Appunti di teoria quantistica dei campi: le funzioni di Wightman e le funzioni di Schwinger

g. longhi

27 Ottobre 2006

Indice

Capitolo 1

Introduzione

Questi appunti sulla teoria quantistica dei campi hanno lo scopo di esporre il noto risultato di Osterwalder-Schrader, che stabilisce la corrispondenza tra le teorie di campo sullo spazio di Minkowski e le teorie di campo Euclidee in 4 dimensioni.

Questo risultato fornisce un fondamento all'uso dell'integrale funzionale, perché permette di formularlo nel caso Euclideo, dove è ben definito, per poi passare, per continuazione analitica, al caso di Minkowski.

Per arrivare al teorema di Osterwalder-Schrader occorre una serie di passi preliminari. Si inizierà perciò con l'enunciazione degli assiomi che definiscono una teoria quantistica di campo, così come sono stati enunciati da Wightman per la così detta formulazione **assiomatica**, vedi [6, 8]. Il passo successivo sarà quello di definire l'oggetto fondamentale della teoria, e cioè il campo quantistico e la sua natura matematica.

Le funzioni di Wightman, che non sono propriamente funzioni, ma distribuzioni, in termini delle quali si esprime questa formulazione della teoria dei campi quantistici (QFT), saranno poi definite in termini dei campi e viceversa, con il ″teorema di ricostruzione di Wightman″, dato un insieme di funzioni di Wightman, che obbediscono ad ad un determinato insieme di proprietà, si potrà ricostruire una teoria di campo.

Quanto sopra è in estrema sintesi la formulazione di Wightman di una QFT e sarà il contenuto dei successivi tre capitoli.

Nel quinto capitolo saranno introdotte le funzioni di Schwinger, così chiamate perchè furono da lui introdotte per la prima volta. Queste funzioni saranno ottenute mediante una opportuna continuazione analitica delle funzioni di Wightman. Da queste deriveranno le loro proprietà, elencate nella Sezione 6.2.

Infine, il teorema di ricostruzione di Osterwalder-Schrader, che ricostruisce una teoria di Wightman a partire dalla funzioni di Schwinger, è enunciato e dimostrato in dettaglio in Sezione 6.3.

Vi è una terza formulazione della QFT, dopo la formulazione di Wightman e quella Euclidea, e cioè la *formulazione algebrica*. Questa non ha più come oggetti fondamentali i campi, che sono operatori su di uno spazio di Hilbert a valori distribuzionali, ma in generale non limitati. Infatti i campi dovranno obbedire a delle relazioni di commutazione (o anticommutazione), e ciò implica la loro non limitatezza (vedi la Sezione 2.2). La teoria algebrica ha invece come oggetti fondamentali gli operatori limitati su di uno spazio di Hilbert, o, più in generale, un'algebra di Banach, per cui è definita una norma, rispetto a cui è uno spazio completo, ovvero di Banach. Le algebre che intervengono in questa formulazione sono del tipo trattato in Appendice A.1.

Questa formulazione non sarà però trattata in questi appunti.

Un ultimo breve capitolo è dedicato ad alcuni argomenti connessi, come il teorema di Haag e il problema delle teorie di gauge, che saranno accennati per completezza, ma senza dimostrazioni di sorta. Una presentazione di questa formulazione si può trovare in [8]

La maggior parte dei prerequisiti e delle dimostrazioni sono riportate nelle appendici, che però possono essere omesse ad una prima lettura.

Capitolo 2

Teorie di campo quantistiche e formalismo di Wightman

.

2.1 Gli assiomi

Esponiamo qui di seguito gli assiomi di una teoria di campo quantistica (e relativistica), come sono stati formulati da Wightman [6], seguiti, nella sezione successiva, da una breve discussione.

L'oggetto fondamentale della teoria di Wightman è il campo quantistico relativistico, che indicheremo con $\phi^{(k)}$, a valori tensoriali o spinoriali, con un numero finito di componenti $\phi_l^{(k)}$, $l = 1, ..., r_k$.

Il campo ϕ ha inoltre proprietà di trasformazione assegnate sotto $L_+^\uparrow$ (gruppo proprio di Lorentz) o sotto il suo ricoprimento $SL(2, C)$.

Se ϕ non è hermitiano (ovvero simmetrico), supporremo che esistano indici $\overline{k}$ e $\overline{l}$ tali che

$$\phi_l^{(k)*} = \phi_{\overline{l}}^{(\overline{k})}, \tag{2.1}$$

dove * indica l'operazione di aggiunto.

Il campo $\phi_l^{(k)}$ è a sua volta una distribuzione a valori operatoriali sullo spazio tempo $\mathbb{M}$ (d'ora in poi indicheremo con $\mathbb{M}$ lo spazio-tempo di Minkowski e useremo la metrica con segnatura $(+; -, -, -)$), ovvero

$$\phi_l^{(k)}(f) = \int \phi_l^{(k)}(x) f(x) d^4x, \tag{2.2}$$

dove f appartiene ad uno spazio di funzioni test e $\{\phi_l^{(k)}(f)\}$ sono un insieme di operatori lineari sullo spazio di Hilbert fisico $\mathcal{H}$ (n.b. la notazione (2.2) è, come al solito in teoria delle distribuzioni, formale).

La necessità di definire un campo come una distribuzione è dovuta al fatto che, se si suppone che il campo abbia un valore definito nei punti di $\mathbb{M}$, si ha come conseguenza che il campo opera come una costante sullo stato di vuoto, vedi [5].

Non assumiamo che tali operatori siano *limitati*; supporremo invece che tutti gli operatori $\{\phi_l^{(k)}(f)\}$ abbiano lo *stesso* dominio di definizione D e la stessa immagine, ambedue *densi* in $\mathcal{H}$.

La definizione precisa di campo quantistico relativistico è data dai seguenti assiomi di Wightman.

Assiomi di Wightman

W.1 (Invarianza relativistica dello spazio degli stati)

Esiste uno spazio di Hibert fisico $\mathcal{H}$ sul quale opera una rappresentazione unitaria $U(\Lambda, a)$ del gruppo spinoriale di Poincaré $\mathcal{P}_\circ$[1], dove $\Lambda \in SL(2, C)$ e $a \in \mathbb{M}$.

W.2 (Proprietà spettrali)

Lo spettro dell'operatore momento-energia P è concentrato nel cono superiore chiuso

$$\overline{V}^+ \equiv \{p \in \mathbb{M} : p^2 \geq 0, p^\circ \geq 0\}. \tag{2.3}$$

(Notare che il caso di massa zero è compreso nello spettro di P).

W.3 (Esistenza e unicità del vuoto)

Esiste in $\mathcal{H}$ un unico vettore $|0\rangle$ (a meno di un fattore di fase) chiamato vettore di vuoto, invariante rispetto alle trasformazioni del gruppo di Poincaré $U(\Lambda, a)$.

W.4 (Dominio di definizione dei campi)

[1]Il gruppo spinoriale di Poincaré è il gruppo di ricoprimento universale del gruppo proprio di Poincaré

Le componenti $\phi_l^{(k)}$ del campo quantistico $\phi^{(k)}$ sono operatori a valori distribuzionali sullo spazio di Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{M})$, con dominio di definizione D *comune* a tutti gli operatori e denso in $\mathcal{H}$.

Il vettore di vuoto $\mid 0\rangle$ è in D e D è applicato in se stesso dall'azione di $\phi_l^{(k)}$ e di $U(\Lambda, a)$.

W.5 (Covarianza di Poincaré)

$$U(\Lambda, a)\phi_l^{(k)}(x)U^{-1}(\Lambda, a) = \sum_m V_{l,m}^{(k)}(\Lambda^{-1})\phi_m^{(k)}(\Lambda x + a), \tag{2.4}$$

(dove, a rigori, dovremmo distinguere tra la trasformata di Lorentz Λ, che definisce l'elemento del gruppo e la trasformazione $\tilde{\Lambda}$, che ne è la rappresentazione quadri-vettoriale o spinoriale) dove $V_{l,m}^{(k)}(\Lambda^{-1})$ è una rappresentazione finita di $SL(2, C)$. $V_{l,m}^{(k)}(-\mathbb{I}) = \pm 1$, dove $\mathbb{I}$ è la matrice unità 4x4. Si ha il segno $+1$ se $\phi^{(k)}$ si trasforma secondo una rappresentazione ad un sol valore di $L_+^\uparrow$ (campo tensoriale) e -1 se il campo si trasforma secondo una rappresentazione a due valori di $L_+^\uparrow$ (campo spinoriale).

W.6 (Località o microcausalità)

Due campi qualsiasi $\phi_l^{(k)}(x)$ e $\phi_m^{(k')}(y)$ o commutano o anticommutano quando vi è una separazione tipo spazio tra i due punti x e y dello spazio di Minkowski $\mathbb{M}$.

Cioè

$$[\phi_l^{(k)}(x),\, \phi_m^{(k')}(y)]_\mp = 0, \qquad \text{per} \quad (x-y)^2 < 0. \tag{2.5}$$

W.7 (Ciclicità del vuoto)

L'insieme $D_\circ$ delle combinazioni lineari finite di vettori della forma

$$\phi_{l_1}^{(k_1)}(f_1)\,\phi_{l_2}^{(k_2)}(f_2)...\phi_{l_n}^{(k_3)}(f_n)\ \mid 0\rangle, \quad (n = 0, 1, 2, ...) \tag{2.6}$$

è *denso* in $\mathcal{H}$.

Un vettore di $\mathcal{H}$ che ha questa proprietà si dice *ciclico.*

2.2 Discussione degli assiomi

Gli assiomi W.1 e W.2 sono del tutto evidenti; per ciò riguarda l'assioma W.3 c'è da osservare che, benchè vitale per la teoria di Wightman, in una teoria generale di campo non è strettamente necessario. Vedremo che è equivalente alla *cluster decomposition property* che discuteremo più sotto. Si può inoltre osservare che non è a rigori necessario postulare l'invarianza dello stato di vuoto rispetto a tutte le trasformazioni del gruppo di Poincaré, ma sarebbe sufficiente postulare che sia invariante sotto traslazioni spazio-temporali. Infatti, se si assume che questo stato si trasformi sotto Poincaré secondo la rappresentazione $p^\mu = 0$, come è ragionevole supporre, avremo che il piccolo gruppo è $SO(3,1)$, cioè il gruppo di Lorentz.

L'assioma W.4 introduce la nozione di campo quantistico come operatore a valori distribuzionali, nel senso della (2.2), cioè operatori che operano sullo spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ e contemporaneamente sono funzionali sullo spazio delle funzioni test di Schwarz $S(\mathbb{M})$. In altre parole, la valutazione $\phi(f)$ del campo ϕ sulla funzione test f, è un operatore su $\mathcal{H}$.

La scelta di $S(\mathbb{M})$ come spazio di funzioni test (che ha per spazio duale lo spazio $S'(\mathbb{M})$ delle distribuzioni temperate) è generalmente considerata valida per le teorie di campo rinormalizzabili.

Tentativi di generalizzazione nella direzione di teorie non rinormalizzabili sono stati fatti anche recentemente (vedi a fine sezione **6.3**).

La teoria di Wightman prevede l'uso di operatori *non limitati*. Infatti, per gli operatori di campo, insieme agli operatori canonicamente coniugati, è richiesto che soddisfino le regole di commutazione canonica. Un risultato di analisi funzionale afferma che, in tal caso, se uno dei due operatori è limitato allora l'altro è necessariamente non limitato, vedi [3], pag. 351, teorema 13.6.

Gli operatori non limitati sembrano i più adatti per esempio per lo studio dei processi di scattering. E' anche vero che richiedono tutta una serie di ipotesi tecniche per poterli usare (vedi in questo contesto la discussione sulla polynomial algebra, in [7], pag.326).

L'assioma W.4 non è in generale sufficiente a fissare completamente il campo. C'è comunque la possibilità di definire un'algebra di Von Neumann a partire da questi campi (vedi Appendice A.1 per la definizione di algebre di Von Neumann e, per esempio, [7], pag.43, per la corrispondente teoria).

L'assioma W.5 ammette solo campi con un numero finito di componenti.

In linea di principio il formalismo di Wightman può essere adattato a campi con un numero infinito di componenti, ma un certo numero di proprietà sono così perse [7], pag. 407.

Nel seguito *escluderemo* questo caso.

La condizione di covarianza può anche essere espressa mediante la trattazione spinoriale (vedi [7], capitolo 3), che risulta più comoda in alcuni casi.

Consideriamo ora l'assioma W.6. La località è la proprietà dei campi quantistici che assicura la commutatività locale, per distanze in $\mathbb{M}$ tipo spazio, delle osservabili, che, a sua volta, garantisce la validità del principio di causalità di Einstein.

Per campi che sono osservabili ammetteremo la commutatività

$$[\phi_l^{(k)}(x), \phi_m^{(k')}(y)] = 0, \qquad \text{per} \quad (x-y)^2 < 0. \tag{2.7}$$

Ma la teoria di Wightman ammette anche campi non-osservabili e quindi per essi si può ammettere anche una regola più generale, come con l'assioma W.6 abbiamo ammesso (campi anticommutanti).

Verrà chiamata *connessione normale di spin-statistica* la connessione usuale, che ammette la (2.7) per campi di spin intero e quella con l'anticommutatore per campi di spin semi-intero, ma la teoria di Wightman ammette anche le cosidette *parastatistiche* (vedi [7], Appendix H, pag. 403).

Ometteremo la generalizzazione alle parastatistiche e aggiungeremo il seguente assioma:

W.8 (Spin e Statistica)

Esiste una normale connessione tra spin e statistica.

L'assioma W.7 è di natura tecnica. Esso implica la *irriducibilità* del sistema di campi assegnato, ovvero assicura la validità della seguente proprietà: un operatore limitato che commuta con tutti i campi $\phi^{[k]}$ è un multiplo dell'operatore unità.

L'assioma W.3 può essere sostituito con il seguente (vedi [7], Proposizione 7.1, pag. 276)

W.8′ (Cluster Property)

Esiste nel dominio comune dei campi D un **unico** vettore $\mid 0\rangle$ tale che, per ogni distanza di tipo spazio $a \,\epsilon\, \mathbb{M}$ e per ogni coppia di operatori $A_1,\ A_2 \,\epsilon\, \mathcal{P}(\mathbb{M})$ dell'algebra polinomiale, cioè l'algebra generata da tutte le possibili combinazioni lineari di prodotti di campi, nel senso di elementi del tipo

$$\int \phi_{l_1}^{(k_1)}(x_1)\,\phi_{l_2}^{(k_2)}(x_2)\,...\phi_{l_n}^{(k_n)}(x_n) f(x_1, x_2, ...x_n) dx_1 dx_2 ... dx_n, \tag{2.8}$$

si ha

$$\langle 0 \mid A_1 U(1, \lambda a) A_2 \mid 0\rangle \to \langle 0 \mid A_1 \mid 0\rangle\langle 0 \mid A_2 \mid 0\rangle, \quad \text{per} \quad \lambda \to \infty. \tag{2.9}$$

Per la dimostrazione di questo punto rimandiamo a [7], Proposizione 7.1, pag. 276, dove si dimostra l'equivalenza dell'assioma dell'esistenza di un unico stato di vuoto con l'assioma della separabilità.

Nella teoria di Wightman, cioè in una teoria per la quale valgono gli assiomi W.I-W.VII ed in particolare quest'ultimo, si dimostra la seguente proprietà, che equivale all'irriducibilità dei campi:

″un operatore limitato che commuta con tutti i campi $\phi^{(k)}$ è un multiplo dell'operatore unità. Ciò equivale a dire che gli operatori di campo formano un sistema irriducibile.″

La dimostrazione di questo teorema si può trovare in [7], Proposition 8.1, pag. 330 o anche [6], Teorema 4.4, pag. 140.

2.3 Proprietà dello stato di vuoto

Quanto segue non è strettamente pertinente all'argomento trattato in questi appunti, ma vale la pena di accennarlo data la sua importanza nella teoria generale.

Vale il seguente teorema:

Teorema 1

> (Teorema di Reeh and Schlieder, 1961) ″ Per ogni aperto non vuoto $\mathcal{O}$ dello spazio $\mathbb{M}$ di Minkowski, l'insieme dei vettori della forma $A \mid 0\rangle$, dove $\mid 0\rangle$ è lo stato di vuoto (vedi l'Assioma W.3) e dove $A \,\epsilon\, \mathcal{P}(\mathcal{O})$, essendo $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ l'algebra polinomiale dei campi che hanno supporto in $\mathcal{O}$, forma un insieme *denso* in $\mathcal{H}$.″

(Per la dimostrazione vedi [8], pag.101 o in [7], pag.331).

Sotto un'apparenza innocente il teorema di Reeh e Schlieder nasconde un significato molto importante. Esso in sostanza ci dice che è difficile isolare un sistema, descritto mediante campi, dall'ambiente esterno, poiché, se consideriamo i campi con supporto in una data regione dello spazio, si genera automaticamente *tutto* lo spazio di Hilbert $\mathcal{H}$, nel quale vivono tutti i campi con qualsiasi supporto. Cioè agendo localmente si interagisce globalmente.

È inoltre noto un teorema della teoria dell'algebra degli operatori limitati su di uno spazio di Hilbert, e cioè che se un vettore è *ciclico* (come lo stato di vuoto) per una *-algebra $\mathcal{P}$, allora è *separante* per l'algebra commutante $\mathcal{P}'$ (vedi [1], pag.85 o ancora [8], pag.101, 102). Per la definizione di commutante vedi la fine della Sezione A.1. Separante qui significa che, se A è un qualsiasi operatore dell'algebra e si ha $A \mid \Phi\rangle = 0$, dove Φ è separante, allora è $A = 0$.

Si può dire che uno stato è separante se, utilizzandolo come stato di vuoto per costruire uno spazio di Fock, in tale spazio *non esistono* operatori di distruzione.

Detto in altri termini: se $\mathcal{O}$ e $\mathcal{O}'$ sono due domini in M, a distanza relativa tipo spazio, allora ogni elemento dell'algebra polinomiale $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ commuta con ogni elemento di $\mathcal{P}(\mathcal{O}')$ (microcausalità). Quindi, se si ammette per ciascuna l'esistenza di uno stato di vuoto, non esiste in ambedue le algebre alcun operatore di annichilazione; vedi per esempio la discussione su questo punto in [9], pag.5.

La conclusione raggiunta vale naturalmente solo per algebre di operatori definite localmente, cioè su di un dominio limitato e aperto $\mathcal{O}$. Per l'algebra dei campi definita su tutto $\mathbb{M}$ si ha la consueta definizione degli operatori di creazione e distruzione.

