Alcuni risultati sugli amplificatori operazionali

Quanto segue **non** sostituisce la trattazione in *Esperimenti di elettricità e magnetismo* del prof. Giacomo Poggi, che rimane il testo di riferimento, ma riporta alcune considerazioni che faccio durante le lezioni e soprattutto presenta i calcoli relativi ai circuiti degli amplificatori in una forma più semplice di quella che si trova nel testo succitato. Sono debitore per gran parte di questo materiale al prof. Marcello Carlà, che a suo tempo mi ha passato gli appunti da lui utilizzati quando, contitolare del corso, spiegava l'argomento.

1. La reazione negativa

Possiamo introdurre il concetto generale di reazione negativa attraverso lo schema di fig. 1.1.

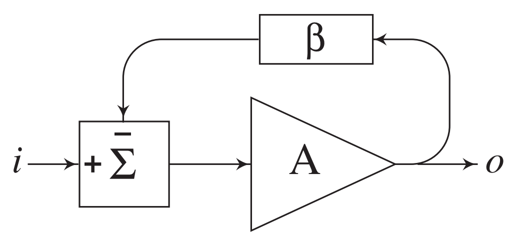

Fig. 1.1 Schema astratto del funzionamento della reazione negativa

Questo disegno non deve essere inteso come uno schema elettrico, ma come la rappresentazione delle modificazioni che una grandezza fisica qualsiasi subisce attraverso dispositivi di somma e di moltiplicazione per fattori costanti. Essi sono costituiti da un amplificatore che moltiplica la grandezza in ingresso per un fattore A, con $A \gg 1$, un dispositivo (che in pratica sarà passivo, ossia non avrà bisogno, a differenza dell'amplificatore, di un apporto di energia dall'esterno) che moltiplica l'ingresso per un fattore β, con $0 < \beta < 1$ e infine un sommatore che riproduce in uscita la differenza fra la grandezza all'ingresso "+" e quella all'ingresso "−".[1] A regime l'uscita o dell'amplificatore sarà uguale all'ingresso del medesimo moltiplicato per A, cioè

$$o = A(i - \beta o) \qquad (A\beta + 1)o = A\,i \qquad o = \frac{A}{1 + A\beta}\,i \tag{1.1}$$

[1] In letteratura si trovano descrizioni simili che variano rispetto al segno di β e al fatto che il sommatore esegua una somma o una differenza. Il significato fisico comunque non cambia.

Il caso interessante si ha quando $A\beta \gg 1$. In queste condizioni

$$o \simeq \frac{1}{\beta} i \qquad A_f \simeq \frac{1}{\beta} \qquad \text{se} \qquad A\beta \gg 1 \tag{1.2}$$

Il guadagno (reazionato) dell'oggetto, definito come o/i, diventa pari a $A_f = 1/\beta$. con $(1/\beta) \ll A$. Il termine $A\beta$ che compare in molte espressioni viene chiamato *guadagno d'anello*, nome appropriato visto che si tratta del fattore per cui il segnale viene moltiplicato quando attraversa l'amplificatore e quindi, passando per la linea di reazione, ritorna al suo ingresso chiudendo il ciclo. Introducendo la reazione negativa abbiamo rinunciato al grande guadagno dell'amplificatore ma in cambio, nei nostri circuiti, avremo una serie notevole di vantaggi:

1- il valore del guadagno non è più quello A dell'amplificatore che, come sappiamo, varia apprezzabilmente con la temperatura e da esemplare a esemplare anche in uno stesso modello, ma è fissato da un circuito passivo che può essere calibrato con precisione e costruito con componenti stabili rispetto alle variazioni di temperatura e all'invecchiamento.

2- una variazione anche sostanziale di A, purché rimangano rispettate le condizioni $A \gg 1$, $A\beta \gg 1$, produrrà variazioni minime del guadagno. Supponiamo ad esempio di avere $A \simeq 10^5$ e $\beta = 1/10$. Dalla (1.1) potremo scrivere

$$A_f = \frac{1}{\beta} \frac{1}{1 + \frac{1}{A\beta}} \simeq \frac{1}{\beta} \left(1 - \frac{1}{A\beta}\right) \tag{1.3}$$

Con i nostri dati $1/(A\beta) \simeq 10^{-4}$ e quindi il guadagno differirà da quello ideale $1/\beta$ non più dello 0.01%. Se anche sostituissimo l'amplificatore con uno avente un guadagno pari a un decimo del primo, $A \simeq 10^4$, il guadagno reazionato rimarrebbe entro lo 0.1% quello ideale.

