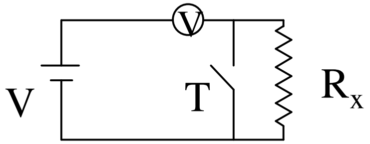
Esercizi

1) Si misura una resistenza R_x=9MΩ con un multimetro digitale a 3 1/2 cifre, usato come voltmetro. Leggendo le tensioni V_0, v a tasto chiuso e aperto rispettivamente si ricava la misura di R_x. Trovare l'errore percentuale su R_x sapendo che il generatore di tensione V=18 V ha resistenza interna (non indicata in figura) trascurabile e che il voltmetro ha resistenza interna R_v=(10±0.1) MΩ e un errore di taratura di 0.5%+1 digit.



Soluzione:
Tasto chiuso: R_x cortocircuitata → V_0= V= 18 V

Tasto aperto:

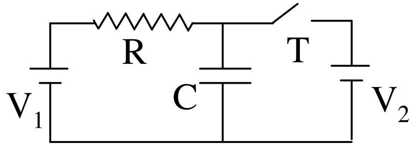
$$V = v + R_x i_v = v + R_x \frac{v}{R_v} \ , \ v = \frac{R_x}{R_x + R_v} \mathrm{V} = 9.47 \text{ V} \ \rightarrow \ R_x = R_v\left(\frac{V}{v} - 1\right) = 9.007\, M\Omega$$

$$\frac{\Delta R_x}{R_x} = \frac{\Delta R_v}{R_v} + \frac{V}{|V - v|}\left(\frac{\Delta V}{V} + \frac{\Delta v}{v}\right) \qquad \Delta v = 0.047 + 0.01 = 0.057 \text{ V} \qquad \frac{\Delta \mathrm{v}}{\mathrm{v}} = \frac{0.057}{9.47} = 0.006$$

$$\Delta V = 0.09 + 0.01 = 0.1 \text{ V} \qquad \frac{\Delta V}{V} = 0.0055 \qquad \frac{\Delta R_x}{R_x} = 0.01 + \frac{18}{|18 - 9.47|}(0.0055 + 0.006) = 0.034$$

2) Nel circuito in figura il tasto T e' inizialmente chiuso e viene aperto al tempo t=0. Determinare la tensione ai capi del condensatore C dopo l'apertura a t=0 del tasto T.
Trovare il valore della tensione dopo 50 ms.

Dati : V_1=8 V, V_2=2 V, R =10 KΩ, C=2μF.



Soluzione:

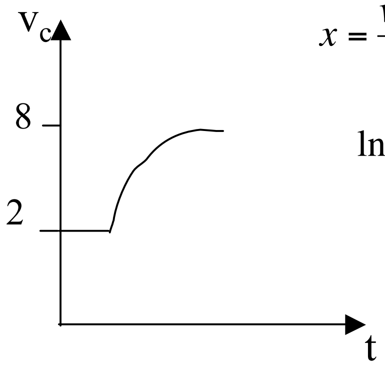
$v_C(0)=V_2=2$ V

$$i_c(t) = C\frac{d}{dt}v_C(t)$$

Dopo l'apertura di T si ha l'equazione:

$$i_cR+v_C(t)=V_1$$

$$RC\frac{d}{dt}v_C(t)+v_C(t)=V_1 \qquad \frac{dv}{dt}=\frac{-v+V_1}{RC} \;,\; \frac{dv}{dt}=-\frac{v-V_1}{RC} \;,\; \frac{dv}{\frac{v-V_1}{RC}}=-dt$$



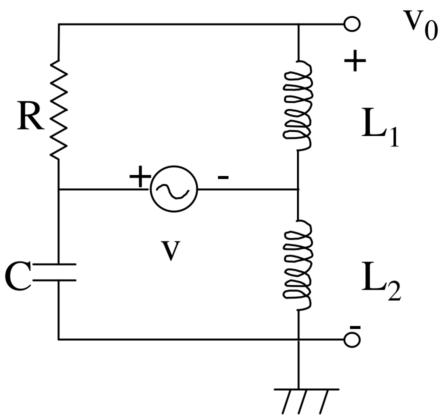
$$x=\frac{v-V_1}{RC} \;,\; \frac{dx}{dt}=\frac{1}{RC}\frac{dv}{dt}\rightarrow RC\frac{dx}{dt}=-x\rightarrow\frac{dx}{x}=-\frac{dt}{RC}$$ che integrato da':

$$\ln x\Big|_{x_0}^{x}=-\frac{t}{RC}\rightarrow\ln\frac{x}{x_0}=-\frac{t}{RC}\rightarrow\frac{x}{x_0}=e^{-\frac{t}{RC}} \qquad x_0=\frac{V_2-V_1}{RC}\rightarrow\frac{v-V_1}{\cancel{RC}}\frac{\cancel{RC}}{V_2-V_1}=e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$v(t)=V_1+(v(0)-V_1)e^{-\frac{t}{RC}} \qquad \text{RC=20 ms}$$

