Capitolo 1

Teoria dei campi - Rush finale

1.1 De Curtis

1.1.1 Teoria di gauge abeliana

Consideriamo la lagrangiana di Dirac:

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi}(i \not{\partial} - m)\psi$$

Questa lagrangiana è invariante sotto la seguente *trasformazione di fase di prima specie*:

$$\psi \to \psi'(x) = e^{-i\alpha Q}\psi(x)$$

dove α è un parametro costante e Q è un numero particolare associato al campo ψ. Di conseguenza avremo $\bar{\psi} \to e^{i\alpha}\psi$. Si dice anche che la lagrangiana è invariante sotto il gruppo di simmetria $U(1)$, o gruppo delle trasformazioni di fase. L'effetto della trasformazione $\psi \to e^{-i\alpha Q}\psi$ è quella di cambiare la fase del campo ψ contemporaneamente in tutti i punti dello spazio-tempo, e dello stesso valore; Weyl suggerì che dal punto di vista della relatività ristretta e quindi dell'impossibilità di influire istantaneamente su punti lontani (assenza di interazioni a distanza), fosse più opportuno considerare trasformazioni di fase non più *globali* ma *locali*, ovvero il parametro di fase dovesse diventare una funzione $\alpha(x)$ del punto, in altre parole la fase viene cambiata punto per punto. In questo modo però la lagrangiana di Dirac non presenta più invarianza sotto trasformazioni di fase (dette stavolta *di seconda specie*, o di gauge), perchè anche la funzione $\alpha(x)$ viene derivata:

$$\psi(x) \to \psi'(x) = e^{-iQ\alpha(x)}\psi(x)$$

$$\partial_\mu\psi' = -iQ\partial_\mu\alpha(x)e^{-iQ\alpha(x)}\psi + e^{iQ\alpha(x)}\partial_\mu\psi$$

Questo fatto ci suggerisce di modificare il concetto di derivata, definendo un oggetto che trasformi sotto trasformazioni gauge in questo modo:

$$D_\mu \to D'_\mu$$

$$D_\mu\psi \to D'_\mu\psi' = e^{-iQ\alpha(x)}D_\mu\psi$$

Scrivendo la lagrangiana in termini di questo nuovo operatore differenziale, detto *derivata covariante*, avremo

$$\mathcal{L}'_D = \bar{\psi}(i \not{D} - m)\psi$$

che adesso risulta invariante sotto trasformazioni di gauge.

Costruiremo adesso l'operatore differenziale adeguato ai nostri scopi. Definiamo

$$D_\mu = \partial_\mu + ieQA_\mu(x)$$

In questo modo

$$D_\mu\psi = \partial_\mu\psi + ieQA_\mu(x)$$

e se effettuiamo la trasformazione di gauge:

$$D'\mu\psi' = (\partial_\mu + ieQA'_\mu(x))e^{-iQ\alpha(x)}\psi = -iQ\partial_\mu\alpha(x)e^{-iQ\alpha(x)}\psi + e^{iQ\alpha(x)}\partial_\mu\psi + ieQA'_\mu(x)e^{-iQ\alpha(x)}\psi$$

Se vogliamo che il risultato sia $e^{-iQ\alpha(x)}D_\mu\psi$, dobbiamo imporre che

$$ieQA'_\mu - iQ\partial_\mu\alpha(x) = ieQA_\mu$$

ovvero che sotto la trasformazione di gauge il campo A^μ trasformi come

$$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x)$$

Possiamo quindi scrivere la nuova lagrangiana, invariante di gauge, in termini della vecchia lagrangiana di Dirac più una correzione contenente il nuovo campo A_μ:

$$\mathcal{L}'_D = \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi - eQ\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu \equiv \mathcal{L}_D + \mathcal{L}_{int}$$

dove abbiamo definito una lagrangiana di "interazione come

$$\mathcal{L}_{int} = -J^\mu A_\mu$$

$$J^\mu = eQ\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$$

Se interpretiamo e come la carica del protone, Q la carica elettrica dell'elettrone in unità di carica elettrica del protone, e A^μ come il campo del fotone, vediamo che l'introduzione della derivata covariante ha prodotto un risultato equivalente alla sostituzione minimale.

Dal punto di vista della geometria differenziale, il campo $\psi(x) \in \mathbb{C}$ può essere visto come una sezione del fibrato $\mathbb{M} \otimes \mathbb{C}$, e la derivata ordinaria ∂_μ come una connessione sul fibrato, valida finchè ci limitiamo a considerare trasformazioni di fase globali. Infatti, una connessione deve essere $\mathbb{C}-$lineare nella sezione da derivare, il che significa che $\partial_\mu(e^{i\alpha}\psi(x))$ come effettivamente accade. Se invece il gruppo delle trasformazioni che agisce sulla sezione è più esteso, nello specifico consideriamo il gruppo delle trasformazioni di gauge, ∂_μ non è più una connessione valida perchè punto per punto

$$\partial_\mu(e^{i\alpha}\psi(x)) = i\partial_\mu\alpha(x)\psi(x) + e^{i\alpha(x)}\partial_\mu\psi(x) \neq e^{i\alpha(x)}\partial_\mu\psi(x)$$

L'espressione più generale per una connessione su un fibrato del nostro tipo è

$$\partial_\mu + \Gamma_\mu$$

dove i Γ_μ rappresentano i *coefficienti della connessione.*

Richiedere invarianza locale per la lagrangiana implica introdurre un campo di gauge A_μ, con una ben precisa legge di trasformazione. Se vogliamo rendere dinamica questa particella abbiamo bisogno di introdurre un termine cinetico, che dovrà essere invariante sotto trasformazioni di gauge (poichè non vogliamo che la dinamica del campo dipenda dal gauge) e quadratico nelle derivate, affinchè A_μ soddisfi l'equazione di Klein-Gordon. Se indichiamo con U la trasformazione $e^{-iQ\alpha(x)}$, dalla legge di trasformazione della derivata covariante si ha:

$$D'_\mu \psi' = UD_\mu \psi = UD_\mu U^{-1} U\psi = UD_\mu U^{-1}\psi'$$

dunque

$$D'_\mu = UD_\mu U^{-1}$$

Se consideriamo il commutatore di due derivate covarianti, esso si trasformerà quindi alla stessa maniera:

$$[D'_\mu, D'_\nu] = UD_\mu U^{-1} UD_\nu U^{-1} - UD_\nu U^{-1} UD_\mu U^{-1} = U[D_\mu, D_\nu]U^{-1}$$

Inoltre, risulta che

$$[D_\mu, D_\nu] = [\partial_\mu + ieQA_\mu, \partial_\nu + ieQA_\nu] = [\partial_\mu, \partial_\nu] - e^2Q^2[A_\mu, A_\nu] + ieq(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = ieQ(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)$$

ovvero il commutatore di due derivate covarianti non è più un operatore differenziale, questo implica che $U[D_\mu, D_\nu]U^{-1} = [D_\mu, D_\nu]$, e se definiamo il tensore antisimmetrico

$$ieQF_{\mu\nu} = [D_\mu, D_\nu]$$

esso risulterà invariante sotto trasformazioni di gauge. Un termine cinetico canonico per il campo A^μ si ottiene allora intoducendo il termine $-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ nella lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi - eQ\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

Il campo di gauge così costruito ha necessariamente massa nulla, perchè se vogliamo rispettare l'invarianza di gauge dobbiamo escludere dalla lagrangiana i termini della forma $m^2A_\mu A^\mu$. Questo è concorde con il significato del campo A_μ come coefficiente della connessione: avendo la funzione di correggere le fasi dei campi ψ in ogni punto dello spazio-tempo, l'interazione da esso mediata non può che avere range infinito.

