^2}} \quad (2.27a)$$

$$\Delta\phi_{\mathcal{A}}(\nu) = \arg \mathcal{A} = \pi + \arctan\left(\frac{\nu_c}{\nu}\right). \quad (2.27b)$$

Scriviamo la (2.27a) usando i decibel:

$$|\mathcal{A}|(\nu)[\text{dB}] = \frac{R_2}{R_1} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\nu_c}{\nu}\right)^2}}. \quad (2.28)$$

Da questa possiamo renderci conto di che

$$\lim_{\nu \rightarrow +\infty} |\mathcal{A}|(\nu) = \frac{R_2}{R_1} \quad (2.29a)$$

$$\lim_{\nu \rightarrow +\infty} |\mathcal{A}|(\nu) - |\mathcal{A}|(\nu_c) \simeq -3\text{dB}. \quad (2.29b)$$

Per misurare il guadagno massimo (o *guadagno*), la (2.29a) ci suggerirebbe di aumentare ad oltranza la frequenza del generatore; tuttavia la (2.25), ci dice che non possiamo abusare di tale aumento per non incappare in spiacevoli effetti di taglio. Un procedura che si potrà seguire è la seguente: partendo da una frequenza ragionevolmente sopra quella di taglio, si osservano i due canali sull'oscilloscopio, avendo cura di mantenere il canale di ingresso ad un valore costante. Man mano aumentiamo la frequenza fino a quando non vediamo il canale d'uscita stabilizzarsi ad un valore. Prendiamo quello come valore con cui calcolare il guadagno. Dopo averlo calcolato sarà buona norma andare a verificare che la (2.25) continui a valere. Anche in questo caso qualora venga richiesto di montare un filtro passa alto con un guadagno assegnato $G = 20 \log_{10} x$ ed una frequenza di taglio ν_c , in virtù del grado di libertà che abbiamo potremo scegliere i componenti nei seguenti modi:

$$\begin{cases} R_1 = \frac{1}{2\pi\nu_c C} \\ R_2 = \frac{G}{2\pi\nu_c C} \end{cases} \quad \begin{cases} C = \frac{G}{2\pi\nu_c R_2} \\ R_1 = G^{-1} R_2 \end{cases} \quad \begin{cases} C = \frac{1}{2\pi\nu_c R_1} \\ R_2 = G R_1. \end{cases} \quad (2.30)$$

2.4 Misura di una serie C_x, R_x incognita

Con riferimento alla figura 2.3 si consideri di avere una scatola con una serie formata da una resistenza ed un condensatore incogniti da usarsi al posto di C_1 ed R_1 ; si supponga inoltre che vegna richiesto di montare, con questi componenti un filtro di guadagno di x dB. Vediamo come possiamo fare per risolvere il problema: innanzi tutto notiamo che non possiamo usare un multimetro dato che abbiamo un condensatore in serie. Allora per esempio potremo scegliere una resistenza \tilde{R}_2 da mettere nel ramo di reazione. Con questa resistenza potremo misurarci il guadagno, andando a frequenza sufficientemente alte (chiariremo meglio in seguito questo aspetto). Supponiamo di aver fatto questa misura ad una frequenza $\tilde{\nu}$ e di aver misurato un rapporto di ampiezze

$$|\tilde{\mathcal{A}}| \simeq \frac{\tilde{R}_2}{R_x}. \quad (2.31)$$

Dopo aver verificato la condizione $\tilde{\nu} |\tilde{\mathcal{A}}| \ll GBW$ possiamo procedere a determinare R_x :

$$R_x = \frac{\tilde{R}_2}{|\tilde{\mathcal{A}}|}. \quad (2.32)$$

Adesso potremo scegliere una resistenza R_2 che soddisfi alle richieste che avevamo:

$$R_2 = R_x 10^{\frac{\alpha}{20}}. \quad (2.33)$$

Quindi potremo andare a trovare la frequenza di taglio con metodo grafico o col metodo del 70%. Si noti adesso che comunque vada la seguente condizione dovrà essere rispettata:

$$\frac{\tilde{R}_2}{R_x} \frac{\nu_c}{2\pi R_x C_x} < \frac{\tilde{R}_2}{R_x} \frac{\tilde{\nu}}{2\pi R_x C_x} \ll GBW \quad (2.34)$$

