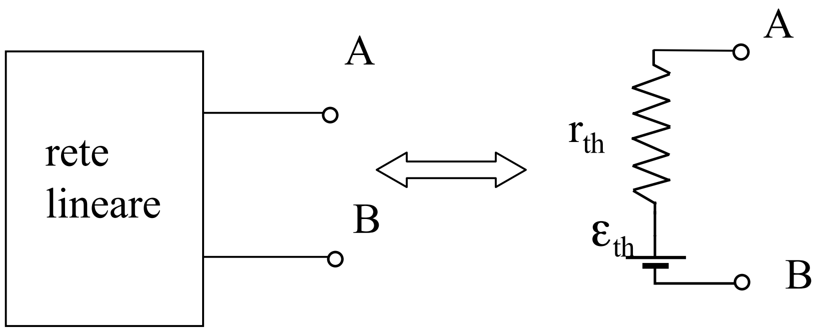
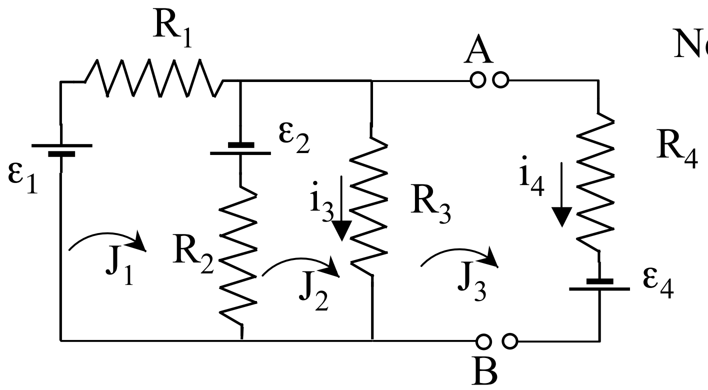
Circuito equivalente



Teorema di Thevenin:
Data una rete di elementi lineari e 2 punti A,B (morsetti) della rete, rispetto a questi, essa si comporta come un unico generatore reale di fem ε_{th} pari a d.d.p. che si misura tra A e B quando ad A,B non è attaccato niente e di resistenza interna r_{th} pari a quella che si misura tra A e B quando ogni fem è cortocircuitata.



Nel circuito precedente supponiamo di aggiungere il ramo con ε_4 e R_4.

i_4?

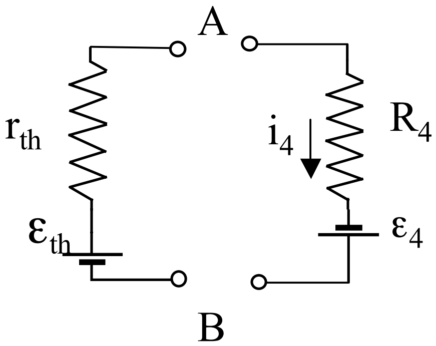
matrice
$$\begin{pmatrix} R_1+R_2 & -R_2 & 0 \\ -R_2 & R_2+R_3 & -R_3 \\ 0 & -R_3 & R_3+R_4 \end{pmatrix}$$

$$J_3 = i_4 = \frac{\begin{vmatrix} R_1+R_2 & -R_2 & \varepsilon_1+\varepsilon_2 \\ -R_2 & R_2+R_3 & -\varepsilon_2 \\ 0 & -R_3 & \varepsilon_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1+R_2 & -R_2 & 0 \\ -R_2 & R_2+R_3 & -R_3 \\ 0 & -R_3 & R_3+R_4 \end{vmatrix}} = \frac{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\begin{vmatrix} -R_2 & R_2+R_3 \\ 0 & -R_3 \end{vmatrix} + \varepsilon_2 \begin{vmatrix} R_1+R_2 & -R_2 \\ 0 & -R_3 \end{vmatrix} + \varepsilon_4 \begin{vmatrix} R_1+R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2+R_3 \end{vmatrix}}{(R_1+R_2)\begin{vmatrix} R_2+R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_3+R_4 \end{vmatrix} + R_2 \begin{vmatrix} -R_2 & 0 \\ -R_3 & R_3+R_4 \end{vmatrix}} =$$

continua

$$= \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)R_2R_3 - \varepsilon_2R_3(R_1 + R_2) + \varepsilon_4(R_1 + R_2)(R_2 + R_3) - \varepsilon_4R_2^2}{(R_1 + R_2)(R_2 + R_3)(R_3 + R_4) - (R_1 + R_2)R_3^2 - (R_3 + R_4)R_2^2} = \boxed{\frac{\varepsilon_1R_2R_3 - \varepsilon_2R_1R_3 + \varepsilon_4(R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3)}{R_1R_2R_3 + R_1R_2R_4 + R_1R_3R_4 + R_2R_3R_4}}$$