Capitolo 3

Definizione e proprietà delle funzioni di Wightman

Sia $\{\phi^{(k)}\}_{k \epsilon K}$ un sistema di campi di Wightman. Il valore di aspettazione nel vuoto

$$w^{(k_1,...,k_n)}_{l_1,...,l_2}(x_1,...,x_n) = \langle 0 \mid \phi^{(k_1)}_{l_1}(x_1)...\phi^{(k_n)}_{l_n}(x_n) \mid 0 \rangle, \tag{3.1}$$

dove $x_1, ..., x_n \,\epsilon\, \mathbb{M}$, è detta *funzione di Wightman* dei campi $\phi^{(k_1)}, ..., \phi^{(k_n)}$

(n.b. gli indici k_i e l_i saranno in seguito talvolta omessi).

Nonostante il nome di funzione queste sono distribuzioni temperate, cioè definite sullo spazio delle funzioni rapidamente decrescenti $S(\mathbb{M}^n)$.

Per $n = 0$ poniamo $w^{(0)} = 1$.

Il risultato principale di Wightman è che, se si considera un sistema $w = \{w^{(k_1,...,k_n)}_{l_1,...,l_n}\}$ di distribuzioni che soddisfano gli assiomi W.1-W.7, allora esiste un sistema di campi di Wightman $\phi \equiv \{\phi^{(k)}\}$ i cui valori di aspettazione di vuoto sono uguali al sistema delle funzioni di Wightmn w.

Questo è il *teorema di ricostruzione* di Wightman.

In altre parole, l'intero contenuto di una teoria quantistica di campo può essere tradotta nel linguaggio delle funzioni di Wightman; queste permettono di ricostruire lo spazio di Hilbert degli stati fisici, la rappresentazione unitaria del gruppo di Poincaré e gli operatori covarianti di campo.

Qui di seguito riportiamo una lista di *proprietà caratteristiche* delle funzioni di Wightman.

w.1 (Natura delle singolarità e del tipo di crescita ammissibile).
Le funzioni di Wightman sono distribuzioni temperate nelle variabili $x_1, ..., x_n$.

w.2 (Proprietà dell'aggiunta).

$$\overline{w_{l_1,...,l_2}^{(k_1,...,k_n)}(x_1, ..., x_n)} = w_{\bar{l}_1,...,\bar{l}_2}^{(\bar{k}_1,...,\bar{k}_n)}(x_n, ..., x_1) \tag{3.2}$$

(ricordiamo le notazioni (2.1)).

w.3 (Positività).

$$\int ... \int \sum_{m,n=0}^{\infty} \sum_{(k)(l)} \sum_{(k')(l')} \overline{f_{(l)}^{(k)}(x_1, ..., x_m)}\, w_{(\bar{l}),(l')}^{(\bar{k}),(k')}(x_m, ..., x_1, x_1', ..., x_n')$$
$$f_{(l')}^{(k')}(x_1', ..., x_n')\, d^4x_1...d^4x_m d^4x_1'...d^4x_n' \geq 0, \tag{3.3}$$

dove

$$w_{(l),(l')}^{(k),(k')} \equiv w_{l_1,...,l_m,l_n',...,l_n'}^{(k_1),...,(k_m),(k_1'),...,(k_n')}, \tag{3.4}$$

per ogni sistema finito $f \equiv \{f_{(l)}^{(k)}\} \equiv f_{l_1,...,l_m}^{(k_1,...,k_m)}$ di funzioni complesse (cioè tale che tutte le funzioni, eccetto un numero finito, è zero) dello spazio di Schwartz $S(\mathbb{M}^n)$; per $n = 0$ poniamo $f^{(0)} \equiv$ numero complesso arbitrario.

w.4 (Covarianza di Poincaré)

$$\sum_{m_1,...,m_n} V_{l_1,m_1}^{(k_1)}(\Lambda^{-1})...V_{l_n,m_n}^{(k_n)}(\Lambda^{-1})\, w_{m_1,...,m_n}^{(k_1,...,k_n)}(\Lambda x_1 + a, ..., \Lambda x_n + a) =$$
$$= w_{l_1,...,l_n}^{(k_1,...,k_n)}(x_1, ..., x_n). \tag{3.5}$$

Sfruttando l'invarianza per traslazione è utile definire le distribuzioni:

$$W(x_1 - x_2, ..., x_{n-1} - x_n) \equiv w(x_1, ..., x_n) \tag{3.6}$$

che si chiamano ancora funzioni di Wigtman.

w.5 (Proprietà spettrale)

La trasformata di Fourier

$$\tilde{w}(p_1, ...p_n) = \int w(x_1, ..., x_n) e^{i(p_1 x_1 + ... + p_n x_n)} d^4x_1 ... dx_n^4 \tag{3.7}$$

è concentrata in

$$p_k + p_{k+1} + ... + p_n \, \epsilon \, \overline{V}^-, \quad \text{con} \quad k = 2, 3, ..., n, \tag{3.8}$$

dove

$$\overline{V}^- = \{p \, \epsilon \, \mathbb{M} : p^2 \geq 0, p^\circ \leq 0\}; \tag{3.9}$$

Notare che il supporto $\overline{V}^-$ è il completamento del cono luce passato. Per un campo scalare ϕ si ha, per $n = 2$ (vedi [7], pag.354),

$$\begin{aligned} \langle 0 \mid \phi(x)\phi(0) \mid 0 \rangle &= -i\overline{D}^-(x - y) = \\ &= 2\pi i \textstyle\int \theta(-p^\circ)\delta(p^2 - m^2) e^{ip \cdot x} \frac{d^4p}{(2\pi)^4}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

L'espressione data in [6], pag.116, si ottiene con $p \to -p$:

$$\begin{aligned} \langle 0 \mid \phi(x)\phi(0) \mid 0 \rangle &= -i\overline{D}^-(x - y) = \\ &= 2\pi i \int \theta(p^\circ)\delta(p^2 - m^2) e^{-ip \cdot x} \frac{d^4p}{(2\pi)^4}, \end{aligned} \tag{3.11}$$

dove ora la trasformata di Fourier ha supporto nel completamento del cono futuro. Le due espressioni differiscono per la definizione della trasformata di Fourier.

La definizione usuale è quella data dalla (3.11).

Per la distribuzioni W la trasformata di Fourier si definisce in modo più semplice

$$\tilde{W}(q_1, ..., q_{n-1}) = \int W(\xi_1, ..., \xi_{n-1}) e^{i(q_1 \xi_1 + ... + q_{n-1} \xi_{n-1})} d^4\xi_1 ... d^4\xi_{n-1} \tag{3.12}$$

dove definiamo $\xi_j = x_j - x_{j+1}$, $j = 1, ..., n - 1$, per cui

$$p_1x_1 + ... + p_nx_n = (p_1 + ... + p_n)x_n + (q_1\xi_1 + ... + q_{n-1}\xi_{n-1}), \qquad (3.13)$$

e ne segue

$$\tilde{w}(p_1, ..., p_n) = (2\pi)^4\delta^4(p_1 + ... + p_n)\tilde{W}(p_1, p_1 + p_2, ..., p_1 + ... + p_{n-1}) \quad (3.14)$$

dove

$$\begin{gathered} q_1 = p_1 \in \overline{V}^+ \\ q_2 = p_1 + p_2 \in \overline{V}^+ \\ .... \\ q_{n-1} = p_1 + p_2 + ... + p_{n-1} \in \overline{V}^+. \end{gathered} \qquad (3.15)$$

e la proprietà spettrale richiede che sia

$$supp\{\tilde{W}(q_1, ..., q_{n-1})\} \subset \overline{V}^+ \times ... \times \overline{V}^+ \qquad (3.16)$$

$n - 1$ fattori.

La proprietà di supporto (3.16) e la (3.8) sono equivalenti, come si vede se si tien conto della condizione $p_1 + p_2 + ... + p_n = 0$ imposta dalla funzione delta di Dirac a fattore. Infatti, posto $P = p_1 + ... + p_n$, si ha

$$p_k + ... + p_n = P - (p_1 + ... + p_{k-1}), \quad k = 2, ..., n, . \qquad (3.17)$$

w.6 (Proprietà di separabilità ovvero ″Cluster Property″)

$$\begin{aligned} & w^{(k)}_{(l)}(x_1, ..., x_k, x_{k+1} + \lambda a, ..., x_n + \lambda a) \to_{\lambda\to\infty} \\ & \quad w^{(k_1,...,k_k)}_{l_1,...,l_k}(x_1, ..., x_k)w^{(k_{k+1},...,k_n)}_{l_{k+1},...,l_n}(x_{k+1}, ..., x_n), \end{aligned} \qquad (3.18)$$

dove $a \,\epsilon\, \mathbb{M}$ è un vettore tipo spazio arbitrario.

w.7 (Località)

$$w_{(l)}^{(k)}(x_1,...,x_n) = \sigma^{(k_k k_{k+1})} w_{(\check{l})}^{(\check{k})}(x_1,..,x_{k+1},x_k,...,x_n), \tag{3.19}$$

dove $\sigma^{(k_k k_{k+1})} = +1$ se almeno uno dei campi $\phi^{(k)}$ e $\phi^{(k+1)}$ ha spin intero e vale -1 se ambedue i campi hanni spin semi-intero.

Le proprietà **w.1-w.7** sono una diretta conseguenza degli assiomi di Wightman **W.1-W.7**.

Diamo qui di seguito un cenno della loro derivazione dagli assiomi. Osserviamo però subito che la proprietà **w.3** di positività definita è la traduzione della proprietà $\langle 0 \mid A^* A \mid 0 \rangle > 0$ per $A \,\epsilon\, \mathcal{P}(\mathbb{M})$, in termini delle funzioni di Wightman. Ricordiamo che $\mathcal{P}(\mathbb{M})$ è l'algebra degli operatori (polynomial algebra) associata, in questo caso, a tutto $\mathbb{M}$, generata dalle combinazioni lineari complesse di tutti i possibili operatori A della forma

$$A = \int \phi_{l_1}^{(k_1)}(x_1)...\phi_{l_n}^{(k_n)}(x_n) f(x_1,...,x_n) dx_1...dx_n, \tag{3.20}$$

dove le f in questo caso hanno supporto su tutto $\mathbb{M}$. Sostituendo la forma (3.20) in $\langle 0 \mid A^* A \mid 0 \rangle > 0$, si vede appunto che si ottiene la **w.3**.

Teorema 2

Cenno di dimostrazione delle proprietà **w.1-w.7**.

w.1 (natura distribuzionale) vedi la proprietà W.4.

w.2 (aggiunta) E' ovvia.

w.3 (positività) Si è già detto, deriva da $\langle 0 \mid A^* A \mid 0 \rangle > 0$.

w.4 (invarianza relativistica) Si ottiene sistituendo la (2.4) nelle w.

w.5 (spettro) Che $p \equiv (p_1,...,p_n)$ sia in $\overline{V^+}$ si vede dalla (3.16).

w.6 (Proprietà di separabilità ovvero "cluster property") Equivale all'esistenza e unicità del vuoto per la proprietà W.8'.

Infine, per dimostrare la proprietà w.7 (località), basta usare la W.7.

Capitolo 4

Il teorema di ricostruzione di Wightman

Per la dimostrazione di questo teorema ci limitiamo ad un campo scalare autoaggiunto ϕ, dato che per un campo di tipo più generale $\phi^{(k)}_{(l)}$ avremmo solo una complicazione nelle notazioni, senza acun contenuto aggiuntivo.

Riportiamo nuovamente l'enunciato del *teorema di ricostruzione di Wightman* (vedi [7], Theorem **8.6**, pag.339):

Teorema 3

> $''$ sia W un funzionale di Wightman sull'algebra topologica, involutiva con identità Ω (vedi Appendice (A.3), che soddisfa la cluster property
>
> $$W(f \otimes g_{\{\lambda a,1\}}) \longrightarrow W(f)W(g), \quad \text{per} \quad \lambda \to \infty, \tag{4.1}$$
>
> dove $a \in \mathbb{M}$ è un vettore di tipo spazio arbitrario e dove $f,\, g \,\epsilon\, \Omega$.
>
> Allore esiste uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$, una rappresentazione unitaria $U(a, \Lambda)$ del gruppo proprio di Poincaré ed un campo quantistico scalare e autoaggiunto $\phi(x)$, unici a meno di equivalenze unitarie, tali che valgono gli assiomi W.1-W.7 della Sezione 2.1 e
>
> $$W(f) = \langle 0 \mid A(f) \mid 0\rangle, \tag{4.2}$$

dove

$$A(f) = f^{[0]} + \sum_{n=1}^{\infty} \int \phi(x_1)...\phi(x_n) f^{[n]}(x_1, ..., x_n) dx_1...dx_n. \quad (4.3)$$

In quest'ultima espressione $f^{[n]}$ è definita come l'elemento di una successione $f = \{f^{[n]}\}$ di funzioni $f^{[n]}(x_1, ..., x_n)$ nello spazio di Schwartz $S(\mathbb{M}^n)$, con $f^{[0]} \epsilon C.''$

Questo teorema è un caso particolare della costruzione GNS, dove, al posto di una C^*-algebra si ha una *-algebra topologica Ω.

La dimostrazione è praticamente una ripetizione parola per parole della **proposizione 1** (costruzione **GNS**) dell'appendice A.2.1. Se infatti ripercorriamo passo passo la dimostrazione data in sezione (A.2.1) si vede che la proprietà tipica di una C^*-algebra, cioè la (A.8), non è utilizzata. In particolare non viene utilizzato il fatto che l'algebra Ω ha una topologia che non è definita in termini di una norma, come è il caso delle C^*-algebre, ma piuttosto in termini di un sistema di seminorme (vedi, per esempio, [7], pag.19).

L'algebra alla quale si applica la costruzione GNS è l'algebra Ω introdotta nella sezione (A.3) e il funzionale preso in considerazione per definire una rappresentazione dell'algebra è il funzionale di Wightman W.

La costruzione GNS ci garantisce l'esistenza di uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$, di un vettore ciclico Φ_W associato al funzionale W e di una rappresentazione lineare π_W, unica a meno di equivalenze unitarie.

Ora, il funzionale W è assegnato in termini delle funzioni di Wightman w^n e contiene tutta l'informazione data dalla successione delle funzioni di Wightman $\{w(x_1, ..., x_n)\}$. Infatti, se si valuta per esempio il funzionale sulla successione di funzioni test $f = \{0, ..., 0, f^{[n]}, 0, ...\}$, si ottiene la funzione (distribuzione) di Wightman w^n, valutata su $f^{[n]}$.

Assegnato perciò il funzionale di Wightman, tramite la (A.113), che ora si scriverà

$$W(f) = \langle 0 \mid \pi_W(A(f)) \mid 0 \rangle, \quad (4.4)$$

dove A è l'operatore di campo corrispondente, per $n = 1, 2, ...$, si ottengono tutte le funzioni di Wightman come valori di aspettazione di vuoto dei corrispondenti operatori di campo.

Come si vede, con l'uso della costruzione GNS, applicata al caso dell'algebra topologica Ω, si ha la dimostrazione del teorema di ricostruzione di Wightman.

* * * * * *

Citiamo qui due risultati della teoria di Wightman senza dimostrazione (la dimostrazione si può trovare in [7], Prop. 8.8, pag. 342), che riguardano il caso libero.

> ″supponiamo che in una teoria di Wightman di un campo scalare Hermitiano $\phi(x)$ la funzione di Wightman $w^{[2]}(x, y)$ sia uguale a quella di campo libero con massa m. Allora il campo $\phi(x)$ è libero con massa m ″.

Un'altro risultato è il seguente:

> ″una teoria di Wightman di un campo scalare Hermitiano $\phi(x)$, tale che $[\phi(x), \phi(y)]$ = c-numero, è necessariamente una sovrapposizione di campi liberi [2]. In tal caso $\phi(x)$ si chiama ″campo libero generalizzato″.

* * * * * *

[2] Citato in [7]. Vedi O.W.Greenberg, ″Generalized free fields and models of local field theory″, Ann. of Phys., **16** (1961), 158.

Capitolo 5

Proprietà analitiche delle funzioni di Wightman

Per la dimostrazione del teorema di ricostruzione di Wightman è necessario il seguente teorema (vedi, per esempio, [7], pag. 335 o anche [8], pag. 62):

Teorema 4

$''$ La funzione di Wightman $W(\xi_1, ..., \xi_{n-1})$ è il valore al contorno nella classe $S'(\mathbb{M}^{n-1})$ di una funzione $W(\zeta_1, ..., \zeta_{n-1})$, che è olomorfa nel *tubo passato* T^-_{n-1}, dove con il termine tubo si intende il dominio in C^n definito da

$$T^-_{n-1} = (\mathbb{M} + iV^-)^{n-1}, \tag{5.1}$$

(ovvero per $\zeta_j \equiv \xi_j + i\eta_j$ con $\xi_j \, \epsilon \, \mathbb{M}$, $\eta_j \, \epsilon \, V^-$, $j = 1, ..., n-1$) e soddisfa la stima

$$| \, W(\zeta_1, ..., \zeta_{n-1}) \leq A(1 + \sum_{j=1}^{n-1} | \, \zeta_j \, |^2)^m (\min_j \eta_j^2)^{-l}, \tag{5.2}$$

per $\eta_j \equiv Im\zeta_j \, \epsilon \, V^-$, dove A, m, l sono numeri non negativi (diversi per ogni funzione di Wightman).$''$

Quindi, la funzione $w(x_1, ..., x_n)$ è il valore al contorno (in $S'(\mathbb{M}^n)$) di una funzione $w(z_1, ..., z_n)$ olomorfa nel tubo inferiore $\mathcal{T}_n^-$:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_n^- &= \{(z_1, ..., z_n) \,\epsilon\, \mathcal{C}\mathbb{M}^n : \quad z_j = x_j + iy_j; \\ & x_j \,\epsilon\, \mathbb{M}^n, \quad y_j - y_{j+1} \,\epsilon\, V_j^-, \quad j, k = 1, ..., n\}, \end{aligned} \tag{5.3}$$

dove $\mathcal{C}\mathbb{M}^n$ è la complessificazione di $\mathbb{M}^n$.

Osservazione: il teorema citato in Appendice, A.5.2, va applicato alla distribuzione $\tilde{W}$, cioè alla trasformata di Fourier della W. Infatti, la proprietà spettrale è formulata per la trasformata, vedi l'equazione (3.16), cioè

$$supp\{\tilde{W}(q_1, ..., q_{n-1})\} \subset \overline{V}^+ \times ... \times \overline{V}^+. \tag{5.4}$$

Un'osservazione importante è la seguente: la distribuzione W è l'*anti*trasformata della $\tilde{W}$, che ha il segno *opposto* nell'esponenziale. Questo è il motivo per cui vi è nella (5.1) il cono passato V^-.

