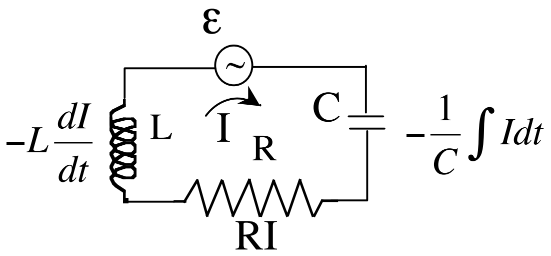
Correnti alternate

Lezioni disponibili su **http://hep.fi.infn.it/FOC/lezespfisIIA.htm**

In condizioni quasi stazionarie (tempo impiegato dai segnali elettromagnetici per attraversare il circuito, piccolo rispetto alle variazioni di densita' di carica e corrente) un circuito RLC e' descritto da:



$$\varepsilon - L\frac{dI}{dt} - \frac{1}{C}\int Idt = RI$$

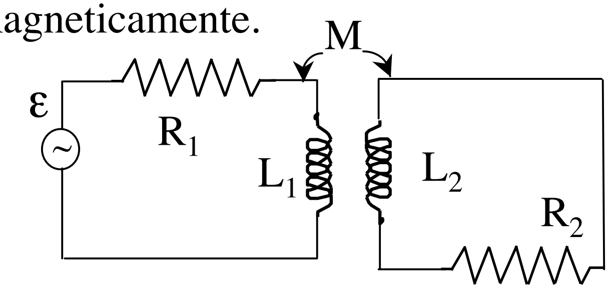
$$L\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}\int Idt + RI = \varepsilon$$

Equazione integro-differenziale a coefficienti costanti

equivalente a

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{1}{C}I + R\frac{dI}{dt} = \frac{d\varepsilon}{dt}$$

Nel caso di un circuito a piu' maglie, si possono scrivere equazioni analoghe alla precedente per ogni maglia e le corrispondenti relazioni per le correnti confluenti nei nodi del circuito.
Si hanno equazioni lineari dello stesso tipo anche nel caso di circuiti elettricamente separati ma accoppiati magneticamente.



$$R_1I_1 = \varepsilon(t) - L_1\frac{dI_1}{dt} - M\frac{dI_2}{dt}$$

$$R_2I_2 = -L_2\frac{dI_2}{dt} - M\frac{dI_1}{dt}$$

Di solito le fem agenti nei circuiti si possono considerare sinusoidali, in questo caso l'equazione corrispondente e' formalmente identica a quella di un oscillatore forzato di tipo meccanico.

Soluzione circuiti in alternata

Nel caso di circuiti in corrente alternata si devono risolvere equazioni non omogeneee del tipo:

$$B \cdot I(t) = \frac{d\varepsilon}{dt} \qquad \text{B operatore} \qquad B = (L\frac{d^2}{dt^2} + R\frac{d}{dt} + \frac{1}{C})$$

La soluzione generale I_{gn} della equazione non omogenea puo' essere scritta come somma di una ∀ soluzione particolare I_p della equzione non omogenea e della soluzione generale della omogenea associata
(se I_1,I_2 sono soluzioni di B I(t) = 0, una ∀ combinazione aI_1+bI_2 e' soluzione)

$$I_{gn}=I_p+aI_1+bI_2$$

Il valore di a,b, preche' rappresenti il fenomeno fisico si trova assegnando le condizioni iniziali.
Discutiamo la soluzione della omogenea associata

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0$$ Poniamo $I=e^{\alpha t} \rightarrow$ $$(L\alpha^2 + R\alpha + \frac{1}{C})e^{\alpha t} = 0$$ Ma $\forall\alpha$ $e^{\alpha t}\neq 0$ che da':

$$\alpha^2 + R\alpha + \frac{1}{C} = 0$$ equazione algebrica associata con soluzioni $\alpha_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{CL}}$

quindi $e^{\alpha_1 t}, e^{\alpha_2 t}$ sono soluzioni dell'equazione cosi' come lo e' una loro combinazione lineare

$$I(t) = ae^{\alpha_1 t} + be^{\alpha_2 t}$$

$e^{\alpha_1 t}, e^{\alpha_2 t}$ sono linearmente indipendenti a meno che sia $\alpha_1=\alpha_2$