Usando il **Teorema di Thevenin** si può trovare prima r_{th} e ε_{th} e poi i_4



$$i_4 = \frac{\varepsilon_{th} + \varepsilon_4}{r_{th} + R_4} \qquad \varepsilon_{th} = i_3R_3 = \frac{\varepsilon_1R_2 - \varepsilon_2R_1}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3}R_3$$

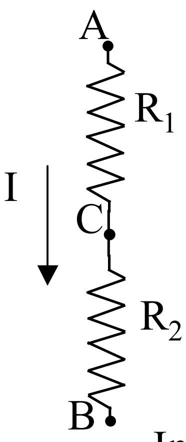
$$r_{th} = R_3 \parallel R_2 \parallel R_1 = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{R_1R_2R_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$$

e quindi

$$i_4 = \frac{\varepsilon_{th} + \varepsilon_4}{r_{th} + R_4} = \frac{\frac{\varepsilon_1R_2 - \varepsilon_2R_1}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3}R_3 + \varepsilon_4}{\frac{R_1R_2R_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} + R_4} = \frac{\varepsilon_1R_2R_3 - \varepsilon_2R_1R_3 + \varepsilon_4(R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3)}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3}\,\frac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}{R_1R_2R_3 + R_4(R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3)}$$

$$i_4 = \boxed{\frac{\varepsilon_1R_2R_3 - \varepsilon_2R_1R_3 + \varepsilon_4(R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3)}{R_1R_2R_3 + R_1R_2R_4 + R_1R_3R_4 + R_2R_3R_4}}$$

Tensione ai nodi



Altra applicazione della legge di Ohm: **regola partitore di tensione**

Vogliamo conoscere $V_C - V_B$

Dalla legge di Ohm

$$V_C - V_B = IR_2 = (V_A - V_B)\frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Finora si sono considerate incognite le correnti, ipotizzando di conoscere fem,R.

Altra possibilità è quella di trovare V conoscendo i ed R.

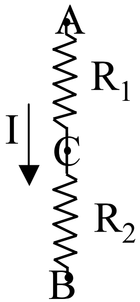
In questo caso le nostre equazioni saranno scritte in modo che i termini noti siano le correnti e la legge di Ohm sarà scritta nella forma

$$V\frac{1}{R} = I$$

Conviene introdurre d.d.p. dei vari nodi rispetto ad un certo nodo di riferimento (Tensione dei nodi); la corrente in un ramo sarà quindi espressa come differenza tra le tensioni dei due nodi posti alle estremità del ramo, moltiplicata per la conduttanza del ramo.

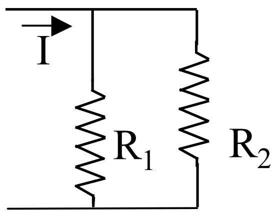
Queste correnti dei vari rami confluenti in un nodo daranno somma nulla secondo Kirchhoff, oppure uguaglieranno una eventuale corrente confluente in quel nodo, inviata da un dispositivo opportuno (generatore di corrente).

Parallelismo tra questa procedura e quella delle correnti di maglia.Coincidenza formale con tensioni sostituite da correnti, resistenze con conduttanze e fem con generatori di corrente. **Dualità**

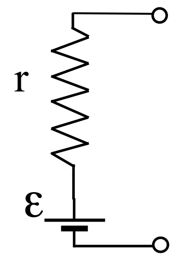


$V_A - V_B = I(R_1 + R_2)$

$$I = V\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

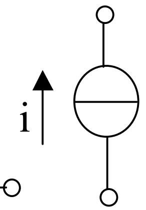


Generatore di corrente

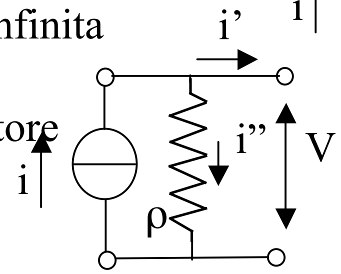


Si è visto finora che i generatori di reali di tensione ε si possono rappresentare come generatori ideali con una resistenza in serie r (resistenza interna del generatore).
Ciò comporta una limitazione nella corrente erogabile $i_{max} = \frac{\varepsilon}{r}$