La dimostrazione di questo teorema è basata sul risultato riportato in Appendice (B.2).

Dimostrazione: per la proprietà spettrale delle funzioni di Wightman **w.5**, vedi il Capitolo 3, si ha che il supporto della trasformata di Fourier $\tilde{W}(q_1, ..., q_n)$ è dato da

$$supp\{\tilde{W}(q_1, ..., q_{n-1})\} \subset \overline{V}^+ \times ... \times \overline{V}^+. \tag{5.5}$$

Ora si ha

$$W(\xi_1, ..., \xi_{n-1}) = \int \tilde{W}(q_1, ..., q_{n-1}) e^{-i(q\cdot\xi)} \frac{d^{4(n-1)}\xi}{(2\pi)^{4(n-1)}}, \tag{5.6}$$

che si estende analiticamente a

$$\begin{aligned} W(\zeta_1, ..., \zeta_{n-1}) &= \int \tilde{W}(q_1, ..., q_{n-1}) e^{-i(q\cdot(\xi+i\eta))} \frac{d^{4(n-1)}q}{(2\pi)^{4(n-1)}} = \\ &= \int e^{-i(q\cdot\xi)} [e^{(q\cdot\eta)} \tilde{W}(q_1, ..., q_{n-1})] \frac{d^{4(n-1)}q}{(2\pi)^{4(n-1)}}, \end{aligned}$$

dove $\zeta = \xi + i\eta$.

Poiché la $\tilde{W}$ ha supporto in $\overline{V}^+$ in ogni suo argomento q_j, ne segue che $W(\zeta_1, ..., \zeta_{n-1})$ è olomorfa per $\eta_j \,\epsilon\, V^-$, cioè per ζ_j nel *tubo passato*[3]

$$T^-_{n-1} = (\mathbb{M} + iV^-)^{n-1}. \tag{5.7}$$

Inoltre, per il risultato di Appendice B.27, si ha che $W(\zeta_1, ..., \zeta_{n-1})$ soddisfa la stima

$$\mid W(\zeta_1, ..., \zeta_{n-1}) \mid \leq A(1 + \sum_{j=1}^{n-1} \mid \zeta_j \mid^2)^m (\min_j \eta_j^2)^{-l}, \tag{5.8}$$

con A, m e l numeri non negativi.

Quindi il teorema è dimostrato.

Se ora si applica quanto detto alle funzioni di Wightman $w(z_1, ..., z_n)$ invece che alle $W(\zeta_1, ..., \zeta_{n-1})$, si ha il seguente risultato:

Teorema 5

″ le funzioni $w(x_1, ..., x_n)$ di Wightman, sono funzioni olomorfe nel *tubo inferiore* $\mathcal{T}^-_n$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^-_n = \quad & \{(z_1, ..., z_n) \,\epsilon\, \mathbb{CM}^n : z_j = x_j + iy_j; \quad x_j \,\epsilon\, \mathbb{M}; \\ & y_k - y_{k+1} \,\epsilon\, V^-, \quad j = 1, ..., n; \quad k = 1, ..., n-1\}.'' \end{aligned}$$

Ulteriori informazioni sulle proprietà di analiticità delle funzioni di Wightman si possono ottenere tenendo conto della loro covarianza, proprietà w.4 del Capitolo 3. E' infatti chiaro che la covarianza permette di determinare le funzioni di Wightman in un dominio ottenuto per trasformazione di Poincaré da un altro dominio nel quale la funzione sia assegnata.

In linea di principio ciò è semplice, ma per far questo è necessario estendere al campo complesso le trasformazioni di Lorentz.

Alcuni dettagli delle dimostrazioni sono riportati in Appendice **C**. Riportiamo qui i risultati importanti.

[3]n.b. Se $q \in V^+$ e $\eta \in V^-$ si ha che $(q \cdot \eta) < 0$. Infatti, poichè $q^2 > 0$ e anche $\eta^2 > 0$ essendo ambedue i vettori di tipo tempo, avremo che esiste il riferimento in cui, per esempio, $\vec{q} = 0$. In questo riferimento $(q \cdot \eta) = q^\circ \eta^\circ < 0$. Poiché è invariante si ha $(q \cdot \eta) < 0$ in tutto il dominio d'integrazione.

Il primo risultato, come abbiamo premesso, è il seguente:

Teorema 6

> ″ Le funzioni di Wightman possono essere estese analiticamente dal tubo inferiore (5.9) al *tubo esteso* $\mathcal{T}_n$.″

Ciò è stato discusso in appendice **C**. Vedi l'equazione (C.14) per la definizione di tubo esteso.

Come abbiamo accennato in appendice, sebbene il tubo inferiore non contenga *punti reali* $(x_1, ..., x_n) \,\epsilon\, \mathbb{M}^n$, il tubo esteso $\mathcal{T}_n$ ne contiene.

Si può infatti dimostrare che l'insieme dei punti reali che appartengono al tubo esteso $\mathcal{T}_n$, definito dall'equazione (C.14) (ovvero T_n, come definito nella (C.12), per la variabili $(\xi_1, ..., \xi_{n-1})$ delle funzioni W), che è dato da

$$\mathcal{I}_n = \mathcal{T}_n \bigcap \mathbb{M}^n, \tag{5.9}$$

è non vuoto. I punti di questo insieme sono detti *punti di Jost.*

Si può estendere ulteriormente il dominio di analiticità delle funzioni di Wightman sfruttando la relazione spin-statistica e definendo un *tubo simmetrizzato*

$$\mathcal{T}_n^S = \bigcup_{\pi \in S_n} \pi \mathcal{T}_n, \tag{5.10}$$

dove S_n è il gruppo delle permutazioni degli indici $1, ..., n$, che opera sulle variabili $(z_1, ..., z_n)$ e π è definito da

$$\pi(z_1, ..., z_n) = (z_{\pi^{-1}(1)}, ..., z_{\pi^{-1}(n)}) \tag{5.11}$$

Si ottiene in tal modo il seguente risultato

Teorema 7

> ″ In une teoria di Wightman, con l'usuale connessione spin-statistica, le funzioni di Wightman $w(z_1, ..., z_n)$, $z_j \in \mathbb{CM}$, $j = 1, ..., n$, ammettono una continuazione analitica ad un sol valore nel *tubo simmetrizzato* $\mathcal{T}_n^S$, e soddisfano la regola di commutazione
>
> $$w(z_{\pi 1}, ..., z_{\pi n}) = \pm w(z_1, ..., z_n), \quad \pi \in S_n, \tag{5.12}$$
>
> dove il segno dipende dalla natura dei campi, se bosonici o fermionici, e dalla particolare permutazione di questi ultimi.″

Capitolo 6

Funzioni di Schwinger

6.1 Il gruppo delle rotazioni dello spazio Euclideo in quattro dimensioni

Il Teorema 7 del Capitolo precedente a pag. 23 ha una conseguenza importante per la discussione delle funzioni di Schwinger.

Premettiamo la seguente definizione: si chiamano *punti Euclidei* i punti di $\mathbb{CM}^n$ della forma

$$(z_1, ..., z_n) = (x'_1, ..., x'_n), \tag{6.1}$$

dove

$$x'_j \equiv (ix^4_j; \vec{x}_j), \quad j = 1, ..., n, \tag{6.2}$$

e dove $x_j \equiv (x^4_j; \vec{x}_j)$ è un punto di $\mathbb{R}^4$.

I punti Euclidei $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{4n}$, tali che $x_j \neq x_k$ se $j \neq k$ sono chiamati punti Euclidei *non eccezionali*.

Vale il seguente risultato:

Teorema 8

″ il tubo simmetrizzato $\mathcal{T}^S_n$, nel quale le funzioni di Wightman sono analitiche, contiene tutti i punti non eccezionali Euclidei.″

Diamo qui la traccia della dimostrazione, dalla quale si vedrà la necessità di richiamare il precedente teorema, in quanto necessario alla dimostrazione.

Dimostrazione. I punti x' appartengono per definizione al tubo T_1^+ o T_1^- secondo il segno di x_j^4, sono infatti della forma

$$x'_j \equiv (0; \vec{x}_j) + i(x_j^4; \vec{0}), \tag{6.3}$$

dove $(x_j^4; \vec{0}) \in V^\pm$, secondo il segno di x_j^4.

Anche le differenze $x_j - x_k$ saranno della stessa forma.

Con un'opportuna permutazione $\pi \in S_n$ si possono disporre i punti $(x'_1, ..., x'_n)$ in ordine di quarta componente crescente, cioè con $x_1^4 \leq x_2^4 \leq ... \leq x_n^4$ (n.b. È in questo punto che sfruttiamo il teorema della precedente sezione).

Supponiamo per il momento che tutte queste componenti siano distinte, cioè

$$x_1^4 < x_2^4 < ... < x_n^4, \tag{6.4}$$

col che si ha

$$x'_k - x'_{k+1} \equiv (0; \vec{x}_k - \vec{x}_{k+1}) + i(x_k^4 - x_{k+1}^4; \vec{0}), \tag{6.5}$$

dove $(x_k^4 - x_{k+1}^4) \in V^-$.

Ma allora $(x'_1, ..., x'_n) \in \mathcal{T}_n^-$ e $\mathcal{T}_n^- \in \mathcal{T}_n^S$, come volevasi dimostrare.

Passiamo ora al caso in cui almeno due delle quarte componenti sono uguali; saranno allora le parti spaziali ad essere distinte, poiché si tratta di punti Euclidei non eccezionali.

Potremo ancora supporre

$$x_1^4 \leq x_2^4 \leq ... \leq x_n^4. \tag{6.6}$$

Consideriamo la collezione finita di vettori in $\mathbb{R}^3$:

$$\{x_j - x_k : j, k = 1, ..., n; x_j^4 = x_k^4\}, \tag{6.7}$$

formata da vettori diversi da zero per ipotesi. Quindi con $\vec{x}_j - \vec{x}_k \neq 0$ e potremo scegliere il riferimento in modo che sia

$$x_j^3 - x_k^3 \neq 0, \quad x_j^4 = x_k^4, \quad j < k, \tag{6.8}$$

e ancora, senza perdita di generalità, potremo scegliere $x_j^3 < x_k^3, \quad \text{se} \quad j < k$.

Applicando ora la trasformazione di Lorentz complessa

$$\Lambda_\beta = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & 0 & i\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i\sin\beta & 0 & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}, \tag{6.9}$$

con $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, ai vettori $x_j - x_k$, con $j, k = 1, ..., n$, (la numerazione degli indici è, come usata fin'ora, (4;1,2,3)) si ottiene il vettore

$$(0;\, 0, 0, \cos\beta(x_j^3 - x_k^3)) + i(\sin\beta(x_j^3 - x_k^3);\, 0, 0, 0), \tag{6.10}$$

che è un punto di $\mathbb{M}+iV^-$, ovvero è un punto del cono $\mathcal{T}_n^-$ e quindi, essendo il trasformato con Λ_β di $(x'_1, ..., x'_n)$, quest'ultimo appartiene anch'esso a $\mathcal{T}^n \subset \mathcal{T}_n^S$.

Un ragionamento analogo si può fare nel caso generale, di più coppie di punti con quarta componente uguale.

Quindi il teorema è dimostrato. ■

Si è visto che le funzioni di Wightman sono analitiche nei punti Euclidei non eccezionali $(x'_1, ..., x'_n)$ (dove, ricordiamo, $x' \equiv (ix^4;\, \vec{x})$, con $x \equiv (x^4;\, \vec{x}) \in \mathbb{R}^4$, cioè reale), cioè nei punti $x_j \neq x_k$ se $j \neq k$.

E' chiaro il motivo di questa definizione, in quanto dovremo aspettarci che, per punti coincidenti $x_j = x_k$, le funzioni di Wightman siano singolari, poichè lo è il prodotto di campi.

Ogni vettore x'_j ha una proiezione tridimensionale reale $\vec{x}_j$ e una componente temporale immaginaria pura ix_j^4.

Il prodotto scalare di due vettori x',y' differisce per un segno dal prodotto scalare Euclideo $(x,\, y)_E$:

$$(x,\, y)_E = x^4y^4 + \vec{x}\cdot\vec{y} = -x'^0y'^0 + \vec{x}'\vec{y}' = -(x'^0y'^0 - \vec{x}'\cdot\vec{y}') = -(x'\cdot y')_{\mathbb{M}}, \tag{6.11}$$

dove $(.,.)_{\mathbb{M}}$ è il prodotto scalare di Minkowski, con segnatura $(+;-,-,-)$.

Abbiamo visto, con il Teorema 7 a pag 23, che la relazione di commutazione (5.12) è conseguenza dell'assioma di località dei campi. L'abbiamo chiamata relazione di commutazione, benché questa definizione in genere è riservata al caso di campi valutati in punti reali dello spazio-tempo, mentre in questo caso le funzioni di Wightman sono valutate per argomenti complessi arbitrari del tubo simmetrizzato. Dovremmo più correttamente definirla simmetria (nel caso di un singolo campo scalare autoaggiunto).

E' interessante notare che di fatto la località e questa relazione di simmetria sono equivalenti. Cioè il **Teorema 7** ammette un teorema inverso:

Teorema 7bis

> ″Consideriamo la teoria di un campo scalare autoaggiunto $\phi(x)$ che soddisfi gli assiomi di Wightman, con la possibile eccezione dell'assioma della località **W.VI**.
>
> Supponiamo che le funzioni di Wightman $w(x_1, ..., x_n)$ siano continuate analiticamente nel tubo simmetrizzato $\mathcal{T}_n^S$ e siano simmetriche negli argomenti $(z_1, ..., z_n)$. Allora vale l'assioma della località″.

Osservazione. Potrebbe sembrare un risultato ovvio, dato che, se si ha simmetria nelle variabili z_j, avremo, nel caso reale, simmetria in x_j e quindi la regola di commutazione, ovvero la località.

Bisogna però stare attenti al fatto che, se è vero che le funzioni di Wightman si ottengono come valori al bordo di funzioni analitiche nel tubo simmetrizzato, è necessario per questo che il limite avvenga entro il dominio di analiticità. Nell'inversione di due argomenti, come nella (5.12) può avvenire che in generale, i nuovi argomenti non si mantengano nel dominio di analiticità, e bisogna verificare sotto quali condizioni ciò avvenga (vedi, a questo proposito, [16], ultimo capoverso a pag. 69).

Dimostrazione. (vedi [15], secondo teorema pag. 83) L'ipotesi è che sia

$$w(z_1, ..., z_{k-1}, z_k, ..., z_n) = w(z_1, ..., z_k, z_{k-1}, ..., z_n), \qquad (6.12)$$

per tutti gli argomenti nel tubo simmetrizzato. Inoltre, le funzioni di Wightman $W(\xi_1, ..., \xi_{n-1})$, dove $\xi_j = x_j - x_{j+1}$ $j = 1, ..., n-1$, si possono ottenere dalle funzioni $W(\zeta_1, ..., \zeta_{n-1})$ nel limite $Im(\zeta_j) \to 0$, *entro* V^-.

Per riscrivere la (6.12) in termini delle $W(\zeta_1, ..., \zeta_{n-1})$, osserviamo che l'operazione di scambio $z_k \leftrightarrow z_{k-1}$ si ottiene con la sostituzione

$$\zeta_{k-1} \leftrightarrow \zeta_{k-1} + \zeta_k, \tag{6.13}$$
$$\zeta_k \leftrightarrow -\zeta_k, \tag{6.14}$$
$$\zeta_{k+1} \leftrightarrow \zeta_{k+1} + \zeta_k. \tag{6.15}$$
$$\tag{6.16}$$

Notare che ζ_{k-1} e ζ_{k+1} restano in V^-, poichè si trasformano in una somma di vettori in V^-, mentre ζ_k cambia segno e quindi si trasforma in un vettore di V^+.

Quindi, potremo senz'altro eseguire il limite $Im(\zeta) \to 0$ per tutte le variabili diverse da ζ_k, mentre, per quest'ultima, dovremo vedere sotto quale condizione possiamo eseguirlo.

Dimostriamo che, se ξ_k è di tipo spazio, cioè $(\xi_k, \xi_k) < 0$, allora il punto $(\zeta_1, ..., \zeta_{k-1}, \xi_k, \zeta_{k+1}, ..., \zeta_{n-1})$, appartiene al dominio $\mathcal{T}_n$, cioè al tubo esteso, ottenuto applicando tutte le possibili trasformazioni di Lorentz complesse ai punti del tubo passato $\mathcal{T}_n^-$, perché allora ξ_k è un punto di analiticità delle funzioni e può essere raggiunto per continuazione analitica.

Il risultato sarà ottenuto se mostreremo che esiste una trasformazione di Lorentz complessa che lo trasforma in un punto di $\mathcal{T}_n^-$.

Non c'è perdita di generalirà se il vettore ζ_k lo supponiamo della forma $(0; 0, 0, -a)$, con $a > 0$; se a questo vettore applichiamo la trasformazione (6.9), con $\beta > 0$, otteniamo il vettore

$$a(-i \sin\beta; 0, 0, -\cos\beta), \tag{6.17}$$

che appartiene a $\mathcal{T}_n^-$.

Possiamo perciò scrivere

$$\begin{gathered} W(\zeta_1, ..., \zeta_{k-1}, \xi_k, \zeta_{k+1}, ..., \zeta_{n-1}) = \\ W(\zeta_1, ..., \zeta_{k-1} + \xi_k, -\xi_k, \zeta_{k+1} + \xi_k, ..., \zeta_{n-1}), \end{gathered} \tag{6.18}$$

dove tutte le variabili eccetto ξ_k sono nel dominio di analiticità.

Si può perciò effettuare il limite $Im(\zeta_j) \to 0$, $j \neq k$, e ottenere

$$W(\xi_1, ..., \xi_{k-1}, \xi_k, \xi_{k+1}, ..., \xi_{n-1}) =$$
$$W(\xi_1, ..., \xi_{k-1} + \xi_k, -\xi_k, \xi_{k+1} + \xi_k, ..., \xi_{n-1}). \tag{6.19}$$

Questa, in termini delle funzioni w, è la relazione cercata

$$w(x_1, ..., x_{k-1}, x_k, ..., x_n) = w(x_1, ..., x_k, x_{k-1}, ..., x_n), \tag{6.20}$$

che vale per $(x_k - x_{k-1})^2 < 0$. ■

Quindi, l'assioma di località è del tutto equivalente alla simmetria di $w(z_1, ..., z_n)$.

