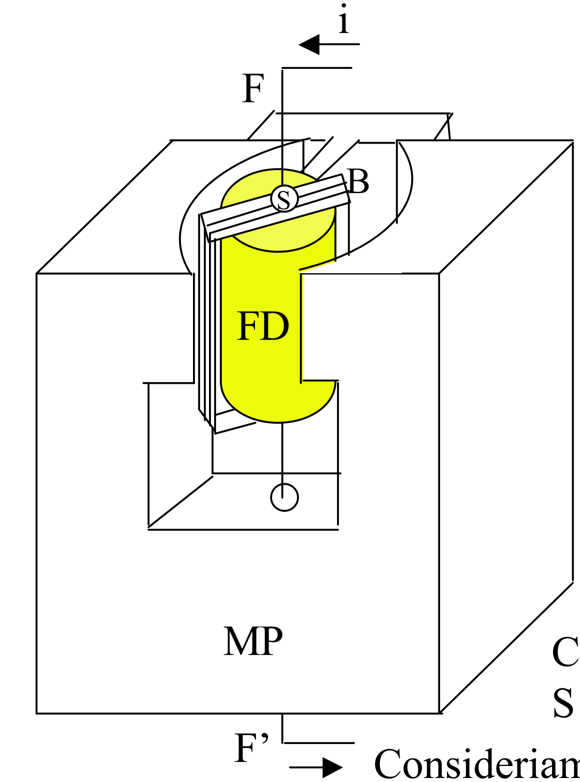
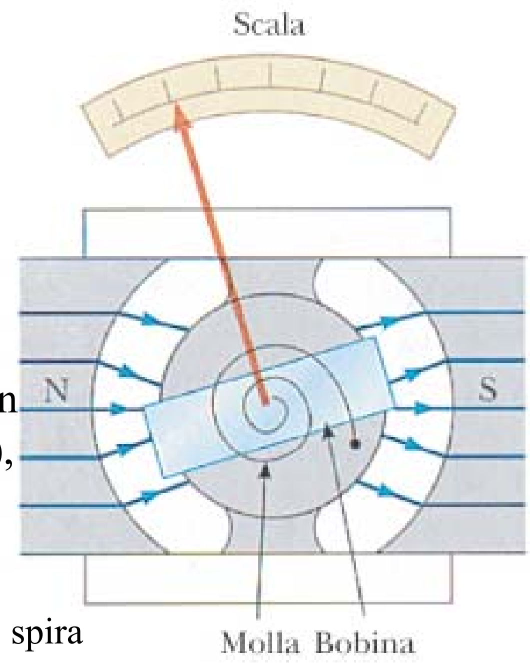
Galvanometro



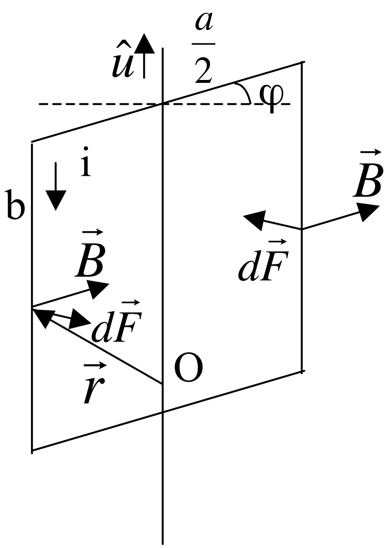
Bobina(B) avvolta su un rocchetto sospeso ad un filo (F) che ha elasticità di torsione. FF’ portano corrente alla bobina che è sospesa in modo da poter ruotare intorno direzione di FF’. Si muove inoltre tra le espansioni polari di MP ed un nucleo centrale di ferro dolce (FD), tenuto in posizione fissa rispetto a MP tramite supporto amagnetico.

Campo nel traferro $\approx 10^{-1}$ T e radiale.

S specchietto solidale con la bobina.