Generatore ideale di corrente: dispositivo capace di inviare una corrente costante indipendentemente dal valore della tensione ai suoi terminali



Un generatore ideale di corrente "aperto", ovvero chiuso su una resistenza infinita avrà ai suoi capi una differenza di potenziale infinita.
In realtà un generatore reale di corrente si può schematizzare con un generatore ideale di corrente i con in parallelo la resistenza ρ.



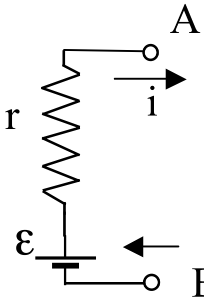
Con il generatore chiuso su di un carico e quando ai suoi capi c'è una d.d.p. V, la corrente inviata sul carico è:

$$i' = i - i'' = i - \frac{V}{\rho}$$

Dualità: la corrente erogata da un generatore reale di corrente coincide con quella erogata da un generatore Ideale quando la d.d.p. ai suoi capi è nulla; "dualmente" un generatore di fem reale presenta la fem del generatore ideale associato quando la corrente che lo attraversa è uguale a zero.

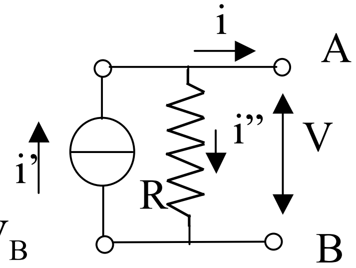
Reti equivalenti

Due reti sono equivalenti se un insieme di d.d.p. a loro applicate (o di correnti inviate) produce in Entrambe le reti lo stesso insieme di correnti (o tensioni).



Se il generatore di tensione eroga una corrente i, tra i morsetti si ha:

$$V_A - V_B = \varepsilon - ir$$



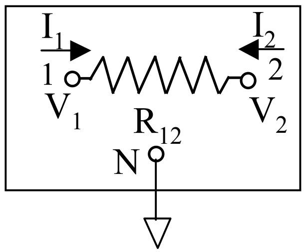
Se si ha un generatore di corrente, per avere la stessa i in uscita con V_A-V_B

$$i'' = \frac{V_A - V_B}{R} = \frac{\varepsilon - ir}{R}$$ ma è $$i' = i + i'' = i + \frac{V_A - V_B}{R} = i + \frac{\varepsilon}{R} - \frac{ir}{R}$$

Se deve valere ∀i deve essere $\boxed{R=r \quad i'=\varepsilon/r}$ Teorema di Norton

Funziona meglio quanto più piccola è V_A-V_B

Teorema di Miller



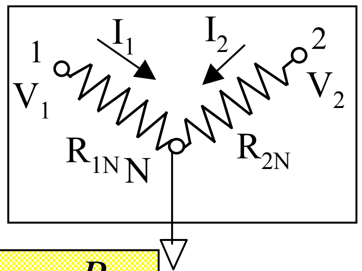
a

Rete passiva lineare e bilaterale

⟺

N=comune, riferimento

b



Indica quali devono essere $R_{1N}R_{2N}$per avere le reti equivalenti
Sia $k=V_2/V_1$

$$I_1 = \frac{V_1 - V_2}{R_{12}} = \frac{V_1(1-k)}{R_{12}} = \frac{V_1}{\frac{R_{12}}{1-k}}$$