Soluzione (2)

In generale α_1,α_2 sono numeri complessi cosi' come $e^{\alpha_1 t}, e^{\alpha_2 t}$ $\rightarrow$a,b complessi, ma I(t) deve essere reale, si puo' scrivere:

$$\alpha_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\Delta} \qquad \gamma = \frac{R}{2L} \qquad \Delta = \frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{CL}$$

a seconda del segno di Δ si distinguono tre casi:

$\Delta>0$ $R^2>4L/C$ $\rightarrow$ $\alpha_1,\alpha_2<0$ reali ($\sqrt{\Delta}<\gamma$) la combinazione $ae^{\alpha_1 t} + be^{\alpha_2 t}$ ha esponenti decrescenti la $I \rightarrow 0$

$\Delta=0$ $R^2=4L/C$ $\alpha_1=\alpha_2=-R/2L$; si dimostra che si ha

$$I(t) = (c + kt)e^{-\frac{R}{2L}t}$$

con andamento analogo al precedente

$\Delta<0$ ($R^2<4L/C$) ponendo: $\omega^2 = \frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2}$ $\alpha_{1,2}=-\gamma\pm j\omega$ $J^2=-1$, quindi

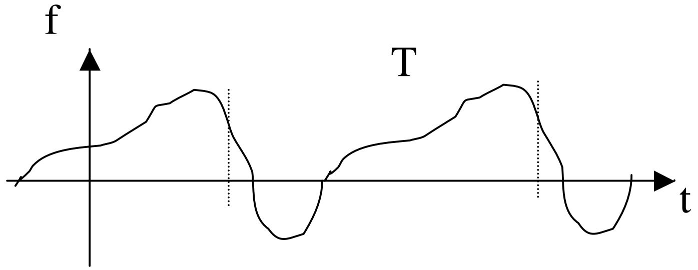
$I(t)= a\, e^{-\gamma t} e^{j\omega t}+b\, e^{-\gamma t} e^{-j\omega t}$ $e^{\pm j\omega t}=\cos \omega t\pm j\, \mathrm{sen}\omega t$

$I(t)= e^{-\gamma t} [(a+b)\cos \omega t+j\, (a-b)\mathrm{sen}\omega t]$ ponendo $a+b= I_0\, \mathrm{sen}\phi$ $j(a-b)= I_0 \cos\phi$ e'

$I(t)= I_0\, e^{-\gamma t} (\cos\omega t\, \mathrm{sen}\phi+\mathrm{sen}\omega t \cos\phi)= I_0\, e^{-\gamma t} \mathrm{sen}(\omega t+\phi)$ sinusoide smorzata

Per i 3 casi $I(t)\rightarrow 0$ dopo qualche tempo. Da allora la soluzione I_{gn} si riduce a I_p.
Percio' a parte un transiente, la corrente in un circuito alimentato da generatori fem variabili e' descritta dalla soluzione particolare della non omogenea

Grandezze alternate



Grandezza periodica $f_p(t)=f_p(t+T)$ con T periodo $\nu=1/T$ frequenza; se la relazione vale per ciascuna componente di un vettore allora si ha una grandezza vettoriale periodica

Grandezza alternata e' periodica e il valor medio e' nullo.

$$\begin{cases} f_a(t)=f_a(t+T) \\ \frac{1}{T}\int_t^{t+T} f_a(t)dt = 0 \end{cases}$$

Se ad una grandezza periodica si toglie il valor medio Si ottiene una grandezza alternata.

