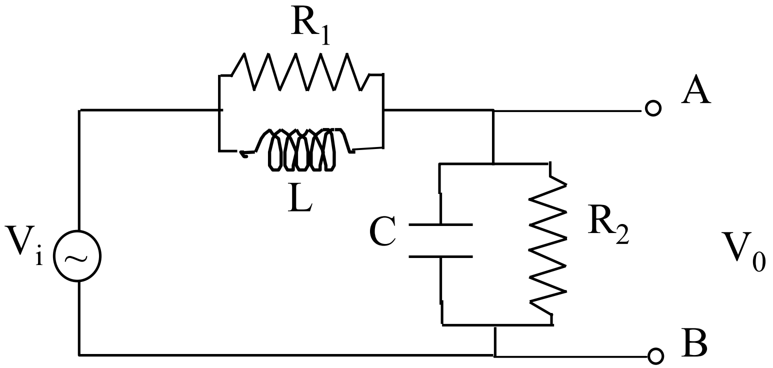
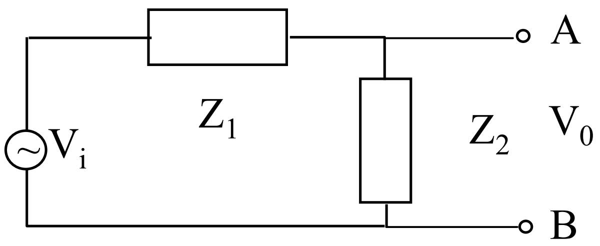
Esercizi

1)Il circuito in figura è alimentato da un generatore di fem alternata $V_i = v_i \cos\omega t$. Corrispondentemente, ai capi del parallelo formato da C ed R_2 sarà presente una ddp V_0 esprimibile come $V_0 = v_0 \cos(\omega t + \varphi)$.
Si calcolino, sulla base degli elementi del circuito dato, i valori dei parametri v_0 e φ.
Dati: v_i= 1 V, $\omega = 2\pi\, 10^3$ rad s^{-1}, R_1= 1 KΩ, R_2= 500 Ω, L= 100 mH, C=1 μF.





$$V_0 = \frac{V_i}{Z_1 + Z_2} Z_2 = \frac{V_i}{\frac{Z_1}{Z_2} + 1}$$

$$\frac{1}{Z_2} = \frac{1}{R_2} + j\omega C$$

$$\frac{1}{Z_1} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{j\omega L} = \frac{R_1 + j\omega L}{j\omega R_1 L}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} + 1 = \frac{j\omega R_1 L}{R_1 + j\omega L}\left(\frac{1}{R_2} + j\omega C\right) + 1 = \frac{j\omega L \frac{R_1}{R_2} - \omega^2 LCR_1 + R_1 + j\omega L}{R_1 + j\omega L} = \frac{R_1(1 - \omega^2 LC) + j\omega L(1 + \frac{R_1}{R_2})}{R_1 + j\omega L}$$

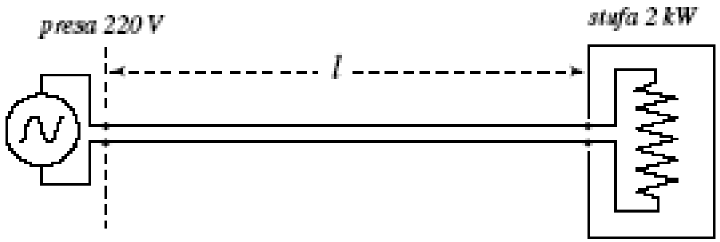
$$V_0 = V_i \frac{R_1 + j\omega L}{R_1(1 - \omega^2 LC) + j\omega L(1 + \frac{R_1}{R_2})}$$

$$\left|\frac{a + jb}{c + jd}\right| = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2}} \qquad \varphi = \mathrm{arctg}\frac{b}{a} - arctg\frac{d}{c}$$

$$v_0 = v_i \sqrt{\frac{R_1^2 + \omega^2 L^2}{R_1^2(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 L^2 (1 + \frac{R_1}{R_2})^2}} = 338\ mV$$

$$\varphi = arctg\frac{\omega L}{R_1} - arctg\frac{\omega L(1 + \frac{R_1}{R_2})}{R_1(1 - \omega^2 LC)} = 64.78\ ° = 1.13 \text{ rad}$$

2) Si dispone di una stufa elettrica di potenza nominale pari a 2kW, schematizzabile come una resistenza di valore tale che se si applica ad essa una tensione con V_{eff}=220 V (la tensione di rete) si ottiene una dissipazione di 2 kW. Si vuol far funzionare la stufa ad una distanza l =10 m dalla presa di corrente e si desidera che sul cavo di collegamento sia dissipata una potenza <0.1% di quella dissipata dalla stufa. Si determini la sezione minima del cavo in rame ($\rho_{Cu}=1.7\cdot10^{-6}\ \Omega$ cm) che si deve usare per ottenere il risultato voluto.