Notare che la dimostrazione di questo teorema mette in evidenza che è necessaria molta attenzione nell'uso della continuazione analitica delle funzioni di Wightman.

Il teorema dimostrato sarà utile nella dimostrazione del Teorema di ricostruzione di Ostrwalder-Schrader.

Il Teorema 8, a pag. 24, permette di associare ad una teoria quanto-relativistica un'immagine matematica basata esclusivamente sullo spazio Euclideo quadridimensionale $\mathbb{E}$, dove il ruolo del gruppo di Lorentz è giocato dal gruppo $O(4, \mathbb{R}) \equiv O(4)$ delle trasformazioni ortogonali in quattro dimensioni.

Il gruppo $O(4)$ è la sezione reale del gruppo $O(4, \mathbb{C})$, che è isomorfo a $L(\mathbb{C})$ (vedi l'appendice **C**).

$O(4)$ consiste di due componenti connesse; $O_+(4)$ è la componente connessa all'identità. Il determinante dei suoi elementi è $+1$.

$O_+(4)$ contiene la trasformazione -1; non è semplicemente connesso ed è isomorfo al gruppo semplicemente connesso $SU(2) \times SU(2)$, che ne è il ricoprimento universale.

Questa corrispondenza è data esplicitamente come segue: sia $x \in \mathbb{E}$, ad esso associamo la matrice 2×2 complessa

$$\hat{x} = -i\tilde{x}' = \begin{pmatrix} x^4 - ix^3 & -x^2 - ix^1 \\ x^2 - ix^1 & x^4 + ix^3 \end{pmatrix}, \tag{6.21}$$

e indichiamo con $\hat{x}^*$ il quaternione coniugato

$$\hat{x}^* \equiv \epsilon \hat{x}^T \epsilon^{-1} = \begin{pmatrix} x^4 + ix^3 & x^2 + ix^1 \\ -x^2 + ix^1 & x^4 - ix^3 \end{pmatrix}, \tag{6.22}$$

dove $\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

La norma del vettore è data da $| \hat{x} |= \sqrt{det(\hat{x})}$.

L'applicazione di ricoprimento che fa corrispondere ad un elemento di $SU(2) \times SU(2)$ (coppia di elementi di $SU(2)$), un elemento di $O_+(4)$ è data da

$$(U_l, U_r) \longrightarrow R(U_l, U_r), \quad U_{l,r} \in SU(2), \tag{6.23}$$

dove $(U_l, U_r) \in SU(2) \times SU(2)$ e $\mathbb{R} \in O_+(4)$, con

$$(R(U_l, U_r)x)^\wedge = U_l \hat{x} U_r^T. \tag{6.24}$$

Questa corrispondenza ci permette di sostituire $O_+(4)$ con $SU(2)\times SU(2)$, nel senso che le rappresentazioni irriducibili $SU(2) \times SU(2)$ sono parametrizzate dalla coppia di numeri interi o semi-interi **(j,k)** (spin left e spin right). Questa rappresentazione opera sullo spazio degli spinori

$$\psi^{\alpha_1,\ldots,\alpha_{2j};\beta'_1,\ldots,\beta'_{2k}}, \tag{6.25}$$

simmetrici nelle α e nelle β' separatamente (vedi il caso analogo di $SL(2,\mathbb{C})\times SL(2,\mathbb{C})$ in Appendice 6), con la regola

$$\begin{gathered}(\mathcal{D}^{(j,k)}(U_l, U_r)\psi)^{\alpha_1,\ldots,\alpha_{2j};\beta'_1,\ldots,\beta'_{2k}} \\ = \sum_{\gamma_1,\ldots,\gamma_{2j};\delta'_1,\ldots,\delta'_{2k}} (\prod_s^{2j} (U_l)^{\alpha_s}_{\gamma_s})(\prod_t^{2k} (U_r)^{\beta'_t}_{\delta'_t})\psi^{\gamma_1,\ldots,\gamma_{2j};\delta'_1,\ldots,\delta'_{2k}}.\end{gathered} \tag{6.26}$$

6.2 Definizione e proprietà delle funzioni di Schwinger

Ricordiamo che i punti euclidei non eccezionali $(x'_1, ..., x'_n)$ sono definiti da

$$x'_j \equiv (ix^4_j; \vec{x}_j), \quad \text{dove} \quad x \equiv (x^4; \vec{x}) \in \mathbb{R}^4. \tag{6.27}$$

Cioò premesso definiamo le *funzioni di Schwinger* $s(x_1, ..., x_n)$ con

$$s(x_1, ..., x_n) = w(x'_1, ..., x'_n), \tag{6.28}$$

(dove abbiamo omesso gli indici di campo, come definiti in (3.1)) dove $x' \in \mathbb{M}$ mentre $x \in \mathbb{E}$. Quindi $(x'^2)_{\mathbb{M}} = (x'^{\circ})^2 - (\vec{x}')^2 = -((x^4)^2 + (\vec{x})^2) = -(x^2)_E$.

La (6.28) è un modo sintetico di definire le funzioni di Schwinger, infatti le variabili x_j sono reali e, allo stesso tempo, anche le variabili x' vanno considerate reali. In realtà si tratta di una *continuazione analitica*, per cui, prima si continuano le variabili x_j ai valori complessi $z_j = x_j + iy_j$, poi si pone $x_j^{\circ} = 0$ e $\vec{y}_j = 0$, infine si ridefinisce $y_j^{\circ} = x_j^4$. A questo punto si ha il risultato (6.28).

E' noto che una funzione olomorfa in un dominio complesso può essere completamente determinata dai suoi valori assegnati nell'intorno reale di un qualche punto. Nel caso di una funzione di più variabili complesse questo è essenzialmente il teorema $''$edge of the wedge$''$ (vedi l'appendice (5.1)).

Quindi, le funzioni di Schwinger possono, in linea di principio, determinare le funzioni di Wightman (date per valori reali dei suoi argomenti).

Si tratta ora di riformulare le proprietà caratteristiche delle funzioni di Wightman in termini delle funzioni di Schwinger.

Queste proprietà caratteristiche, come determinate dalle analoghe proprietà delle funzioni di Wightman, saranno assunte per un insieme di funzioni $s(x_1, ..., x_n)$, e si dimostrerà che esse sono le funzioni di Schwinger di un insieme di funzioni di Wightman, provando così che effetivamente queste determinano una teoria di campo. Questo è il contenuto del teorema di *Osterwalder-Shrader* [10].

L'ingrediente essenziale per questa dimostrazione è la trasformata di Fourier-Laplace, che è discussa in Appendice 5.2.

Il risultato di questa appendice si riassume nel seguente risultato: ad ogni distribuzione temperata $T(q_1, ..., q_{n-1})$, con supporto in

$$q_j \in \mathbb{M}, \quad q_j^0 \geq 0, \quad j = 1, ..., n-1, \tag{α}$$

corrisponde una distribuzione temperata $F(\xi_1, ..., \xi_{n-1})$, con supporto in

$$\xi_j \in \mathbb{E}, \quad \xi_j^4 < 0, \quad j = 1, ...n-1. \tag{β}$$

Ciò è reso esplicito dall'equazione

$$F(\xi_1, ..., \xi_{n-1}) = \int e^{\sum_{j=1}^{n-1}(\xi_j^4 q_j^0 + i\vec{\xi}_j \cdot \vec{q}_j)} T(q_1, ..., q_{n-1}) \frac{d^{n-1}q}{(2\pi)^{n-1}}, \tag{6.29}$$

dove l'esponente proviene formalmente da ($\xi_j^4 = -i\xi_j^0$)

$$\xi_j^4 q_j^0 + i\vec{\xi} \cdot \vec{q}_j = -i(\xi_j^0 q_j^0 - \vec{\xi}_j \cdot \vec{q}_j) = -i(\xi_j, q_j)_{\mathbb{M}}. \tag{6.30}$$

Se si pone

$$\hat{u}(q_1, ..., q_{n-1}) = \int e^{\sum_{j=1}^{n-1}(\xi_j^4 q_j^0 + i\vec{\xi}_j \cdot \vec{q}_j)} u(\xi_1, ..., \xi_{n-1}) d^{n-1}\xi, \tag{6.31}$$

dove $u \in \mathcal{S}(\mathbb{E}^{n-1})$, con supporto nell'insieme di punti (β) e $\hat{u} \in \mathcal{S}(\mathbb{M}^{n-1})$, con supporto in (α), si ha

$$\int F(\xi)u(\xi)d^{n-1}\xi = \int T(q)\hat{u}(q)\frac{d^{n-1}q}{(2\pi)^{n-1}}, \tag{6.32}$$

dove abbiamo indicato sinteticamente ξ per $(\xi_1, ..., \xi_{n-1})$, ecc.

Tutto ciò porta alla seguente conclusione

Teorema 9

> ″L'applicazione $u \longrightarrow \hat{u}$ è un operatore lineare e continuo dall'insieme (β) all'insieme (α). Il suo nucleo è l'origine e la sua immagine è densa nell'insieme (α).
>
> L'applicazione aggiunta $T \longrightarrow F$ è una corrispondenza 1-1 tra le distribuzioni temperate con supporto in (α) e le distribuzioni temperate con supporto in (β).″

La dimostrazione è data in Appendice **D.1**.

Elenchiamo ora le proprietà caratteristiche delle funzioni di Schwinger $s(x_1, ..., x_n)$ (che si tratti effettivamente delle proprietà che caratterizzano in modo univoco le funzioni di Schwinger lo si vedrà con la dimostrazione del teorema di Osterwalder-Schrader [10]); queste proprietà sono chiamate *Assiomi di Osterwalder-Schrader*.

s.1 (Carattere delle singolarità e crescita)

La funzione di Schwinger $s(x_1, ..., x_n)$ è definita come una distribuzione di $\mathcal{S}'(\mathbb{E}^n_{\neq})$, dove

$$\mathbb{E}^n_{\neq} = \{x_j \in \mathbb{E} : x_j \neq x_k, \quad \text{per} \quad j \neq k \quad \text{e} \quad j,k = 1, ..., n\}, \qquad (\gamma) \quad (6.33)$$

dove l'esclusione dei punti $x_j \neq x_k$ è, comè immaginabile, dovuta alla singolarità del prodotto di campi quantistici, valutati nello stesso punto spazio-temporale.

(n.b. Per $n = 0$ si definisce $s = 1$).

s.2 (Proprietà dell'aggiunta)

$$s(x_1, ..., x_n) = \overline{s(Tx_n, ..., Tx_1)}, \qquad (6.34)$$

dove

$$T(x^4, \vec{x}) = (-x^4, \vec{x}) \qquad (6.35)$$

(n.b. se si ripristinano gli indici come nella (3.1) occorre anche invertire il loro ordine come nell'equazione (3.2)).

s.3 (Positività)

E' analoga alla (3.3). Ripristinando gli indici di campo per maggior chiarezza, si scrive

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \sum_{(k)(l)} \sum_{(k')(l')} \overline{f^{(k)}_{(l)}(x_1, ..., x_m)}\, s^{(\bar{k}),(k')}_{(\bar{l}),(l')}(Tx_m, ..., Tx_1, x'_1, ..., x'_n)$$
$$f^{(k')}_{(l')}(x'_1, ..., x'_n)\, d^4x_1 ... d^4x_m d^4x'_1 ... d^4x'_n \geq 0, \qquad (6.36)$$

dove T è definito dall'equazione (6.35) e dove le funzioni $f(x_1, ..., x_n)$ sono definite nello spazio $\{x_j \in \mathbb{E}, 0 < x^4_1 < ... < x^4_n\}$.

s.4 (Covarianza Euclidea)

E' analoga alla (3.5):

$$\sum_{m_1,...,m_n} V^{(k_1)}_{l_1,m_1}(U_l^{-1}, U_r^{-1}) ... V^{(k_n)}_{l_n,m_n}(U_l^{-1}, U_r^{-1}) \quad s^{(k_1,...,k_n)}_{m_1,...,m_n}(Rx_1 + a, ..., Rx_n + a) =$$
$$= s^{(k_1,...,k_n)}_{l_1,...,l_n}(x_1, ..., x_n).$$

s.5 (Proprietá spettrale)

Si ha l'invarianza per traslazione

$$s(x_1, ..., x_n) = S(x_1 - x_2, ..., x_{n-1} - x_n), \tag{6.37}$$

dove anche $S(x_1 - x_2, ..., x_{n-1} - x_n)$ è una distribuzione temperata, con supporto in (β).

s.6 (Proprietà di separabilità ovvero ″ cluster property″)

E' analoga alla (3.18):

$$\begin{aligned} & s^{(k)}_{(l)}(x_1, ..., x_k, x_{k+1} + \lambda a, ..., x_n + \lambda a) \rightarrow_{\lambda\rightarrow\infty} \\ & \quad s^{(k_1,...,k_k)}_{l_1,...,l_k}(x_1, ..., x_k) s^{(k_{k+1},...,k_n)}_{l_{k+1},...,l_n}(x_{k+1}, ..., x_n), \end{aligned} \tag{6.38}$$

dove $a \equiv (0, \vec{a})$, e $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ è arbitrario.

s.7 (Proprietà di permutazione)

Per ogni permutazione π degli indici $(1, ..., n)$ vale la relazione

$$s(x_{\pi 1}, ..., x_{\pi n}) = \pm s(x_1, ..., x_n), \tag{6.39}$$

con le stesse osservazioni che per la (3.19).

Le proprietà **s.1** $-$ **s.7** duplicano le proprietà **w.1** $-$ **w.7** delle funzioni di Wifhtman. Ciò è dimostrato dal teorema di Osterwalder-Schrader, ovvero che vale l'equivalenza $(w) \longleftrightarrow (s)$.

Dimostriamo prima che $(w) \longrightarrow (s)$.

Teorema 10. ″Le funzioni di Schwinger $s(x_1, ..., x_n)$, definite mediante la (6.28), soddisfano le condizioni **s.1** $-$ **s.7**″.

Dimostrazione. Anche qui ci limiteremo al caso di un singolo campo scalare Hermitiano per semplicità di notazione, senza per questo perdere sostanzialmente in generalità.

Per definizione la funzione $s(x_1, ..., x_n)$ è estendibile ad una funzione reale analitica nei punti dell'insieme (γ) e le proprietà **s.4** (covarianza Euclideae) e **s.7** (invarianza sotto permutazione) seguono direttamente dai Teoremi 6 e 7 a pag. 23.

Questi Teoremi sono a loro volta conseguenza delle proprietà w.4 e w.7, dove quest'ultima, nel caso di un singolo campo scalare Hermitiano, va letta con $\sigma = +1$, che garantiscono l'analiticità delle funzioni di Wightman nel tubo simmetrizzato $\mathcal{T}_n^S$.

Ma la proprietà **s.1** richiede che la funzione $s(x_,...,x_n)$ sia in realtà una distribuzione di $\mathcal{S}'(\mathbb{E}^n)$, con supporto in (γ).

Affermare che sia una distribuzione va inteso nel senso che genera una distribuzione *regolare* $\mathcal{S}$, cioè

$$(\mathcal{S}, \phi) = \int_{\mathbb{E}^n} s(x_1,...,x_n)\phi(x_1,...,x_n)dx, \quad \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \tag{6.40}$$

Ciò richiede che la funzione $s(x_1,...,x_n)$ sia localmente integrabile e di crescita limitata polinomialmente e per questo è sufficiente che valga la limitazione

$$\mid s(x_1,...,x_n) \leq a(1+ \mid x \mid)^m (\min_{j,k} \mid x_j - x_k \mid)^{-l}, \tag{6.41}$$

con x nel supporto (γ) e con a, l e m numeri non negativi (vedi, per esempio, [12], §4.3, pag. 104).

Il denominatore in questa limitazione è in realtà superfluo e in ogni caso ininfluente. E' però utile perché possiamo dimostrare questa limitazione a partire dalla limitazione soddisfatta dalle funzioni di Wightman (5.2):

$$\mid w(z_1,...,z_n) \mid = \mid W(\zeta_1,...,\zeta_{n-1}) \mid \leq A(1+\sum_{j=1}^{n-1} \mid \zeta_j \mid^2)^m (\min_j \eta_j^2)^{-l}, \tag{6.42}$$

dove $z_j = x_j + iy_j$, e $\zeta_j = z_j - z_{j+1} = \xi_j + i\eta_j$.

Questa limitazione, adattata al caso di una funzione di Schwinger, cioè ponendo

$$\xi_j \equiv (0; \vec{x}_j - \vec{x}_{j+1}), \qquad \eta_j \equiv (y_j - y_{j+1}), \tag{6.43}$$

e tenuto conto che le funzioni di Schwinger sono definita da

$$s(x_1,...x_n) = w(x'_1,...,x'_n), \tag{6.44}$$

dove $x'_j \equiv (ix_j^4; \vec{x}_j)$, è

$$| \, s(x_1, ..., x_n) \, | \leq A(1+ \mid x \mid)^m [\min_{j \neq k} (x_j^4 - x_k^4)]^{-l}, \tag{6.45}$$

dove $x \in \mathbb{E}^n$ e dove si può sempre supporre che sia $\quad 0 < x_1^4 < ... < x_n^4 \quad$ per la simmetria delle funzioni di Schwinger.

Dobbiamo ora usare il seguente risultato:

Proposizione.

$''$per ogni punto $x \equiv (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{E}^n$, dove $x_j \neq x_k$ se $j \neq k$, esiste un vettore unitario $s \in \mathbb{E}$ tale che

$$| \, (s \cdot (x_i - x_j)) \, | \geq c \mid x_i - x_j \mid, \quad \text{per} \quad \forall \quad i \neq j. \tag{6.46}$$

Inoltre esiste una permutazione π degli indici $1, ..., n$ tale che

$$\min_{i=1,...,n-1} (s \cdot (x_{\pi(i+1)} - x_{\pi(i)}) \geq \, c \, \min_{i \neq j} \mid x_i - x_j \mid, \tag{6.47}$$

dove c è una costante positiva che dipende solo da n$''$.

Questo risultato è dimostrato in **Appendice D.2**.

Utilizzando questo risultato si ha che esiste per ogni punto $x \in (\gamma)$ una permutazione π, una rotazione 4-dimensionale R e una traslazione a tali che $(Rx_1 + a, ..., Rx_n + a) \in (\gamma)$ e anche

$$\min_{j \neq k} \mid (Rx_j)^4 - (Rx_k)^4 \mid \geq c \, \min_{j \neq k} \mid x_j - x_k \mid, \tag{6.48}$$

dove c è una costante positiva (che dipende solo da n). Sfruttando la simmetria delle funzioni di Schwinger, possiamo usare questa disuguaglianza per riscrivere la disuguaglianza (6.45) nella forma (6.41).