Quantizzazione di una teoria di gauge abeliana

Nella quantizzazione delle teorie di gauge mediante il path integral abbiamo incontrato dei problemi dovuti proprio all'invarianza di gauge. Ricordiamo brevemente alcuni risultati per gli integrali gaussiani:

$$\int \mathcal{D}\phi e^{-\frac{i}{2}\langle\phi A\phi\rangle} e^{i\langle J\phi\rangle} = \frac{1}{\sqrt{\det A}} e^{\frac{i}{2}\langle JA^{-1}J\rangle} \quad \text{(bosonico)}$$

$$\int \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi} e^{-\frac{i}{\langle}\bar{\psi}A\psi\rangle} e^{i\langle\bar{\eta}\psi\rangle + i\langle\bar{\psi}\eta\rangle} = \frac{1}{\sqrt{\det A}} e^{i\langle\bar{\eta}A^{-1}\eta\rangle} \quad \text{(fermionico)}$$

Se consideriamo una teoria di gauge abeliana come l'elettromagnetismo, il problema della sua quantizzazione è il seguente: l'operatore d'onda di Maxwell, nello spazio degli impulsi

$$(-k^2 g^{\mu\nu} + k^\mu k^\nu)$$

è degenere, infatti tutti i campi della forma $\tilde{A}_\mu(k) \sim k_\mu$ sono autovettori con autovalore nullo. In particolare l'operatore d'onda non è invertibile e non possiamo usare le tecniche del path integral. La situazione è analoga a quella dell'integrale gaussiano

$$Z = \int_{-\infty}^{\infty} dxdy e^{-\frac{1}{2}a^2(x-y)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} dxdy e^{-\frac{1}{2}x_i A_{ij} x_j}$$

dove A è una matrice 2×2

$$A_{ij} = a^2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tale matrice ha determinante nullo, e anche in questo caso non possiamo utilizzare le formule che conosciamo. Osserviamo però che l'integrale risulta invariante sotto l'insieme delle trasformazioni

$$x^\Omega = x + \Omega$$

$$y^\Omega = y + \Omega$$

Abbiamo quindi una direzione nel piano x, y in cui l'integrando ha sempre lo stesso valore:

$$x - y = x_0 - y_0$$

per x_0, y_0 arbitrari. L'integrale risulta allora infinito, dovendo sommare un valore costante su un insieme di misura infinita, corrispondente a tutte le possibili traslazioni: in effetti, vedremo che l'infinito corrisponde proprio al volume del gruppo di simmetria dell'integrale, ovvero il gruppo delle traslazioni in una dimensione. Per isolare l'infinito dovremmo trovare il modo di integrare solo su una retta perpendicolare alla direzione di invarianza. Introduciamo allora la seguente identità:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega \delta \left(\frac{1}{2}(x+y) + \Omega \right)$$

$$Z = \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega \int_{-\infty}^{\infty} dxdy \delta \left(\frac{1}{2}(x+y) + \Omega \right) e^{-a^2(x-y)^2} =$$

Se effettuiamo la traslazione $x \rightarrow x' = x + \Omega$ e $y \rightarrow y' = y + \Omega$, la misura d'integrazione non cambia, come non cambia l'integrando, e otteniamo

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega \int_{-\infty}^{\infty} dx'dy' \delta \left(\frac{1}{2}(x'+y') \right) e^{-a^2(x'-y')^2} =$$

A questo punto nell'integrando non c'è più niente che dipende da Ω, e il contributo del gruppo di "gauge" delle traslazioni è fattorizzato nell'integrazione in $d\Omega$: in effetti, esso rappresenta proprio il volume del gruppo di simmetria dell'integrale. Nel caso del path integral e del funzionale generatore fattorizzare una costante, pur infinita, non ha ripercussioni sulle funzioni di Green, che sono definite in base a rapporti.

La retta $x + y = costante$ interseca le orbite di gauge $x - y = costante$, una volta ciascuna; possiamo pensare anzichè ad una retta, ad una curva qualunque $f(x, y) = 0$, con la stessa proprietà di intersecare ciascuna orbita una sola volta. In questo modo si generalizza l'identità:

$$1 = \Delta_f(x, y) \int d\Omega \delta(f(x^\Omega, x^\Omega))$$

dove Δ_f è una funzione che andremo a determinare. Per le proprietà della δ:

$$\delta(f(x^\Omega, x^\Omega)) = \sum_{\Omega_i} \frac{\delta(\Omega - \Omega_i)}{\left|\frac{\partial f}{\partial \Omega}\right|_{\Omega=\Omega_i}}$$

dove Ω_i sono tutti i punti per cui $f(x^\Omega, y^\Omega) = 0$. Poichè per ipotesi la curva $f(x, y) = 0$ interseca una sola volta le orbite di gauge, l'unica soluzione è per $\Omega = 0$, dunque

$$1 = \Delta_f(x, y) \int d\Omega \frac{\delta(\Omega)}{\left|\frac{\partial f}{\partial \Omega}\right|_{\Omega=0}}$$

dunque

$$\Delta_f(x, y) = \left|\frac{\partial f}{\partial \Omega}\right|_{\Omega=0}$$

In altre parole $\Delta_f(x, y)$ è lo jacobiano del cambio di variabile $\Omega \to f(\Omega)$; nel caso generale della teoria dei campi, in particolare per le teorie di gauge non abeliane, avremo tante orbite di gauge quanti sono i campi di gauge, quindi in generale non avremo uno jacobiano ma un determinante jacobiano. Dimostriamo adesso che $\Delta_f(x, y)$ è una funzione gauge-invariante:

$$1 = \Delta_f(x, y) \int d\Omega \delta(f(x^\Omega, x^\Omega))$$

Se facciamo una traslazione

$$x \to x + \Omega'$$

$$y \to y + \Omega'$$

$$1 = \Delta_f(x + \Omega', y + \Omega') \int d\Omega \delta(f(x + \Omega + \Omega', x + \Omega + \Omega'))$$

Se definiamo $\Omega'' = \Omega + \Omega'$, e osserviamo che la misura $d\Omega$ è invariante per traslazioni, abbiamo

$$1 = \Delta_f(x + \Omega', y + \Omega') \int d\Omega'' \delta(f(x + \Omega'', x + \Omega''))$$

Rinominando $\Omega'' = \Omega$, otteniamo

$$\Delta_f(x + \Omega', y + \Omega') \int d\Omega \delta(f(x + \Omega, x + \Omega)) = \Delta_f(x, y) \int d\Omega \delta(f(x^\Omega, x^\Omega))$$

ovvero $\Delta_f(x, y)$ è una funzione invariante di gauge, e viene chiamata *determinante di Fadeev-Popov.*

Nel caso delle teorie di gauge di tipo $SU(N)$, avremo un set di $N^2 - 1$ funzioni $f_B(A^A_\mu)$, che dovranno soddisfare la condizione di intersecare una sola volta le orbite di gauge. Consideriamo una trasformazione di gauge infinitesima:

$$\Omega = 1 - i\alpha_A(x)T^A$$

Al prim'ordine il prodotto di due trasformazioni di gauge infinitesime si può scrivere come

$$\Omega\Omega' = 1 - i(\alpha_A(x) + \alpha'_A(x))T^A$$

L'integrale sulla misura $d\mu(\Omega)$ allora sarà una produttoria delle varie $\alpha_A(x)$ su tutti gli A e tutti gli x:

$$d\mu(\Omega) = \prod_{x,A} d\alpha_A(x)$$

Possiamo generalizzare l'identità $1 = \Delta_f(x,y)\int d\Omega\delta(f(\Omega))$ al caso funzionale:

$$1 = \Delta_f[A^A_\mu]\int d\mu(\Omega)\delta\left[f_A(A^\Omega_\mu)\right]$$

Anche stavolta il determinante di Faddeev-Popov è una funzione gauge-invariante, ed è espresso da

$$\Delta_f[A^A_\mu] = \det\left|\frac{\delta f_A(A^\Omega_\mu)}{\delta\alpha_B(x)}\right|_{\alpha_B=0}$$

Fisicamente le delta si possono interpretare come funzioni di gauge-fixing: il determinante di Faddeev-Popov rende conto di come cambia la fisica da un gauge all'altro. Se consideriamo un path integral della forma

$$\int \mathcal{D}(A_\mu)e^{i\int d^4x\mathcal{L}[A]}$$

possiamo introdurre l'identità

$$\int \mathcal{D}(A_\mu)e^{i\int d^4x\mathcal{L}[A]} = \int \mathcal{D}(A_\mu)d\mu(\Omega)e^{i\int d^4x\mathcal{L}[A]}\delta\left[f_A(A^\Omega_\mu)\right]\Delta_f[A^A_\mu]$$

Il problema di questa procedura è che quando il determinante di Faddeev-Popov dipende dai campi, non può essere fattorizzato e complica l'espressione dell'integrale, che non sarà più un semplice esponenziale ma conterrà a fattore dei complicati operatori differenziali. Tuttavia abbiamo imparato che un determinante può essere visto come risultato di un integrale gaussiano fermionico, per cui possiamo riassorbire il determinante di Faddeev-Popov all'esponente, a patto di introdurre dei campi aggiuntivi, detti *campi di ghost*, di cui dovremo poi tenere conto in termini di diagrammi di Feynman.

