Analisi reti lineari

Risolvere una rete vuol dire trovare le correnti circolanti, una volta nota la configurazione topologica della stessa rete e le caratteristiche degli aelementi passivi(R) e attivi (gen).

Metodo **analisi per maglie**:

1) Si individuano i percorsi chiusi (maglie) realizzati con i rami della rete con le condizioni:
   - ogni ramo in almeno una delle maglie scelte
   - maglie scelte tali che le loro equazioni siano indipendenti (ogni maglia con almeno una ramo non compreso in altre maglie

n. maglie indipendenti = Rami - nodi +1

2) Si assegna un verso positivo di I ad ogni maglia

3) Si applicano le leggi di Kirchhoff di maglie e nodi

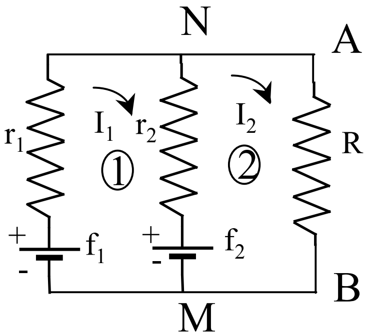
4) Si ricavano le correnti (una per maglia) e quindi le correnti per ogni ramo; se la corrente di maglia è negativa il suo verso è opposto a quello scelto come positivo

La linearità delle leggi di Kirchhoff implica corrrenti funzioni lineari delle fem --->
La corrente che passa in una ramo di una rete può essere espressa come ∑ di correnti che circolerebbero se ogni fem operasse singolarmente (**Principio di sovrapposizione**)

Esempio analisi circuito

Si hanno due generatori di fem in || che alimentano un carico R
Trovare d.d.p. ai capi A,B del carico.

Si hanno due maglie 1,2



n. eq. indipendenti= rami-nodi+1= 3-2+1=2

1ª maglia $f_1-f_2=I_1r_1+(I_1-I_2)r_2$

al nodo N è $I_1-I_3-I_2=0$ $I_1-I_2=I_3$

2ª maglia $f_2=-(I_1-I_2)r_2+I_2R$

Sistema lineare di 2 equazioni di incognite I_1 ,I_2

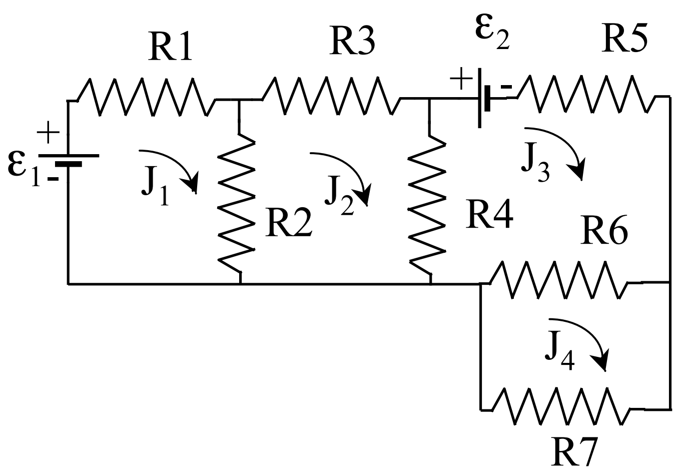
$$\begin{cases} I_1(r_1+r_2) - I_2 r_2 = f_1-f_2 \\ -I_1 r_2 + I_2(R+r_2) = f_2 \end{cases}$$

Si deve trovare $V_A-V_B=I_2R$, si ricava I_2 (Cramer)

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} r_1+r_2 & f_1-f_2 \\ -r_2 & f_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} r_1+r_2 & -r_2 \\ -r_2 & R+r_2 \end{vmatrix}} = \frac{f_2(r_1+r_2)-r_2(f_2-f_1)}{(r_1+r_2)(R+r_2)-r_2^2} = \frac{f_2r_1+r_2f_1}{r_1R+r_1r_2+Rr_2+r_2^2-r_2^2} = \frac{f_2r_1+r_2f_1}{r_1R+r_1r_2+Rr_2}$$

Se i due generatori sono uguali $f_1=f_2=f$, $r_1=r_2=r$ è $I_2 = \frac{2fr}{r^2+2rR} = \frac{f}{R+\frac{r}{2}}$

Due generatori uguali in || sono equivalenti ad un generatore di stessa fem e resistenza interna r/2.
Per n generatori r si riduce di n volte.