Fem che si genera in una spira rotante in campo magnetico e' alternata $F(t)=F_0 \mathrm{sen}\omega t$

Grandezza alternata e' sinusoidale se del tipo $I(t)=I_0\ \mathrm{sen}(\omega t+\phi)$

I_0= ampiezza, valore di picco, ω= pulsazione, ϕ=sfasamento $\omega t+\phi$= fase

Per le grandezze elettriche alternate T< cost. tempo strumenti di misura: tensione uso civile a 50 Hz → T=20 ms mentre per gli strumenti si hanno costanti di tempo del sec → strumenti misurano media su molti periodi → 0 rimedio Oscilloscopio

Ci sono strumenti che misurano il valore quadratico medio o efficace I_{eff}

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_t^{t+T} I^2(t)dt}$$

Tale valore e' rilevante perche' legato alla potenza che questa grandezza trasferisce al carico; se la grandezza e' sinusoidale e'

$$I_{eff} = [\frac{1}{T}\int_t^{t+T} I_0^2 sen^2\omega t dt]^{\frac{1}{2}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

Grandezze alternate (2)

Per il teorema di Fourier ogni grandezza alternata si puo' esperimere in termini di funzioni sinusoidali. Riprendendo il circuito RLC serie, da c si ha:

$$\frac{dI}{dt} = \omega I_0 \cos(\omega t + \varphi) = \omega I_0 sen(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}) \qquad \int I dt = -\frac{I_0}{\omega}\cos(\omega t + \varphi) = \frac{I_0}{\omega} sen(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2})$$

LdI/dt e' d.d.p ai capi di L (1/C)∫ Idt d.d.p ai capi di C

I(t)sinus V(t)sinus

	I(t) amp	I(t) sfas	V(t) amp	V(t) sfas
R	I_0	ϕ	$I_0 R$	ϕ
L	I_0	ϕ	$I_0 \omega L$	$\phi+\pi/2$
C	I_0	ϕ	$I_0/(\omega C)$	$\phi-\pi/2$

Esempio circuito RLC

Per quali valori di I_0,ϕ la $I(t)=I_0\,sen(\omega t+\phi)$ risolve $L\frac{dI}{dt}+\frac{1}{C}\int I dt + RI = F_0 sen\omega t$

Sostituendo i valori trovati e':

$\cos(\omega t+\phi)=\cos\omega t\cos\phi - sen\omega t\, sen\phi$

$sen(\omega t+\phi)= sen\omega t\cos\phi + \cos\omega t\, sen\phi$

$$L\omega I_0\cos(\omega t+\varphi)+RI_0 sen(\omega t+\varphi)-\frac{I_0}{\omega C}\cos(\omega t+\varphi)=F_0 sen\omega t$$

$$L\omega I_0[\cos\omega t\cos\varphi - sen\omega t sen\varphi]+RI_0(sen\omega t\cos\varphi+\cos\omega t sen\varphi)-\frac{I_0}{\omega C}(\cos\omega t\cos\varphi - sen\omega t sen\varphi)=F_0 sen\omega t$$

$$I_0[(\omega L-\frac{1}{\omega C})\cos\varphi + R sen\varphi]\cos\omega t + I_0[(\frac{1}{\omega C}-\omega L)sen\varphi + R\cos\varphi]sen\omega t = F_0 sen\omega t$$

uguaglianza deve essere valida ∀t → uguaglianza coefficienti di cosωt, senωt nei 2 membri

$$\begin{cases} I_0[(\omega L-\frac{1}{\omega C})\cos\varphi + R sen\varphi]=0 \\ I_0[(\frac{1}{\omega C}-\omega L)sen\varphi + R\cos\varphi]=F_0 \end{cases}$$

$$tg\varphi = \frac{\frac{1}{\omega C}-\omega L}{R}$$

$$sen\varphi = \frac{(\frac{1}{\omega C}-\omega L)}{\sqrt{R^2+(\frac{1}{\omega C}-\omega L)^2}}$$

$$\cos\varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2+(\frac{1}{\omega C}-\omega L)^2}}$$

