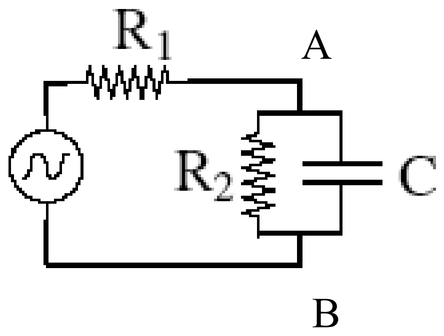
Esercizi

1) Il circuito in figura e' alimentato da un generatore di tensione sinusoidale di ampiezza V=2 V. Gli altri componenti hanno i valori R_1=100 Ω, R_2=200 Ω, C=10 μF. Si determini la potenza dissipata sulla resistenza R_2 quando il generatore funziona alle frequenze ν_1=100 Hz, ν_2=1000 Hz, spiegando qualitativamente il risultato.



Si considera il parallelo $R_2 \| C$

$$\frac{1}{Z_p} = \frac{1}{R_2} + j\omega C = \frac{1 + j\omega R_2 C}{R_2}$$

La corrente di maglia e':

$$I = \frac{V}{R_1 + Z_p} = \frac{1}{Z_p} \frac{V}{1 + \frac{R_1}{Z_p}}$$

$$\frac{1}{1 + \frac{R_1}{Z_p}} = \frac{1}{(1 + \frac{R_1}{R_2}) + j\omega R_1 C}$$

$$|Z_c| = \frac{1}{\omega C} = \begin{matrix} 159\Omega & (\nu_1) \\ 15.9\Omega & (\nu_2) \end{matrix}$$

$$I = \frac{(\frac{1}{R_2} + j\omega C)V}{(1 + \frac{R_1}{R_2}) + j\omega R_1 C}$$

$$I_0 = |I| = V_0 \sqrt{\frac{\frac{1}{R_2^2} + \omega^2 C^2}{(\frac{R_1 + R_2}{R_2})^2 + \omega^2 R_1^2 C^2}} = V_0 \sqrt{\frac{1 + \omega^2 R_2^2 C^2}{(R_1 + R_2)^2 + \omega^2 R_1^2 R_2^2 C^2}} = \begin{matrix} 9.87 mA, (\nu_1) \\ 19.5 mA, (\nu_2) \end{matrix}$$

La tensione ai capi del parallelo e':

$$V_p = I Z_p = \frac{V}{1 + \frac{R_1}{Z_p}} = \frac{V}{(\frac{R_1 + R_2}{R_2}) + j\omega R_1 C} \qquad V_{p_0} = \frac{V_0}{\sqrt{(\frac{R_1 + R_2}{R_2})^2 + (\omega R_1 C)^2}}$$

Gli sfasamenti sono:

$$\varphi_I = arctg(\omega R_2 C) - arctg(\frac{\omega R_1 R_2 C}{R_1 + R_2})$$

$$\varphi_{V_p} = -arctg(\frac{\omega R_1 R_2 C}{R_1 + R_2})$$

Nel nodo A si ha $I = I_{R2} + I_C$ e nei due rami $I_{R2} R_2 = V_p$, $I_C Z_C = V_p$

$$I_C = \frac{I_{R_2} R_2}{Z_C} \qquad I_{R_2} + \frac{R_2}{Z_C} I_{R_2} = I \qquad (1 + \frac{R_2}{Z_C}) I_{R_2} = I \qquad I_{R_2} = \frac{I}{1 + \frac{R_2}{Z_C}} = \frac{I}{1 + j\omega R_2 C}$$

$$I_{0R_2} = \frac{I_0}{\sqrt{1 + (\omega R_2 C)^2}} = \begin{matrix} 6.14 mA & (\nu_1) \\ 1.55 mA & (\nu_2) \end{matrix} \qquad \varphi_{I_{R_2}} = \varphi_I - arctg(\omega R_2 C) = \varphi_{V_p}$$

La potenza dissipata su R_2 puo' essere scritta come: $\overline{W} = \frac{I_{0R_2}^2 R_2}{2} = \frac{V_{0p}^2}{2R_2}$

$$\frac{I_{0R_2}^2 R_2}{2} = \frac{I_0^2 R_2}{2[1 + (\omega R_2 C)^2]} = V_0^2 \frac{\cancel{1 + (\omega R_2 C)^2}}{(R_1 + R_2)^2 + (\omega R_1 R_2 C)^2} \frac{R_2}{2[\cancel{1 + (\omega R_2 C)^2}]}$$