3- Sappiamo che il guadagno dell'amplificatore non reazionato varia con la frequenza dei segnali, comportandosi (almeno approssimativamente) come un filtro passa-basso

$$A(\nu) = \frac{A_0}{1 + j\frac{\nu}{\nu_c}} \tag{1.4}$$

Introducendo $A(\nu)$ nell'espressione non approssimata del guadagno reazionato che si ricava dalla (1.1) avremo:

$$A_f(\nu) = \frac{A(\nu)}{1 + A(\nu)\beta} = \frac{A_0}{1 + A_0\beta + j\frac{\nu}{\nu_c}} \simeq \frac{1}{\beta}\,\frac{1}{1 + j\frac{\nu}{A_0\beta\nu_c}} = \frac{A_{0f}}{1 + j\frac{\nu}{\nu_{cf}}} \qquad (1.5)$$

dove si è compiuta la sola approssimazione di trascurare 1 rispetto a $A_0\beta$. Si vede quindi che anche il guadagno reazionato ha l'andamento in frequenza di un filtro passa-basso, ma la frequenza di taglio è $\nu_{cf} = A_0\beta\nu_c$, cioè moltiplicata rispetto a quella originale di un fattore pari al guadagno d'anello. In particolare, confrontiamo il prodotto *guadagno a bassa frequenza* $\times$ *frequenza di taglio* per il circuito non reazionato e per quello reazionato

$$\text{non reaz.:} \quad A_0\nu_c \qquad \text{reaz.:} \quad A_{0f}\nu_{cf} = \frac{1}{\beta}\,A_0\beta\nu_c = A_0\nu_c \qquad (1.6)$$

vediamo che rimane invariato nell'applicare la reazione. Tale prodotto, detto comunemente *prodotto guadagno–banda passante* è quindi una caratteristica intrinseca dell'amplificatore, e non dipende dalla quantità di reazione utilizzata. Data l'approssimazione del nostro modello, l'uguaglianza non vale in modo rigoroso, ma il fatto che il prodotto si mantenga dello stesso ordine di grandezza quando i due fattori variano di svariati ordini è comunque fisicamente significativo.

4- Come vedremo fra poco, l'uso della reazione negativa cambia drasticamente il valore dell'impedenza d'ingresso e di uscita dell'amplificatore, nella direzione che approssima un amplificatore ideale.

2. La configurazione non invertente

In fig. 2.1 è riportato lo schema di un amplificatore reazionato montato in questa configurazione, insieme al suo circuito equivalente. Il nome *non invertente* deriva dal fatto che il segnale d'uscita conserva la polarità di quello d'ingresso.

2.1 Il guadagno reazionato

Calcoliamo prima di tutto il guadagno reazionato A_f introducendo approssimazioni che avvicinano l'amplificatore ad uno ideale: consideriamo $R_o = 0$ e $R_i \to \infty$. In questo modo $i_s = 0$ e $V_{out} = V_o$. È abbastanza facile riconoscere in questo schema semplificato l'esatta situazione della fig. 1.1: la rete di reazione formata da R_1 e R_2 riporta all'ingresso v^- una frazione $\beta = R_2/(R_1 + R_2)$ del segnale d'uscita. I due ingressi svolgono il ruolo del sommatore nello schema di fig. 1.1 e pertanto avremo $A_f = 1/\beta = (R_1 + R_2)/R_2$.

Vediamo come si modifica la situazione eliminando l'approssimazione $R_i \to \infty$ ma

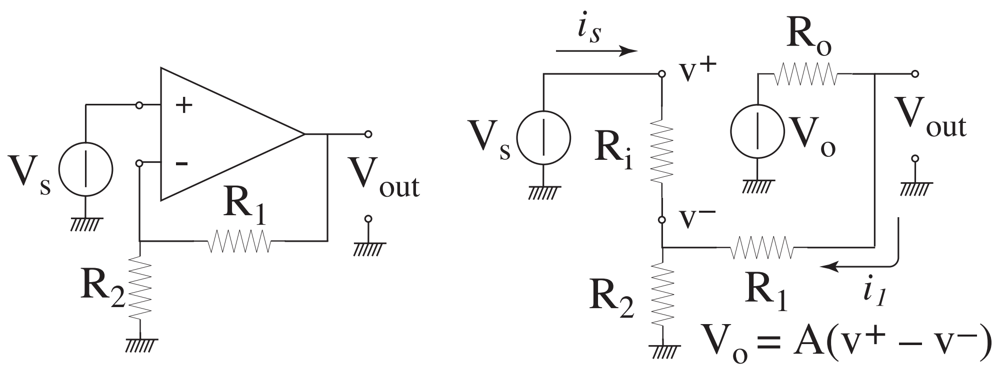

Fig. 2.1 Schema e circuito equivalente di amplificatore reazionato in configurazione non invertente.