Dalla seconda si ha I_0 e quindi:

$$\boxed{\begin{cases} \varphi = arctg\dfrac{\frac{1}{\omega C}-\omega L}{R} \\ I_0 = \dfrac{F_0}{\sqrt{R^2+(\frac{1}{\omega C}-\omega L)^2}} \end{cases}}$$

Metodo simbolico

Se il termine noto dell'equazione integro-differenziale e' esponenziale $F_0\, e^{\alpha t}$ con F_0, α complessi e $\alpha = j\omega$ $F_0\, e^{\alpha t} = F_0\, e^{j\omega t}$ e' alternata.

Si puo' verificare che: $$L\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}\int I dt + RI = F_0 e^{j\omega t}$$ ammette soluzioni del tipo $I_0\, e^{j\omega t}$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt}(I_0 e^{j\omega t}) = j\omega I_0 e^{j\omega t} = j\omega I \qquad \int I dt = \int I_0 e^{j\omega t} dt = \frac{1}{j\omega} I_0 e^{j\omega t} = -\frac{j}{\omega} I$$

quindi: $$I_0[j\omega L + R - \frac{j}{\omega C}]e^{j\omega t} = F_0 e^{j\omega t} \Longrightarrow I_0 = \frac{F_0}{Z} \qquad \boxed{Z = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})}$$

base metodo simbolico

Fourier

Ogni funzione periodica e' esprimibile come serie di funzioni sinus o esponenziali a esponente immaginario

$$f(t) \to \frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty (a_n \cos n\omega t + b_n senn\omega t) \longrightarrow f_a(t) = \sum_1^\infty (a_n \cos n\omega t + b_n senn\omega t)$$

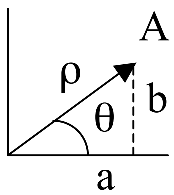
$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega t dt \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t) senn\omega t dt$$

I termini di $n\omega$ costituiscono l'armonica di ordine n di $f_p(t)$

Metodo di analisi reti in corrente alternata sinusoidale formalmente uguale alle reti in continua.

A $I(t) = I_0 \cos(\omega t + \phi)$ si associa la quantita' complessa $I_c(t) = \vec{I}(t) = I_0(\cos(\omega t+\phi) + j\, sen(\omega t+\phi)] = I_0\, e^{j(\omega t+\phi)}$

$$\vec{I} = I_0 e^{j\varphi} e^{j\omega t} = \vec{I}_0 e^{j\omega t} = I_0(\cos\varphi + jsen\varphi)e^{j\omega t} = (a + jb)e^{j\omega t}$$



A=a+jb=ρ(cosθ+jsenθ)

ω=pulsazione $\quad |\vec{I}_0| = I_0 = \sqrt{a^2 + b^2}$ ampiezza

tgϕ=b/a da' la fase ϕ della grandezza

Metodo simbolico (2)

Il vantaggio di esprimere I in forma complessa e' che le relazioni tra tensioni e correnti ai capi dei componenti di un circuito in alternata sono di proporzionalita' come accadeva per R in continua.

$$V_L(t) = L\frac{dI}{dt} = L\frac{d}{dt}(I_0 e^{j\omega t}) = j\omega L(I_0 e^{j\omega t}) = j\omega L I(t)$$

$$V_C(t) = \frac{1}{C}\int I dt = \frac{1}{C}\int I_0 e^{j\omega t} dt = \frac{1}{j\omega C} I_0 e^{j\omega t} = -\frac{j}{\omega C} I$$

$V_R(t)=RI$

vale cosi' la relazione **V=Z I** **Z= impedenza** **[Z]=Ω**

$Z_L = j\omega L$ $\quad Z_C = -\frac{j}{\omega C}$ $\quad Z_R = R$

$Z_S = \sum Z_i$ serie

parallelo $\frac{1}{Z_p} = \sum \frac{1}{Z_i}$

$\vec{Z} \equiv R + jX$ X reattanza