per evitare gli effetti del filtro passa basso intrinseco dell'operazionale; questo ci insegna che sarà conveniente scegliere \tilde{R}_2 sufficientemente piccola. Analizziamo qualitativamente cosa sarebbe successo se, al contrario avessimo scelto questo componente di un valore troppo elevato: il guadagno sarebbe stato elevato, quindi la banda passante dell'operazionale bassa. Se tale banda passante fosse venuta inferiore alla frequenza di taglio ν_c , comunque si fosse cercato di misurare quest'ultima si sarebbe incappato nel pernicioso effetto passa basso dell'amplificatore e quindi non saremmo riusciti a trovare la zona piatta. Con questo piccolo accorgimento potremo, dalla misura di ν_c possiamo ricavare la capacità incognita:

$$C_x = \frac{1}{2\pi\nu_c R_x} = \frac{|\tilde{A}|}{2\pi\nu_c \tilde{R}_2}. \quad (2.35)$$

2.5 Passa banda invertente

Procediamo ormai come di consueto, andando a scrivere l'impedenza nei vari rami:

$$Z_{in} = Z_{C_1} + R_1 = R_1 + \frac{1}{j\omega C_1} = R_1 \left(1 - j\frac{\nu_L}{\nu}\right) \quad (2.36a)$$

$$Z_f = R_2 // Z_{C_2} = \frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C_2} = \frac{R_2}{1 + j\frac{\nu}{\nu_H}}. \quad (2.36b)$$

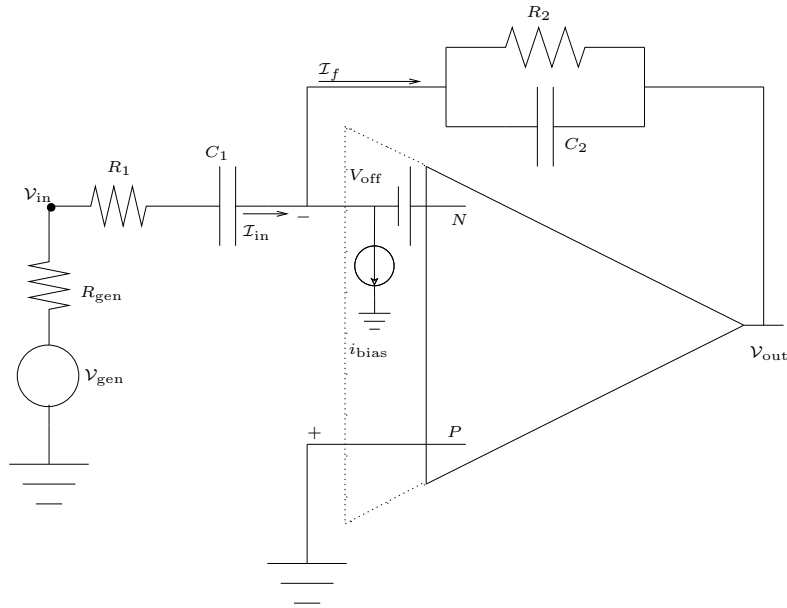


Figura 2.3: Filtro passa banda invertente

abbiamo posto in queste espressioni

$$\nu_H = \frac{1}{2\pi R_2 C_2} \quad (2.37a)$$

$$\nu_L = \frac{1}{2\pi R_1 C_1} \quad (2.37b)$$

che sono rispettivamente la frequenza di taglio *superiore*, tagliata della parte *passa basso* e quella *inferiore* tagliata dalla parte *passa alto*³. Si faccia molta cautela a non invertire i componenti nei due rami di reazione; se ciò dovesse succedere, il filtro non farà passare alcun segnale. Andiamo adesso a trovarci i limiti di queste impedenze in continua, cosa già fatta precedentemente:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \mathcal{Z}_f = R_2 \quad (2.38a)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |\mathcal{Z}_{in}| = +\infty. \quad (2.38b)$$

Applichiamo adesso la legge dei nodi e troviamo:

$$\mathcal{I}_f = \mathcal{I}_{in} - i_{bias} = \frac{\mathcal{V}_{in} + V_{off}}{\mathcal{Z}_{in}}. \quad (2.39)$$