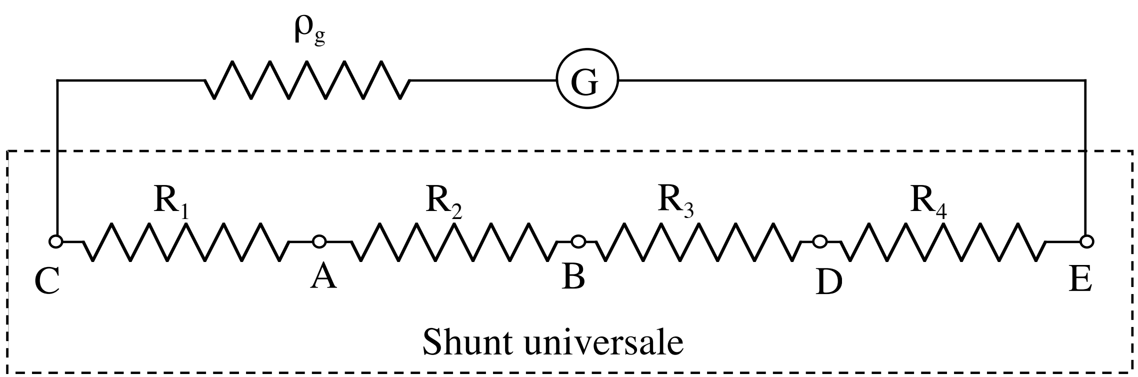
$$\overline{W}_{R_2}(\nu_1) = 3.8 \cdot 10^{-3} W \qquad \overline{W}_{R_2}(\nu_2) = 2.4 \cdot 10^{-4} W$$

A frequenza piu' elevata la potenza dissipata su R_2 diminuisce poiche' diminuisce la corrente che circola in R_2 per la diminuzione di impedenza del condensatore.

2) Un amperometro a 4 portate e' costituito da un galvanometro con ρ_g=5 Ω. Ai capi del galvanometro e' inserito un dispositivo, detto "Shunt Universale", costituito da una serie di resistenze, di valore multiplo di 'R', che permette di variare il fondo scala misurabile con lo stesso amperometro.

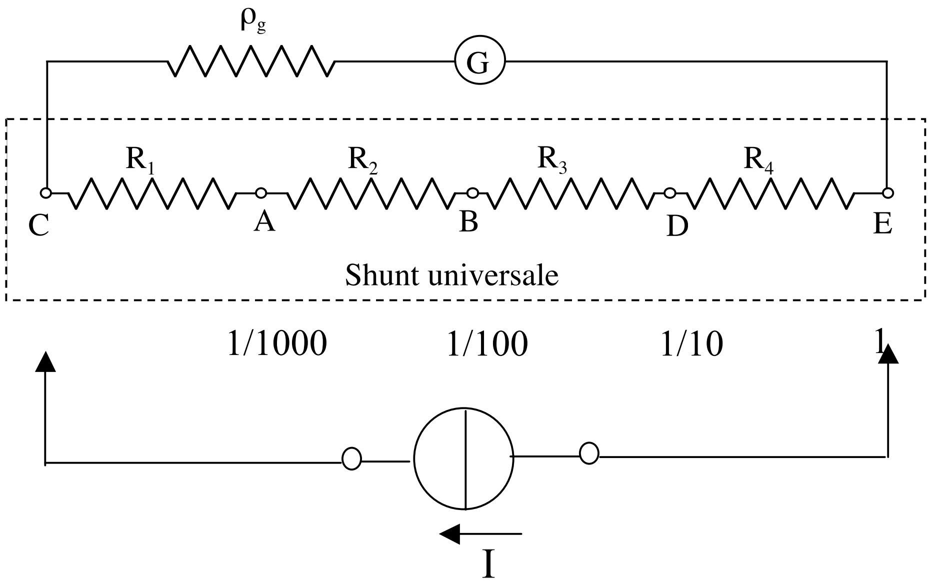
a)Determinare la disposizione delle resistenze R_1,R_2,R_3,R_4 in funzione di R in modo che le portate differiscano di un fattore 10 l'una dalla precedente e dare una giustificazione della " universalita' '' per lo shunt;

b)per l'ottimizzazione di risposta del galvanometro si cerca di farlo lavorare in condizioni critiche; tenuto conto che la resistenza critica in questo caso e' R_c=105 Ω, trovare il corrispondente valore di R.