Nel caso della QED spinoriale, la lagrangiana è

$$\mathcal{L} = \bar\psi(i\not\partial - m)\psi - e\bar\psi\gamma^\mu\psi A_\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

dunque il funzionale generatore si scrive come

$$Z[J_\mu,\eta,\bar\eta] = \int \mathcal{D}(A_\mu,\psi,\bar\psi)e^{i\int d^4x\mathcal{L}}e^{i\int d^4xJ_\mu A^\mu + \bar\eta\psi + \bar\psi\eta}$$

Il funzionale generatore può essere riscritto in termini di un opportuno operatore differenziale applicato al funzionale generatore libero:

$$Z[J_\mu,\eta,\bar\eta] = \exp\left\{-ie\int d^4x\left(i\frac{\delta}{\delta\eta}\right)\gamma_\mu\left(-i\frac{\delta}{\delta\bar\eta}\right)\left(-i\frac{\delta}{\delta J_\mu}\right)\right\}Z_0[J_\mu,\eta,\bar\eta]$$

Occupiamoci in particolare della parte di gauge di Z_0:

$$S_A = -\frac{1}{4}\int d^4xF_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\int d^4x\partial_\mu A_\nu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) =$$

Integrando per parti, si ha

$$= \frac{1}{2}\int d^4x A_\nu(\partial^2 g^{\mu\nu} - \partial^\nu\partial^\mu)A_\mu$$

$\frac{1}{2}\partial^2 g^{\mu\nu} - \partial^\nu\partial^\mu$ è l'operatore singolare che abbiamo già incontrato. Per quanto riguarda il settore fermionico, invece, si può risolvere esattamente e si ottiene:

$$Z_0[\eta,\bar{\eta}] = N\exp\left\{i\int d^4x d^4y \bar{\eta}(x) S_F(x-y)\eta(y)\right\}$$

dove $S_F(x-y)$ è il propagatore di Feynman fermionico, ottenuto invertendo l'operatore $(i\not{\partial} - m)$:

$$S_F(x) = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon}e^{-ipx}$$

Supponiamo di voler imporre come condizione di gauge quella di Lorentz; definiremo allora una funzione

$$f[A_\mu] = \partial_\mu A^\mu$$

e imporremo $f[A_\mu] = 0$. In questo caso non ci aspettiamo un determinante jacobiano ma un semplice jacobiano:

$$A_\mu^\Omega = A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x)$$

$$f(A_\mu^\Omega) = \partial_\mu A^{\mu\Omega} = \partial_\mu A^\mu + \frac{1}{e}\partial^2\alpha(x)$$

dunque

$$\frac{\delta f[A_\mu^\Omega(x)]}{\delta\alpha(y)} = \frac{1}{e}\partial^2\delta(x-y)$$

In questo caso il determinante di Faddeev-Popov non dipende dai campi, dunque può tranquillamente essere fattorizzato dall'integrale, senza bisogno di ghost. L'unico effetto dell'imposizione della condizione di Lorentz all'interno dell'integrale funzionale è quindi un fattore moltiplicativo inessenziale, che si eliderà nel rapporto con $Z[0]$:

$$\int\mathcal{D}(A_\mu)\exp\left\{\frac{i}{2}\int d^4x A_\mu\left(\partial^2 g^{\mu\nu} - \partial^\mu\partial^\nu\right)A_\nu\right\} \equiv$$

$$\equiv \det\left(\frac{1}{e}\partial^2\delta(x-y)\right)\int\mathcal{D}(A_\mu)\exp\left\{\frac{i}{2}\int d^4x A_\mu\left(\partial^2 g^{\mu\nu} - \partial^\mu\partial^\nu\right)A_\nu\right\}\delta(\partial_\mu A^\mu)$$

Osserviamo che la delta funzionale impone $\partial_\mu A^\mu = 0$ per cui possiamo eliminare il contributo $\partial^\mu\partial^\nu$ nell'operatore di Maxwell. Possiamo scrivere in forma esponenziale la delta funzionale:

$$\delta(x) = \int\frac{dp}{(2\pi)^4}e^{ipx} \Rightarrow \delta(\partial_\mu A^\mu) = \int\mathcal{D}c e^{i\int d^4x c(x)(\partial_\mu A^\mu(x))} =$$

Integrando per parti è possibile spostare la derivazione su c:

$$= \int\mathcal{D}c e^{-i\int d^4x(\partial_\mu c(x))A^\mu(x)}$$

In questo modo la parte di gauge diventa:

$$Z_0[J_\mu] = \int \mathcal{D}(A_\mu)\mathcal{D}c \exp\left\{-\int d^4x A_\mu \left(-\frac{i}{2}\partial^2 g^{\mu\nu}\right) A_\nu\right\} \exp\left\{i\int d^4x \left(J_\mu - \partial_\mu c(x)\right) A^\mu(x)\right\} =$$

In questo modo abbiamo ricostruito un integrale gaussiano, che dà come risultato

$$= \int \mathcal{D}c \exp\left\{-\frac{i}{2}\int d^4x \left(J_\mu - \partial_\mu c\right)\frac{1}{\partial^2}\left(J^\mu - \partial^\mu c\right)\right\} =$$

$$= \int \mathcal{D}c \exp\left\{-\frac{i}{2}\int d^4x J_\mu \frac{1}{\partial^2} J^\mu\right\} \exp\left\{+i\int d^4x J_\mu \frac{1}{\partial^2}\partial^\mu c\right\} \exp\left\{-\frac{i}{2}\int d^4x \partial_\mu c \frac{1}{\partial^2}\partial^\mu c\right\}$$

Integrando per parti i due esponenziali contenenti il campo c:

$$\exp\left\{+i\int d^4x J_\mu \frac{1}{\partial^2}\partial^\mu c\right\} = \exp\left\{-i\int d^4x c \frac{1}{\partial^2}\partial^\mu J_\mu\right\}$$

$$\exp\left\{-\frac{i}{2}\int d^4x \partial_\mu c \frac{1}{\partial^2}\partial^\mu c\right\} = \exp\left\{\frac{i}{2}\int d^4x c \frac{1}{\partial^2}\partial^2 c\right\} = \exp\left\{\frac{i}{2}\int d^4x c(x)c(x)\right\}$$

Di nuovo abbiamo ricostruito un integrale gaussiano, abbiamo infine

$$K \exp\left\{-\frac{i}{2}\int d^4x J_\mu \frac{1}{\partial^2} J^\mu\right\} \int \mathcal{D}c \exp\left\{\frac{i}{2}\int d^4x c(x)c(x)\right\} \exp\left\{-i\int d^4x c \frac{1}{\partial^2}\partial^\mu J_\mu\right\} =$$

$$= K \exp\left\{-\frac{i}{2}\int d^4x J_\mu \frac{1}{\partial^2} J^\mu\right\} \exp\left\{\frac{i}{2}\int d^4x \frac{1}{\partial^2}\partial^\mu J_\mu \frac{1}{\partial^2}\partial^\nu J_\nu\right\} = K \exp\left\{\frac{1}{2}\int d^4x J_\mu \left[-i\left(\frac{1}{\partial^2}g^{\mu\nu} - \frac{\partial^\mu\partial^\nu}{[\partial^2]^2}\right)\right] J_\nu\right\}$$

dove K è una costante che tiene conto del determinante della forma quadratica $-\frac{i}{2}\delta^4(x-y)$. Abbiamo quindi raggiunto una espressione della forma $e^{-\frac{1}{2}\langle J_\mu G^{\mu\nu} J_\nu\rangle}$, dove G è propagatore del fotone, per la parte di gauge. Tale propagatore, nello spazio degli impulsi, si scrive:

$$G_{\mu\nu}(k) = \lim_{\epsilon\to 0^+} -i\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left(\frac{g_{\mu\nu}}{k^2+i\epsilon} - \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2+i\epsilon)^2}\right) e^{-ikx}$$

Con questa scelta di gauge, quindi, abbiamo ottenuto un propagatore trasverso. É possibile fare lo stesso conto anche in una classe di gauge più generici, detti R_ξ gauge, semplicemente cambiando la funzione di gauge-fixing (cioè la funzione che interseca le orbite di gauge) all'interno della delta funzionale:

$$\delta(f(A_\mu) - B)$$

dove B è una generica funzione che non dipende dai campi. Stavolta siamo intenzionati ad aggiungere una ulteriore integrazione funzionale su tutte le funzioni B, e a tale scopo utilizzeremo una ulteriore identità, generalizzazione dell'integrale gaussiano $\int dx e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$:

$$\int \mathcal{D}(B) \exp\left\{-\frac{i}{2\xi}\int d^4x B^2\right\} \delta(f(A_\mu) - B) = costante$$

dove ξ è un parametro generico. Inserendo l'espressione nell'integrale funzionale di gauge si ha

$$\int \mathcal{D}(A_\mu) \exp\left\{i\int d^4x \mathcal{L}\right\} \exp\left\{i\int d^4x J_\mu A^\mu\right\} =$$

$$= cost \int \mathcal{D}(A_\mu)\mathcal{D}(B) \exp\left\{i\int d^4x\mathcal{L}\right\} \exp\left\{i\int d^4x J_\mu A^\mu\right\} \exp\left\{-\frac{i}{2\xi}\int d^4x B^2\right\} \delta(f(A_\mu)-B) =$$