Consideriamo una spira percorsa da i, su di essa agisce la forza $d\vec{F}$ (II legge Laplace)



$$d\vec{F} = i d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

Nei tratti verticali (b) $\vec{B} \perp \vec{i}$ e giacente nel piano della spira $\rightarrow d\vec{F} \perp$ piano bobina e da parte opposta nei due tratti. Per i tratti lunghi a, il campo è ancora giacente nel piano spira, ma per la struttura magnetica la sua intensità è più debole e così le forze si possono trascurare. $\vec{R}^{(e)} = 0$ $\quad \vec{M}^{(e)} \neq 0$

per tratti b $\quad |\vec{r} \wedge \hat{u}| = \frac{a}{2} \quad \not\parallel d\vec{F}$

$$M_u = [\oint_{spira} \vec{r} \wedge (i d\vec{l} \wedge \vec{B})] \cdot \hat{u} = -\oint_{spira} (\vec{r} \wedge \hat{u}) \cdot (i d\vec{l} \wedge \vec{B})$$

dF=i dl B

Galvanometro (statica)

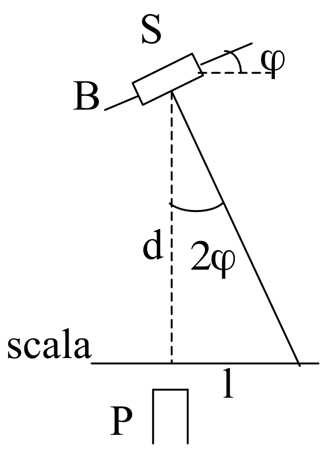
$$M_u = i\frac{a}{2}B\int_{trattib} dl = iabB = iSB$$ se ab=S indipendente dall'angolo φ di rotazione della bobina.

Se consideriamo n spire si ha: M_u=i n S B=i G G=n S B

Se il sistema è in equilibrio con i che circola in G alla coppia i G si oppone quella elastica prodotta dalla molla - E φ, quindi: E φ = i n S B

$$i = \frac{E}{nSB}\varphi = \frac{E}{G}\varphi = K_r\varphi$$ deflessione $\propto$ i K_r=costante reometrica

Lettura dello spostamento angolare è fatta col metodo della **leva ottica**



Proiettore P manda immagine di crocifilo su specchio S solidale con B; il fascio riflesso forma 2φ con la direzione d'incidenza.

Si misura lo spostamento dell'immagine del crocifilo, riflessa sullo specchio, che si forma su una scala graduata posta a distanza d da G:

$$l = d\tan 2\varphi \rightarrow \varphi = \frac{1}{2}arctg\frac{l}{d}$$

per piccoli angoli si approssima l ~ d 2φ quindi:

$$i = K_r\varphi = K_r\frac{l}{2d} = k_r l$$ con $[k_r]$=[A]/[l]

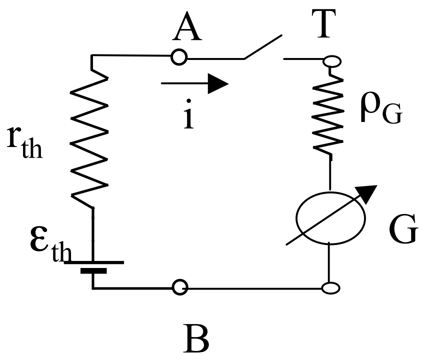
per angoli più grandi :

$$i = \frac{K_r}{2}arctg\frac{l}{d} = k_r d\ arctg\frac{l}{d}$$

tipici k_r~10^{-9}÷10^{-7} A/mm

Galvanometro (dinamica)

Come si raggiunge la posizione di equilibrio?
Galvanometro a riposo, assimilabile ad una resistenza (quella della bobina)



Se scorre i si ha elongazione statica $\varphi_S = i/K_r$ $\qquad i = \dfrac{\varepsilon_{th}}{r_{th} + \rho_G}$

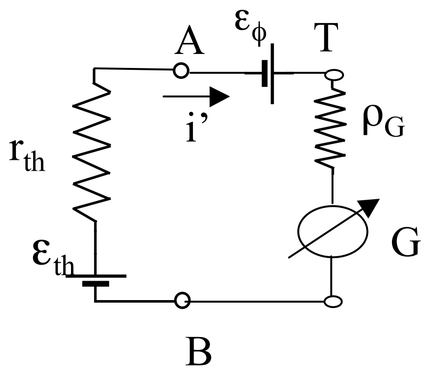
Studiamo ora il moto del sistema quando si chiude a t=0 il tasto T.

cond. iniz. $\quad \varphi(0) = 0 \quad \dot{\varphi}(0) = 0$

Dalla relazione $\quad I\ddot{\varphi} = \sum_k M_k \quad$ quali M_k?