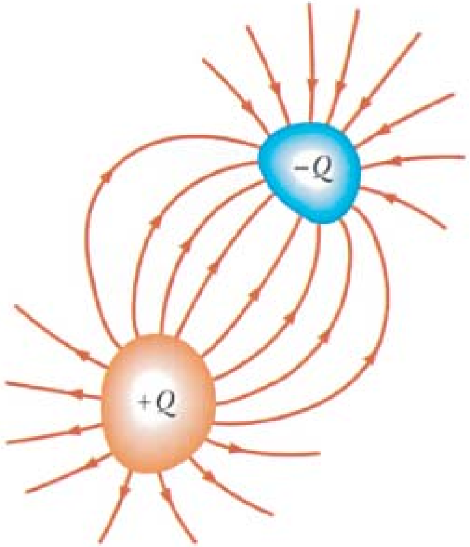
$$I_2 = -I_1 = \frac{-V_2(\frac{V_1}{V_2} - 1)}{R_{12}} = \frac{-V_2(\frac{1}{k} - 1)}{R_{12}} = \frac{V_2}{R_{12}\frac{k}{k-1}}$$

$$\boxed{R_{1N} = \frac{R_{12}}{1-k} \qquad R_{2N} = \frac{R_{12}k}{k-1}}$$

La presenza di R_{1N},R_{2N} tra 1-N,2-N Equivale al collegamento diretto 1-2

k<0

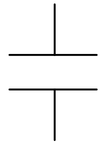
Capacità elettrica



Sistema di conduttori che possiedono cariche uguali ma di segno opposto

armature

condensatore



La presenza di cariche crea d.d.p. ΔV (tensione) fra i due conduttori

Empiricamente si trova che $Q \propto \Delta V$

Capacità di un condensatore è:

$$\boxed{C \equiv \frac{Q}{\Delta V}}$$

[C]= F Farad

μF-pF

C costante dipendente da forma e distanza conduttori

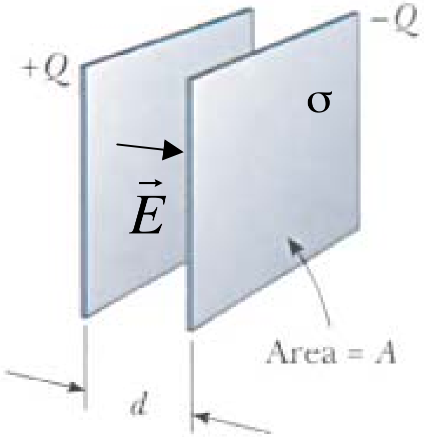
Si parla anche di capacità di singolo conduttore (C=Q/V)

Condensatore piano

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{A\varepsilon_0}$$

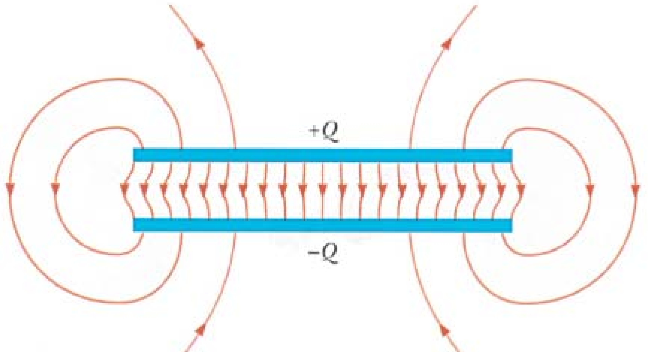
Tra le armature il campo E è uniforme quindi