L'integrazione su B fa sì che $B = \partial_\mu A^\mu$, dunque il risultato netto è di aver aggiunto alla lagrangiana un contributo di gauge-fixing:

$$S_{GF} = -\frac{1}{2\xi}\int d^4x(\partial_\mu A^\mu)^2$$

$$= cost \int \mathcal{D}(A_\mu)\mathcal{D}(B) \exp\left\{i\int d^4x\mathcal{L}\right\} \exp\left\{i\int d^4x J_\mu A^\mu\right\} \exp\left\{-\frac{i}{2\xi}\int d^4x(\partial_\mu A^\mu)^2\right\}$$

Integrando per parti il termine di gauge-fixing si ha

$$S_{GF} = -\frac{1}{2\xi}\int d^4x(\partial_\mu A^\mu)^2 = \frac{1}{2\xi}\int d^4x A^\nu \partial_\nu \partial_\mu A^\mu$$

da cui

$$= cost \int \mathcal{D}(A_\mu) \exp\left\{\frac{i}{2}\int d^4x A_\mu \left(\partial^2 g^{\mu\nu} - \partial^\mu\partial^\nu\left(1-\frac{1}{\xi}\right)\right)\right\} \exp\left\{i\int d^4x J_\mu A^\mu\right\}$$

L'operatore d'onda

$$-\frac{i}{2}\partial^2 g^{\mu\nu} + \partial^\mu\partial^\nu\left(1-\frac{1}{\xi}\right)$$

non è più degenere, dunque possiamo invertirlo, ottenendo

$$G^{\mu\nu}(x;\xi) = \lim_{\epsilon\to 0^+} -i\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left(\frac{g^{\mu\nu}}{k^2+i\epsilon} - (1-\xi)\frac{k^\mu k^\nu}{(k^2+i\epsilon)^2}\right) e^{-ikx}$$

Il fatto più importante è che la parte di propagatore proporzionale a $k^\mu k^\nu$ non contribuisce mai alle ampiezze fisiche in QED: infatti, quando il propagatore si connette a correnti di fermioni on shell, il termine $k^\mu J_\mu$ si annulla per le equazioni del moto; viceversa, si può mostrare che nel caso il propagatore si connetta a correnti fermioniche interne, quindi a particelle potenzialmente off-shell, i contributi di particelle e antiparticelle si presentano sempre in numero uguale, e con segni opposti in modo da elidersi. Per questo, i risultati fisici non dipendono dalla gauge (cioè dallo ξ) considerata; questo ci permette di scegliere la forma del propagatore che semplifica maggiormente i calcoli.

1.1.2 Teoria di gauge non abeliana

Consideriamo adesso una lagrangiana di Dirac, ma per N campi fermionici:

$$\mathcal{L} = \sum_{a=1}^{N} \bar{\psi}_a(i\not{\partial} - m_a)\psi_a$$

Se le masse m_a dei fermioni sono tutte uguali, la lagrangiana presenta una simmetria per rotazioni nello spazio $N-$dimensionale degli spinori; possiamo pensare ad esempio ad una teoria invariante sotto un $SU(3)$ di colore, in cui per ogni quark si ha un tripletto:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_B \\ \psi_G \end{pmatrix}$$

Poichè uno spinore è una quantità complessa, le matrici che conservano il prodotto hermitiano $\psi^\dagger a\psi_a$ sono matrici unitarie:

$$\psi_a \to M_a^b \psi_b \qquad M \in U(N)$$

Se ci limitiamo alle matrici M con determinante 1, il gruppo di simmetria della lagrangiana sarà $SU(N)$. Un generico elemento di $SU(N)$ si scrive come

$$U = e^{-i\alpha T_A}$$

dove α_A sono dei parametri arbitrari e T^A sono i generatori del gruppo, matrici $N \times N$ che soddisfano l'algebra

$$[T^A, T^B] = if^{ABC}T^C$$

dove le f^{ABC} sono dette costanti di struttura e sono antisimmetriche nello scambio di due indici. $SU(N)$ dipende da $N^2 - 1$ parametri, dunque avremo $N^2 - 1$ generatori; essi vengono normalizzati in modo che

$$Tr[T^A T^B] = \frac{\delta^{AB}}{2}$$

ad esempio nel caso di $SU(2)$ i tre generatori sono $\frac{\sigma_i}{2}$, dove σ_i, $i = 1, 2, 3$ sono le matrici di Pauli.

Se vogliamo generalizzare questa simmetria da globale a locale, dobbiamo promuovere i parametri α_A a funzioni $\alpha_A(x)$, e la derivata a derivata covariante:

$$\partial_\mu \to D_\mu$$

Stavolta però, poichè l'operatore di derivata agisce non più su un singolo spinore ma su un multipletto, avremo degli indici aggiuntivi:

$$(D_\mu)_{ab} = \delta_{ab}\partial_\mu + ig(B_\mu)_{ab}$$

dove g è la costante di accoppiamento associata alla simmetria non abeliana $SU(N)$. Anche stavolta imporremo che sotto la trasformazione

$$\Psi \to e^{-i\alpha_A(x)T^A}\Psi \equiv U(x)\Psi$$

la quantità $D_\mu\Psi$ trasformi in maniera opportuna:

$$[D_\mu\Psi]' = U(x)D_\mu\Psi$$

$$(\partial_\mu + igB'_\mu)U(x)\Psi = (\partial_\mu U(x))\Psi + U(x)\partial_\mu\Psi + igB'_\mu U(x)\Psi =$$
$$= U(x)\left(\partial_\mu\Psi + igU^{-1}(x)B'_\mu U(x) + U^{-1}(x)(\partial_\mu U(x))\right)\Psi$$

Cioè

$$B'_\mu = U(x)B_\mu U^{-1} + \frac{i}{g}(\partial_\mu U(x))U^{-1}(x)$$

Nel caso abeliano U e B_μ commutano e si itrova la legge di trasformazione del campo del fotone. Se consideriamo una trasformazione infinitesima si ha

$$U(x) \sim 1 - i\alpha_A T^A$$

per cui

$$U(x)B_\mu U^{-1} + \frac{i}{g}(\partial_\mu U(x))U^{-1}(x) \sim B_\mu - i\alpha_A[T^A, B_\mu] + \frac{1}{g}\partial_\mu \alpha_A T^A$$

Poichè B'_μ acquisisce componenti nelle direzioni dei generatori, possiamo pensarlo come una loro combinazione lineare:

$$B_\mu = A^A_\mu T^A$$

In questo modo avremo $N^2 - 1$ campi di gauge, che definiscono i coefficienti della connessione, e trasformano in questo modo:

$$\delta B_\mu = -i\alpha_A(if^{ABC})A^B T^C + \frac{1}{g}\partial_\mu \alpha_A T^A$$

$$\delta A^C_\mu = f^{ABC}\alpha_A A^B_\mu + \frac{1}{g}\partial_\mu \alpha^C$$

Possiamo definire in maniera analoga al caso abeliano il commutatore di due derivate covarianti:

$$[\partial_\mu + igB_\mu, \partial_\nu + igB_\nu] = ig(\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu) - g^2[B_\mu, B_\nu] =$$

$$= ig(\partial_\mu A^C_\nu - \partial_\nu A^C_\mu)T^C - ig^2 f^{ABC} A^A_\mu A^B_\nu T^C$$

Stavolta, a differenza del caso abeliano, il commutatore tra i campi di gauge è diverso da zero. Possiamo definire anche stavolta un tensore antisimmetrico

$$igF_{\mu\nu} = ig(\partial_\mu A^C_\nu - \partial_\nu A^C_\mu - gf^{ABC}A^A_\mu A^B_\nu)T^C \equiv igF^{\mu\nu}_A T^A$$

Ma poichè $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ è ancora una matrice $N \times N$, per ottenere uno scalare sotto $SU(N)$ dobbiamo prenderne la traccia. Il termine cinetico per gli $N^2 - 1$ campi di gauge A^μ_A si costruisce allora come

$$-\frac{1}{2}Tr[F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}] = -\frac{1}{4}F^A_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_A$$

Il termine cinetico, oltre a contenere derivate del second'ordine, contiene anche termini trilineari e quadrilineari nei campi di gauge: a differenza del caso abeliano, in cui il termine cinetico era un termine di campo libero, per una teoria non abeliana $-\frac{1}{2}Tr[F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}]$ contiene già termini di self-interazione del campo, per cui una teoria con simmetria di gauge non abeliana non è mai una teoria libera. In altre parole, i campi di gauge risultano *carichi* per l'interazione che mediano, a differenza del campo del fotone che ha carica elettromagnetica nulla. Come il campo del fotone, però, anche i campi di gauge di una teoria non abeliana sono a massa nulla perchè un termine di massa romperebbe l'invarianza di gauge. I campi di gauge per una teoria $SU(3)$ di colore vengono chiamati *gluoni*.