Usiamo adesso la (2.4) trovando:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{out} &= -V_{off} - \frac{R_2}{R_1} \frac{1}{1 - j\frac{\nu_L}{\nu}} \frac{1}{1 + j\frac{\nu}{\nu_H}} (\mathcal{V}_{in} + V_{off}) + i_{bias} \frac{R_2}{1 + j\frac{\nu}{\nu_H}} = \\ &\stackrel{(2.38)}{=} -V_{off} - \frac{R_2}{R_1} \frac{1}{1 - j\frac{\nu_L}{\nu}} \frac{1}{1 + j\frac{\nu}{\nu_H}} \mathcal{V}_{in} + i_{bias} R_2. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Quindi come espressione finale, utilizzando le (2.7) abbiamo

$$\boxed{\mathcal{V}_{out} = -V_{off} + i_{bias} R_2 + \mathcal{V}_{in} G_I \frac{1}{1 - j\frac{\nu_L}{\nu}} \frac{1}{1 + j\frac{\nu}{\nu_H}}}. \quad (2.41)$$

Dovrà continuare a valere la relazione:

$$\nu |G_I| \ll GBW \quad (2.42)$$

inoltre per avere tra le due frequenze di taglio una zona ove \mathcal{A} rimane costante entro gli errori di sensibilità dello strumento occorre che $\nu_H \ll \nu_L$; difatti per effettuare una misura di guadagno converrà variando la frequenza (sempre facendo in modo che il canale d'ingresso si mantenga costante) considerare il range entro il quale il canale d'uscita si mantiene costante, massimo per l'appunto. Si utilizzerà questo valore per calcolare il guadagno. Ricaviamoci adesso ampiezza e sfasamento della funzione di trasferimento:

$$A(\nu) = |\mathcal{A}| = \frac{R_2}{R_1} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\nu_L}{\nu}\right)^2}} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\nu}{\nu_H}\right)^2}} \quad (2.43a)$$

$$\Delta\phi_{\mathcal{A}}(\nu) = \arg \mathcal{A} = \pi + \arctan\left(\frac{\nu_L}{\nu}\right) - \arctan\left(\frac{\nu}{\nu_H}\right). \quad (2.43b)$$

La (2.43a) espressa in decibel sarà

$$|\mathcal{A}|(\nu)[dB] = \frac{R_2}{R_1} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\nu_L}{\nu}\right)^2}} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\nu}{\nu_H}\right)^2}}. \quad (2.44)$$

³Caveat: su buona parte dei testi i ruoli di dei pedici H ed L sono invertiti.

Per montare un filtro passa banda bisognerà scegliere oculatamente i componenti: in particolare, se vengono assegnati il guadagno $\log_{10}\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = x$ e le frequenze di taglio ν_H e ν_L si dovrà avere scegliere R_1 , R_2 , C_1 e C_2 in maniera che:

$$\begin{cases} \nu_H = \frac{1}{2\pi R_2 C_2} \\ \nu_L = \frac{1}{2\pi R_1 C_1} \\ 10^{\frac{x}{20}} = \frac{R_2}{R_1}. \end{cases} \quad (2.45)$$

Adesso notiamo che, in generale, questo sistema, ammetterà un insieme di soluzioni al variare di un parametro che potrà essere opportunamente scelto tra i valori dei suscritti componenti. Riportiamo qui di seguito tutti e quattro i possibili casi:

$$\begin{cases} C_1 = G \frac{\nu_H}{\nu_L} C_2 \\ R_1 = \frac{1}{2\pi G \nu_H C_2} \\ R_2 = \frac{1}{2\pi \nu_H C_2} \end{cases} \begin{cases} C_2 = G^{-1} \frac{\nu_L}{\nu_H} C_1 \\ R_1 = \frac{1}{2\pi \nu_L C_1} \\ R_2 = \frac{G}{2\pi \nu_L C_1} \end{cases} \begin{cases} R_1 = G^{-1} R_2 \\ C_1 = \frac{G}{2\pi \nu_L R_2} \\ C_2 = \frac{1}{2\pi \nu_H R_2} \end{cases} \begin{cases} R_2 = G R_1 \\ C_1 = \frac{1}{2\pi \nu_L R_1} \\ C_2 = \frac{1}{2\pi \nu_H G R_1} \end{cases}. \quad (2.46)$$

dove abbiamo indicato con $G = 10^{\frac{x}{20}}$, ovvero il guadagno.