Coppia elastica di richiamo $-E\varphi$, coppia resistente durante il moto dovuto alla resistenza dell'aria, se di tipo viscoso si ha il termine $-C\dot{\varphi}$

Il generatore che invia corrente i dà luogo ad un momento M_u=nSBi. C'è inoltre un termine che deriva dalla fem indotta, schematizzabile con ε_ϕ in serie con il medesimo generatore. La corrente i' è allora:



$$i' = \frac{\varepsilon_{th} + \varepsilon_\phi}{r_{th} + \rho_G} = i + i_\phi$$

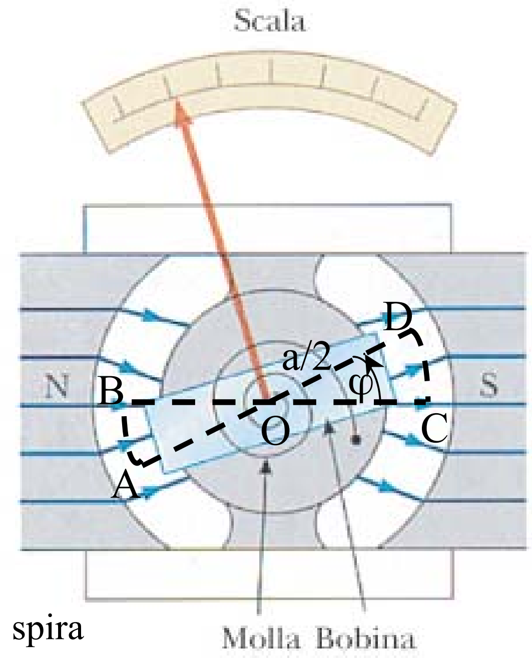
che dà luogo ad una coppia sulla bobina: $M_i = Gi + Gi_\phi$

Quindi:

$$I\ddot{\varphi} = -E\varphi - C\dot{\varphi} + Gi + Gi_\phi$$

Occorre trovare ε_ϕ e poi i_ϕ

Galvanometro (dinamica 2)



Il flusso di B concatenato con la spira dipende da φ,
cresce con φ (nullo con φ=0). Per il fatto che B è solenoidale $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

Il flusso di B attraverso un certo contorno, non dipende dalla forma della superficie che si appoggia su di esso.
La superficie scelta è quella tratteggiata.
Nei tratti AB-CD, Φ(B)=(a/2) b φ B, in BC è nullo.

Per n spire: Φ(B)=nSB φ=G φ → $\varepsilon_\phi = -\frac{d\Phi(B)}{dt} = -G\dot{\varphi}$ $i_\phi = -\frac{G\dot{\varphi}}{r_{th} + \rho_G}$

L'equazione che regola il moto diviene:

$$I\ddot{\varphi} + (C + \frac{G^2}{R})\dot{\varphi} + E\varphi = Gi \qquad R = r_{th} + \rho_G$$

Il termine i_φ dà lo smorzamento elettrodinamico.

Per la soluzione si trova prima quella della omogenea associata e poi si somma una particolare, per es. soluzione statica $\varphi_S = (G/E)i$.

$$I\ddot{\varphi} + (C + \frac{G^2}{R})\dot{\varphi} + E\varphi = 0$$

Posto:

$$\sigma_1 = \frac{(C + \frac{G^2}{R})}{2I} \;, \; \sigma_2 = \frac{\sqrt{\left|4EI - (C + \frac{G^2}{R})^2\right|}}{2I}$$

si trovano 3 soluzioni a seconda che:

$$\Delta = (C + \frac{G^2}{R})^2 - 4EI \quad > \quad = \quad < \quad 0$$

Galvanometro (dinamica 3)