Equazioni di moto per i campi di gauge

La lagrangiana completa si scrive allora come

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\not{\partial} - m)\Psi - g\bar{\Psi}\gamma^\mu B_\mu \Psi - \frac{1}{4}F^A_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_A$$

da cui possiamo scrivere l'azione:

$$S = \int d^4x \bar{\Psi}(i\not{\partial} - m)\Psi - g\bar{\Psi}\gamma^\mu B_\mu \Psi - \frac{1}{4}F^A_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_A$$

Al solito, per trovare le equazioni del moto dei campi è necessario trovare la variazione dell'azione sotto variazioni arbitrarie dei campi, e imporre che sia nulla. Cominciamo col termine di gauge:

$$\delta\left(-\frac{1}{4}\int d^4x F^A_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_A\right) = -\frac{1}{2}\int d^4x\left(\delta F^{\mu\nu}_A F^A_{\mu\nu}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\int d^4x\left(\partial_\mu(\delta A^A_\nu) - \partial_\nu(\delta A^A_\mu) - gf^{ABC}(\delta A^B_\mu A^C_\nu + A^B_\mu \delta A^C_\nu)\right)F^{\mu\nu}_A$$

Integrando per parti, e sfruttando l'antisimmetria di $F^A_{\mu\nu}$, si ottiene

$$= -\frac{1}{2}\int d^4x\left(-\delta A^A_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu}_A + \delta A^A_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu}_A - 2gf^{ABC}F^{\mu\nu}_A A^B_\mu \delta A^C_\nu\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\int d^4x\left(-2\partial_\mu F^{\mu\nu}_C - 2gf^{ABC}F^{\mu\nu}_A A^B_\mu\right)\delta A^C_\nu = \int d^4x\left(\partial_\mu F^{\mu\nu}_C - ig[if^{ABC}F^{\mu\nu}_A A^B_\mu]\right)\delta A^C_\nu =$$

$$= \int d^4x\left(\partial_\mu F^{\mu\nu}_C + ig[B_\mu, F^{\mu\nu}]_C\right)\delta A^C_\nu$$

I campi di gauge sono contenuti anche nel termine di lagrangiana con la derivata covariante:

$$\delta\left(-g\bar{\Psi}\gamma^\mu B_\mu \Psi\right) = -g\bar{\Psi}\gamma^\mu T^A \Psi \delta A^A_\mu$$

Le equazioni del moto si trovano imponendo

$$\frac{\delta S}{\delta A^C_\nu} = 0$$

$$\Rightarrow \partial_\mu F^{\mu\nu}_C + ig[B_\mu, F^{\mu\nu}]_C = g\bar{\Psi}\gamma^\nu T^A \Psi$$

Questa espressione ci dice che la corrente conservata per una teoria di gauge non abeliana è diversa da quella del caso abeliano. Infatti, se prendiamo la quadridivergenza di entrambi i membri:

$$\partial_\nu g\left(i[B_\mu, F^{\mu\nu}]_C - \bar{\Psi}\gamma^\nu T^A \Psi\right) = 0$$

Poichè $\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu}_C$ è automaticamente nullo per l'antisimmetria. Avremo quindi $N^2 - 1$ correnti conservate, date da

$$J^\mu_C = g\left(i[B_\mu, F^{\mu\nu}]_C - \bar{\Psi}\gamma^\nu T^A \Psi\right)$$

Tale corrente non è altro che la corrente di Noether associata alla invarianza globale: essa riceve contributi anche dai campi di gauge, che come abbiamo detto sono anch'essi carichi.

Quantizzazione di una teoria di gauge non abeliana

Considereremo una teoria con N fermioni, invariante sotto la simmetria di gauge $SU(N)$. Questo implica che avremo $N^2 - 1$ campi di gauge, e che possiamo mettere i fermioni nella rappresentazione fondamentale di $SU(N)$, ovvero nel multipletto

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi^1_\alpha \\ \psi^2_\alpha \\ . \\ . \\ \psi^N_\alpha \end{pmatrix}$$

dove i numeri rappresentano l'indice di gruppo, e le lettere greche gli indici spinoriali. In altre parole, i generatori del gruppo saranno $N^2 - 1$ matrici $N \times N$:

$$(T^A)_{ab}$$

La lagrangiana di pura gauge, per una teoria del genere, ha la forma

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4} F^A_{\mu\nu} F^{\mu\nu}_A$$

dove l'espressione esplicita per $F^{\mu\nu}_C$ è

$$F^C_{\mu\nu} = \partial_\mu A^C_\nu - \partial_\nu A^C_\mu - g f^{ABC} A^A_\mu A^B_\nu$$

da cui

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4} \left(\partial_\mu A^C_\nu - \partial_\nu A^C_\mu - g f^{ABC} A^A_\mu A^B_\nu \right) \left(\partial^\mu A^\nu_C - \partial^\nu A^\mu_C - g f^{ABC} A^\mu_A A^\nu_B \right)$$

Possiamo suddividere la lagrangiana di gauge in due settori, il primo sarà il termine cinetico regolare, il secondo conterrà le self-interazioni dei campi di gauge:

$$\mathcal{L}_A = \mathcal{L}^{(2)}_A + \mathcal{L}^{(I)}_A$$

$$\mathcal{L}^{(2)}_A = -\frac{1}{4} \left(\partial_\mu A^C_\nu - \partial_\nu A^C_\mu \right) \left(\partial^\mu A^\nu_C - \partial^\nu A^\mu_C \right)$$

$$\mathcal{L}^{(I)}_A = \partial_\mu A^C_\nu g f^{ABC} A^\mu_A A^\nu_B - \frac{1}{4} g^2 f^{ABC} f^{DEC} A^A_\mu A^B_\nu A^\mu_D A^\nu_E$$

Per quanto riguarda il funzionale generatore interagente, si può ottenere da quello libero col solito trucco:

$$Z[J^\mu_A] = \exp\left\{ i S^{(I)} \left[\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J^A_\mu} \right] \right\} Z_0[J^\mu_A]$$

dove

$$Z_0[J^A_\mu] = K \int \mathcal{D}(A^A_\mu) \exp\left\{ i \int d^4x \left(\mathcal{L}^{(2)} - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu_A)^2 \right) \right\} \exp\left\{ i \int d^4x J^A_\mu A^\mu_A \right\} \Delta_f[A^A_\mu]$$

è il funzionale libero, già corretto con il gauge fixing. $\Delta_f[A^A_\mu]$ è il determinante di Faddeev-Popov del caso non abeliano, che come vedremo dipende dai campi e non è fattorizzabile. Sotto una trasformazione infinitesima abbiamo visto che i campi di gauge $U \sim 1 - \alpha_A(x) T^A$ trasformano come

$$A^A_\mu \to A^A_\mu + \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha_A + f^{ABC} \alpha_B A^C_\mu$$

A volte si preferisce per comodità riassorbire la costante di accoppiamento g nelle funzioni di gauge $\alpha_A(x)$:

$$\alpha_A(x) \to g \alpha_A(x)$$

per cui

$$A^A_\mu \to A^A_\mu + \partial_\mu \alpha_A + g f^{ABC} \alpha_B A^C_\mu$$

Definiamo allora

$$(D_\mu)_{AC} \alpha_C \equiv \partial_\mu \alpha_A + g f^{ABC} \alpha_B A^C_\mu$$

La funzione di gauge-fixing, nella condizione di Lorentz generalizzata $\partial_\mu A^\mu_A = 0$, sarà

$$f[A^A_\mu(x)] = \partial_\mu A^\mu_A$$

Sotto una trasformazione di gauge abbiamo

$$f[A^A_\mu(x;\Omega)] = \partial_\mu A^\mu_A + \partial_\mu D^\mu \alpha_A$$

Il determinante di Faddeev-Popov si scrive allora

$$\left|\frac{\delta f[A^A_\mu(x;\Omega)]}{\delta\alpha_B(y)}\right|_{\alpha_B=0} = \left|\frac{\delta\partial_\mu D^\mu\alpha_A(x)}{\delta\alpha_B(y)}\right|_{\alpha_B=0} = \partial_\mu D^\mu_{AC}\delta^4(x-y)\delta_{CB} = \partial^2\delta_{AB}\delta^4(x-y)+gf^{ABC}\partial_\mu[\delta^4(x-y)A^\mu_C] \equiv$$

$$\equiv M_{AB}(x-y)$$

M_{AB} è quindi la forma quadratica il cui determinante dipende dai campi. Essendo un determinante funzionale, possiamo ottenerlo come risultato di un opportuno integrale funzionale fermionico:

$$\det M_{AB} = \int \mathcal{D}c\mathcal{D}c^* \exp\left\{-i\int d^4xd^4yc^*_A(x)M_{AB}(x-y)c_B(y)\right\} =$$