Oltre a ciò, la funzione $s(x_1, ..., x_n)$ è analitica nell'insieme (γ) e quindi localmente integrabile. Per quanto detto qui sopra è anche limitata polinomialmente. Quindi genera una distribuzione temperata, come richiesto dalla proprietà **s.1**.

Si ha poi che la proprietà **s.5** (proprietà spettrale) è soddisfatta in virtù del Teorema 9.

Infatti, se si legge la relazione (6.29), sostituendo $F(\xi_1, ..., \xi_{n-1})$ a primo membro con $S(\xi_1, ..., \xi_{n-1})$ e $T(q_1, ..., q_{n-1})$ a secondo membro con $\tilde{W}(q_1, ..., q_{n-1})$

(la funzione di Schwinger S è definita nell'equazione (6.37)) si ha la relazione (di antitrasformata di Fourier)

$$S(\xi_1, ..., \xi_{n-1}) = \int e^{\sum_{j=1}^{n-1}(\xi_j^4 q_j^0 + i\vec{\xi}_j \cdot \vec{q}_j)} \tilde{W}(q_1, ..., q_{n-1}) \frac{d^{n-1}q}{(2\pi)^{n-1}}. \quad (6.49)$$

La $\tilde{W}$ a sua volta è definita dalla (3.12) e dalla (3.6).

La concatenazione di queste equazioni mostra che vale la proprietà **s.5** per le funzioni di Schwinger.

Infine, le proprietà **s.2** e **s.3** si ottengono con il seguente ragionamento:

poiché, come abbiamo visto, le proprietà delle funzioni di Wightman **w.1-w.7** permettono di interpretarle come valori di aspettazione del vuoto di prodotti di operatori di campo (nel nostro caso di un singolo campo Hermitiano), possiamo sfruttare questa possibilità e ricondurre anche le funzioni di Schwinger a questi valori di aspettazione. Infatti, in termini di operatori di campo, le proprietà **s.2** e **s.3** saranno immediate.

Definiamo allora, seguendo [7], Teorema 9.30, pag. 399, il seguente stato dello spazio di Hilbert $\mathcal{H}$

$$\Psi(x_1, ..., x_n) = \phi(x_1)...\phi(x_n) \mid 0\rangle, \quad \text{con} \quad x_j \in \mathbb{M}, j = 1, ..., n. \quad (6.50)$$

Questo stato si può estendere analiticamente nel tubo passato, seguendo la falsariga della continuazione analitica delle funzioni di Wightman, vedi il **Teorema 4** a pag. 20, con il ricorso all'assioma **W.2** di Sezione **2.1** invece che **w.5**.

Se ora si esegue, tramite questa continuazione analitica, la sostituzione $x_j \to x'_j$, $j = 1, ..., n$, dove, ricordiamo, $x'_j \equiv (ix_j^4; \vec{x}_j)$, si ha il nuovo stato

$$\chi(x_1, ..., x_n) = \Psi(x'_1, ..., x'_n), \quad (6.51)$$

dove ora $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{E}^n$, con l'ordinamento $x_1^4 < ... < x_n^4$, che è possibile imporre per le proprietà di commutazione dei campi (abbiamo preso in considerazione un singolo campo scalare, altrimenti dovremmo far ricorso alle proprietà dettate dalla relazione spin-statistica).

Esaminiamo ora il prodotto scalare

$$\langle\chi(x_1, ..., x_m), \chi(y_1, ..., y_n)\rangle = \langle 0 \mid \phi^*(x'_m)...\phi^*(x'_1)\phi(y'_1)...\phi(y'_n) \mid 0\rangle, \quad (6.52)$$

dove $\phi^*(x'_j) = \phi(\overline{x'})$, poiché il campo è scalare, ma non l'argomento. Infatti

$$\overline{x'} \equiv (-x^4; \vec{x}). \tag{6.53}$$

Se si pone, come con la (6.35),

$$T(x^4, \vec{x}) \equiv (-x^4, \vec{x}), \tag{6.54}$$

(l'operazione T è indicata con Θ in [8] e in [10]), che è l'inversione ″temporale″ nel caso Euclideo, si può riscrivere il prodotto scalare

$$\langle \chi(x_1, ..., x_m), \chi(y_1, ..., y_n) \rangle = s(Tx_m, ..., Tx_1, y_1, ..., y_n). \tag{6.55}$$

Questa relazione permette di verificare le proprietà **s.2** e **s.3** per le funzioni $s(x_1, ..., x_n)$, perché sono soddisfatte dai prodotti scalari.

Per esempio, per verificare la proprietà di Hermiticità **s.2**, si ha

$$\langle \chi(x_1, ..., x_m), \chi(y_1, ..., y_n) \rangle = s(Tx_m, ..., Tx_1, y_1, ..., y_n) =$$

$$= \overline{\langle \chi(y_1, ..., y_n), \chi(x_1, ..., x_m) \rangle} = \overline{s(Ty_n, ..., Ty_1, x_1, ..., x_m)}, \tag{6.56}$$

e, confrontando le due espressioni per la funzione s, si ha

$$s(x_1, ..., x_m, y_1, ..., y_n) = \overline{s(Ty_n, ..., Ty_1, Tx_m, ..., Tx_1)}, \tag{6.57}$$

che è la proprietà **s.2** (Hermiticitá).

Analogamente per la proprietà **s.3** (Positività).

L'ultima proprietà da verificare è la separabilità (cluster property); tenendo presente la relazione (6.57) e la proprietà di separabilità delle funzioni di Wightman **w.6**, si vede che vale anche per le funzioni di Schwinger.

Quindi il Teorema 9, ovvero l'implicazione $(w) \Rightarrow (s)$, è dimostrato. ■

6.3 Il teorema di ricostruzione di Osterwalder-Schrader

Le proprietà **s.1-s.7** sono caratteristiche delle funzioni di Schwinger, nel senso che vale il teorema inverso, ovvero l'implicazione $(s) \Rightarrow (w)$.

Teorema 11 (Teorema di ricostruzione di Osterwalder -Schrader)

> ″Ogni insieme di distribuzioni temperate $s(x_1, ..., x_n)$, che soddisfa gli assiomi $s.1 - s.7$ è l'insieme delle funzioni di Schwinger di un qualche insieme di campi di Wightman (con connessione normale spin-statistica).

Dimostrazione. La proprietà **s.5** delle funzioni di Schwinger permette di rappresentare in modo *unico* la funzione $S(\xi_1, ..., \xi_{n-1})$, definita in (6.37), mediante la formula (6.49):

$$S(\xi_1, ..., \xi_{n-1}) = \int e^{\sum_{j=1}^{n-1}(\xi_j^4 q_j^0 + i\vec{\xi}_j \cdot \vec{q}_j)} \tilde{W}(q_1, ..., q_{n-1}) \prod_{j=1}^{n-1} \frac{d^4 q_j}{(2\pi)^4}. \qquad (6.58)$$

dove $\tilde{W}$ è definita sull'insieme (α) e, corrispondentemente, S è definita sull'insieme (β). Questa rappresentazione individua $\tilde{W}$ come il candidato per la trasformata di Fourier della funzione di Wightman, dove quest'ultima sarà data da

$$w(x_1, ..., x_n) = \int e^{-i\sum_j^{n-1} q_j \cdot (x_j - x_{j+1})} \tilde{W}(q_1, ..., q_{n-1}) \prod_{j=1}^{n-1} \frac{d^4 q_j}{(2\pi)^4}. \qquad (6.59)$$

Quindi dobbiamo dimostrare che questa funzione $w(x_1, ..., x_n)$, definita da queste due espressioni, ha tutte le proprietà delle funzioni di Wightman.

Sappiamo dalla proprietà **s.1** che la funzione $s(x_1, ..., x_n)$ di Schwinger definisce una distribuzione temperata regolare. La relazione precedente definisce allora la funzione $w(x_1, ..., x_n)$ come una distribuzione temperata. Perciò la proprietà **w.1** per la funzione $w(x_1, ..., x_n)$ è dimostrata.

La proprietà **w.2**, cioè la proprietà dell'aggiunta, si verifica sostituendo l'espressione (6.58) nella **s.2**, tenuto conto della relazione (6.59).

Per verificare la proprietà di positività **w.3**, pag. 13, è utile riscrivere l'espressione (6.58) della funzione $s(x_1, ..., x_n)$

$$s(x_1, ..., x_n) = \int e^{\sum_{j=1}^{n}(p_j^{\circ} x_j^4 + i\vec{p}\cdot\vec{x})} \tilde{w}(p_1, ..., p_n) \prod_{j=1}^{n} \frac{d^4 p_j}{(2\pi)^4}. \tag{6.60}$$

Se si sostituisce questa espressione nella relazione (6.36) e si integra nelle variabili $(x_1, ..., x_n)$ e $(x'_1, ..., x'_n)$, tenendo conto della definizione della trasformazione T, che cambia il segno della quarta componente, si ottiene

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \int \tilde{w}(-p_m, ..., -p_1, q_1, ..., q_n)\overline{F(p_1, ..., p_m)} F(q_1, ..., q_n) \prod_{j=1}^{m} \frac{d^4 p_j}{(2\pi)^4} \prod_{j=1}^{n} \frac{d^4 q_j}{(2\pi)^4} \geq 0, \tag{6.61}$$

dove

$$F(p_1, ..., p_n) = \int e^{\sum_{j=1}^{n}(p_j^{\circ} x_j^4 + i\vec{p}\cdot\vec{x})} f(x_1, ..., x_n) dx_1 ... dx_n \tag{6.62}$$

e dove le funzioni f sono funzioni dello spazio $\mathbb{S}$ e sono definite sullo spazio delle variabili $x \in \mathbb{R}^4$ con $(0 < x_1^4 < ... < x_n^4)$; le F, a loro volta, sono definite sullo spazio delle $p \in \mathbb{M}$ con $(p_1^0 \leq 0, ..., p_n^0 \leq 0)$.

Ora, le funzioni F formano un insieme denso nello spazio di definizione. Ciò si può dimostrare adattando le notazioni dell'Appendice **D.1**, dove u e $\hat{u}$ avranno il ruolo di f e F rispettivamente e, invece degli insiemi (β) e (α) avremo rispettivamente l'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^4 : 0 < x_1^4 < ... < x_n^4\}, \tag{6.63}$$

e

$$\{p \in \mathbb{M} : p_1^{\circ} \leq 0, ..., p_n^{\circ} \leq 0\}. \tag{6.64}$$

L'effetto sulla convergenza dell'integrale nell'equazione (6.62) è lo stesso che nel caso dell'Appendice **D.1**.

Il fatto che questa funzioni formino un insieme denso nello spazio $\mathcal{S}(\Omega)$, dove Ω è l'insieme (6.64), ci permette di considerare le funzioni F nell'espressione (6.61) come un successione arbitraria. Inoltre, le funzioni $\tilde{w}$ hanno una proprietà di supporto. Questa è dovuta alla trasformazione da cui siamo partiti (6.58) o, meglio, alla (6.60), dove il supporto della funzione $\hat{w}$ è l'insieme (α). Questo ci permette di estendere il dominio di definizione delle funzioni F e di considerarle come funzioni arbitrarie su $\mathcal{S}(\mathbb{M}^n)$.

Si può verificare che la relazione (**w.3**), scritta in termini delle relative trasformate di Fourier, è identica all'espressione trovata (6.61) e quindi la positività è dimostrata.

Per ciò che riguarda la covarianza di Poincaré, proprietà (**w.4**), è sufficiente scrivere la relativa espressione per la covarianza Euclidea delle funzioni di Schwinger, limitandoci al caso di rotazioni che coinvolgano la coordinata x^4, cui corrisponderanno le trasformazioni di Lorentz, nel caso di Minkowski. Questo perché l'espressione (6.59) delle $\hat{w}$ è già di suo invariante per rotazioni e traslazioni tridimensionali.

Per le funzioni di Schwinger si ha

$$\sum_{j=1}^{n-1}(\xi_j^4 \frac{\partial}{\partial \xi_j^k} - \xi_j^k \frac{\partial}{\partial \xi_j^4}) S(\xi_1, ..., \xi_{n-1}) = 0. \tag{6.65}$$

Se si sostituisce l'espressione di S in termini di $\tilde{W}(q_1, ..., q_{n-1})$, si arriva a

$$\sum_{j=1}^{n-1}(q_j^\circ \frac{\partial}{\partial q_j^k} + q_j^k \frac{\partial}{\partial q_j^\circ}) \hat{W}(q_1, ..., q_{n-1}) = 0 \tag{6.66}$$

e questo dimostra la covarianza di Poincaré delle funzioni w.

Per ciò che riguarda le proprietà spettrali delle funzioni $\tilde{W}$, si ha che queste sono invarianti di Lorentz, come si è visto ora e, per costruzione, con supporto in (α), cioè in $\overline{\mathbb{M}_+^{n-1}}$. L'invarianza perciò prescrive che il loro supporto sia il massimo sottoinsieme, chiuso e invariante contenuto in $\overline{\mathbb{M}_+^n}$, cioè il cono futuro $\overline{V_+^n}$. Quindi, la proprietà spettrale delle funzioni di Wightman è dimostrata.

Consideriamo ora la proprietà (**w.7**), ovvero la Località. Si tratta di dimostrare che le funzioni $w(x_1, ..., x_n)$ sono simmetriche nei loro argomenti come conseguenza della simmetria delle corrispondenti funzioni di Schwinger, secondo la proprietà **s.7**.

Possiamo utilizzare per questa dimostrazione il fatto, dimostrato ora, che le funzioni $\tilde{w}(p_1, ..., p_n)$ hanno supporto nel cono futuro per ottenere la continuazione analitica della sua antitrasformata $w(x_1, ..., x_n)$ nel tubo passato

$\mathcal{T}_n^-$ (vedi a pag. 21). Questo è possibile per la proprietà della trasformata di Fourier che è alla base del **teorema 4**.

L'invarianza di Lorentz ci permette a questo punto di estenderla ulteriormente al tubo esteso $\mathcal{T}_n$ (vedi a pag. 86).

Ora, la relazione (6.60) tra $\tilde{w}$ e s è valida per s definita sull'insieme $\{x \in \mathbb{R}^n : 0 < x_1^4 < ... < x_n^4\}$ (ovvero, per le variabili $\xi_j = x_j - x_{j+1}$ sull'insieme (β)). Ma le funzioni di Schwinger sono per ipotesi simmetriche negli indici e invarianti per traslazioni e rotazioni in $\mathbb{R}^4$, quindi sono di fatto definite e anche reali analitiche in tutto l'insieme $\mathbb{E}^n$, con l'esclusione dei punti coincidenti.

Fissiamo un punto $a \equiv (a_1, ..., a_n)$ dell'insieme $\{x \in \mathbb{R}^n : 0 < x_1^4 < ... < x_n^4\}$ tale che le terze componenti siano $(a_{\pi 1}^3 < ... < a_{\pi n}^3)$, dove π è una permutazione degli indici $(1, 2, ..., n)$ (secondo la regola: $\pi(x_1, ..., x_n) = (x_{\pi^{-1}1}, ..., x_{\pi^{-1}n})$).

Il corrispondente punto a' apparterrà a $\mathcal{T}_n^-$. Infatti sarà dato da

$$a'_j \equiv (ia_j^4; a_j^1, a_j^2, a_{\pi j}^3), \tag{6.67}$$

e

$$a'_j - a'_{j+1} \equiv (i(a_j^4 - a_{j+1}^4); a_j^1 - a_{j+1}^1, a_j^2 - a_{j+1}^2, a_{\pi j}^3 - a_{\pi(j+1)}^3), \tag{6.68}$$

con $a_j^4 - a_{j+1}^4 < 0$. (ricordiamo la definizione ai $\mathcal{T}_n^-$ a pag. 21).

Se si applica una rotazione 4-dimensionale che porti la terza componente al posto della quarta, avremo un nuovo vettore con le quarte componenti positive, in ordine crescente, $\tilde{a}$, a cui corrisponderà un $\tilde{a}'$, che apparterrà a $\pi^{-1}\mathcal{T}_n^-$ $(a_{\pi j}^3 \rightarrow_{rotaz.} a_{\pi j}^4 = \pi^{-1} a_j^4)$.

Si ottiene allora con una rotazione 4-dimensionale un vettore con componenti permutate, che quindi apparterrà simultaneamente a $\mathcal{T}_n$, cioè al tubo esteso, e al tubo passato $\mathcal{T}_n^-$.

Si tratta in realtà di tutto un intorno di punti che appartengono all'intersezione $\mathcal{T}_n \bigcap \pi^{-1}\mathcal{T}_n^-$. In questo intorno si ha l'uguaglianza

$$s(x_1, ..., x_n) = s(x_{\pi 1}, ..., x_{\pi n}), \tag{6.69}$$

e quindi, nello stesso intorno

$$w(x'_1, ..., x'_n) = w(x'_{\pi 1}, ..., x'_{\pi n}). \tag{6.70}$$

Abbiamo scelto gli argomenti in modo che ambedue le funzioni dell'uguaglianza precedente, la w e la sua trasposta, siano valutate nello stesso dominio di analiticità. Questo ci permette di estenderla a tutto il tubo esteso $\mathcal{T}_n^S$. Quindi le funzioni $w(z_1, ..., z_n)$ sono analitiche e simmetriche in $\mathcal{T}_n^S$.

A questo punto basta invocare il risultato del **Teorema 7bis** per affermare che vale la proprietà di località par le funzioni w.

Abbiamo quindi dimostrato tutte le proprietà delle funzioni di Wightman eccetto la "separabilità", che equivale, come abbiamo visto a pag. 10, all'unicità dello stato di vuoto. Quindi possiamo senz'altro concludere che l'insieme le funzioni $w(x_1, ..., x_n)$ costruite finora, a partire dalle funzioni di Schwinger, sono di fatto le funzioni di Wightman di un campo scalare $\phi(x)$, che soddisfa gli assiomi di Wightman con la possibile eccezione dell'unicità dello stato di vuoto.