$$\Delta V = E \cdot d = \frac{Q}{A\varepsilon_0} d$$



allora

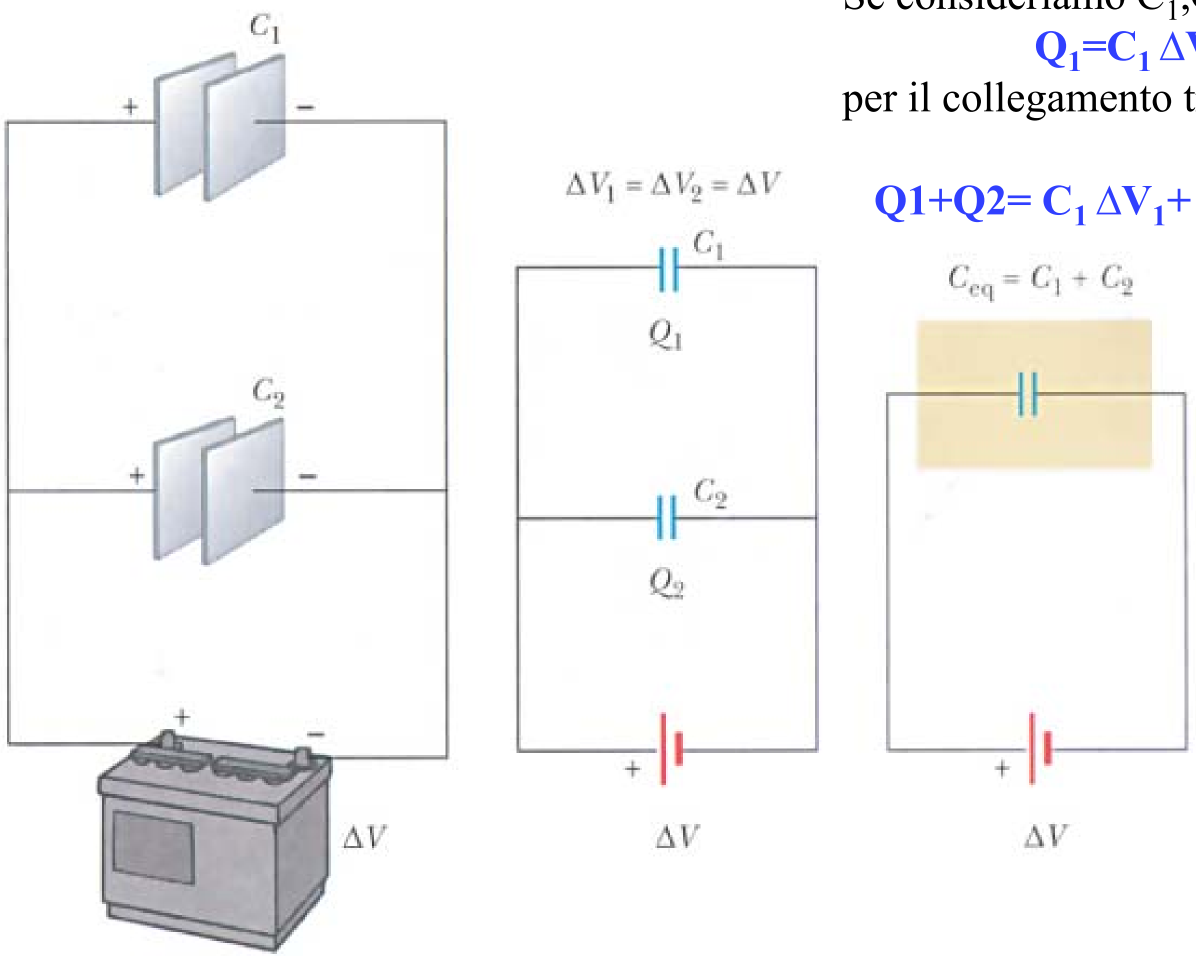
$$\boxed{C = \frac{Q}{\Delta V} = \varepsilon_0 \frac{A}{d}}$$



(a)

Ettore Focardi

condensatori in parallelo



Se consideriamo C_1,C_2 separatamente si ha:

$$Q_1=C_1\,\Delta V_1 \qquad\qquad Q_2=C_2\Delta V_2$$

per il collegamento tra i due è $\Delta V_1= \Delta V_2= \Delta V$

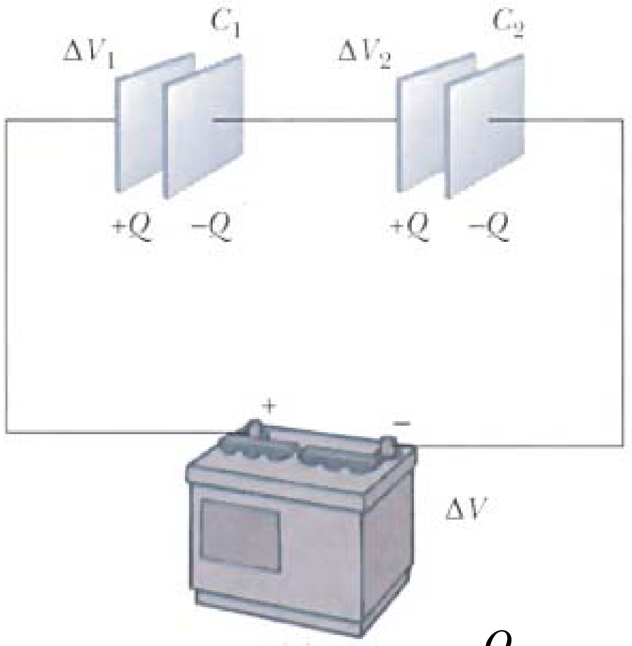
$$Q1+Q2= C_1\,\Delta V_1+ C_2\Delta V_2=(C_1+ C_2)\,\Delta V$$