$$= \int \mathcal{D}c\mathcal{D}c^* \exp\left\{-i\int d^4xc^*_A(x)\partial^2c_A(x) + gf^{ABC}c^*_A(x)\partial_\mu(c_B(x)A^\mu_C(x))\right\} =$$

$$= \int \mathcal{D}c\mathcal{D}c^* \exp\left\{-i\int d^4xc^*_A(x)\partial^2c_A(x) - gf^{ABC}(\partial_\mu c^*_A(x))c_B(x)A^\mu_C(x)\right\} =$$

$$\int \mathcal{D}c\mathcal{D}c^* \exp\left\{-i\int d^4xc^*_A(x)\partial^2c_A(x) + gf^{ABC}(\partial_\mu c^*_A(x))A^\mu_B(x)c_C(x)\right\}$$

dove nel penultimo passaggio abbiamo integrato per parti e nell'ultimo abbiamo usato l'antisimmetria di f^{ABC}. La matrice M non porta nè indici spinoriali nè indici di Lorentz, dunque i campi c e c^*, pur essendo variabili di Grassmann, sono campi scalari; questa apparente violazione del teorema spin-statistica si risolve osservando che le particelle ad essi associate, i *ghost*, non si trovano mai negli stati iniziali e finali, ma intervengono soltanto negli stati intermedi, dunque non sono osservabili. In ogni caso, essendo campi anticommutanti, ogni loop di ghost porta un -1 come i loop fermionici.

Osserviamo che i ghost non sono soltanto campi ausiliari, perchè la matrice M_{AB} contiene anche un termine cinetico, che finisce nel funzionale generatore libero:

$$Z_0[J^A_\mu, j_A] = K\int \mathcal{D}(A^A_\mu)\exp\left\{i\int d^4x\left(\mathcal{L}^{(2)} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu_A)^2\right)\right\}\exp\left\{i\int d^4xJ^A_\mu A^\mu_A\right\}\cdot$$

$$\cdot\int \mathcal{D}c_A\mathcal{D}c^*_A \exp\left\{-i\int d^4xc^*_A\partial^2c_A\right\}\exp\left\{i\int d^4xj^*_Ac_A + c^*_Aj_A\right\}$$

La parte di ghost può essere risolta, ottenendo

$$\int \mathcal{D}c_A\mathcal{D}c^*_A \exp\left\{-i\int d^4xc^*_A\partial^2c_A\right\}\exp\left\{i\int d^4xj^*_Ac_A + c^*_Aj_A\right\} =$$

$$= \det\left(i\partial^2\right)\exp\left\{-\int d^4x j_A^* \frac{-i}{\partial^2} j_A\right\} \equiv \det\left(i\partial^2\right)\exp\left\{-\int d^4x d^4y j_A^*(x)\Delta_{AB}(x-y) j_A(y)\right\}$$

dove $\Delta_{AB}(x-y) = \delta_{AB}\frac{-i}{\partial^2}\delta^4(x-y)$ è il propagatore dei ghost. Nello spazio degli impulsi si ha

$$\Delta_{AB}(k) = \delta_{AB} \lim_{\epsilon\to 0^+} i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ikx}}{k^2+i\epsilon}$$

Per quanto riguarda il propagatore del campo di gauge nel caso non abeliano, la generalizzazione è immediata e si ha un risultato identico a quello del fotone, a parte gli indici di gruppo:

$$G^{\mu\nu}_{AB}(x) = \delta_{AB} \lim_{\epsilon\to 0^+} -i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left(\frac{g^{\mu\nu}}{k^2+i\epsilon} - (1-\xi)\frac{k^\mu k^\nu}{(k^2+i\epsilon)^2}\right) e^{-ikx}$$

La parte di funzionale libero fermionico avrà la forma

$$Z_0[\eta^a,\bar{\eta}^a] = \int \mathcal{D}(\psi^a)\mathcal{D}(\bar{\psi}^a)\exp\left\{i\int d^4x\bar{\psi}^a(i\not\partial - m)\psi^a\right\}\exp\left\{i\int d^4x\bar{\eta}^a\psi^a + \bar{\psi}^a\eta^a\right\} =$$

$$= \exp\left\{-i\int d^4xd^4y\bar{\eta}^a(x)S_{ab}(x-y)\eta^b(y)\right\}$$

dove $S_{ab}(x-y)$ è il propagatore dei fermioni:

$$S_{ab}(x-y) = \delta_{ab}\lim_{\epsilon\to 0^+}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{ie^{-ikx}}{\not k - m + i\epsilon}$$

Infine avremo

$$Z_0[J^A_\mu, j_B, j^*_B, \eta^a, \bar{\eta}^a] = \exp\left\{-i\int d^4xd^4y\bar{\eta}^a(x)S_{ab}(x-y)\eta^b(y)\right\}\exp\left\{-\frac{1}{2}\int d^4xd^4yJ^\mu_A(x)G^{AB}_{\mu\nu}(x-y)J^\nu_B(y)\right\}\cdot$$

$$\cdot\exp\left\{-\int d^4xd^4yj^*_A(x)\Delta_{AB}(x-y)j_A(y)\right\}$$

Consideriamo adesso le interazioni, e vediamo cosa cambia nel vertice fermione-gluone rispetto al caso della QED:

$$i\mathcal{L} = -ig\bar{\psi}_a\gamma^\mu(T^A)_{ab}\psi_b A^A_\mu$$

Il funzionale generatore per questa interazione si ottiene come

$$Z[J^A_\mu,\eta^a,\bar{\eta}^a] = \exp\left\{-ig\int d^4x\left(i\frac{\delta}{\delta\eta_a(x)}\right)\gamma_\mu(T^A)_{ab}\left(-i\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}_b(x)}\right)\left(-i\frac{\delta}{\delta J^A_\mu(x)}\right)\right\}Z_0[J^A_\mu,\eta^a,\bar{\eta}^a]$$

Il vertice a livello albero si ottiene col metodo standard di prendere la componente di Fourier dell'espressione

$$-ig\int d^4x\left(i\frac{\delta}{\delta\eta_a(x)}\right)\gamma_\mu(T^A)_{ab}\left(-i\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}_b(x)}\right)\left(-i\frac{\delta}{\delta J^A_\mu(x)}\right) =$$

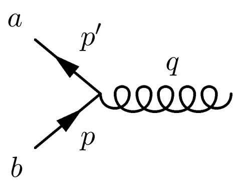
$$= -ig\int d^4pd^4p'd^4q\int d^4xe^{-i(p+q-p')x}\left(i\frac{\delta}{\delta\eta_a(p')}\right)\gamma_\mu(T^A)_{ab}\left(-i\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}_b(p)}\right)\left(-i\frac{\delta}{\delta J^A_\mu(q)}\right) =$$

$$= -ig(2\pi)^4\delta^4(p+q-p')\int d^4p d^4p' d^4q \left(i\frac{\delta}{\delta\eta_a(p')}\right)\gamma_\mu(T^A)_{ab}\left(-i\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}_b(p)}\right)\left(-i\frac{\delta}{\delta J^A_\mu(q)}\right)$$

Ogni vertice a questo punto porterà un fattore

$$-ig(2\pi)^4\delta^4(p+q-p')\gamma_\mu(T^A)_{ab}$$

Equivalentemente si può prendere il termine $i\mathcal{L}$, rimuovere a mano campi e spinori, lasciando soltanto matrici gamma e generatori, e aggiungendo un fattore $(2p\imath)^4\delta^4(\sum_i p_i)$ di conservazione del quadrimpulso. In questo caso abbiamo quindi



$$\mu, A = -ig(2\pi)^4\delta^4(p+q-p')\gamma_\mu(T^A)_{ab}$$

Per quanto riguarda il termine di interazione tra i ghost e il campo di gauge, invece:

$$i\mathcal{L}_{GG} = -igf^{ABC}(\partial_\mu c^*_A(x))A^\mu_B(x)c_C(x)$$

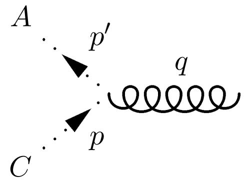
dunque

$$Z[j_A, j^*_A] = \exp\left\{-igf^{ABC}\int d^4x\left[\partial_\mu\left(i\frac{\delta}{\delta j_A(x)}\right)\right]\left(-i\frac{\delta}{\delta J^B_\mu(x)}\right)\left(-i\frac{\delta}{\delta j^*_C(x)}\right)\right\}Z_0[j_A, j^*_A]$$

$$\Rightarrow -igf^{ABC}\int d^4x\left[\partial_\mu\left(i\frac{\delta}{\delta j_A(x)}\right)\right]\left(-i\frac{\delta}{\delta J^B_\mu(x)}\right)\left(-i\frac{\delta}{\delta j^*_C(x)}\right) =$$