Soluzione:

Il cavo di collegamento e' composto da due fili lunghi 10m ciascuno su cui si vuole P_c<0.1% 2kW= 2 W

$$R_c = \rho_{Cu}\frac{2l}{S}$$

$P_c = I_{eff}^2 R_c$ e da $P_c < 2W \rightarrow I_{eff}^2 R_c < 2$ W

$$R_c < \frac{P_c}{I_{eff}^2}$$

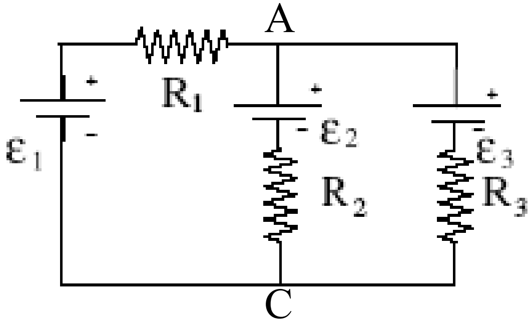
$$\rho_{Cu}\frac{2l}{S} < \frac{P_c}{I_{eff}^2} \quad \rightarrow \quad S > S_0 = I_{eff}^2 \rho_{Cu}\frac{2l}{P_c}$$

Per la stufa e' $\overline{W} = V_{eff} I_{eff} \rightarrow I_{eff} = \dfrac{\overline{W}}{V_{eff}} = \dfrac{2\cdot10^3 W}{220V} = 9.09A$

La corrente nel cavo e' la stessa I_{eff}, $S_0 = I_{eff}^2 \rho_{Cu}\dfrac{2l}{P_c} = (9.09A)^2(1.7\cdot10^{-6}\Omega cm)\dfrac{2\cdot10^3 cm}{2W} = 0.1405 cm^2 = 14.05 mm^2$

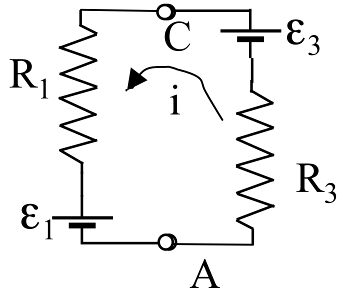
$$r_{filo} = \left(\frac{S_0}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} = 2mm \quad \phi_{\text{filo}} = 4mm \quad \text{S} > 14\ \text{mm}^2$$

3) Dato il circuito in figura, calcolare la ddp ai capi della resistenza R_2.



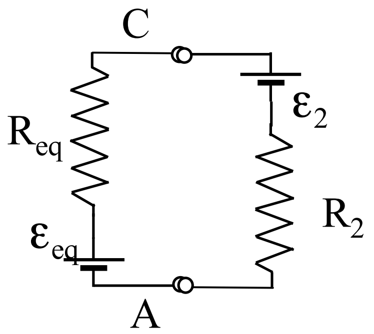
Dati numerici: ε_1=10 V, ε_2=7 V, ε_3=7 V, R_1=5 Ω, R_2=10 Ω, R_3=10 Ω

Circuito equivalente tra A e C: $V_{AC} = \varepsilon_1 + iR_1$ $\qquad i = \dfrac{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}{R_1 + R_3}$



$$V_{AC} = \varepsilon_1 + R_1 \frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}{R_1 + R_3} = \frac{\cancel{\varepsilon_1 R_1} + \varepsilon_1 R_3 + \varepsilon_3 R_1 - \cancel{\varepsilon_1 R_1}}{R_1 + R_3}$$

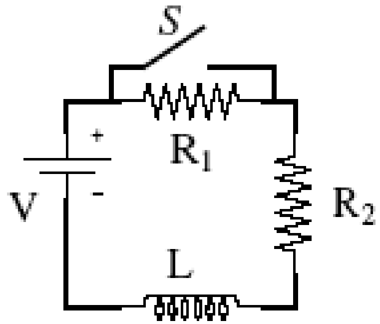
$$V_{AC} = \varepsilon_{eq} = \frac{\varepsilon_1 R_3 + \varepsilon_3 R_1}{R_1 + R_3} \qquad R_{eq} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}$$



$$V_{R_2} = \frac{V_{eq} - \varepsilon_2}{R_{eq} + R_2} R_2 = \frac{\dfrac{\varepsilon_1 R_3 + \varepsilon_3 R_1}{R_1 + R_3} - \varepsilon_2}{\dfrac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + R_2} R_2 = \frac{\varepsilon_1 R_3 + \varepsilon_3 R_1 - \varepsilon_2 (R_1 + R_3)}{R_1 R_3 + R_2 (R_1 + R_3)} R_2$$