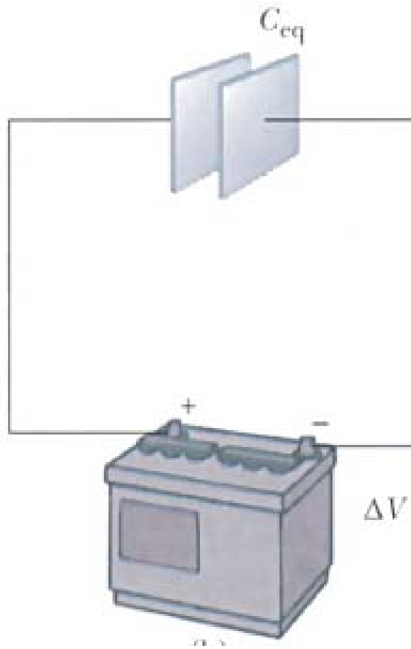
$$C_1+ C_2=Q/\Delta V=C$$

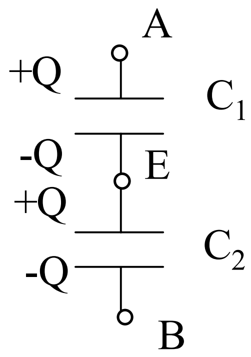
$$C= C_1+ C_2$$

La capacità di un sistema di condensatori in parallelo è > di quella dei singoli condensatori

Condensatori in serie







Manteniamo B a potenziale fisso (terra); E elettricamente isolato.

Si fornisce ad A carica +Q
Per induzione -Q va sulla seconda armatura di C_1 e per mantenere E scarico +Q va sulla 1ª armatura di C_2 mentre per induzione -Q va sulla seconda armatura di C_2

1° condensatore $V_A - V_E = \dfrac{Q}{C_1}$

2° condensatore $V_E - V_B = \dfrac{Q}{C_2}$

$$\longrightarrow V_A - V_B = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) = \frac{Q}{C}$$

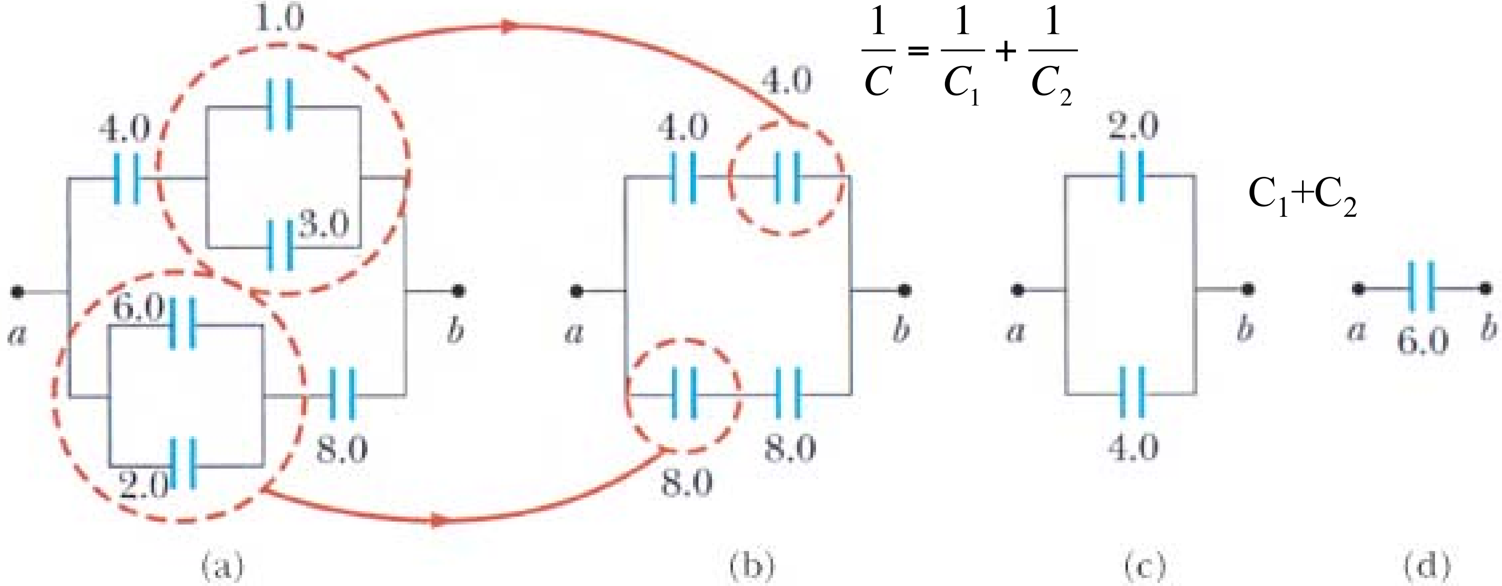
$$\boxed{\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