$$= -igf^{ABC}(2\pi)^4\delta^4(p+q-p')\int d^4p d^4p' d^4q\left[-ip'^\mu\left(i\frac{\delta}{\delta j_A(p')}\right)\right]\left(-i\frac{\delta}{\delta J^B_\mu(q)}\right)\left(-i\frac{\delta}{\delta j^*_C(p)}\right)$$

da cui



$$\mu, B \quad = -gf^{ABC}p'_\mu(2\pi)^4\delta^4(p+q-p')$$

Il segno del diagramma viene dal fatto che

$$\frac{\delta}{\delta J^\mu_A(x)} = \int d^4p e^{-ipx}\frac{\delta}{\delta J^\mu_A(p)} \quad \text{(gluone uscente)}$$

$$\frac{\delta}{\delta J^\mu_A(x)} = \int d^4p e^{ipx}\frac{\delta}{\delta J^\mu_A(p)} \quad \text{(gluone entrante)}$$

$$\frac{\delta}{\delta\eta_a(x)} = \int d^4p e^{-ipx}\frac{\delta}{\delta\eta_a(p)} \quad \text{(fermione uscente/antifermione entrante)}$$

$$\frac{\delta}{\delta\eta^*_a(x)} = \int d^4p e^{ipx}\frac{\delta}{\delta\eta^*_a(p)} \quad \text{(fermione entrante/antifermione uscente)}$$

$$\frac{\delta}{\delta j_A(x)} = \int d^4p e^{-ipx} \frac{\delta}{\delta j_A(p)} \quad \text{(ghost uscente/antighost entrante)}$$
$$\frac{\delta}{\delta j_A^*(x)} = \int d^4p e^{ipx} \frac{\delta}{\delta j_A^*(p)} \quad \text{(ghost entrante/antighost uscente)}$$

Quindi ad esempio per il ghost uscente/anthighost entrante abbiamo

$$\partial_\mu \frac{\delta}{\delta j_A(x)} \to -ip_\mu \frac{\delta}{\delta j_A(x)}$$

Inoltre, convenzionalmente, il gluone viene sempre posto entrante, per cui

$$\partial_\mu \frac{\delta}{\delta A_\mu^A(x)} \to ip_\mu \frac{\delta}{\delta A_\mu^A(p)}$$

Per i vertici a tre e quattro gluoni avremo:

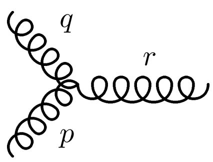
$$i\mathcal{L}_3 = igf^{ABC} A_\mu^A A_\nu^B \partial^\mu A_C^\nu$$

$$Z[J_\mu^D] = \exp\left\{igf^{ABC} \int d^4x \left(-i\frac{\delta}{\delta J_\mu^A(x)}\right)\left(-i\frac{\delta}{\delta J_\nu^B(x)}\right)\left[\partial_\mu\left(-i\frac{\delta}{\delta J_C^\nu(x)}\right)\right]\right\} Z_0[J_\mu^D]$$

$$igf^{ABC} \int d^4x \left(-i\frac{\delta}{\delta J_\mu^A(x)}\right)\left(-i\frac{\delta}{\delta J_\nu^B(x)}\right)\left[\partial_\mu\left(-i\frac{\delta}{\delta J_C^\nu(x)}\right)\right] =$$
$$= ig(2\pi)^4\delta^4(p+q+r)f^{ABC}\left[\left(-i\frac{\delta}{\delta J_\mu^A(p)}\right)\left(-i\frac{\delta}{\delta J_\nu^B(q)}\right)(ir_\mu)\left(-i\frac{\delta}{\delta J_C^\nu(r)}\right)+\right.$$
$$+\left(-i\frac{\delta}{\delta J_\mu^A(q)}\right)\left(-i\frac{\delta}{\delta J_\nu^B(r)}\right)(ip_\mu)\left(-i\frac{\delta}{\delta J_C^\nu(p)}\right)+\left(-i\frac{\delta}{\delta J_\mu^A(r)}\right)\left(-i\frac{\delta}{\delta J_\nu^B(p)}\right)(iq_\mu)\left(-i\frac{\delta}{\delta J_C^\nu(q)}\right)-$$
$$-\left(-i\frac{\delta}{\delta J_\mu^A(q)}\right)\left(-i\frac{\delta}{\delta J_\nu^B(p)}\right)(ir_\mu)\left(-i\frac{\delta}{\delta J_C^\nu(r)}\right)-\left(-i\frac{\delta}{\delta J_\mu^A(r)}\right)\left(-i\frac{\delta}{\delta J_\nu^B(q)}\right)(ip_\mu)\left(-i\frac{\delta}{\delta J_C^\nu(p)}\right)-$$
$$\left.-\left(-i\frac{\delta}{\delta J_\mu^A(p)}\right)\left(-i\frac{\delta}{\delta J_\nu^B(r)}\right)(iq_\mu)\left(-i\frac{\delta}{\delta J_C^\nu(q)}\right)\right]$$

In questo modo abbiamo automaticamente antisimmetrizzato la combinazione di derivate $\frac{\delta}{\delta J}$. Se indichiamo i tre gluoni del vertice con $(A,\alpha),(B,\beta),(C\gamma)$, e gli assegniamo gli impulsi p,q,r, otteniamo per il vertice

B,β



A,α

$$C,\gamma \quad = g(2\pi)^4\delta^4(p+q+r)f^{ABC}\left(-g_{\beta\gamma}r_\alpha - g_{\alpha\gamma}p_\beta - g_{\alpha\beta}q_\gamma + g_{\alpha\gamma}r_\beta + g_{\alpha\beta}p^\gamma + g_{\gamma\beta}q_\alpha\right)$$

$$= g(2\pi)^4\delta^4(p+q+r)f^{ABC}\left(g_{\beta\gamma}(q-r)_\alpha + g_{\alpha\gamma}(r-p)_\beta + g_{\alpha\beta}(p-q)_\gamma\right)$$

Uno mnemonico per calcolare il trilineare è:

- scegliere un verso di percorrenza;
- partire dal punto α_1, A_1 andando verso α_2, A_2, moltiplicare per $g_{\alpha_1\alpha_2}$;
- moltiplicare per la combinazione $(p_1 - p_2)^{\alpha_3}$, dove α_3 è l'indice di Lorentz del gluone opposto α_3, A_3.
- sommare sulle due permutazioni cicliche;
- moltiplicare per $f^{A_1A_2A_3}$;
- infine moltiplicare per $g(2\pi)^4\delta^4(p_1 + p_2 + p_3)$

Il risultato è opposto a quello del Casalbuoni perchè abbiamo considerato una lagrangiana per i ghost cambiata di segno. Il termine quadrilineare:

$$i\mathcal{L} = -\frac{i}{4}g^2 f^{ABE} f^{CDE} A^A_\mu A^B_\nu A^\mu_D A^\nu_E$$

$$Z[J^F_\mu] = \exp\left\{-\frac{i}{4}g^2 f^{ABE} f^{CDE} \int d^4x \left(-i\frac{\delta}{\delta J^A_\mu(x)}\right)\left(-i\frac{\delta}{\delta J^B_\nu(x)}\right)\left(-i\frac{\delta}{\delta J^\mu_D(x)}\right)\left(-i\frac{\delta}{\delta J^\nu_E(x)}\right)\right\} Z_0[J^F_\mu]$$

$$-\frac{i}{4}g^2 f^{ABE} f^{CDE} \int d^4x \left(-i\frac{\delta}{\delta J^A_\mu(x)}\right)\left(-i\frac{\delta}{\delta J^B_\nu(x)}\right)\left(-i\frac{\delta}{\delta J^\mu_D(x)}\right)\left(-i\frac{\delta}{\delta J^\nu_E(x)}\right) =$$

$$= -\frac{i}{4}g^2 f^{ABE} f^{CDE} \int d^4x g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} \left(-i\frac{\delta}{\delta J^A_\alpha(x)}\right)\left(-i\frac{\delta}{\delta J^B_\beta(x)}\right)\left(-i\frac{\delta}{\delta J^\gamma_D(x)}\right)\left(-i\frac{\delta}{\delta J^\delta_E(x)}\right) =$$

$$= -\frac{i}{4}g^2 f^{ABE} f^{CDE} (2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2+p_3+p_4) g^{ac} g^{bd} \left(-i\frac{\delta}{\delta J^A_a(p_1)}\right)\left(-i\frac{\delta}{\delta J^B_b(p_2)}\right)\left(-i\frac{\delta}{\delta J^c_D(p_3)}\right)\left(-i\frac{\delta}{\delta J^d_E(p_4)}\right)$$

Dunque il vertice si ottiene simmetrizzando l'espressione

$$-\frac{i}{4}g^2(2\pi)^4\delta^4(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) f^{ABE} f^{CDE} g^{ac} g^{bd} =$$