V(0.05 s)=8 V+(2V-8 V)exp(-0.05 s/0.02s)= 7.5 V

3) Determinare la tensione $v_0(t)$ tra le due induttanze del circuito in figura.
Dati: $v(t)=|v| \cos(\omega t+\pi/2)$, $R=8\Omega$, $C=1/12$ F, $L_1=2$ H, $L_2=4$ H, $|v|=5$ V, $\omega=5$rad/s



$$v_0 = \frac{v}{R+Z_{L_1}} Z_{L_1} - \frac{v}{Z_c + Z_{L_2}} Z_{L_2}$$

$$\frac{1}{1+\frac{Z_C}{Z_{L_2}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{j\omega C j\omega L_2}} = \frac{\omega^2 L_2 C}{\omega^2 L_2 C - 1}$$

$$\frac{1}{1+\frac{R}{Z_{L_1}}} = \frac{1}{1+\frac{R}{j\omega L_1}} = \frac{\omega L_1}{\omega L_1 - jR}$$

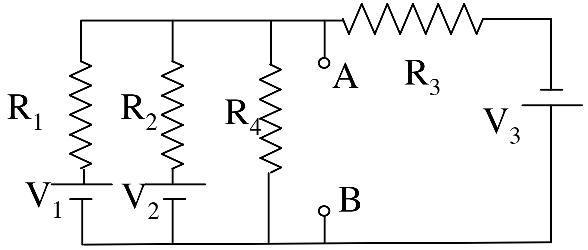
$$v_0 = v\frac{\omega L_1}{\omega L_1 - jR} - v\frac{\omega^2 L_2 C}{\omega^2 L_2 C - 1} = v\frac{\omega L_1(\omega^2 L_2 C - 1) - \omega^2 L_2 C(\omega L_1 - jR)}{(\omega^2 L_2 C - 1)(\omega L_1 - jR)} = v\frac{\omega^3 L_1 L_2 C - \omega L_1 - \omega^3 L_1 L_2 C + j\omega^2 L_2 RC}{(\omega^2 L_2 C - 1)(\omega L_1 - jR)} =$$

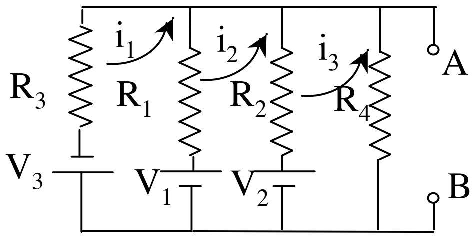
$$= v\frac{-\omega L_1 + j\omega^2 L_2 RC}{(\omega^2 L_2 C - 1)(\omega L_1 - jR)}$$

$$|v_0| = |v|\sqrt{\frac{\omega^2 L_1^2 + (\omega^2 L_2 RC)^2}{(\omega^2 L_2 C - 1)^2(\omega^2 L_1^2 + R^2)}} = 3.6V$$

$$\varphi_{v_0} = \frac{\pi}{2} + arctg(-\frac{\omega^2 L_2 RC}{\omega L_1}) - arctg(-\frac{R}{\omega L_1}) = \frac{\pi}{2} - arctg(\frac{\omega^2 L_2 RC}{\omega L_1}) + arctg(\frac{R}{\omega L_1}) = 90 - 81.47 + 38.66 = 47.19^0$$

1) Dato il circuito in corrente continua in figura, determinare la tensione V_{BA}.
Dati: $V_1=V_2=10$ V, $R_1=R_2=1$ KΩ, $R_3=2$KΩ, $R_4=4$KΩ, $V_3=15$V





$$\begin{cases} V_1 + V_3 = i_1 R_3 + (i_1 - i_2) R_1 \\ V_2 - V_1 = (i_2 - i_3) R_2 + (i_2 - i_1) R_1 \\ -V_2 = i_3 R_4 + (i_3 - i_2) R_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} V_1 + V_3 = (R_3 + R_1) i_1 - R_1 i_2 \\ V_2 - V_1 = -R_1 i_1 + (R_1 + R_2) i_2 - R_2 i_3 \\ -V_2 = -R_2 i_2 + (R_4 + R_2) i_3 \end{cases}$$