Calcolo sistema di capacità

C_1+C_2

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}$$

C_1+C_2



Energia in un condensatore carico

Un condensatore può accumulare energia. Se si toccano con un dito le armature di un condensatore carico, le cariche si trasferiscono da un'armatura all'altra attraverso il dito (si prende la scossa!). L'entità di questo dipende dalla capacità e dalla d.d.p.

Per calcolare l'energia del condensatore immaginiamo di prendere un piccola quantità di carica dq e di Portarla dal polo negativo al positivo applicando una certa forza e quindi alla fine si compie lavoro su dq. Quando dq è trasferita c'è una piccola d.d.p. tra le armature; per spostare un'ulteriore carica attraverso questo potenziale deve essere fatto lavoro. Via via che le cariche si spostano aumenta la d.d.p. e sarà richiesto sempre più lavoro.
In un certo istante del processo di carica sia q quella presente sulle armature, sarà $\Delta V=q/C$
Il lavoro per spostare dq da armatura con -q ad armatura con q è

$$dL=\Delta V\, dq=(q/C)dq$$

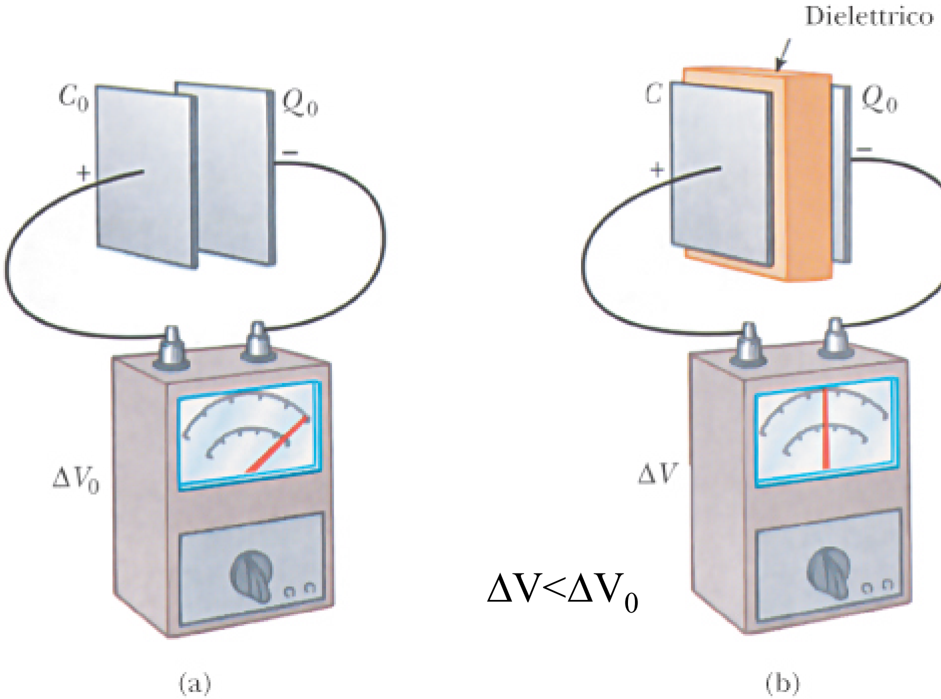
Il lavoro totale per caricare il condensatore da q=0 a q=Q è

$$L=\int_0^Q \frac{q}{C}dq=\frac{1}{C}\int_0^Q q\,dq=\frac{Q^2}{2C}$$

Il lavoro fatto per caricare il condensatore appare sotto forma di energia potenziale U nel condesatore