mantenendo ancora $R_o = 0$. Avremo $V_{out} = V_o$ e $v^+ = V_s$. Sarà quindi:

$$A_f = \frac{V_o}{V_s} = \frac{A(v^+ - v^-)}{v^+} = A\left(1 - \frac{v^-}{v^+}\right) \tag{2.1}$$

Per determinare l'amplificazione reazionata dovremo quindi calcolare il rapporto v^-/v^+. Considerando le correnti i_s in uscita da V_s e i_1 nel ramo di R_1, con i versi come in figura, avremo[2]

$$\begin{cases} i_s = \dfrac{v^+ - v^-}{R_i} \\ i_1 = \dfrac{V_o - v^-}{R_1} = \dfrac{Av^+ - (A+1)v^-}{R_1} \\ \dfrac{v^-}{R_2} = i_s + i_1 \end{cases} \tag{2.2}$$

Sostituendo i valori di i_1 e i_s trovati nella terza delle (2.2) si ottiene

$$\frac{v^+ - v^-}{R_i} + \frac{Av^+ - (A+1)v^-}{R_1} = \frac{v^-}{R_2} \tag{2.3}$$

Da questa equazione si ricava immediatamente l'espressione da sostituire nella (2.1) e si ottiene

$$A_f = A\left(1 - \frac{v^-}{v^+}\right) = A\frac{R_1 + R_2}{R_1 + (A+1)R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_i}} \tag{2.4}$$

[2] In generale in questo tipo di calcoli è conveniente esprimere le correnti a partire dalle cadute di potenziale su impedenze note e quindi eliminare le correnti stesse dalle equazioni.

Con i valori tipici delle caratteristiche dell'amplificatore (A, R_i) e delle resistenze R_1, R_2 nell'espressione al denominatore il termine di gran lunga dominante risulta quello che contiene il fattore $A + 1$, rispetto al quale gli altri due si possono trascurare. Avremo quindi

$$A_f \simeq A\frac{R_1 + R_2}{(A+1)R_2} \simeq \frac{R_1 + R_2}{R_2} = \frac{1}{\beta} \tag{2.5}$$

L'uguaglianza approssimata è stata introdotta per rispetto della matematica, ma in pratica si può considerare un'uguaglianza a tutti gli effetti. Quindi vediamo che la presenza di una resistenza finita R_i fra gli ingressi dell'amplificatore non altera il valore del guadagno reazionato.

Si può quindi notare che

$$\begin{aligned} v^+ - v^- &= \frac{V_o}{A} = \frac{V_s}{A\beta} \ll V_s \\ i_s &= \frac{v^+ - v^-}{R_i} = \frac{V_s}{A\beta R_i} \\ i_1 &\simeq \frac{A(v^+ - v^-)}{R_1} = \frac{V_o}{R_1} = \frac{V_s}{\beta R_1} \qquad i_s \ll i_1 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Vediamo quindi che

1- la differenza di potenziale fra i due ingressi dell'amplificatore reazionato è molto minore della tensione d'ingresso V_s, e quindi anche di V_o e delle cadute su R_1 e R_2.

2- la corrente i_s che attraversa la resistenza d'ingresso R_i è trascurabile rispetto alla corrente i_1 erogata dal generatore d'uscita.

Queste sono due caratteristiche peculiari del circuito reazionato, che ritroveremo anche nella configurazione invertente.

Valutiamo infine l'effetto dovuto alla resistenza finita R_o. Essa fa sì che la tensione effettivamente presente in uscita, V_{out}, sia solo una frazione della tensione V_o. Chiameremo A'_f il rapporto V_o/V_s e riserveremo il simbolo A_f per l'effettivo guadagno del circuito, $A_f = V_{out}/V_s$. Il calcolo di A'_f si fa immediatamente osservando che possiamo considerare ancora valido il risultato della (2.5) a patto di operare la sostituzione $R_1 \to R_1 + R_o$. Avremo

$$A'_f = \frac{R_1 + R_2 + R_o}{R_2} \tag{2.7}$$

Vediamo poi che se trascuriamo i_s rispetto ad i_1, come consentito dalle (2.6), il circuito d'uscita si riduce ad un partitore avente come elementi R_o e la somma $R_1 + R_2$. Avremo quindi

$$V_{out} = V_o \frac{R_1 + R_2}{R_1 + R_2 + R_o} \tag{2.8}$$

Utilizzando la (2.7) e la (2.8) avremo infine

$$A_f = \frac{V_{out}}{V_s} = \frac{V_o}{V_s} \frac{R_1 + R_2}{R_1 + R_2 + R_o} = A'_f \frac{R_1 + R_2}{R_1 + R_2 + R_o} = \frac{R_1 + R_2}{R_2} \tag{2.9}$$