Per dimostrare quest'ultima proprietà possiamo considerare l'insieme dei vettori definiti con la (6.50)

$$\Psi(x_1, ..., x_n) = \phi(x_1)...\phi(x_n) \mid 0\rangle, \quad \text{con} \quad x_j \in \mathbb{M}, \quad j = 1, ..., n, \tag{6.71}$$

che formano un insieme di vettori che sottende tutto lo spazio di Hilbert, poiché uno stato di vuoto è per definizione ciclico. Ora, se un vettore $\mid \Phi\rangle$ è ortogonale a tutti i vettori $\chi(x_1, ..., x_n)$, definiti nella (6.51), allora, passando ai vettori $\Psi(x_1, ..., x_n)$, tenuto conto del principio di continuazione analitica, possiamo dire che $\langle\Phi,\, \phi(x_1)...\phi(x_n)\Psi_\circ\rangle = 0$, da cui, per la densità dei vettori (6.71), si ha $\Phi = 0$. Quindi, anche l'insieme dei vettori $\chi(x_1, ..., x_n)$ è denso.

Ora, la proprietà di separabilità delle funzioni di Schwinger si può scrivere, tenuto conto della relazione ormai stabilita tra le funzioni di Schwineg e le funzioni di Wightman e ricordando la posizione (6.51),

$$\langle\chi(x_1, ..., x_m), U(\lambda a, 1)\chi(y_1, ..., y_n)\rangle \to \langle\chi(x_1, ..., x_m), \Psi_\circ\rangle\langle\Psi_\circ, \chi(y_1, ..., y_n)\rangle \tag{6.72}$$

per $\lambda \to 0$ e per $a = (0, \vec{a})$ arbitrario.

Da questa possiamo passare all'analoga per i vettori Ψ e cioè

$$\langle\Phi,\, U(\lambda a, 1)\Psi\rangle \to \langle\Phi,\, \Psi_\circ\rangle\langle\Psi_\circ,\, \Phi\rangle, \quad \text{per} \quad \lambda \quad \to 0, \tag{6.73}$$

per ogni $\Phi, \Psi \in \mathcal{H}$.

L'invarianza di Lorentz permette di considerare il vettore a come un vettore di tipo spazio arbitrario.

Quindi, abbiamo dimostrato la proprietà di separabilità. Infatti questa proprietà è equivalente all'esistenza di un unco stato di vuoto, vedi W.8', pag. 10. ■

Occorre osservare che il teorema di ricostruzione di Osterwalder-Schrader **non** individua esattamente la teorie di Wightman, nel senso che le funzioni $w^{[n]}$ determinate dall'equazione (6.59) possono essere di natura più generale delle distribuzioni temperate e più precisamente **iperfunzioni**. [4]

Lo spazio delle iperfunzioni è il duale topologico dello spazio delle funzioni olomorfe rapidamente decrescenti.

Quest'ultimo spazio **non** contiene lo spazio delle funzioni a supporto compatto, a differenza dello spazio $\mathcal{S}$ di Schwartz, e quindi pone qualche problema riguardo alla località dei campi.

Questo spazio però viene trasformato in se stesso sotto trasformata di Fourier, come nel caso dello spazio di Schwartz, e questo è un fatto molto positivo.

Un aspetto importante della formulazione in termini delle iperfunzioni è che permetterebbe la trattazione di teorie di campo non rinormalizzabili. In altri termini, si avrebbe la relazione distribuzioni temperate $\Leftrightarrow$ teorie di campo rinormalizzabili, mentre per teorie non rinormalizzabili sarebbe necessaria la formulazione in termini di iperfunzioni, più generali di quelle temperate.

Tornando al teorema di Osterwalder-Schrader, gli stessi autori, nel secondo lavoro di [10], adottano una condizione aggiuntiva, cioè una limitazione sulla crescita all'∞ delle funzioni di Schwinger, più precisamente una condizione di crescita lineare. In questo modo si ottiene la ricostruzione, partendo dalle funzioni di Schwinger, di **distribuzioni temperate** di Wightman.

[4] Un'introduzione dettagliata delle iperfunzioni si può trovare in: S.Nagamachi and N.Mugibayashi, "Hyperfunction Quantum Field Theory", Commun.math.Phys.**46** (1976),119-134.

Una dimostrazione che, se si accetta l'impostazione in termini di iperfunzioni opportunamente definite, si ottiene un teorema di ricostruzioni al caso di Minkowski è stata data da A.U.Schmidt, "Euclidean recostruction in quantum field theory: between tempered distributions and fourier hyperfunctions", math-ph/9811002, 2 Nov. 1998.

Già Glaser [5] aveva notato un errore in un lemma tecnico del primo lavoro di Osterwalder-Schrader e aveva concluso che era necessaria un'ipotesi aggiuntiva per le funzioni di Schwinger.

Questa limitazione è stata considerata insoddisfacente da vari autori, infatti vi sono stati altri tentativi di stabilire l'equivalenza degli assiomi di Wightman (w) e di quelli di Schwinger (s), ma la conclusione è stata sempre la stessa e cioè quella della necessità di aggiungere un ulteriore restrizione per le funzioni di Schwinger.

Così, per esempio, Zinoviev [6] critica l'ipotesi introdotta da Osterwalder-Schrader nel loro secondo lavoro, e cioè la condizione di una crescita al più lineare delle funzioni di Schwinger, ma introduce a sua volta una ″weak spectral condition″ per le funzioni di Schwinger.

Anche Maung, Hill, Hill and DeRise [7] studiano lo stesso problema e trovano che lo spazio Euclideo di definizione delle soluzioni della teoria di campo di Schwinger **non** deve essere compattificato a un punto (cioè all'∞), affinché valga l'equivalenza.

In un articolo di rassegna sulla teoria dei campi Euclidea, Guerra [8] mette in evidenza l'importanza delle condizione di positività (″reflection positivity″) delle funzioni di Schwinger, una proprietà che è *facilmente verificabile* e che permette di ottenere l'interpretazione fisica (di Minkowski) dell'eventuale soluzione Euclidea trovata.

In altre parole, il problema della condizione aggiuntiva, nella pratica della costruzione di modelli, non sarebbe affatto un problema.

[5] V.Glaser,″On the Equivalence of the Euclidean and Wightman Formulation of Field Theory″, Commun.math.Phys. **37** (1974), 257-272.

[6] Yu M.Zinoviev,″Equivalence of the Euclidean and Wightman Field Theories″, hep-th/9408009, 2 Aug. 1994

[7] K.M.Maung, C.A.Hill, M.T.Hill and G.DeRise,″Equivalence of Minkowski Euclidean Field Theory Solutions″, hep-ph/0302228 25 Feb. 2003

[8] F.Guerra,″Euclidean Field Theory″, math-ph/0510087

Capitolo 7

Argomenti non trattati

7.1 Il teorema di Haag

Riportiamo qui di seguito una breve discussione del Teorema di Haag, senza dimostrazioni.

Il modo usuale di formulare la teoria delle perturbazioni in teoria dei campi è per mezzo della **rappresentazione di interazione**.

E' però proprio sulla rappresentazione di interazione che il teorema di Haag pone delle difficoltà in teoria dei campi, a causa dell'infinito numero dei gradi di libertà.

Infatti, il teorema di Haag dice sostanzialmente che, nel caso della teoria dei campi, la rappresentazione d'interazione **non esiste**.

La conseguenza di ciò è che, nella teoria quantistica dei campi interagenti, con relazioni di commutazione ″a tempi uguali″, si ha sempre a che fare con rappresentazioni che **non** sono **unitariamente** equivalenti a quelle dei campi liberi.

Più precisamente, la rappresentazione d'interazione nello schema Hamiltoniano della teoria dei campi è basata sull'ipotesi che **al tempo t fisso**, i campi ϕ e π (dove π è l'impulso coniugato) di una teoria di campo scalare, sono correlati ai campi liberi $\phi_\circ$ e $\pi_\circ$ da una trasformazione unitaria.

Il teorema di Haag mostra che, se aggiungiamo a questo schema l'insieme degli assiomi di Wightman, allora la teoria diventa una teoria di campi non interagenti.

Inoltre, anche solo nel caso di una trasformazione lineare dei campi, che conservi le relazione di commutazione, si ha che questa trasformazione non si può realizzare mediante una trasformazione unitaria.

Se si individua la rappresentazione di Fock mediante la richiesta aggiuntiva che esista un unico stato di vuoto invariante di Poincaré, che sia annichilato dagli operatori a frequenza positiva (operatori di distruzione), e in tal caso la rappresentazione di Fock è univocamente definita, il teorema di Haag ci dice che, ad ogni istante, si ha una rappresentazione dei campi non equivalente a quella di Fock.

Queste difficoltà poste dal teorema di Haag non si hanno se invece della rappresentazione di interazione si usano gli **stati asintotici**, come nello schema LSZ (Lehmann-Symanzik-Zimmermann), cioè, se nella costruzione dei campi interagenti questi si uguagliano ai campi liberi, non ad un tempo finito, ma a $t \to \mp\infty$.

In questo modo si ha una teoria dello scattering (Haag-Ruelle) che non ricade nelle difficoltà del teorema di Haag, vedi, per esempio, [7], Cap. 13.

7.2 Il problema delle teorie di gauge

L'estensione della teoria di Wightman ai campi di gauge presenta notevoli difficoltà. Tipicamente si ha la presenza di stati non fisici, con norma negativa (basta pensare alla quantizzazione covariante del campo elettromagnetico), per cui si ha uno spazio di Hilbert con metrica indefinita.

Più precisamente, c'è un conflitto tra l'assioma di positività **w.3**, pag. 13, e quello di località **w.7**, pag. 15.

Tuttavia, nel caso di una teoria di gauge abeliano, si può estendere la trattazione di Wightman, che prende allora il nome di teoria di tipo pseudo-Wightman, vedi [7], pag. 417. Un'analisi di questo problema mediante lo studio di un modello, precisamente il modello di Schwinger, chiamato anche QED_2, ovvero elettrodinamica in due dimensioni, si può trovare in [17].

Nel caso di teorie di gauge non abeliane la strada seguita è quella di cambiare la formulazione del problema, nel senso di considerare come oggetti fondamentali della teoria non più il campo, ma un'algebra locale di osservabili.

Questa è la formulazione algebrica, che abbiamo citato nell'introduzione. I campi di gauge sono allora elementi di *una* tra le possibili rappresentazioni dell'algebra, in analogia a ciò che avviene per i gruppi di Lie, dove la loro algebra determina le possibili rappresentazioni.

Per una rassegna dello stato della ricerca in questa direzione vedi [18]

Appendice A

A.1 Cenni di teoria delle C*-algebre

Una *algebra di Banach* è uno spazio lineare $\mathcal{U}$ sullo spazio dei numeri complessi $\mathbb{C}$, nella quale è definito un prodotto tale che

$$A(BC) = (AB)C, \quad (A+B)C = AC + BC, \quad A(B+C) = AB + AC, \tag{A.1}$$

and

$$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B), \tag{A.2}$$

per ogni $A, B, C \,\epsilon\, \mathcal{U}$, e per tutti i numeri $\alpha \,\epsilon\, \mathcal{C}$.

In aggiunta a ciò $\mathcal{U}$ è uno spazio di Banach rispetto ad una norma che soddisfa la disuguaglianza moltiplicativa

$$\parallel AB \parallel \leq \parallel A \parallel \parallel B \parallel, \quad \forall \quad A, B \,\epsilon\, \mathcal{U}, \tag{A.3}$$

oltre alle proprietà specifiche della norma che qui riportiamo:

$$\begin{array}{ll} a) & \parallel A \parallel \geq 0, \quad e \quad = 0 \quad \mathrm{se\, e\, solo\, se} \quad \mathrm{A} = 0, \\ b) & \parallel \alpha A \parallel = \mid \alpha \mid \parallel A \parallel, \\ c) & \parallel A + B \parallel \leq \parallel A \parallel + \parallel B \parallel, \\ d) & \parallel AB \parallel \leq \parallel A \parallel \parallel B \parallel . \end{array}$$

Notare che l'ultima disuguaglianza è una proprietà in più rispetto alle proprietà della norma di uno spazio normato; essa è tipica della norma di operatori su di uno spazio Hilbert.

Può esistere poi un'unità (moltiplicativa) e (algebra con unità), tale che

$$Ae = eA = A, \quad \forall A \,\epsilon\, \mathcal{U}, \tag{A.4}$$

e

$$\| \, e \, \| = 1. \tag{A.5}$$

Se esiste un elemento unità allora è unico.

Se un'algebra di Banach è priva dell'elemento unità si può sempre estendere in modo opportuno ad una nuova algebra con unità. D'ora in avanti supporremo sempre di avere a che fare con algebre con unità.

Quanto detto finora definisce un'algebra di Banach, quindi uno spazio completo rispetto alla norma $\| \, ... \, \|$.

Se ora si aggiunge l'esistenza di un'involuzione

$$A \,\epsilon\, \mathcal{U} \longrightarrow A^* \,\epsilon\, \mathcal{U}, \tag{A.6}$$

con le seguenti proprietà

$$(A^*)^* = A, \quad (AB)^* = B^* A^*, \quad (\alpha A + \beta A)^* = \bar{\alpha} A^* + \bar{\beta} B^*, \tag{A.7}$$

dove $\overline{\alpha}$ è il coniugato di α, allora l'algebra si chiama **-algebra*.

Oltre a ciò, se vale la proprietà

$$\| \, A^* A \, \| = \| \, A \, \|^2, \tag{A.8}$$

l'algebra si chiama *C*-algebra*, dove la C significa algebra concreta. Infatti, si dimostra che una C*-algebra con unità è isomorfa ad un'algebra di operatori limitati su di uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$, che sia chiusa sotto l'operazione di aggiunto.

La proprietà (A.8), insieme alla proprietà del prodotto (A.3), implica l'uguaglianza

$$\| \, A \, \| = \| \, A^* \, \| \, . \tag{A.9}$$

Diamo un cenno alle topologie che si possono definire su di un'algebra.

La topologia definita dalla norma $\| \, \|$ si chiama *topologia uniforme*. Si possono definire altre topologie, topologia forte, topologia debole ecc. Esiste però una classe di *-algebre, le algebre $\mathcal{W}$ di Von Neumann, per le quali queste topologie coicidono (esclusa quella uniforme), nel senso che un limite che esiste in una topologia esiste anche nelle altre.

Le *algebre di Von Neumann* sono, per definizione, algebre di operatori su di uno spazio di Hilbert. In un certo senso sono rappresentazioni delle algebre C* su di uno spazio di Hilbert. A loro volta le algebre C* possono essere pensate come algebre astratte.

Per la definizione delle algebre di Von Neumann è necessario introdurre il concetto di *commutante* di un algebra.

Data un algebra $\mathcal{U}$ di operatori su di uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ si chiama commutante e si indica con $\mathcal{U}'$ l'insieme degli operatori che commutano con tutti gli elementi di $\mathcal{U}$. Il commutante è anche lui un algebra di Banach, con l'unità a comune con $\mathcal{U}$.

Definizione - Un algebra di Von Neumann si definisce come una algebra di operatori su di uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ che coincide con il suo doppio commutante:

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}''. \tag{A.10}$$

A.1.1 Funzionali

I funzionali lineari continui sulla C*-algebra $\mathcal{U}$ formano lo spazio duale $\mathcal{U}^*$, sul quale è definita la norma

$$\| f \| = sup \frac{| f(A) |}{\| A \|}, \quad A \neq 0, \tag{A.11}$$

dove $f \,\epsilon\, \mathcal{U}^*$ e $A \,\epsilon\, \mathcal{U}$. Da questa segue anche

$$| f(A) | \leq \| f \| \| A \| . \tag{A.12}$$

Un funzionale lineare ω sulla C*-algebra $\mathcal{U}$ si dice *positivo* se soddisfa la condizione

$$\omega(AA^*) \geq 0, \tag{A.13}$$

(quindi $\omega(AA^*)$ è un numero reale).

Notare che è $\geq$ e non solo $>$. Può infatti avvenire che vi siano elementi in $\mathcal{U}$ non nulli, che appartengono allo spazio nullo di ω.

Se si ha $\| \omega \| = 1$, allora il funzionale ω si definisce *stato*.

Sia ω un funzionale lineare positivo sulla C*-algebra $\mathcal{U}$, si dimostrano le seguenti proprietà (vedi, per esempio [1], Sez. 2.3.2.)

$$\omega(A^*B) = \overline{\omega(B^*A)}, \tag{A.14}$$

e

$$| \omega(A^*B) |^2 \leq \omega(A^*A)\omega(B^*B), \tag{A.15}$$

che è la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Si ha poi:

$$\begin{gathered} \omega \geq 0 \text{ se e solo se è } \textit{continuo e} \\ \| \omega \| = \lim_{\alpha} \omega(E_\alpha^2), \end{gathered} \tag{A.16}$$

dove E_α è un'identità approssimata, vedi l'appendice **A.1.2**.

Valogono inoltre le seguenti proprietà:

$$\omega(A^*) = \overline{\omega(A)}, \tag{A.17}$$

$$| \omega(A) |^2 \leq \omega(A^*A) \| \omega \|, \tag{A.18}$$

$$| \omega(A^*BA) | \leq \omega(A^*A) \| B \| . \tag{A.19}$$

A.1.2 Dimostrazioni

A.14. Siano $A, B \,\epsilon\, \mathcal{U}$ e $\lambda\,\epsilon\,\mathbb{C}$. Se ω è un funzionale lineare positivo sulla C^*-algebra $\mathcal{U}$, si ha

$$\omega((\lambda A + B)^*(\lambda A + B)) \geq 0 \tag{A.20}$$

Per la linearità di ω si ha

$$\mid \lambda \mid^2 \omega(A^*A) + \overline{\lambda}\omega(A^*B) + \lambda\omega(B^*A) + \omega(B^*B) \geq 0, \tag{A.21}$$

dove $\omega(A^*A), \omega(B^*B) \geq 0$.

Poichè $\mid \lambda \mid^2 \omega(A^*A) + \omega(B^*B)$ è reale, occorre che sia uguale al suo coniugato, cioè

$$\overline{\lambda}(\omega(A^*B) - \overline{\omega(B^*A)}) = \lambda(\overline{\omega(A^*B)} - \omega(B^*A)), \tag{A.22}$$

e, poichè in generale $\lambda \neq \overline{\lambda}$, dovremo avere

$$\omega(A^*B) = \overline{\omega(B^*A)}. \tag{A.23}$$

Quindi la (A.14) è dimostrata.

A.15. Se ora poniamo

$$\lambda = -\frac{\omega(B^*B)}{\omega(B^*A)} \tag{A.24}$$

(n.b. se si ha $\omega(B^*A) = 0$ la (A.15) è immediata), si ha

$$\frac{\omega(B^*B)^2\omega(A^*A)}{\omega(A^*B)\omega(B^*A)} - \omega(B^*B) \geq 0, \tag{A.25}$$

da cui la disuguaglianza (A.15).