I) $\Delta>0$ sottocritico smorzamento forte, no oscillazioni

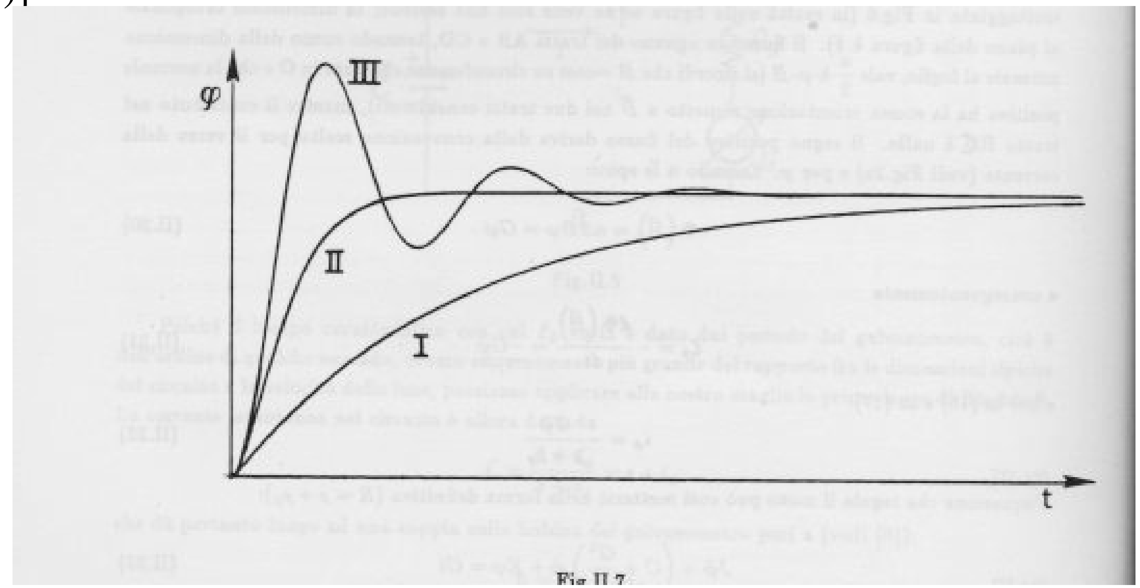
$$\varphi(t) = \frac{Gi}{E}[1 - e^{-\sigma_1 t}(\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2\sigma_2}e^{\sigma_2 t} + \frac{\sigma_2-\sigma_1}{2\sigma_2}e^{-\sigma_2 t})]$$

II) $\Delta=0$ critico

$$\varphi(t) = \frac{Gi}{E}[1 - e^{-\sigma_1 t}(1+\sigma_1 t)]$$

III) $\Delta<0$ sovracritico

$$\varphi(t) = \frac{Gi}{E}[1 - e^{-\sigma_1 t}(\cos\sigma_2 t + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} sen\sigma_2 t)]$$



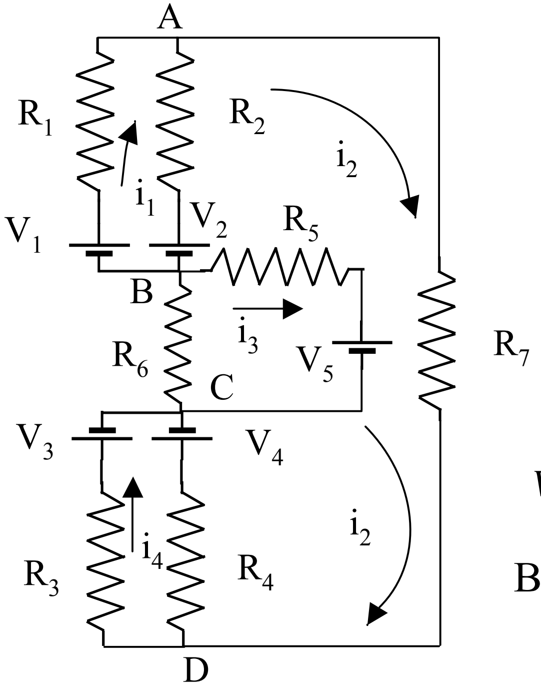
Si cerca di lavorare con G chiuso su $R=R_C$(critica), per avere tempi di risposta più brevi.
In realtà, se le oscillazioni intorno al valore asintotico sono piccole, si può lavorare in condizioni leggermente sovracritiche.