In pratica, la presenza di R_o diminuisce l'effetto della reazione e fa aumentare la tensione V_o, ma allo stesso tempo la tensione presente in uscita, V_{out}, diventa solo una frazione di V_o. I due effetti si compensano esattamente e quindi il coefficiente di amplificazione reazionata non ne risente.

2.2 L'impedenza d'ingresso

Vogliamo calcolare l'impedenza che il circuito reazionato presenta all'ingresso, ossia quella che viene vista dal generatore V_s. Tale impedenza z_i è data da

$$z_i = \frac{V_s}{i_s} = A\beta R_i \tag{2.10}$$

dove il valore di i_s è quello calcolato nella seconda delle (2.6). Vediamo quindi che l'impedenza d'ingresso è pari alla resistenza d'ingresso R_i dell'amplificatore non reazionato moltiplicata per il guadagno d'anello $A\beta$. Con questa configurazione si possono raggiungere resistenze d'ingresso estremamente elevate, e quindi il l'amplificatore si presta a essere utilizzato quando si voglia evitare di "caricare" il circuito a monte, come ad esempio nello stadio d'ingresso di un misuratore di tensione.

2.3 L'impedenza d'uscita

Vogliamo determinare l'impedenza d'uscita z_o dell'amplificatore reazionato. Dal momento che si tratta di un circuito lineare, il teorema di Thévenin risulta ancora valido, e possiamo schematizzare l'amplificatore, visto dall'uscita, come una f.e.m. $V_{out} = A_f\, V_s$ e una resistenza[3] z_o equivalenti (vedi fig. 2.2 a). La valutazione di z_o, secondo l'enunciato del teorema, va fatta considerando la resistenza che si *misurerebbe* dai terminali d'uscita dopo

[3] Poiché il circuito da noi analizzato contiene esclusivamente resistenze, z_o sarà anch'essa una resistenza. La linearità dell'amplificatore ci consente poi di estendere i risultati trovati anche alle correnti alternate, semplicemente sostituendo le resistenze con impedenze complesse.

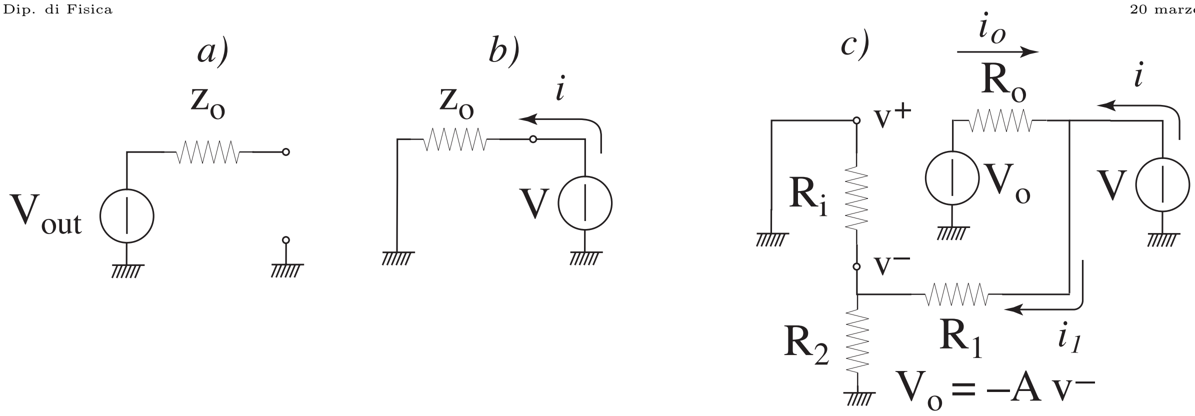

Fig. 2.2 Calcolo dell'impedenza d'uscita del circuito non invertente. a) circuito equivalente di Thévenin dell'uscita dell'amplificatore; b) valutazione dell'impedenza; c) circuito equivalente.