$$i_3 = \frac{\begin{vmatrix} R_3 + R_1 & -R_1 & V_1 + V_3 \\ -R_1 & R_1 + R_2 & V_2 - V_1 \\ 0 & -R_2 & -V_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_3 + R_1 & -R_1 & 0 \\ -R_1 & R_1 + R_2 & -R_2 \\ 0 & -R_2 & R_4 + R_2 \end{vmatrix}} = \frac{(R_3 + R_1)\begin{vmatrix} R_1 + R_2 & V_2 - V \\ -R_2 & -V_2 \end{vmatrix} + R_1 \begin{vmatrix} -R_1 & V_1 + V_3 \\ -R_2 & -V_2 \end{vmatrix}}{(R_3 + R_1)\begin{vmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_4 + R_2 \end{vmatrix} + R_1 \begin{vmatrix} -R_1 & 0 \\ -R_2 & R_4 + R_2 \end{vmatrix}} = \frac{(R_1 + R_3)[-V_2(R_1 + R_2) + R_2(V_2 - V_1)] + R_1[R_1 V_2 + R_2(V_1 + V_3)]}{(R_1 + R_3)[(R_1 + R_2)(R_2 + R_4) - R_2^2] - R_1^2(R_2 + R_4)}$$

$$i_3 = \frac{V_3 R_1 R_2 - V_1 R_2 R_3 - V_2 R_3 R_1}{R_1 R_2 (R_3 + R_4) + R_3 R_4 (R_1 + R_2)} = -1.14\,mA$$

$v_{BA} = i_3 R_4 = -4.56$ V

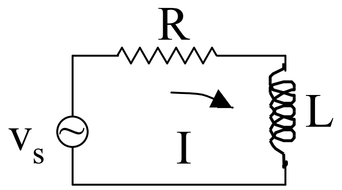
Dato il circuito in figura che si trova a regime da molto tempo, determinare la potenza media (in un periodo) fornita ad R ed L.

Dati: v_s=20 cos(100t-15^0) V, R=25 Ω, L=120 mH. v_0= 20 V, ω=100 rad s^{-1}, ϕ_v=-15^0.

$$i(t) = \frac{v_s}{R + j\omega L} \qquad i_m = \frac{v_0}{\sqrt{R^2 + \omega L^2}} = \frac{20}{\sqrt{625 + 10^4 \cdot 1.44 \cdot 10^{-2}}} = 721 mA$$

ϕ_ι=ϕ_V-arctg ωL/R= -15^0-26^0=41^0

i(t)=721 cos(100t-41^0) mA



$$v_L = \frac{v_s j\omega L}{R + j\omega L}$$ = i jωL=8.6 cos(100t+49^0) V

ϕ_{VL}=90^0-41^0=49^0 v_R=i R= 18 cos(100t-41^0) V

la potenza media e' P = (1/2)$I_m V_m \cos(\phi_v - \phi_i)$

$$P_R = \frac{18 \cdot 0.721}{2} \cos(-41^0 - (-41^0)) = \frac{18 \cdot 0.721}{2} = 6.5W$$

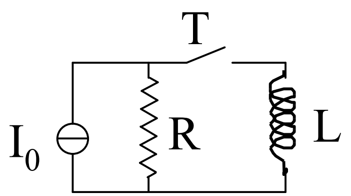
$$P_L = \frac{8.6 \cdot 0.721}{2} \cos(49^0 - (-41^0)) = 0W$$

la tensione su L e' in anticipo di 90^0 rispetto ad I.

Nel circuito in figura determinare la corrente nell'induttanza dopo la chiusura del tasto T. Quanto tempo occorre perche' la corrente nell'induttanza raggiunga il valore i_L=2 mA?

Dati: I_0=4 mA, R=100 Ω, L=5 mH

$i_L(0)=0$ v_L=Ldi/dt in N e': $I_0=v_L/R+i(t)$



$$I_0 = \frac{L}{R}\frac{di(t)}{dt} + i(t) \qquad \frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L}i(t) = \frac{R}{L}I_0$$

$$\frac{d}{dt}x(t) + \frac{x(t)}{\tau} = k \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{k\tau - x}{\tau} \qquad \frac{dx}{k\tau - x} = -\frac{dt}{\tau}$$

che integrata da': $x(t)=k\tau+A\exp(-t/\tau)$, $x(0)= k\tau+A$ $x(t)=k\tau+[x(0)-k\tau]e^{-t/\tau}$

passando ad i(t) e':

$i(t)= I_0+(i(0)-I_0)e^{-(R/L)t}$ $i(t)=4-4e^{-t/50}$ mA con t in μs.

τ=L/R=50 μs

per trovare t per cui i=2 mA si pone i(t)=2 mA

$2=4-4e^{-t/50}$ mA t= - 50 ln[(2-4)/(-4)]=34.7 μs