Da $\Delta=0$ si ha: $R_C = \frac{G^2}{2\sqrt{EI} - C}$ $\Omega \div K\Omega$

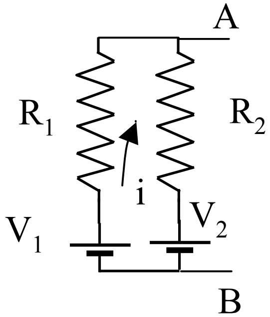
Esercizio 1

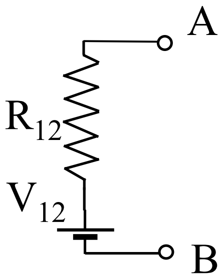
Utilizzando le leggi dei circuiti si studi il circuito in corrente continua dato, calcolando la tensione V_{AD} ai capi della resistenza R_7.

Dati: V_1=4 V, V_2=2.5 V, V_3=5 V, V_4=2.5 V, V_5=10 V, R_1=1 KΩ, R_2=500 Ω, R_3=800 Ω, R_4=500 Ω, R_5 =2 KΩ, R_6=500 Ω, R_7=1 KΩ.



circuito equivalente tra A e B:

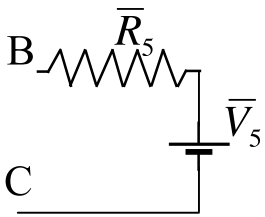




$$i = \frac{V_1 - V_2}{R_1 + R_2}$$

$$R_{12} = R_1 \parallel R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 333\ \Omega$$

$$V_{12} = V_2 + iR_2 = V_2 + \frac{V_1 - V_2}{R_1 + R_2} R_2 = \frac{V_2 R_1 + V_2 R_2 + V_1 R_2 - V_2 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{V_2 R_1 + V_1 R_2}{R_1 + R_2} = 3\ \text{V}$$

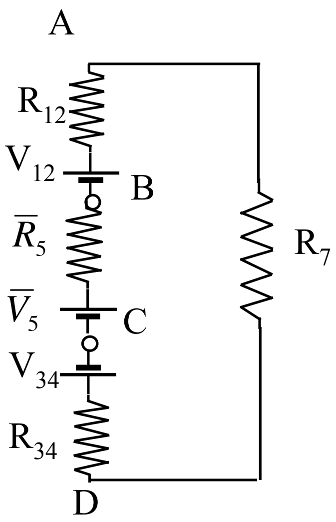


$$\overline{V}_5 = \frac{V_5}{R_5 + R_6} R_6 = 2\ V \quad \overline{R}_5 = R_5 \parallel R_6 = 400\ \Omega$$

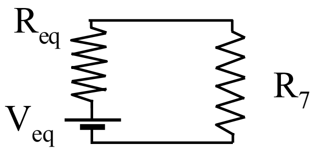
CD equivalente ad AB

$$V_{34} = \frac{V_4 R_3 + V_3 R_4}{R_3 + R_4} = 3.46\ \text{V} \qquad \text{R}_{34} = R_3 \parallel R_4 = 308\ \Omega$$

Esercizio 1 (b)



$$V_{AD} = V_{R_7} = \frac{V_{12} + \overline{V}_5 - V_{34}}{R_{12} + \overline{R}_5 + R_{34} + R_7} R_7$$



$$V_{eq} = V_{12} + \overline{V}_5 - V_{34} = 3 \text{ V} + 2 \text{ V - } 3.46 \text{ V} = 1.54 \text{ V}$$

$$R_{eq} = R_{12} + \overline{R}_5 + R_{34} = 333\ \Omega + 400\ \Omega + 308\ \Omega = 1041\ \Omega$$

V_{AD}=0.75 V I_{R7}=0.75 mA

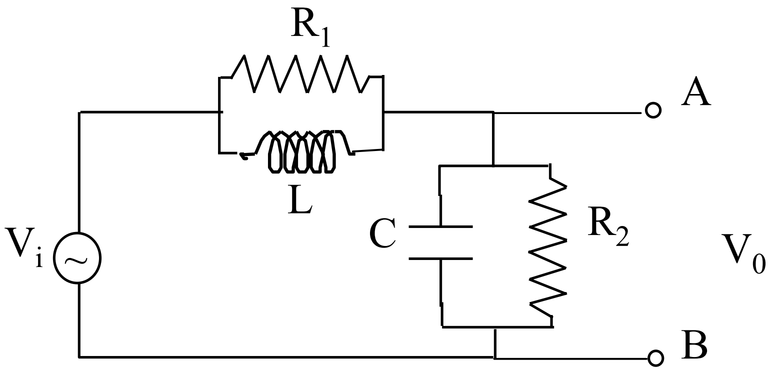
Metodo alternativo è quello delle equazioni alle maglie e dei determinanti:

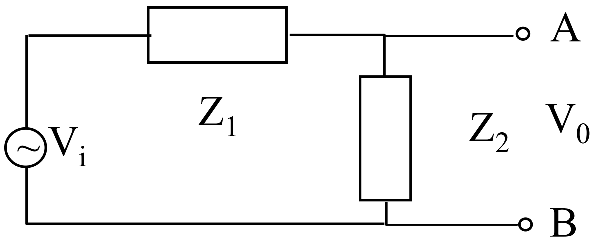
$$\begin{cases} V_1 - V_2 = i_1 R_1 + (i_1 - i_2) R_2 \\ V_2 - V_4 + V_5 = (i_2 - i_1) R_2 + (i_2 - i_3) R_5 + (i_2 - i_4) R_4 + i_2 R_7 \\ -V_5 = i_3 R_6 + (i_3 - i_2) R_5 \\ V_4 - V_3 = i_4 R_3 + (i_4 - i_2) R_4 \end{cases}$$

$$i_2 = \frac{\begin{vmatrix} R_1 + R_2 & V_1 - V_2 & 0 & 0 \\ -R_2 & V_2 - V_4 + V_5 & -R_5 & -R_4 \\ 0 & -V_5 & R_5 + R_6 & 0 \\ 0 & V_4 - V_3 & 0 & R_3 + R_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 & 0 & 0 \\ -R_2 & R_2 + R_4 + R_5 + R_7 & -R_5 & -R_4 \\ 0 & -R_5 & R_5 + R_6 & 0 \\ 0 & -R_4 & 0 & R_3 + R_4 \end{vmatrix}}$$

Esercizio 2

Il circuito in figura è alimentato da un generatore di fem alternata $V_i = v_i \cos\omega t$. Corrispondentemente, ai capi del parallelo formato da C ed R_2 sarà presente una ddp V_0 esprimibile come $V_0 = v_0 \cos(\omega t + \varphi)$.
Si calcolino, sulla base degli elementi del circuito dato, i valori dei parametri v_0 e φ.
Dati: v_i= 1 V, $\omega = 2\pi\, 10^3$ rad s^{-1}, R_1= 1 KΩ, R_2= 500 Ω, L= 100 mH, C=1 μF.





$$V_0 = \frac{V_i}{Z_1 + Z_2} Z_2 = \frac{V_i}{\frac{Z_1}{Z_2} + 1}$$

$$\frac{1}{Z_2} = \frac{1}{R_2} + j\omega C$$

$$\frac{1}{Z_1} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{j\omega L} = \frac{R_1 + j\omega L}{j\omega R_1 L}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} + 1 = \frac{j\omega R_1 L}{R_1 + j\omega L}\left(\frac{1}{R_2} + j\omega C\right) + 1 = \frac{j\omega L \frac{R_1}{R_2} - \omega^2 LCR_1 + R_1 + j\omega L}{R_1 + j\omega L} = \frac{R_1(1-\omega^2 LC) + j\omega L(1 + \frac{R_1}{R_2})}{R_1 + j\omega L}$$

$$V_0 = V_i \frac{R_1 + j\omega L}{R_1(1-\omega^2 LC) + j\omega L(1 + \frac{R_1}{R_2})}$$

$$\left|\frac{a + jb}{c + jd}\right| = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2}} \qquad \varphi = \mathrm{arctg}\frac{b}{a} - arctg\frac{d}{c}$$

$$v_0 = v_i \sqrt{\frac{R_1^2 + \omega^2 L^2}{R_1^2(1-\omega^2 LC)^2 + \omega^2 L^2 (1 + \frac{R_1}{R_2})^2}} = 338\ mV$$

$$\varphi = arctg\frac{\omega L}{R_1} - arctg\frac{\omega L(1 + \frac{R_1}{R_2})}{R_1(1-\omega^2 LC)} = 64.78\,° = 1.13 \text{ rad}$$