Dato che si hanno 4 portate che differiscono di un fattore 10, saranno 1,1/10,1/100,1/1000; si collega all'amperometro un generatore di corrente tra il terminale comune C e il terminale E (con portata 1) e successivamente tra C e gli altri terminali, ottenendo:

a) C-E: i_g corrente nel galvanometro



partitore di corrrente

$$i_g = I\frac{R_1+R_2+R_3+R_4}{R_1+R_2+R_3+R_4+\rho_g} = 1\cdot i_g = i_{g_1}$$

C-D:

$$i_{g_{10}} = I\frac{R_1+R_2+R_3}{R_1+R_2+R_3+R_4+\rho_g} = \frac{1}{10}i_{g_1}$$

C-B:

$$i_{g_{100}} = I\frac{R_1+R_2}{R_1+R_2+R_3+R_4+\rho_g} = \frac{1}{100}i_{g_1}$$

C-A:

$$i_{g_{1000}} = I\frac{R_1}{R_1+R_2+R_3+R_4+\rho_g} = \frac{1}{1000}i_{g_1}$$

poniamo: $R_1=n_1R$, $R_2=n_2R$, $R_3=n_3R$, $R_4=n_4R$, dalle precedenti si puo' scrivere:

$$n_1+n_2+n_3+n_4=1000 \quad \rightarrow \quad n_4=900$$
$$n_1+n_2+n_3=100 \quad \rightarrow \quad n_3=90$$
$$n_1+n_2=10 \quad \rightarrow \quad n_2=9$$
$$n_1=1$$

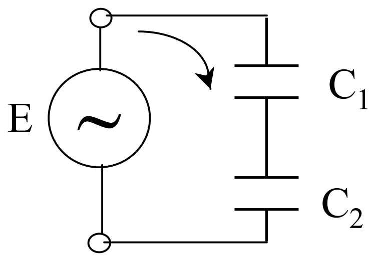
I rapporti delle correnti non dipendono da ρ_g, quindi lo 'shunt' puo' essere utilizzato con qualunque G, da qui l'universalita'

b) Se G e' chiuso su $R_c \rightarrow$ $1000R+\rho_g=R_C \rightarrow 1000R+5\Omega=105\Omega$

$R=(100/1000)\Omega=0.1\ \Omega$

3) Un circuito e' costituito dai condensatori C_1=60 nF, C_2=90 nF collegati in serie con una sorgente di f.e.m. oscillante E=1.8 sen (120 πt). Trovare:

a) la carica su ciascun condensatore in funzione del tempo
b) a quale istante la carica sui condensatori e' massima e quanto vale.



Legge di Kirchhoff per la maglia:

$$E - \frac{Q_1}{C_1} - \frac{Q_2}{C_2} = 0$$

per conservazione della carica $Q_1 = Q_2 = Q$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

$$E - \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)Q = 0 \quad \rightarrow \quad Q = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} E$$

$C = 3.6\ 10^{-8}$ F= 36 nF

a) $Q(t) = 3.6\ 10^{-8}$ F 1.8 sen(120πt) V= $6.48\ 10^{-8}$ sen(120πt) C

b) Per trovare il massimo si usa dQ/dt=0

$$dQ/dt = 6.48\ 10^{-8} \cos(120\pi t)\ 120\pi = 0 \ \rightarrow\ 120\pi t = \pi/2 \ \rightarrow\ t = 1/240 \text{ s} = 4.2 \text{ ms}$$

$$Q(t)max = 6.48\ 10^{-8} \ \text{C}$$

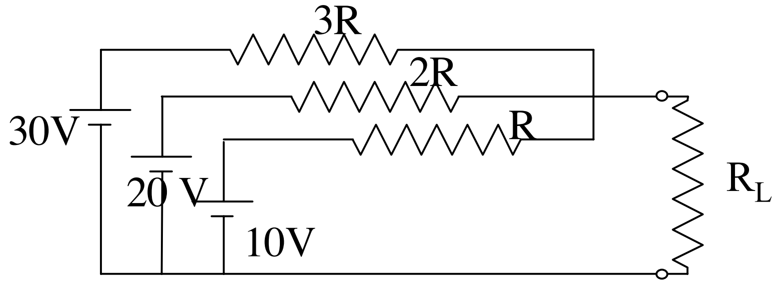
$V_1 = Q/C_1 = (6.48\ 10^{-8}/6\ 10^{-8})$sen(120πt)=1.08 sen(120πt) V

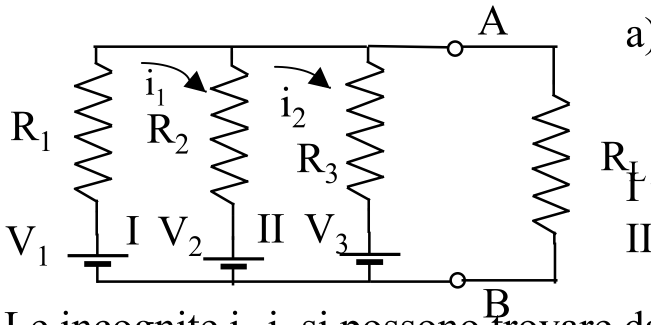
$V_2 = Q/C_2 = (6.48\ 10^{-8}/9\ 10^{-8})$sen(120πt)=0.72 sen(120πt) V