aver sostituito i generatori del circuito con corti circuiti.[4] A prima vista potrebbe sembrare che anche il generatore V_o dell'amplificatore debba essere eliminato, ma è facile convincersi che le cose non stanno così. Nella frase precedente non a caso è stata evidenziata la parola *misurerebbe*: si parla di misurare e non di *calcolare*. La differenza è sostanziale perché per misurare z_o dovremo necessariamente far passare una corrente nel circuito dopo aver collegato direttamente v^+ al teminale comune. Questa corrente provocherà una variazione della tensione all'ingresso v^-, che genererà a sua volta una tensione nel generatore V_o. Se noi avessimo sostituito anche quest'ultimo con un corto circuito, questo effetto, che esiste nella realtà, sarebbe stato erroneamente eliminato: in pratica, avremmo annullato il meccanismo della reazione. Dalla fig. 2.2 c) si vede che con questa procedura errata ricaveremmo $z_o = R_o//(R_1 + R_2//R_i)$ dove il simbolo // significa *"messa in parallelo con"*.

Alla luce di queste considerazioni occorre estendere l'enunciato del teorema di Thévenin, per quanto riguarda la valutazione della resistenza equivalente, nel modo seguente: la resistenza equivalente è quella che si misurerebbe dai terminali d'uscita dopo aver sostituito con corti circuiti i *generatori indipendenti*. Si considerano indipendenti quei generatori che producono una propria differenza di potenziale, che non è funzione di quello che avviene nel resto del circuito, mentre la tensione V_o è funzione (necessariamente lineare, altrimenti non staremmo a discutere del teorema di Thévenin) della differenza di potenziale fra i punti v^+ e v^-.

A questo punto è possibile determinare una procedura di calcolo che corrisponda alla *misura* effettiva richiesta dal teorema di Thévenin. Se consideriamo il circuito equivalente dopo aver sostituito V_s con un corto circuito, quindi con $V_{out} = 0$ (vedi fig. 2.2 b), e colleghiamo ad esso una f.e.m. nota V, il generatore erogherà una corrente i. L'impedenza d'uscita z_o risulta quindi semplicemente $z_o = V/i$.

[4] Se schematizziamo i generatori reali come generatori ideali con la loro resistenza interna in serie, la resistenza dovrà ovviamente essere lasciata.

La fig. 2.2 c) rappresenta il circuito equivalente dell'amplificatore in queste condizioni. Abbiamo indicato con i la corrente erogata da V, con i_o quella erogata da V_o e con i_1 la corrente che fluisce in R_1. Notiamo che aver collegato v^+ direttamente al riferimento comune fa sì che le resistenze R_2 e R_i risultino in parallelo. Possiamo quindi semplificare il circuito staccando R_i e considerando al posto di R_2 una resistenza $R_2' = R_2//R_i$.

Avremo

$$\begin{cases} i = i_1 - i_o \\ i_o = \dfrac{-Av^- - V}{R_o} \\ i_1 = \dfrac{V - v^-}{R_1} \\ v^- = \dfrac{VR_2'}{R_1 + R_2'} \end{cases} \tag{2.11}$$

Sostituendo nella prima equazione (2.11) i valori di i_o e i_1 trovati nelle successive e quindi utilizzando il valore di v^- determinato nella quarta equazione avremo

$$i = V\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_o}\right) + V\frac{R_2'}{R_1 + R_2'}\left(\frac{A}{R_o} - \frac{1}{R_1}\right) \tag{2.12}$$

da cui si ottiene con semplici passaggi algebrici

$$z_o = \frac{V}{i} = \frac{R_1 + R_2'}{1 + \frac{R_1}{R_o} + (A+1)\frac{R_2'}{R_o}} \tag{2.13}$$

Dei tre termini al denominatore della (2.13) quello che contiene a fattore $A+1$ risulta fortemente dominante, per cui

$$z_o \simeq \frac{R_o(R_1 + R_2')}{AR_2'} = \frac{R_o}{A\beta'} \qquad \text{con} \qquad \beta' = \frac{R_2'}{R_1 + R_2'} \tag{2.14}$$

In molti casi $R_i \gg R_2$ e $\beta' \simeq \beta$, ma comunque la resistenza d'uscita equivalente z_o risulta uguale a quella R_o divisa per una quantità che è dell'ordine del guadagno d'anello. L'amplificatore si comporta quindi, in uscita, con buona approssimazione come un generatore ideale. Una spiegazione qualitativa si può dare notando che se al crescere della corrente erogata la caduta su R_o fa scendere V_{out}, contemporaneamente scende anche la tensione v^- e questo provoca un aumento di V_o che compensa l'effetto. Tuttavia occorre tener ben presente che l'equivalenza circuitale del teorema di Thévenin vale per le correnti e le tensioni *fuori* del circuito equivalente, ma non per la dissipazione di potenza all'interno del medesimo: la corrente i_o erogata dall'amplificatore provoca una dissipazione interna sulla resistenza R_o, che pone limiti alla massima corrente disponibile in uscita. In pratica molti amplificatori hanno incorporato un circuito di protezione contro i sovraccarichi, che riduce o azzera V_o qualora si superi un livello di corrente accettable.