Esempio 2

J_i correnti di maglia, i_k correnti di ramo

L'applicazione del metodo delle correnti di maglia dà:

$$\begin{cases} R_1J_1+R_2(J_1-J_2)=\varepsilon_1 \\ R_3J_2+R_2(J_2-J_1)+R_4(J_2-J_3)=0 \\ R_5J_3+R_4(J_3-J_2)+R_6(J_3-J_4)=-\varepsilon_2 \\ R_6(J_4-J_3)+R_7J_4=0 \end{cases}$$

al sistema si associa la **matrice simmetrica**

$$\begin{cases} (R_1+R_2)J_1 - R_2J_2 = \varepsilon_1 \\ -R_2J_1 + (R_2+R_3+R_4)J_2 - R_4J_3 = 0 \\ -R_4J_2 + (R_4+R_5+R_6)J_3 - R_6J_4 = -\varepsilon_2 \\ -R_6J_3 + (R6+R7)J_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} R_1+R_2 & -R_2 & 0 & 0 \\ -R_2 & R_2+R_3+R_4 & -R_4 & 0 \\ 0 & -R_4 & R_4+R_5+R_6 & -R_6 \\ 0 & 0 & -R_6 & R_6+R_7 \end{pmatrix}$$

Gli elementi della matrice sono valutabili dalla ispezione del circuito:

Elementi diagonali **a_{kk} resistenza totale maglia k-esima**, **$a_{kl}=a_{lk}$ ($k\neq l$) R comune alle maglie con segno -**

con una sola ε_k, è:

$$J_k = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\ a_{1,k-1} & \varepsilon_1 \cdots a_{1,n-1} & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\ldots a_{n,k-1} & \varepsilon_n \ldots a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}}{Det(a_{kl})} = \frac{\varepsilon_1 DetM_{1k}}{Det(a_{kl})}(-1)^{1+k} + \ldots + \frac{\varepsilon_n \det M_{nk}}{Det(a_{kl})}(-1)^{n+k}$$

$$J_k = \frac{Det(M_{kk})}{Det(a_{kl})}\varepsilon_k = \frac{\varepsilon_k}{R_T}$$

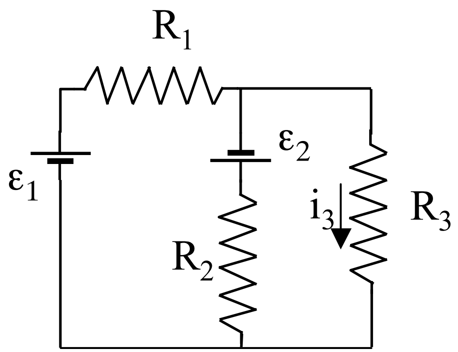
M_{lk} minore rispetto a_{lk}, ε_j somma delle fem della maglia j-esima

Inverso della resistenza equivalente a tutto il circuito, vista da ε_k

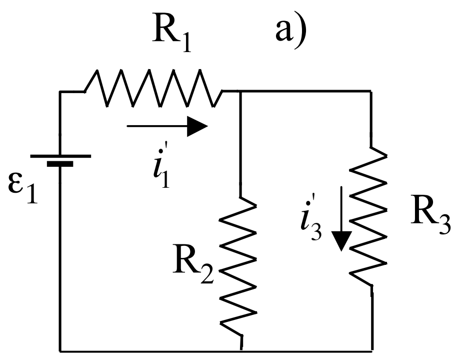
Applicazione Principio di sovrapposizione

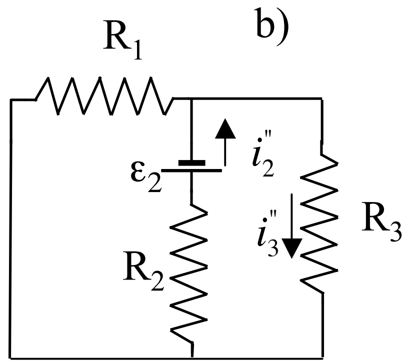
Impariamo a valutare la corrente nei rami in modo da evitare il ricorso all'algebra matriciale e di usare La sostituzione di gruppi di resistenze con la resistenza equivalente. Metodo più usato.

Si voglia calcolare la corrente i_3.

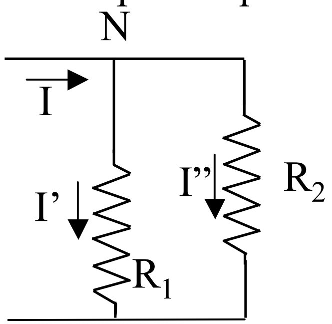


I contributi alla corrente in R_3 sono calcolati dai due circuiti sottostanti:





Mostriamo prima questo risultato:



In N per la legge dei nodi è I=I'+I''

Per la seconda legge di Kirchhoff è $I'R_1$-$I''R_2$=0 per cui si ha:

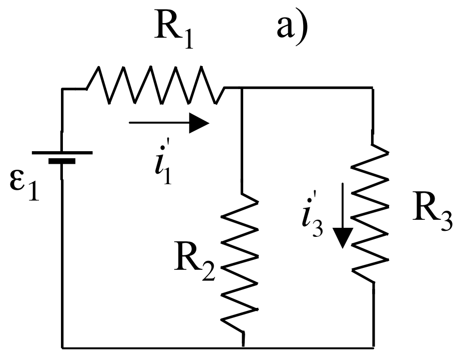
$$I' = I\frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$I'' = I\frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$\boxed{\frac{I'}{I''} = \frac{R_2}{R_1}}$$

La corrente si divide nei due rami in maniera inversamente proporzionale alla resistenza dei rami

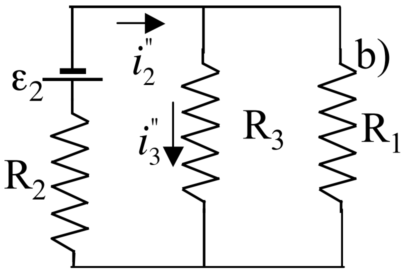
Applicazione P S (continua)



Se fosse nota $i_1^{'}$ si potrebbe determinare $i_3^{'}$ $\qquad i_3^{'} = i_1^{'}\dfrac{R_2}{R_2+R_3}$

Ricorrendo alle resistenze equivalenti si trova

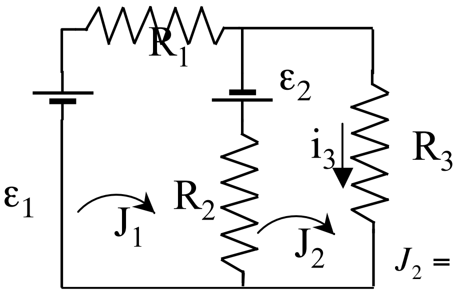
$$i_1^{'} = \frac{\varepsilon_1}{R_1 + R_2 \parallel R_3} = \frac{\varepsilon_1(R_2+R_3)}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}$$



$$i_3^{''} = i_2^{''}\frac{R_1}{R_1+R_3} \qquad\qquad i_2^{''} = \frac{-\varepsilon_2}{R_2 + R_1 \parallel R_3} = \frac{-\varepsilon_2(R_1+R_3)}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}$$

$$i_3 = i_3^{'} + i_3^{''} = \frac{\varepsilon_1\cancel{(R_2+R_3)}}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}\,\frac{R_2}{\cancel{R_2+R_3}} - \frac{\varepsilon_2\cancel{(R_1+R_3)}}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}\,\frac{R_1}{\cancel{R_1+R_3}} = \boxed{\frac{\varepsilon_1R_2-\varepsilon_2R_1}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}}$$

Per confronto usiamo la procedura delle correnti di maglia:



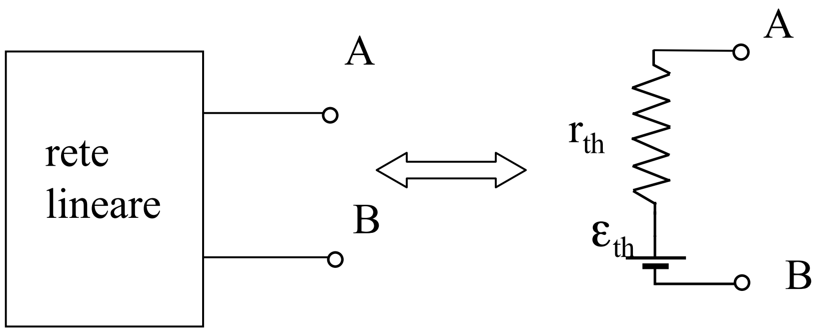
$$\begin{pmatrix} R_1+R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2+R_3 \end{pmatrix}$$

e quindi:

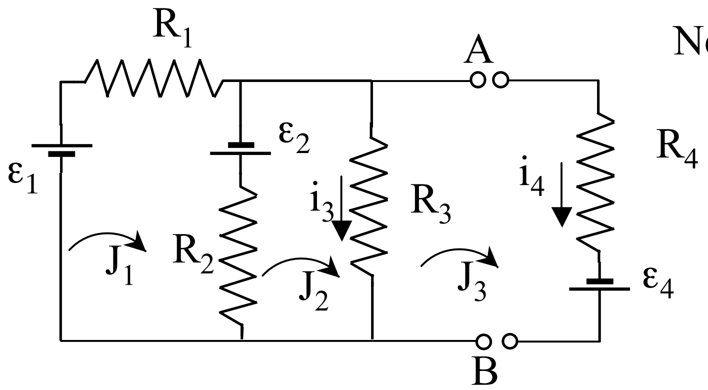
$$J_2 = i_3 = \frac{\begin{vmatrix} R_1+R_2 & \varepsilon_1+\varepsilon_2 \\ -R_2 & -\varepsilon_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1+R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2+R_3 \end{vmatrix}} = \frac{-\varepsilon_2(R_1+R_2)+R_2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}{(R_1+R_2)(R_2+R_3)-R_2^2} = \frac{-\varepsilon_2R_1-\cancel{\varepsilon_2R_2}+R_2\varepsilon_1+\cancel{R_2\varepsilon_2}}{R_1R_2+R_1R_3+\cancel{R_2^2}+R_2R_3-\cancel{R_2^2}} = \boxed{\frac{\varepsilon_1R_2-\varepsilon_2R_1}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}}$$