4)Dato il circuito in continua in figura, determinare:

a) la tensione ai capi del carico;

b) trovare la relazione tra R_L e R_{eq} che massimizza la potenza fornita al carico; se R_L=40 Ω, quanto deve essere il valore di R?





a) Per trovare la tensione ai capi del carico (tra A e B), supponiamo il carico R_L staccato e quindi la tensione equivalente V_T dovuta alle due maglie si trova dalle equazioni:

I maglia $V_1-V_2=R_1i_1-R_2i_2 = V_1-V_2$

II maglia $V_2-V_3= (i_2-i_1)R_2+i_2R_3$

$$\begin{cases} (R_1+R_2)i_1 - R_2 i_2 = V_1 - V_2 \\ -R_2 i_1 + (R_2+R_3)i_2 = V_2 - V_3 \end{cases}$$

Le incognite i_1,i_2 si possono trovare dal calcolo dei determinanti:

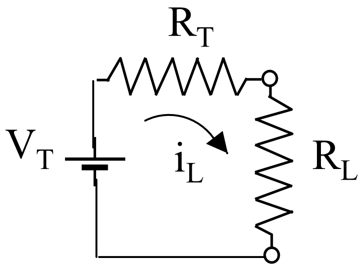
$$i_1 = \frac{\begin{vmatrix} V_1-V_2 & -R_2 \\ V_2-V_3 & R_2+R_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1+R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2+R_3 \end{vmatrix}} = \frac{(V_1-V_2)(R_2+R_3)+(V_2-V_3)R_2}{(R_1+R_2)(R_2+R_3)-R_2^2} = \frac{V_1R_2 - V_2R_2 + V_1R_3 - V_2R_3 + V_2R_2 - V_3R_2}{R_1R_2 + R_2^2 + R_2R_3 + R_1R_3 - R_2^2}$$

$$i_2 = \frac{\begin{vmatrix} R_1+R_2 & V_1-V_2 \\ -R_2 & V_2-V_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1+R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2+R_3 \end{vmatrix}} = \frac{(V_2-V_3)(R_1+R_2)+(V_1-V_2)R_2}{(R_1+R_2)(R_2+R_3)-R_2^2} = \frac{V_2R_1 - V_3R_1 + V_2R_2 - V_3R_2 + V_1R_2 - V_2R_2}{R_1R_2 + R_2^2 + R_2R_3 + R_1R_3 - R_2^2}$$

$$i_1 = \frac{(V_1-V_2)R_3 + (V_1-V_3)R_2}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3} \qquad i_2 = \frac{(V_1-V_3)R_2 + (V_2-V_3)R_1}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3} \qquad V_T = V_3 + i_2R_3$$

$$V_T = V_3 + i_2 R_3 = V_3 + \frac{(V_1 - V_3)R_2 + (V_2 - V_3)R_1}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3} R_3 = \frac{V_3R_1R_2 + V_3R_2R_3 + V_3R_3R_1 + V_1R_2R_3 - V_3R_2R_3 + V_2R_1R_3 - V_3R_1R_3}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3}$$

ricordando che $R_1=3R$, $R_2=2R$, $R_3=R$



$$V_T = \frac{V_3R_1R_2 + V_1R_2R_3 + V_2R_1R_3}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3} = \frac{2R^2V_1 + 3R^2V_2 + 6R^2V_3}{6R^2 + 2R^2 + 3R^2} = \frac{180}{11} V = 16.4 V$$

$$R_T = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)^{-1} = \frac{R_1R_2R_3}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3} = \frac{3R \cdot 2R \cdot R}{6R^2 + 2R^2 + 3R^2} = \frac{6}{11} R$$

$$i_L = \frac{V_T}{R_T + R_L} \qquad \mathrm{V_L} = i_L R_L = \frac{V_T}{R_T + R_L} R_L$$

Potenza fornita al carico:

$$P = i_L^2 R_L = \frac{V_T^2}{(R_T + R_L)^2} R_L$$

Per un dato circuito, V_T,R_T sono fissati, quindi P varia con R_L; per massimizzare la potenza si calcola dP/dR_L

$$\frac{dP}{dR_L} = V_T^2 \left[\frac{1}{(R_L + R_T)^2} + \frac{R_L(-2)}{(R_L + R_T)^3}\right] = V_T^2 \frac{R_T - R_L}{(R_L + R_T)^3} = 0 \longrightarrow \quad R_T=R_L \quad \frac{d^2P}{dR_L^2}(R_T = R_L) = \frac{V_T^2}{(2R_L)^2}(-2R_T) < 0 \quad \text{max}$$

Se $R_L=40\ \Omega$ $R_T=R_L$ $\longrightarrow$ $R=(11/6)40\ \Omega= 73\ \Omega$ $V_L=8.2$ V