Allo scopo di illustrare i metodi che si possono utilizzare per risolvere problemi di questo genere, mostriamo di seguito un modo diverso di giungere allo stesso risultato, anche se i calcoli risultano abbastanza più laboriosi.

Consideriamo il nostro amplificatore reazionato chiuso su una resistenza di carico R_L.

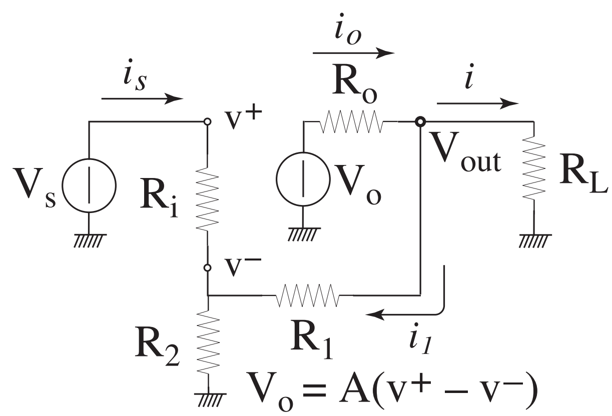

Fig. 2.3 Metodo alternativo per il calcolo dell'impedenza d'uscita del circuito non invertente: schema equivalente.

Il circuito equivalente è mostrato in fig. 2.3. Dal momento che il circuito, visto dai capi di detta resistenza, ha un equivalente di Thévenin, una volta determinato V_{out} per un valore generico di R_L potremo calcolare la resistenza equivalente z_o come il rapporto fra il valore di V_{out} in assenza di carico e la corrente di corto circuito che si ha quando $R_L \to 0$. Avremo

$$z_o = \frac{\lim_{R_L \to \infty} V_{out}}{\lim_{R_L \to 0} i} \qquad \text{dove} \qquad \lim_{R_L \to 0} i = \lim_{R_L \to 0} \frac{V_{out}}{R_L} \tag{2.15}$$

Procedendo in analogia con i casi precedenti otterrremo

$$\begin{cases} i = i_o - i_1 \\ i = \dfrac{V_{out}}{R_L} \\ i_o = \dfrac{A(V_s - v^-) - V_{out}}{R_o} \\ i_1 = \dfrac{V_{out} - v^-}{R_1} \\ i_s = \dfrac{V_s - v^-}{R_i} \\ i_1 + i_s = \dfrac{v^-}{R_2} \end{cases} \tag{2.16}$$

Sostituiamo nella prima delle (2.16) i valori di corrente ricavati dalle 3 equazioni seguenti e nell'ultima i valori di corrente ricavati nelle due precedenti, ottenendo un sistema di due equazioni nelle incognite v^- e V_{out}

$$\begin{cases} \left(\dfrac{A}{R_o} - \dfrac{1}{R_1}\right) v^- + \left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_o} + \dfrac{1}{R_L}\right) V_{out} = \dfrac{A\,V_s}{R_o} \\ \left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_i}\right) v^- - \dfrac{1}{R_1} V_{out} = \dfrac{V_s}{R_i} \end{cases} \tag{2.17}$$

Risolvendo rispetto a V_{out} si ottiene

$$V_{out} = V_s \frac{A\left(\frac{1}{R_oR_1} + \frac{1}{R_oR_2}\right) + \frac{1}{R_1R_i}}{\frac{A}{R_oR_1} + \frac{1}{R_1}\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_o} + \frac{1}{R_L}\right) + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_i}\right)\left(\frac{1}{R_L} + \frac{1}{R_o}\right)} \tag{2.18}$$

Da questa espressione valutiamo le quantità che compaiono nella (2.15)

$$\begin{aligned} \lim_{R_L\to\infty} V_{out} &= V_s \frac{A\left(\frac{1}{R_oR_1} + \frac{1}{R_oR_2}\right) + \frac{1}{R_1R_i}}{\frac{A}{R_oR_1} + \frac{1}{R_1}\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_o}\right) + \frac{1}{R_o}\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_i}\right)} \\ \lim_{R_L\to 0} i = \lim_{R_L\to 0} \frac{V_{out}}{R_L} &= V_s \frac{A\left(\frac{1}{R_oR_1} + \frac{1}{R_oR_2}\right) + \frac{1}{R_1R_i}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_i}} \end{aligned} \tag{2.19}$$