2.6 Filtri non invertenti

Potrebbe essere richiesto di montare un filtro con un dato guadagno $x = 20 \log_{10} G$ ed una data frequenza di taglio ν_c usando esclusivamente operazionali in configurazione *non invertente*. In questo caso si potrà montare un normale filtro passivo anticipato o seguito da un operazionale in configurazione non invertente. Ovviamente si dovrà fare in modo che

$$G_{NI} = G \quad (2.47)$$

con una scelta accurata delle resistenze, e che

$$\nu_c = \frac{1}{2\pi C R}. \quad (2.48)$$

Come detto si potrà scegliere se anteporre il filtro all'amplificatore o viceversa; le principali differenze stanno nelle impedenze di ingresso e di uscita del filtro completo; distinguiamo i due casi: se il filtro passivo precede l'amplificatore avremo che l'impedenza di ingresso sarà in serie con quella del generatore (per questo nel caso del passa-alto si dovrà sempre monitorare il canale d'ingresso), mentre l'uscita avrà impedenza trascurabile. Viceversa se è l'amplificatore a precedere il filtro passivo avremo l'impedenza in ingresso al filtro costante e trascurabile, mentre quella di uscita sarà in generale funzione della frequenza. Discutiamo adesso brevemente gli effetti di V_{off} e di i_{bias} su tali filtri: esse daranno in generale una componente continua. Trascuriamo qui il contributo della corrente di bias nel ramo non invertente visto che con l'oscilloscopio prenderemo misure al netto di tensioni continue. Più specificamente

1. per il **passa-basso con filtro passivo seguito da amplificatore**, questa componente continua verrà amplificata secondo il guadagno non invertente; avremo:

$$\mathcal{V}_{\text{out}} = (\mathcal{V}_{\text{gen}} \mathcal{A}^\downarrow - V_{\text{off}}) G_{NI} + i_{\text{bias}} R_2; \quad (2.49)$$

2. per il **passa-alto con filtro passivo seguito da amplificatore**, questa componente verrà amplificata come nel caso precedente; avremo:

$$\mathcal{V}_{\text{out}} = (\mathcal{V}_{\text{gen}} \mathcal{A}^\uparrow - V_{\text{off}}) G_{NI} + i_{\text{bias}} R_2; \quad (2.50)$$

3. per il **passa-basso con amplificatore seguito da filtro passivo**, questa componente, in uscita all'amplificatore verrà lasciata passare dal filtro attivo; avremo⁴:

$$\mathcal{V}_{\text{out}} = (\mathcal{V}_{\text{gen}} \mathcal{A}^\downarrow - V_{\text{off}}) G_{NI} + i_{\text{bias}} R_2; \quad (2.51)$$

⁴questa espressione risulta formalmente identica a quella del passa-basso con filtro passivo seguito da amplificatore, la ragione sta nel fatto che abbiamo trascurato la corrente di bias nel ramo invertente.

4. per il **passa-alto con amplificatore seguito da filtro passivo**, questa componente verrà tagliata dal filtro quindi avremo semplicemente:

$$\mathcal{V}_{\text{out}} = \mathcal{V}_{\text{gen}} G_{NI} \mathcal{A}^\dagger; \quad (2.52)$$

dove abbiamo usato nelle precedenti equazioni:

$$\mathcal{A}^\downarrow = \frac{1}{1+j\frac{\nu}{\nu_c}} \quad (2.53a)$$

$$\mathcal{A}^\uparrow = \frac{1}{1-j\frac{\nu_c}{\nu}}. \quad (2.53b)$$

Per quanto riguarda il passa-banda non invertente sarà conveniente montare in ingresso il passa-basso passivo, poi l'amplificatore, poi il passa-alto passivo, in modo da tagliare i contributi in continua, ricordando le nostre convenzioni avremo:

$$\mathcal{V}_{\text{out}} = \mathcal{V}_{\text{gen}} G_{NI} \frac{1}{1+j\frac{\nu}{\nu_H}} \frac{1}{1-j\frac{\nu_L}{\nu}}. \quad (2.54)$$