A.16. Per dimostrare (A.16) è necessario introdurre il concetto di *identità approssimata*, e per far questo è necessario dare la definizione di *elemento positivo* di una *-algebra :

Un elemento A di una *-algebra $\mathcal{U}$ è detto **positivo** se è autoaggiunto ($A^* = A$) e con lo spettro contenuto nel semiasse reale positivo.

Nonostante che qui si parli di un'algebra astratta, il concetto di spettro è esattamente lo stesso che nel caso di operatori su di uno spazio di Hilbert. Si definisce cioè spettro $\sigma(A)$ dell'elemento A l'insieme dei valori di λ, dove $\lambda\,\epsilon\,\mathcal{C}$, tali che $\lambda 1 - A$ sia non invertibile.

Quindi, se A è positivo

$$\sigma(A) \subseteq [0, \ \parallel A \parallel], \tag{A.26}$$

vedi, per esempio, [1], teorema 2.2.5(d), pag.29.

Riportiamo qui due risultati che saranno utili in seguito.

Per l'elemento $\lambda 1 - A$ si ha

$$\sigma(\lambda 1 - A) = \lambda - \sigma(A). \tag{A.27}$$

Infatti, sia $\mu \,\epsilon\, \sigma(\lambda 1 - A)$. Ciò significa che non esiste l'inverso di $\mu 1 - (\lambda 1 - A) = (\mu - \lambda)1 + A$, ovvero, per definizione di spettro, $\lambda - \mu \,\epsilon\, \sigma(A)$.

Da ciò segue $\mu \,\epsilon\, \lambda - \sigma(a)$ e quindi, si conclude che, se $\mu \,\epsilon\, \sigma(\lambda 1 - A)$ è anche $\mu \,\epsilon\, \lambda - \sigma(A)$.

Il ragionamento è chiaramente invertibile e quindi abbiamo dimostrato la (A.27).

La nozione di spettro di un elemento di una C*-algebra ci permette di ricavare la seguente disuguaglianza

$$A \leq \parallel A \parallel \mathbb{1}, \tag{A.28}$$

per un $\forall\, A \,\epsilon\, \mathcal{U}$ autoaggiunto.

Questa notazione ha il seguente significato: se A e B sono elementi positivi allora $A \geq B$ significa che $A - B$ è un elemento positivo.

La (A.28) si dimostra come segue. Per la (A.27) si ha

$$\sigma(\parallel A \parallel 1 - A) = \parallel A \parallel - \sigma(A) \subseteq [0,\ \parallel A \parallel], \tag{A.29}$$

dove $\sigma(1) = 1$.

Da ciò segue che, essendo l'elemento $\parallel A \parallel \mathbb{1} - A$ autoaggiunto, esso è anche positivo, poichè il suo spettro è contenuto nel semiasse positivo.

Ma se è positivo possiamo appunto scrivere

$$\parallel A \parallel \mathbb{1} - A \geq 0, \tag{A.30}$$

cioè la (A.28).

Detto ciò, se $\mathcal{I}$ è un *ideale destro* della C*-algebra $\mathcal{U}$, ovvero un sottoinsieme di $\mathcal{U}$ tale che se $A \,\epsilon\, \mathcal{I}$, per $\forall\, B \,\epsilon\, \mathcal{U}$ si ha che $AB \,\epsilon\, \mathcal{I}$, allora un'*identità approssimata* è un insieme di elementi positivi $\{E_\alpha\}$ dell'algebra ([1], Sez. 2.2.3) tali che

$$\parallel E_\alpha \parallel \leq 1, \tag{A.31}$$

$$\alpha \leq \beta \quad \text{implica} \quad \mathrm{E}_\beta - \mathrm{E}_\alpha \;\epsilon\; \mathcal{U}_+, \tag{A.32}$$

$$\lim_{\alpha} \parallel E_\alpha A - A \parallel = 0, \quad \forall A \;\epsilon\; \mathcal{I}. \tag{A.33}$$

dove $\mathcal{U}_+$ è l'insieme degli elementi positivi dell'algebra $\mathcal{U}$.

Si dimostra che un ideale destro di una qualsiasi C*-algebra ammette un'identità approssimata (vedi ([1], Prop. 2.2.18, pag. 40).

Detto ciò possiamo tornare alla dimostrazione della (A.16). Poniamo

$$M = \sup_\alpha \omega(E_\alpha^2), \tag{A.34}$$

senza supporre necessariamente M finito.

Se ora $\lambda_\alpha \geq 0$ e $\sum_\alpha \lambda_\alpha < \infty$ si ha che

$$\sum_\alpha \lambda_\alpha \omega(E_\alpha^2) < \infty.$$

Infatti, $\sum_\alpha \lambda_\alpha E_\alpha^2$ converge ad un elemento che indichiamo con E^2 positivo, poiché per definizione $\| \ E_\alpha \| \leq 1$, da cui $\| \sum_\alpha \lambda_\alpha E_\alpha^2 \| \leq \sum_\alpha \lambda_\alpha < \infty$.

Quindi la serie è convergente (ricordare che da $\sum_\alpha \lambda_\alpha < \infty$ segue $\lim_\alpha \lambda_\alpha = 0$ e quindi la successione delle somme parziali, applicando il criterio di Cauchy in norma, è una successione fondamentale). Poiché $\mathcal{U}$ per ipotesi è uno spazio completo, esiste il limite E^2. Infine E^2 è un elemento positivo poiché tale è $\sum_\alpha E_\alpha^2$.

Tenendo conto della linearità e della positività di ω, avremo perciò

$$\sum_\alpha \lambda_\alpha \omega(E_\alpha^2) \leq \omega(E^2), \tag{A.35}$$

poichè la somma a primo membro è a termini positivi.

Ne segue che $M < \infty$, altrimenti il termine di sinistra sarebbe ∞ mentre il termine di destra è finito.

Applichiamo ora la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$| \ \omega(AE_\alpha) \ |^2 \leq \omega(A^*A)\omega(E_\alpha^2) \tag{A.36}$$

(n.b. gli elementi E_α sono positivi e quindi autoaggiunti per definizione), nel $\lim_\alpha$ avremo

$$| \ \omega(A) \ |^2 \leq M\omega(A^*A). \tag{A.37}$$

Ora osserviamo che

$$E_\alpha A^* A E_\alpha \leq \| \ A \ \| \ E_\alpha^2 \tag{A.38}$$

(infatti, dalla (A.28) e dalla (A.9) si ha $A^*A \leq \| \ A \ \|^2 \ 1$ e quindi, moltiplicando a destra e a sinistra per E_α si ha il risultato voluto). Quindi si può scrivere

$$\omega(E_\alpha A^* A E_\alpha) \leq \| \ A \ \|^2 \ \omega(E_\alpha^2), \tag{A.39}$$

dove quest'ultima si giustifica osservando che $\omega(A - B) \geq 0$, se $A - B$ è un elemento positivo, cioè se $A \geq B$. Poichè ω è lineare si può anche scrivere $\omega(A) \geq \omega(B)$. Valutando il funzionale ω sull'espressione (A.38) segue la (A.39).

Nel $\lim_\alpha$ si ha allora

$$\omega(A^*A) \leq M \ \| \ A \ \|^2 \ . \tag{A.40}$$

Ora, questa disuguaglianza, insieme alla (A.37), fornisce

$$| \ \omega(A) \ | \leq M \ \| \ A \ \|, \tag{A.41}$$

che assicura la *continuità* del funzionale ω, che quindi è *limitato* (vedi per esempio [2], pag.291). In particolare, la sua norma è minore o uguale a M:

$$\parallel \omega \parallel = \sup_A \frac{|\ \omega(A)\ |}{\parallel A \parallel} \leq M. \tag{A.42}$$

Si ha però anche $M \leq \parallel \omega \parallel$, infatti

$$M = \sup_{E_\alpha^2} \omega(E_\alpha^2) \leq \sup_{E_\alpha^2} \frac{\omega(E_\alpha^2)}{\parallel E_\alpha^2 \parallel}, \tag{A.43}$$

dove si è usato il fatto che $\parallel E_\alpha^2 \parallel \leq 1$.

Ora, il lato di destra di quest'equazione è il valore della norma di ω, ma ristretto ad un sottoinsieme di possibili elementi dell'algebra, cioè alla successione $\{E_\alpha\}$. A maggior ragione la norma di ω sarà maggiore di questo valore e quindi maggiore di M.

Ne segue che

$$\parallel \omega \parallel = M = \lim_\alpha \omega(E_\alpha^2). \tag{A.44}$$

Abbiamo perciò dimostrato che un funzionale positivo è continuo e quindi limitato e che la sua norma è data da $\lim_\alpha \omega(E_\alpha^2)$.

Osserviamo ora che $E_\alpha^2 \leq E_\alpha$ e quindi $\parallel \omega \parallel = \lim_\alpha (E_\alpha^2) \leq \lim_\omega (E_\alpha) \leq \parallel \omega \parallel$. Si ha perciò anche $\parallel \omega \parallel = \lim_\omega (E_\alpha)$.

Viceversa, supponiamo che il funzionale ω sia continuo (e quindi limitato) con la norma data da

$$\parallel \omega \parallel = \lim_\alpha \omega(E_\alpha^2). \tag{A.45}$$

Possiamo assumere che sia $\parallel \omega \parallel = 1$, poichè essendo ω per ipotesi limitato, possiamo ridefinirlo dividendo per M.

Supponiamo che l'algebra $\mathcal{U}$ abbia un'identità, che è il caso che ci interessa. Allora si ha

$$\parallel 1 - E_\alpha^2 \parallel = \parallel 1 - E_\alpha + (1 - E_\alpha)E_\alpha \parallel \leq \parallel 1 - E_\alpha \parallel + \parallel 1 - E_\alpha \parallel \parallel E_\alpha \parallel. \tag{A.46}$$

Quindi, essendo $\lim_\alpha \parallel 1 - E_\alpha \parallel = 0$ per definizione, si ha $\lim_\alpha E_\alpha^2 = 1$. Per la continuità di ω e, tenuto conto che $\lim_\alpha \omega(E_\alpha^2) = \parallel \omega \parallel = 1$, si ha

$$1 = \lim_\alpha \omega(E_\alpha^2) = \omega(\lim_\alpha E_\alpha^2) = \omega(1). \tag{A.47}$$

Quindi, se $\mathcal{U}$ ha un'identità e se $\parallel \omega \parallel = 1$, si ha $\omega(1) = 1$.

Dobbiamo ora dimostrare che il funzionale ω è *positivo*. Cominciamo con il dimostrare che, se $A = A^*$, allora $\omega(A)$ è reale.

Poniamo

$$\omega(A) = \alpha + i\beta, \quad \alpha,\, \beta\, \epsilon \mathbb{R}. \tag{A.48}$$

Per un $\forall\, \gamma\, \epsilon\, \mathbb{R}$ si ha

$$\omega(A + i\gamma 1) = \alpha + i(\beta + \gamma). \tag{A.49}$$

Ora, ricordando la (A.27), si ha

$$\sigma(A + i\gamma 1) = \sigma(A) + i\gamma \subseteq [- \parallel A \parallel + i\gamma, \parallel A \parallel + i\gamma]. \tag{A.50}$$

Il *raggio spettrale* di un elemento della C*-algebra U è definito da

$$\rho(B) = \sup\{\mid \lambda \mid,\, \lambda\, \epsilon\, \sigma(B)\}, \tag{A.51}$$

per un generico elemento B dell'algebra.

Quindi, si vede facilmente che il raggio spettrale di $A + i\gamma$ è dato da

$$\rho(A + i\gamma 1) = \sqrt{\parallel A \parallel^2 + \gamma^2} \tag{A.52}$$

infatti $\parallel A \parallel$ è il valore estremo dei valori dello spettro di A nel piano complesso e, se si somma ad un numero immaginario puro $i\gamma$ si ottiene appunto l'espressione indicata.

D'altra parte, $A + i\gamma 1$ è *normale*, cioè commuta con il suo aggiunto come si verifica facilmente. Ora, un operatore normale ha il raggio spettrale uguale alla sua norma

$$\rho(A) = \parallel A \parallel . \tag{A.53}$$

Infatti si ha

$$\rho(A) = \lim_{n \to \infty} \parallel A^n \parallel^{1/n} \tag{A.54}$$

([1], pag 26).

Allora, usando l'equazione (A.8) e tenuto conto che A commuta con A^*, si possono eseguire i seguenti passaggi

$$\parallel A^{2^n} \parallel^2 = \parallel (A^*)^{2^n} (A)^{2^n} \parallel = \parallel (A^* A)^{2^n} \parallel = \parallel [(AA^*)^{2^{n-1}}]^2 \parallel, \tag{A.55}$$

dove nell'ultimo passaggio si è usata ancora la (A.8).

Quindi

$$\parallel (A^* A)^{2^n} \parallel = \parallel (A^* A)^{2^{n-1}} \parallel^2, \tag{A.56}$$

e, iterando

$$\parallel (A^* A)^{2^n} \parallel = ... \parallel (A^* A)^{2^{n-k}} \parallel^{2^k} .... = \parallel A^* A \parallel^{2^n} = (\parallel A \parallel^2)^{2^n} = \parallel A \parallel^{2^{n+1}} . \tag{A.57}$$

Quindi

$$\parallel A^{2^n} \parallel^2 = \parallel A \parallel^{2^{n+1}}, \tag{A.58}$$

o anche

$$\parallel A^{2^n} \parallel^{2^{-n}} = \parallel A \parallel . \tag{A.59}$$

Posto $2^n = m$, si ha

$$\parallel A^m \parallel^{1/m} = \parallel A \parallel . \tag{A.60}$$

Dalla (A.54) si ha

$$\rho(A) = \lim_{m\to\infty} \parallel A^{2^m} \parallel^{2^{-m}} = \parallel A \parallel . \tag{A.61}$$

Da ciò che precede segue

$$\parallel A + i\gamma \parallel = \rho(A + i\gamma) = \sqrt{\parallel A \parallel^2 + \gamma^2}. \tag{A.62}$$

Infine, poiché

$$\mid \omega(A + i\gamma 1) \mid = \sqrt{\alpha^2 + (\beta + \gamma)^2} \geq \mid \beta + \gamma \mid, \tag{A.63}$$

si ha

$$\sqrt{\parallel A \parallel^2 + \gamma^2} \geq \mid \beta + \gamma \mid, \quad \forall \gamma \,\epsilon\, \mathbb{R}, \tag{A.64}$$

che segue dalla (A.41), con $M = 1$.

L'arbitrarietà di γ implica $\beta = 0$. Infatti la precedente disuguaglianza ci dice che β è interno all'intervallo

$$[-(\sqrt{\parallel A \parallel^2 + \gamma^2} + \gamma), \sqrt{\parallel A \parallel^2 + \gamma^2} + \gamma], \tag{A.65}$$

che si può restringere a piacere variando γ.

Ma $\beta = 0$ implica ω reale, che è quanto volevamo dimostrare.

Ricordiamo che vogliamo dimostrare che, se ω è continuo, con la sua norma data dalla (A.45), allora è positivo, cioè, valutato su di un elemento autoaggiunto quale è A^*A, risulta ≥ 0.

Avendo visto che $\omega(A^*A)$ è reale valutiamo ω sull'elemento

$$1 - \frac{A^*A}{\parallel A \parallel^2}. \tag{A.66}$$

poichè

$$\parallel 1 - \frac{A^*A}{\parallel A \parallel^2} \parallel \leq 1, \tag{A.67}$$

dove abbiamo usato la (A.8), per la continuità di ω e per la (A.12), si ha

$$\mid \omega(1 - \frac{A^*A}{\parallel A \parallel^2}) \mid \leq \parallel 1 - \frac{A^*A}{\parallel A \parallel^2} \parallel \parallel \omega \parallel = \parallel 1 - \frac{A^*A}{\parallel A \parallel^2} \parallel \leq 1. \tag{A.68}$$

Ma $\omega(1) = 1$ e $\omega(A^*A)$ è reale, quindi

$$| 1 - \frac{\omega(A^*A)}{\| A \|^2} | \leq 1, \tag{A.69}$$

e ciò implica $\omega(A^*A) \geq 0$.

Abbiamo perciò dimostrato che ω è *positivo*.

A.17. La dimostrazione della (A.16) segue dalla (A.14) con A^*B sostituito da A.

A.18. La (A.18) si dimostra osservando che la (A.15) ci permette di scrivere

$$| \omega(E_\alpha A) |^2 \leq \omega(E_\alpha)\omega(A^*A), \tag{A.70}$$

che, nel limite $\lim_\alpha$, essendo $\lim_\alpha \omega(E_\alpha^2) = \| \omega \|$, diventa la (A.18).

A.19. Resta da dimostrare la (A.19). Applichiamo la (A.15) ad A e a BA. Si ha

$$| \omega(A^*(BA)) |^2 \leq \omega(A^*A)\omega((BA)^*BA) = \omega(A^*A)\omega(A^*B^*BA). \tag{A.71}$$

Ora si ha

$$A^*B^*BA \leq \| B \|^2 A^*A. \tag{A.72}$$

Infatti per la (A.28) si ha

$$B^*B \leq \| B^*B \| 1 = \| B \|^2 1, \tag{A.73}$$

e, moltiplicando a destra per A e a sinistra per A^* si la (A.73).

Da questa segue

$$\omega(A^*B^*BA) \leq \| B \|^2 \omega(A^*A), \tag{A.74}$$

e quindi, sostituendo nella (A.71), si ha

$$| \omega(A^*BA) |^2 \leq (\omega(A^*A))^2 \| B \|^2, \tag{A.75}$$

da cui la (A.19).

A.2 La costruzione GNS

A.2.1 Rappresentazioni

Data una C*-algebra $\mathcal{U}$, vogliamo mostrare che un funzionale positivo determina una rappresentazione dell'algebra, ovvero un omomorfismo di $\mathcal{U}$ su un algebra di operatori limitati definiti su di uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$. Questo risultato è dovuto a Gel'fand-Naimark-Segal [4], da cui il nome GNS.

Ricordiamo che, se si ha un funzionale ω positivo, normalizzato $\| \omega \| = 1$, questo funzionale si chiama *stato*.

Data una C*-algebra $\mathcal{U}$, si può dimostrare che esistono funzionali lineari positivi definiti su $\mathcal{U}$. Per esempio, se $A \,\epsilon\, \mathcal{U}$, allora

$$\omega(AA^*) = \| A \|^2, \quad \omega(e) = 1, \tag{A.76}$$

è un funzionale positivo (vedi, per la dimostrazione [3], teorema 12.39, pag. 336).