L'impedenza d'uscita z_o richiesta si calcola come rapporto fra le due espressioni (2.19). Per confrontarci con il risultato ottenuto prima, indichiamo anche qui $1/R_2' = 1/R_2 + 1/R_i$

$$z_o = \frac{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2'}}{\frac{A}{R_o R_1} + \frac{1}{R_1}\left(\frac{1}{R_o} + \frac{1}{R_2'}\right) + \frac{1}{R_o R_2'}} = \frac{R_1 + R_2'}{1 + \frac{R_1}{R_o} + (A+1)\frac{R_2'}{R_o}} \tag{2.20}$$

Il valore trovato coincide, come dovuto, con quello della (2.13).

3. La configurazione invertente

La configurazione invertente costituisce un amplificatore in cui l'uscita ha polarità opposta all'ingresso. In fig. 3.1 è riportato lo schema e il suo equivalente. Anche per questa configurazione determineremo i parametri fondamentali: il guadagno reazionato e le impedenze equivalenti d'ingresso e d'uscita.

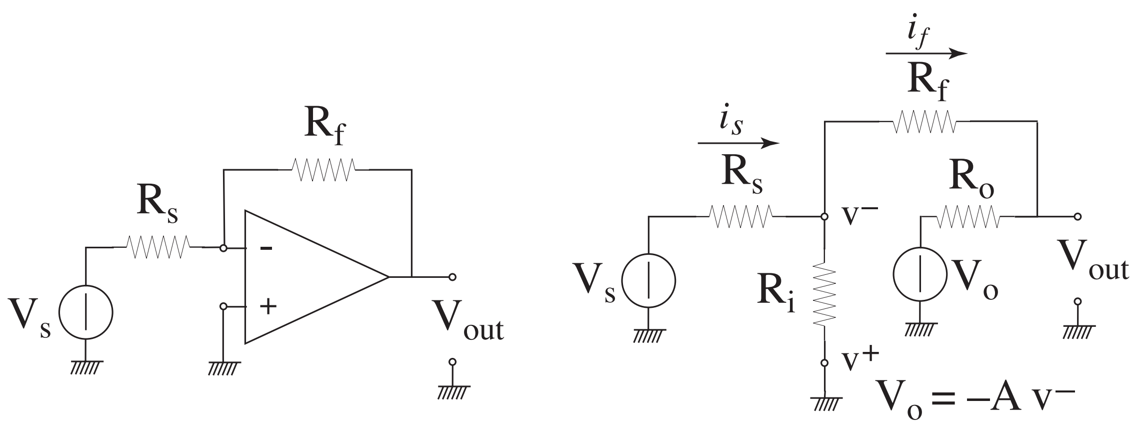

Fig. 3.1 Schema e circuito equivalente di amplificatore reazionato in configurazione invertente.

3.1 Il guadagno reazionato

Calcoliamo il guadagno reazionato inizialmente nella situazione in cui $R_o = 0$ e quindi $V_{out} = V_o$. Anche questa volta cominciamo esprimendo le correnti nei rami, come indicate in figura, in funzione delle cadute di potenziale

$$\begin{cases} i_s = \dfrac{V_s - v^-}{R_s} \\ i_f = \dfrac{v^- + Av^-}{R_f} \\ i_s - i_f = \dfrac{v^-}{R_i} \end{cases} \tag{3.1}$$

Sostituendo i valori di corrente ricavati nelle prime due equazioni (3.1) nella terza si può esprimere v^- in funzione di V_s

$$v^- = V_s \frac{1}{1 + \frac{R_s}{R_i} + \frac{(A+1)R_s}{R_f}} \tag{3.2}$$

Quindi esprimiamo A_f

$$A_f = \frac{V_o}{V_s} = \frac{-Av^-}{V_s} = \frac{-A}{1 + \frac{R_s}{R_i} + \frac{(A+1)R_s}{R_f}} \simeq -\frac{R_f}{R_s} \tag{3.3}$$

Nell'ultimo passaggio si tiene conto che, con i valori di norma usati, il termine di gran lunga prevalente al denominatore dell'espressione è quello che contiene A.