La procedura con correnti di maglia è rapida perché ci sono solo due maglie

Circuito equivalente



Teorema di Thevenin:
Data una rete di elementi lineari e 2 punti A,B (morsetti) della rete, rispetto a questi, essa si comporta come un unico generatore reale di fem ε_{th} pari a d.d.p. che si misura tra A e B quando ad A,B non è attaccato niente e di resistenza interna r_{th} pari a quella che si misura tra A e B quando ogni fem è cortocircuitata.



Nel circuito precedente supponiamo di aggiungere il ramo con ε_4 e R_4.

i_4?

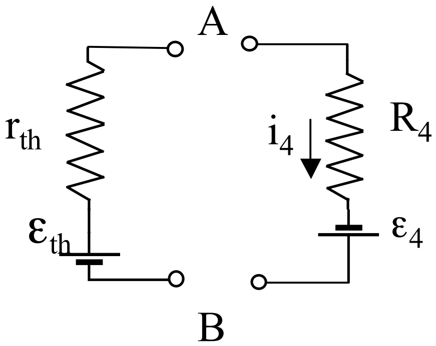
matrice
$$\begin{pmatrix} R_1+R_2 & -R_2 & 0 \\ -R_2 & R_2+R_3 & -R_3 \\ 0 & -R_3 & R_3+R_4 \end{pmatrix}$$

$$J_3 = i_4 = \frac{\begin{vmatrix} R_1+R_2 & -R_2 & \varepsilon_1+\varepsilon_2 \\ -R_2 & R_2+R_3 & -\varepsilon_2 \\ 0 & -R_3 & \varepsilon_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1+R_2 & -R_2 & 0 \\ -R_2 & R_2+R_3 & -R_3 \\ 0 & -R_3 & R_3+R_4 \end{vmatrix}} = \frac{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\begin{vmatrix} -R_2 & R_2+R_3 \\ 0 & -R_3 \end{vmatrix} + \varepsilon_2 \begin{vmatrix} R_1+R_2 & -R_2 \\ 0 & -R_3 \end{vmatrix} + \varepsilon_4 \begin{vmatrix} R_1+R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2+R_3 \end{vmatrix}}{(R_1+R_2)\begin{vmatrix} R_2+R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_3+R_4 \end{vmatrix} + R_2 \begin{vmatrix} -R_2 & 0 \\ -R_3 & R_3+R_4 \end{vmatrix}} =$$

continua

$$= \frac{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)R_2R_3 - \varepsilon_2 R_3(R_1+R_2)+\varepsilon_4(R_1+R_2)(R_2+R_3)-\varepsilon_4 R_2^2}{(R_1+R_2)(R_2+R_3)(R_3+R_4)-(R_1+R_2)R_3^2-(R_3+R_4)R_2^2} = \boxed{\frac{\varepsilon_1 R_2R_3 - \varepsilon_2 R_1R_3 + \varepsilon_4(R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3)}{R_1R_2R_3+R_1R_2R_4+R_1R_3R_4+R_2R_3R_4}}$$

Usando il **Teorema di Thevenin** si può trovare prima r_{th} e ε_{th} e poi i_4



$$i_4 = \frac{\varepsilon_{th}+\varepsilon_4}{r_{th}+R_4} \qquad \varepsilon_{th} = i_3 R_3 = \frac{\varepsilon_1 R_2 - \varepsilon_2 R_1}{R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3} R_3$$

$$r_{th} = R_3 \parallel R_2 \parallel R_1 = \frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}} = \frac{R_1R_2R_3}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}$$

e quindi

$$i_4 = \frac{\varepsilon_{th}+\varepsilon_4}{r_{th}+R_4} = \frac{\frac{\varepsilon_1 R_2 - \varepsilon_2 R_1}{R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3}R_3 + \varepsilon_4}{\frac{R_1R_2R_3}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}+R_4} = \frac{\varepsilon_1 R_2R_3 - \varepsilon_2 R_1R_3 + \varepsilon_4(R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3)}{R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3} \frac{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}{R_1R_2R_3+R_4(R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3)}$$

$$i_4 = \boxed{\frac{\varepsilon_1 R_2R_3 - \varepsilon_2 R_1R_3 + \varepsilon_4(R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3)}{R_1R_2R_3+R_1R_2R_4+R_1R_3R_4+R_2R_3R_4}}$$