$$U=\frac{Q^2}{2C}=\frac{1}{2}Q\Delta V=\frac{1}{2}C(\Delta V)^2$$

Condensatori con dielettrici



Dielettrico materiale non conduttore

Se introdotto tra le armature **C aumenta** di un fattore ε_r (costante dielettrica)

$$C = \varepsilon_r C_0$$

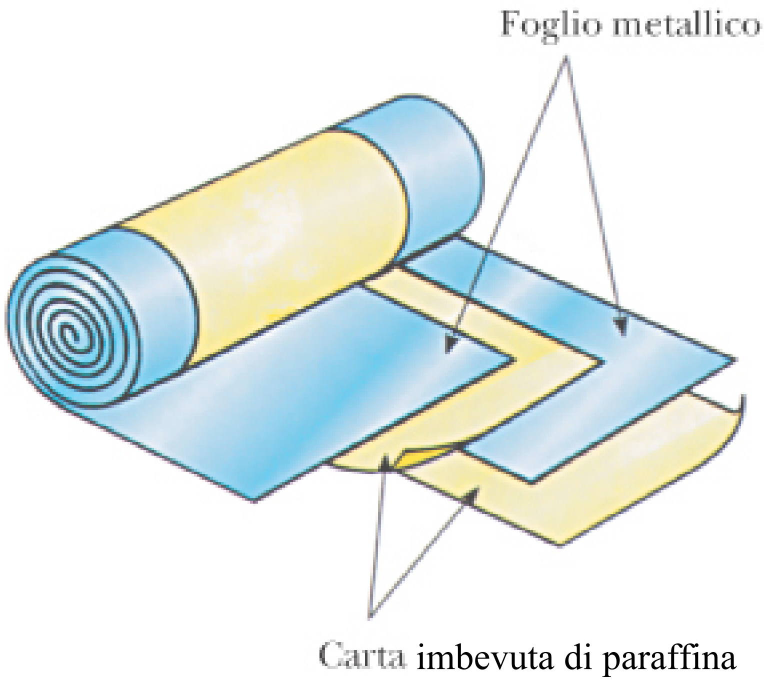
Condensatore piano $$C = \varepsilon_r \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

C aumenta diminuendo d però fino a quando non si innesca scarica elettrica attraverso il dielettrico

Rigidità dielettrica (max ΔV per un certo d)

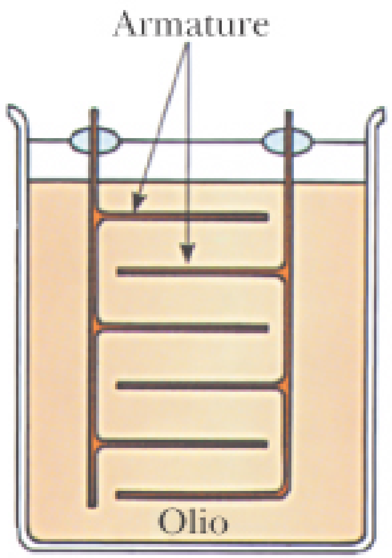
Materiale	ε_r	rigidità V/m
Aria	1.00059	3×10^6
Carta	3.7	16×10^6
Vetro pirex	5.6	14×10^6

Tipi di condensatori



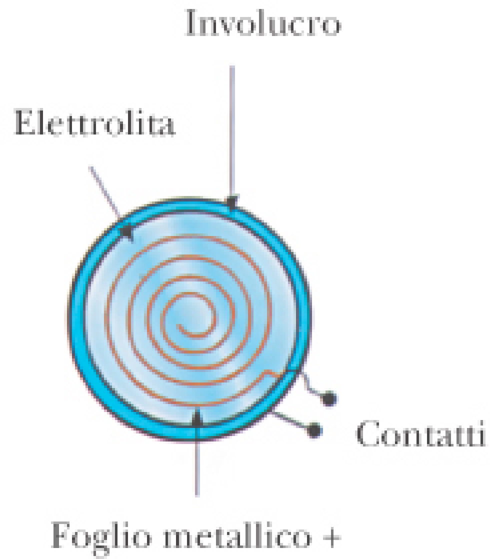
(a)

Alte tensioni



(b)

Elettrolitico
per grandi accumuli carica



(c)

Per piccoli condensatori si usano materiali ceramici

Sottile strato di dielettrico
su metallo, grande capacità
Attenzione alla polarità