Da questo risultato si ottiene anche che

$$\begin{aligned} v^- = V_s \frac{R_f}{AR_s} \ll V_s \qquad \text{da cui} \qquad i_s \simeq \frac{V_s}{R_s} \\ i_s - i_f = \frac{v^-}{R_i} \simeq V_s \frac{R_f}{AR_sR_i} \simeq i_s \frac{R_f}{AR_i} \ll i_s \end{aligned} \tag{3.4}$$

Anche in questo caso la differenza di potenziale $v^+ - v^-$ risulta molto più piccola delle altre tensioni in gioco e la corrente che attraversa R_i è parimenti trascurabile rispetto a i_s e i_f. Potremo quindi approssimare

$$v^- \simeq 0 \qquad i_f \simeq i_s \tag{3.5}$$

Questa approssimazione, che si può utilizzare in generale senza perdere apprezzabilmente in precisione, porta a dare un nome particolare all'ingresso "–" dell'amplificatore in questa configurazione: *massa virtuale*. Questo termine evidenzia la peculiarità dell'ingresso negativo: esso infatti si trova a tensione (approssimativamente) nulla rispetto al riferimento comune, appunto come se fosse stato "messo a massa", ma allo stesso tempo, a differenza di quanto succederebbe se fosse stato collegato direttamente, dal punto non scorre corrente verso il riferimento comune.

Il concetto di massa virtuale conduce anche a un modo di schematizzare l'amplificatore in questa configurazione che si presta particolarmente bene per memorizzare e ricavare facilmente il coefficiente di amplificazione (vedi fig. 3.2).

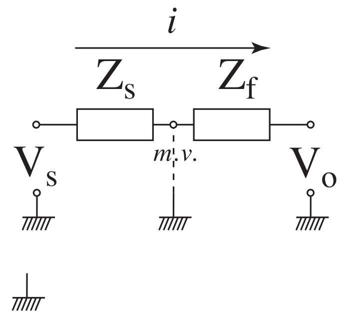

Fig. 3.2 Visualizzazione del concetto di massa virtuale.

Nel disegno è evidenziato che il punto indicato come *m.v.* si trova a potenziale zero e che la corrente fluisce immutata dall'impedenza Z_s a Z_f. A questo punto è immediato calcolare V_o in funzione di V_s

$$i = \frac{V_s}{Z_s} \qquad V_o = -iZ_f = -\frac{Z_f}{Z_s}V_s \tag{3.6}$$

Analogamente a quanto fatto per l'altra configurazione, valutiamo l'effetto della resistenza d'uscita R_o sul guadagno reazionato. Anche qui indichiamo $A'_f = V_o/V_s$ e avremo

$$A'_f = -\frac{R_f + R_o}{R_s} \tag{3.7}$$

D'altra parte V_{out} costituisce l'uscita di un partitore avente per resistenze R_o e R_f, con un capo a tensione V_o e l'altro a zero, per cui $V_{out} = V_o R_f/(R_f + R_o)$. Avremo quindi

$$A_f = \frac{V_{out}}{V_s} = \frac{V_o}{V_s}\frac{R_f}{R_f + R_o} = A'_f\frac{R_f}{R_f + R_o} = -\frac{R_f}{R_s} \tag{3.8}$$

Anche per la configurazione invertente la presenza di R_o non varia il valore dell'amplificazione reazionata.

3.2 L'impedenza d'ingresso

Possiamo calcolare anche in questo caso l'impedenza equivalente d'ingresso come il rapporto fra la tensione applicata all'ingresso e la corrente erogata dal generatore. Tenendo conto del concetto di massa virtuale si ha

$$z_i = \frac{V_s}{i_s} = R_s \tag{3.9}$$

L'impedenza d'ingresso è data quindi semplicemente dall'elemento circuitale che viene disposto fra il generatore e la massa virtuale. Questa configurazione quindi non è particolarmente adatta quando si voglia "prelevare" il valore di una tensione senza influenzare il circuito a cui ci si connette.

La configurazione invertente, oltre che come amplificatore *tensione→tensione*, si può pensare come amplificatore *corrente→tensione*, ossia *amplificatore a transresistenza*. Infatti, come si vede facilmente in fig. 3.2, a una corrente i nel circuito d'ingresso corrisponde una tensione $-iZ_f$ all'uscita.

3.3 L'impedenza d'uscita

Per il calcolo dell'impedenza d'uscita possiamo procedere come nel caso della configurazione non invertente, sostituendo V_s con un corto circuito e collegando un generatore di f.e.m. nota V all'uscita. Tuttavia, una volta fatto ciò, il circuito che si ottiene è perfettamente identico a quello di fig. 2.2, salvo per la sostituzione $R_1 \rightarrow R_f$, $R_2 \rightarrow R_s$. Pertanto l'impedenza d'uscita è ancora data, salvo la sostituzione di simboli, dalla (2.14). Anche in questo caso l'uscita dell'amplificatore approssima un generatore ideale di tensione.