Se $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$, $R_2 = R_3$

$$V_{R_2} = \frac{\varepsilon_1 R_2 + \varepsilon_2 R_1 - \varepsilon_2 (R_1 + R_2)}{R_1 R_2 + R_2 (R_1 + R_2)} R_2 = \frac{\varepsilon_1 R_2 - \varepsilon_2 R_2}{2 R_1 R_2 + R_2^2} R_2 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{1 + 2\dfrac{R_1}{R_2}} = \frac{3}{2} V$$



4) Il circuito mostrato e' in funzione da un tempo sufficiente da aver raggiunto una condizione praticamente stazionari, con l'interruttore S aperto. Ad un certo Istante l'interruttore viene chiuso, cortocircuitando istantaneamentela resistenza R_1. Si determini e si risolva l'equazione del circuito in queste nuove condizioni. Si tracci un grafico qualitativo dell'andamento della corrente nel circuito, calcolandone il nuovo valore di regime e dopo quanto tempo dalla chiusura di S la corrente arriva la valore di regime ±1%.
Dati numerici: V=5 V, R_1=100 Ω, R_2=150 Ω, L=200 mH

Equazione del circuito $R_1 I + R_2 I = V - L\frac{dI}{dt}$ $\quad (R_1 + R_2)I + L\frac{dI}{dt} = V$ $\quad \mathrm{I} + \frac{\mathrm{L}}{R_1 + R_2}\frac{dI}{dt} = \frac{V}{R_1 + R_2}$

ponendo $\tau = \frac{L}{R_1 + R_2}$ $\quad \mathrm{I_m} = \frac{V}{R_1 + R_2}$ si ha : $I + \tau\frac{dI}{dt} = I_m$ $\quad I - I_m = -\tau\frac{dI}{dt}$ $\quad \frac{dI}{I - I_m} = -\frac{dt}{\tau}$

integrando e':

$$\ln(I - I_m) = -\frac{t}{\tau} + \cos t \quad \rightarrow \quad I(t) = I_m(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

con S aperto la corrente raggiunge il valore asintotico $\mathrm{I_m} = \frac{V}{R_1 + R_2} = 20mA$ $\quad \tau = \frac{\mathrm{L}}{R_1 + R_2} = 0.8ms$

Quando si chiude S si cortocircuita R_1. A regime scorrera' una corrente

$$I_m^{'} = \frac{V}{R_2} = 33mA > I_m \qquad \tau^{'} = \frac{L}{R_2} = 1.3ms$$

L'equazione del circuito e' adesso: $$R_2 I + L\frac{dI}{dt} = V \qquad I + \frac{L}{R_2}\frac{dI}{dt} = \frac{V}{R_2}$$

sviluppando e integrando come prima si ha: $$\ln(I - I_m^{'}) = -\frac{t}{\frac{L}{R_2}} + \cos t \qquad I - I_m^{'} = e^{-(\frac{t}{\tau} + \cos t)}$$

ma ora e' I(0)=I_m $$I(0) = I_m^{'} + e^{\cos t} = I_m \quad \rightarrow \quad e^{\cos t} = I_m - I_m^{'} \qquad I - I_m^{'} = (I_m - I_m^{'})e^{-\frac{t}{\tau^{'}}}$$

$$I(t) = I_m e^{-\frac{t}{\tau^{'}}} + I_m^{'}(1 - e^{-\frac{t}{\tau^{'}}})$$

Si chiede di trovare t=t* per cui I(t*)=0.99 $I_m^{'}$ $$I_m e^{-\frac{t^*}{\tau^{'}}} + I_m^{'}(1 - e^{-\frac{t^*}{\tau^{'}}}) = 0.99 I_m^{'}$$

$$(I_m - I_m^{'})e^{-t^*/\tau^{'}} = (0.99 - 1)I_m^{'} \qquad e^{-t^*/\tau^{'}} = \frac{0.01 I_m^{'}}{I_m^{'} - I_m} \qquad -\frac{t^*}{\tau^{'}} = \ln\frac{0.01}{1 - \frac{I_m}{I_m^{'}}} = \ln\frac{0.01}{1 - \frac{V}{R_1 + R_2}\frac{R_2}{V}} = \ln(0.01\frac{R_1 + R_2}{R_1})$$

$$t^* = -\frac{L}{R_2}\ln(0.01\frac{R_1 + R_2}{R_1}) = 4.9ms \qquad 3\tau^{'}$$