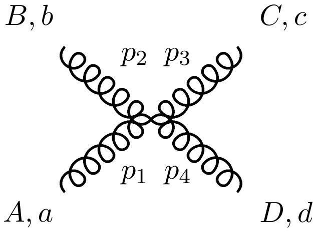
$$= -\frac{i}{4}g^2(2\pi)^4\delta^4(p_1 + p_2 + p_3 + p_4)\Big(4f^{ABE} f^{CDE}(g^{ac}g^{bd} - g^{ad}g^{bc}) + 4f^{ACE} f^{DBE}(g^{ab}g^{cd} - g^{ad}g^{bc}) +$$

$$+4f^{ADE} f^{BCE}(g^{ab}g^{dc} - g^{ac}g^{db})\Big) =$$

$$= -ig^2(2\pi)^4\delta^4(p_1 + p_2 + p_3 + p_4)\Big(f^{ABE} f^{CDE}(g^{ac}g^{bd} - g^{ad}g^{bc}) + f^{ACE} f^{DBE}(g^{ab}g^{cd} - g^{ad}g^{bc}) +$$

$$+f^{ADE} f^{BCE}(g^{ab}g^{dc} - g^{ac}g^{db})\Big)$$

Infine



$$= -ig^2(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2+p_3+p_4)\Big(f^{ABE} f^{CDE}(g^{ac}g^{bd} - g^{ad}g^{bc}) + f^{ACE} f^{DBE}(g^{ab}g^{cd} - g^{ad}g^{bc}) +$$

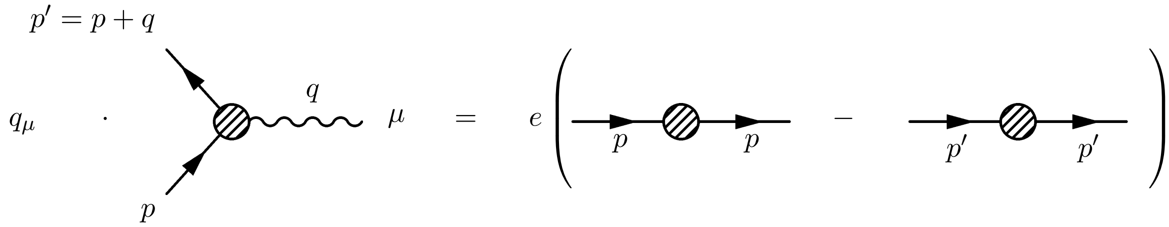
$$+ f^{ADE} f^{BCE}(g^{ab}g^{dc} - g^{ac}g^{db})\Big)$$

Uno mnemonico per questo diagramma è:

- assegnare in qualche modo gli indici $a_1, A_1,\ a_2, A_2,\ a_3, A_3,\ a_4, A_4$ ai quattro impulsi p_1, p_2, p_3, p_4, ad esempio in senso antiorario $a_1, A_1 \to a_2, A_2 \to a_3, A_3 \to a_4, A_4$;
- 1) partendo da a_1, A_1 verso a_2, A_2, aggiungere $g^{a_1 a_3} g^{a_2 a_4}$ e sottrarre $g^{a_1 a_4} g^{a_2 a_3}$;
- aggiungere un fattore $f^{A_1 A_2 B} f^{A_3 A_4 B}$;
- 2) partendo da a_1, A_1 verso a_4, A_4, aggiungere $g^{a_1 a_3} g^{a_2 a_4}$ e sottrarre $g^{a_1 a_2} g^{a_3 a_4}$;
- aggiungere un fattore $f^{A_1 A_4 B} f^{A_3 A_2 B}$;
- 3) invertire una coppia di gluoni, ad esempio a_3, A_3 e a_4, A_4;
- partendo da a_1, A_1 verso a_3, A_3, aggiungere $g^{a_1 a_4} g^{a_3 a_2}$ e sottrarre $g^{a_1 a_2} g^{a_3 a_4}$;
- aggiungere un fattore $f^{A_1 A_3 B} f^{A_4 A_2 B}$;
- effettuare la somma 1) + 2) − 3), e moltiplicare tutto per $-ig^2 (2\pi)^4 \delta^4 (p_1 + p_2 + p_3 + p_4)$.

1.1.3 La rinormalizzazione in QED

In QED, le identità di Ward ci forniscono un legame tra le costanti di rinormalizzazione Z_1 e Z_2. Infatti, considerando la funzione a tre punti della QED (fotone entrante), le identità di Ward ci assicurano che ad ogni ordine si avrà



Possiamo riscrivere questa espressione in termini del vertice 1PI e dei propagatori inversi:

$$q_\mu S(p) \Gamma_\nu (p, p') S(p') G^{\mu\nu} (q = p' - p) = ie(S(p') - S(p))$$

$$-iq_\mu \Gamma^\mu = ie(S^{-1}(p) - S^{-1}(p')) \Rightarrow q_\mu \Gamma^\mu = e(S^{-1}(p') - S^{-1}(p))$$

Questa relazione deve valere sia per quantità bare che per quantità rinormalizzate, se vogliamo che la procedura di rinormalizzazione conservi l'invarianza di gauge. Il propagatore fermionico rinormalizzato è definito come

$$S(p) = \frac{S_0(p)}{Z_2}$$

dunque avremo $S^{-1} = Z_2 S_0^{-1}$. La relazione tra il vertice esatto bare e quello rinormalizzato è

$$\Gamma = Z_2 \sqrt{Z_3} \Gamma_0$$

Allora

$$q_\mu \Gamma^\mu = e(S^{-1}(p) - S^{-1}(p')) \Rightarrow q_\mu Z_2 \sqrt{Z_3} \Gamma_0^\mu = e Z_2 (S_0^{-1}(p') - S_0^{-1}(p))$$

$$\Rightarrow q_\mu \Gamma_0^\mu = \frac{e}{\sqrt{Z_3}}(S_0^{-1}(p') - S_0^{-1}(p))$$

Da questo deduciamo che $e_0 = \frac{e}{\sqrt{Z_3}}$, ma ricordando la nostra definizione

$$Z_1 e = Z_2 \sqrt{Z_3} e_0$$

risulta che $Z_1 = Z_2$. Dunque a tutti gli ordini le costanti di rinormalizzazione relative al campo del fermione e alla carica risultano le stesse: questo fatto va sotto il nome di *universalità della rinormalizzazione della carica.*

In una teoria di gauge non abeliana abbiamo visto che la corrente $\bar{\Psi}\gamma^\mu T^A \Psi$ non è più conservata, dunque non varranno più le identità di Ward così come le conosciamo. Tuttavia, il metodo con cui sono state ricavate resta valido, e lo possiamo applicare alle simmetrie presenti nella lagrangiana attuale. La lagrangiana per una teoria di gauge non abeliana di tipo $SU(N)$, una volta riscritta in maniera opportuna, presenta infatti una nuova simmetria sotto un certo gruppo di trasformazioni, dette $BRST$ (dai nomi di Becchi, Rouet, Stora, Tyutin). Ricordiamo che la lagrangiana ha questa espressione

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^A F_A^{\mu\nu} + \bar{\Psi}(i \not{D} - m)\Psi + c_A^*(-\partial_\mu D_{AC}^\mu) c_C - 2\xi(B_A)^2 + B^A \partial_\mu A_A^\mu$$

Dove gli ultimi due termini, passando all'integrale funzionale, possono essere integrati e dare origine al termine di gauge-fixing. Osserviamo che i campi B_A sono a tutti gli effetti dei campi ausiliari perchè non compare per loro un termine cinetico. La lagrangiana così scritta risulta invariante sotto la seguente trasformazione:

$$\delta A_\mu^A = \epsilon D_\mu^{AC} c^C$$

$$\delta \psi = ig\epsilon c^A T^A \psi$$

$$\delta c^A = -\frac{1}{2} g\epsilon f^{ABC} c^B c^C$$

$$\delta c_A^* = \epsilon B_A$$

$$\delta B_A = 0$$

Dove ϵ è il parametro $BRST$, che risulta essere una variabile di Grassmann per rispettare le proprietà di simmetria e antisimmetria dei campi, mentre D_μ^{AC} è la derivata covariante che agisce sui campi dell'aggiunta:

$$D_\mu^{AB} = \delta^{AB}\partial_\mu + g f^{ABC} A_\mu^C$$

Vediamo che l'effetto principale della trasformazione è quello di scambiare campi bosonici e fermionici. Per quanto riguarda il settore di gauge e il campo ψ è facile verificare l'invarianza sotto $BRST$, in quanto è una semplice trasformazione di fase globale con parametro $\alpha_A(x) = g\epsilon c_A(x)$. Questo mette in relazione i gradi di libertà del campo di gauge e quelli dei ghost,