Per la definizione di rappresentazione di un'algebra $\mathcal{U}$ è necessaria la definizione di vettore *ciclico* in uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$, rispetto ad un'algebra di operatori $\mathcal{U}$ (dove qui abbiamo usato lo stesso simbolo per la C*-agebra astratta e per la sua rappresentazione sullo spazio $\mathcal{H}$): un vettore v si dice *ciclico* per l'algebra $\mathcal{U}$ se i vettori della forma Av, dove $A \,\epsilon\, \mathcal{U}$, formano un insieme *denso* in $\mathcal{H}$.

L'esempio tipico di vettore ciclico è lo stato di vuoto di una teoria quantistica. Applicando allo stato di vuoto operatori dell'algebra si ottiene lo spazio di Fock, la cui chiusura è uno spazio di Hilbert.

Vale la seguente proposizione

Proposizione 1 (costruzione **GNS**):

sia ω un funzionale positivo sulla C*-algebra $\mathcal{U}$. Allora si può definire una rappresentazione π_ω di $\mathcal{U}$ su di uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$, con un vettore ciclico Φ tale che

$$\omega(A) = \langle \Phi_\omega, \pi_\omega(A) \Phi_\omega \rangle, \tag{A.77}$$

per $\forall\, A \,\epsilon\, \mathcal{U}$. La rappresentazione π_ω è unica a meno di equivalenze unitarie.

Per la dimostrazione dobbiamo premettere alcuni risultati.

Abbiamo già visto la definizione di ideale (**A.16**), che qui richiamiamo:

data una C*-algebra $\mathcal{U}$, un ideale destro $\mathcal{I}$ è un insieme di elementi di $\mathcal{U}$ tali che se $A \in \mathcal{I}$ anche $AB \in \mathcal{I}, \forall B \in \mathcal{A}$. In altre parole, gli elementi di $\mathcal{U}$ operano su $\mathcal{I}$ come una operazione lineare di moltiplicazione.

Analogamente si definisce un ideale sinistro, ma interessa qui la definizione e le proprietà di un ideale *bilatero* $\mathcal{I}$, tale cioè che, se $A \in \mathcal{I}$ anche AB e BA appartengono a $\mathcal{I}$, per $\forall B \,\epsilon\, \mathcal{U}$.

Si verifica subito che, se $\mathcal{I}$ è un ideale destro ed è autoaggiunto, allora è automaticamente bilatero. Se infatti $A \in \mathcal{I}$ allora $AB \in \mathcal{I} \quad \forall B \in \mathcal{U}$. Ma allora anche $A^* \in \mathcal{I}$ e quindi $A^* B^* \in \mathcal{I}$. Quindi anche $(A^* B^*)^* = BA$ appartiene a $\mathcal{I}$, sempre a causa del fatto che $\mathcal{I}$ è autoaggiunto, e si ha che $\mathcal{I}$ è anche un ideale sinistro.

Il ragionamento si può invertire e mostrare che se $\mathcal{I}$ è bilatero, allora è autoaggiunto.

Sia ora $\mathcal{U}$ una C*-algebra e $\mathcal{I}$ un suo ideale bilatero, possiamo allora definire il quoziente $\hat{\mathcal{U}} = \mathcal{U}/\mathcal{I}$ con

$$\hat{A} = \{A + \mathcal{I}, A \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{U}/\mathcal{I}. \tag{A.78}$$

Verifichiamo che si ha

$$\begin{array}{ll} \alpha & \hat{A}\hat{B} = \widehat{AB}, \\ \beta & \hat{A} + \hat{B} = \widehat{A+B}, \\ \gamma & \hat{A}^* = \widehat{A^*}. \end{array}$$

α-Per definizione si ha

$$\widehat{A}\widehat{B} = \{A + \mathcal{I}\}\{B + \mathcal{I}\}. \tag{A.79}$$

Se si specificano due elementi in I_1 e I_2 in $\mathcal{I}$, avremo

$$(A + I_1)(B + I_2) = AB + AI_2 + I_1B + I_1I_2. \tag{A.80}$$

Si vede che la condizione per $\mathcal{I}$ di essere bilatero è essenziale affinchè gli ultimi tre termini siano in $\mathcal{I}$.

Quindi

$$(A + I_1)(B + I_2) = AB + I_3, \tag{A.81}$$

da cui segue la proprietà α.

β-E' ovvia.

γ- Si verifica subito che

$$(A + I_1)^* = A^* + I_1^* = A^* + I_2, \tag{A.82}$$

poiché $\mathcal{I}$ e quindi

$$\widehat{A}^* = \widehat{A^*}. \tag{A.83}$$

Passiamo ora alla proposizione **P1**, che sarà dimostrata per costruzione.

La formula

$$F(A,\, B) = \omega(A^*B) \tag{A.84}$$

definisce una forma hermitiana definita non-negativa. Ma ci occorre una forma definita positiva, tale cioè che sia

$$F(A,\, A) = 0 \tag{A.85}$$

se e solo se $A = 0$.

Ora, gli elementi dell'algebra $\mathcal{U}$ per cui vale le (A.85) formano un ideale sinistro di $\mathcal{U}$. Infatti, posto

$$\mathcal{I} \equiv \{A \,\epsilon\, \mathcal{U}, F(A,\, A) = 0\}, \tag{A.86}$$

se A appartiene a $\mathcal{I}$ e B è un generico elemento di $\mathcal{U}$, si ha, per la (A.15)

$$\begin{aligned} \mid \omega(B^*A) \mid^2 \leq \omega(A^*A)\omega(B^*B) = \\ = F(A,\, A)\omega(B^*B), \end{aligned} \tag{A.87}$$

da cui

$$\omega(B^*A) = 0 \tag{A.88}$$

qualunque sia B.

Se ora in quest'ultima si pone B^*BA al posto di B, si ha

$$\omega((B^*BA)^*A) = \omega((BA)^*BA) = 0, \tag{A.89}$$

cioè anche $BA \,\epsilon\, \mathcal{I}$. Quindi $\mathcal{I}$ è un ideale sinistro.

In questo caso, data la natura particolare dell'ideale $\mathcal{I}$, non è necessario che l'ideale sia bilatero per avere un quoziente ben definito. Si ha infatti, al posto dell'equazione (A.80)

$$\omega((A + I_1)^*(B + I_2)) = \omega(A^*B) + \overline{\omega(B^*I_1)} + \omega(A^*I_2) + \omega(I_1^*I_2), \tag{A.90}$$

dove abbiamo usato la (A.17). Ora, il funzionale ω valutato su di un elemento di $\mathcal{I}$ è nullo. Infatti, per la (A.18)

$$\mid \omega(I) \mid^2 \leq \omega(I^*I) \parallel \omega \parallel, \tag{A.91}$$

dove $\omega(I^*I) = 0$ per definizione. Quindi $\omega(I) = 0$, $\forall I \,\epsilon\, \mathcal{U}$.

Ne segue che il quoziente $\mathcal{U}/\mathcal{I}$ è ben definito.

Questa verifica era necessaria per poter effettuare il quoziente dell'algebra rispetto a $\mathcal{I}$ ed avere un prodotto scalare, costruito mediante il funzionale ω, definito positivo.

Definiamo il prodotto scalare sull'algebra quoziente $\mathcal{U}/\mathcal{I}$ con:

$$\langle \widehat{A},\, \widehat{B} \rangle = \omega(A^*B). \tag{A.92}$$

Si può verificare che effettivamente il secondo membro dipende solo dalle classi di cui A e B sono rappresentanti.

Il completamento di questo spazio nella metrica indotta dal prodotto scalare è uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$.

Definiamo ora l'operatore associato ad $A \,\epsilon\, \mathcal{U}$

$$\pi_\omega(A)\widehat{B} = \widehat{AB}. \tag{A.93}$$

La proprietà α garantisce che quest'operazione è ben definita, in quanto il secondo membro dipende da B solo tramite $\widehat{B}$.

L'operatore $\pi(A)$ è limitato. Infatti, da

$$\langle \widehat{B},\, \pi_\omega(A)\widehat{B}\rangle = \omega(B^* A B) \tag{A.94}$$

e da

$$\mid \omega(B^* A B) \mid \leq \parallel A \parallel \omega(B^* B) \tag{A.95}$$

che è la (A.19), si vede che

$$\langle \widehat{B},\, \pi_\omega(A)\widehat{B}\rangle \leq \parallel A \parallel \langle B,\, B\rangle, \tag{A.96}$$

cioè

$$\frac{\langle \widehat{B},\, \pi_\omega(A)\widehat{B}\rangle}{\langle B,\, B\rangle} \leq \parallel A \parallel, \tag{A.97}$$

ovvero

$$\parallel \pi_\omega(A) \parallel \leq \parallel A \parallel, \tag{A.98}$$

per definizione di norma di un operatore.

Quindi l'operatore $\pi_\omega(A)$ è limitato e perciò può essere esteso per continuità a tutto lo spazio di Hilbert $\mathcal{H}$.

Dalla definizione di π (A.93) segue che π è *lineare*, che preserva il prodotto

$$\pi_\omega \widehat{C} = \widehat{ABC} = \widehat{A}\widehat{B}\widehat{C} = \pi_\omega(A)\widehat{BC} = \pi_\omega(A)\pi_\omega(B)\widehat{C}, \tag{A.99}$$

e che vale

$$\pi_\omega(1) = 1 \tag{A.100}$$

$(\pi_\omega(1)B = \widehat{B},\, \forall\, B \,\epsilon\, \mathcal{U})$.

Verifichiamo che preserva l'aggiunto:

$$\begin{aligned} \langle \widehat{B},\, \pi_\omega(A)^* \widehat{C}\rangle &= \langle \pi_\omega(A)\widehat{B},\, \widehat{C}\rangle = \langle \pi_\omega(AB),\, \widehat{C}\rangle \\ &= \omega(B^* A^* C) = \langle \widehat{B},\, \widehat{A^* C}\rangle = \langle \widehat{B},\, \pi_\omega(A^*)\widehat{C}\rangle. \end{aligned} \tag{A.101}$$

Quindi π_ω è una rappresentazione della C*-algebra $\mathcal{U}$ su $\mathcal{H}$.

Poniamo

$$\Phi_\omega = 1. \tag{A.102}$$

Segue dalla (A.93) con $B = 1$

$$\pi_\omega(A)\Phi_\omega = \widehat{A}. \tag{A.103}$$

Per dimostrare che il vettore Φ_ω è ciclico, occorre dimostrare che l'insieme $\{\pi_\omega(A)\Phi_\omega = \widehat{A}, A \,\epsilon\, \mathcal{H}\}$ è denso in $\mathcal{H}$. Ma ciò deriva dal fatto che l'insieme

$$\mathcal{F} = \{\pi_\omega(A)\,\Phi_\omega;\; A \,\epsilon\, \mathcal{U}\} \tag{A.104}$$

è l'insieme delle classi $\{\widehat{A}\}$ che costituiscono l'algebra quoziente $\mathcal{U}/\mathcal{I}$ ed è anche uno spazio prehilbertiano.

Il completamento rispetto al prodotto $\langle\, ,\, \rangle$ ne fa uno spazio di Hilbert. Ne deriva che l'insieme $\mathcal{F}$ è denso in questo spazio di Hilbert.

Quindi π_ω è *ciclico*, e dalla (A.94) si ha la relazione importante

$$\langle \Phi_\omega,\, \pi_\omega(A)\Phi_\omega\rangle = \omega(A), \tag{A.105}$$

che completa la prima parte della dimostrazione della proposizione **P1**.

Resta da dimostrare l'<u>unicità</u> a meno di equivalenze unitarie.

Ciò si dimostra provando che l'operatore U definito da

$$U\pi_\omega(A)\Phi_\omega = \pi'(A)\Phi'_\omega, \tag{A.106}$$

dove π'_ω e Π'_ω, sono un'altra rappresentazione con un altro stato ciclico Π'_ω, è unitario.

Ma, insieme alla (A.105) dovremo anche avere

$$\langle \Phi'_\omega,\, \pi_\omega(A)'\Phi'_\omega\rangle = \omega(A), \tag{A.107}$$

poichè il funzionale ω è assegnato.

Da ciò segue

$$\begin{gathered}\langle \pi'(A)\Phi'_\omega,\, \pi'(B)\Phi'_\omega\rangle = \\ \langle U\pi(A)\Phi_\omega,\, U\pi(B)\Phi_\omega\rangle = \langle \pi(A)\Phi_\omega,\, \pi(B)\Phi_\omega\rangle = \omega(A^*B).\end{gathered} \tag{A.108}$$

Quindi l'operatore U preserva il prodotto scalare $\langle\, ,\, \rangle$.

Dal fatto che preserva il prodotto scalare segue che è un operatore limitato con norma uguale a 1.

Inoltre è un operatore lineare, come si vede con

$$\begin{aligned}U\pi(A)\Phi_\omega + U\pi(B)\Phi_\omega &= \pi'(A)\Phi'_\omega + \pi'(B)\Phi'_\omega = \\ &= \pi'(A+B)\Phi'_\omega = U\pi(A+B)\Phi_\omega,\end{aligned} \tag{A.109}$$

e con

$$\begin{aligned}U(\alpha\pi(A)\Phi_\omega) = U(\pi(\alpha A)\Phi_\omega) &= \pi'(\alpha A)\Phi_\omega = \\ &= \alpha\pi'(A)\Phi_\omega = \alpha U(\pi(A)\Phi_\omega).\end{aligned}$$

Quindi, l'operatore U è limitato e lineare. Applicando allora il teorema 12.13, a pag. 313 di [3], si ha che U, o meglio la sua chiusura, è *unitaria*. ■

Riassumendo, la costruzione (GNS) che abbiamo discusso permette di costruire una rappresentazione π dell'algebra $\mathcal{U}/\mathcal{I}$, che opera sugli elementi stessi di $\mathcal{U}/\mathcal{I}$ con

$$\pi(A)\widehat{B} = \widehat{A}\widehat{B}, \tag{A.110}$$

con $A \,\epsilon\, \mathcal{U}$ e $\widehat{A}, \widehat{B} \,\epsilon\, \mathcal{U}/\mathcal{I}$.

Avendo posto

$$\Phi_\omega = \widehat{1} \tag{A.111}$$

si ha

$$\pi_\omega(A)\Phi_\omega = \widehat{A}\Phi_\omega, \tag{A.112}$$

che mostra che Φ_ω può essere visto come un vettore *ciclico* per $\mathcal{U}/\mathcal{I}$. A sua volta Φ_ω e $\widehat{A}\Phi_\omega$ possono essere visti come vettori dello spazio vettoriale $\mathcal{U}/\mathcal{I}$ su cui π_ω opera.

Inoltre, la relazione

$$\langle \Phi_\omega,\, \pi_\omega(A)\Phi_\omega \rangle = \omega(A) \tag{A.113}$$

fornisce un'interpretazione di $\omega(A)$ come valore di aspettazione nel vuoto dell'operatore $\pi_\omega(A)$.

Operando con tutti gli elementi dell'algebra $\mathcal{U}/\mathcal{I}$ sul vettore ciclico si ottiene un insieme di vettori denso nello spazio di Hilbert.

Questo è lo spazio di Fock e il vettore ciclico è lo stato di vuoto.

La costruzione GNS permette la costruzione di tutte le rapresentazioni cicliche dell'algebra $\mathcal{U}$. D'altra parte, ogni rappresentazione di $\mathcal{U}$ può essere decomposta in somma diretta di rappresentazioni cicliche.

A.2.2 Automorfismi

Vogliamo ora vedere come si inquadra in questo formalismo il problema delle simmetrie. Vale il seguente risultato,

Proposizione 2:

sia dato un funzionale positivo ω sulla C*-algebra $\mathcal{U}$ che sia *invariante* rispetto ad un automorfismo γ, nel senso che

$$\omega(\gamma(A)) = \omega(A), \quad \text{per} \quad \forall \quad A \in \mathcal{U}, \tag{A.114}$$

e siano π_ω, $\mathcal{H}_\omega$ e Φ_ω i vari termini della costruzione (GNS), corrispondenti a ω.

Allora esiste un operatore *unitario* U_ω in $\mathcal{H}_\omega$ tale che

$$\pi_\omega(\gamma(A)) = U_\omega \pi_\omega(A) U_\omega^{-1}. \tag{A.115}$$

Se inoltre si richiede

$$U_\omega \Phi_\omega = \Phi_\omega, \tag{A.116}$$

allora le condizioni (A.115) e (A.116) definiscono U_ω in modo unico.

La dimostrazione si ottiene molto facilmente ricorrendo alla proposizione 1 precedente. Basta infatti identificare con $\pi_\omega(A)$ l'operatore $(\pi_\omega \circ \gamma)(A)$ per avere subito il risultato voluto, cioè l'unicità, a meno di equivalenze unitarie della rappresentazione $\pi \circ \gamma$.

Ne segue che esiste un operatore U_ω tale che

$$\pi_\omega(\gamma(A)) = U_\omega \pi_\omega(A) O U_\omega^{-1}, \quad \text{per} \quad \forall A \,\epsilon\, \mathcal{U}. \tag{A.117}$$

Se poi si richiede che

$$U_\omega \Phi_\omega = \Phi_\omega, \tag{A.118}$$

si ha che questa e la precedente implicano

$$U_\omega \pi_\omega(A) U_\omega^{-1} \Phi_\omega = \pi_\omega(\gamma(A)) \Phi_\omega, \tag{A.119}$$

e

$$U_\omega \pi_\omega(A) \Phi_\omega = \pi_\omega(\gamma(A)) \Phi_\omega, \tag{A.120}$$

e questa relazione determina U_ω univocamente come un'operatore unitario, seguendo i ragionamenti già fatti per la proposizione P1. ■

A.3 L'algebra delle successioni di funzioni

Sia Ω lo spazio

$$\Omega = \bigoplus_{n=0}^{\infty} S(\mathbb{M}^n), \tag{A.121}$$

con la convenzione $S(\mathbb{M}^0) \equiv \mathbb{C}$, e dove $S(\mathbb{M}^n)$ è lo spazio delle funzioni test f, definite da successioni

$$f^{[n]}, \quad \text{con} \quad f^{[n]}(x_1, ..., x_n) \quad \text{in} \quad S(\mathbb{M}^n). \tag{A.122}$$

Un concetto di convergenza si può introdurre dicendo che la successione di funzioni f_ν, $(\nu = 1, 2, ...)$ di elemeni di Ω converge a zero se esiste un intero $N > 0$, indipendente da ν, tale che $f_\nu^{[n]} = 0$, $\forall \nu$ e $\forall n > N$ e inoltre $f_\nu^{[n]}(x_1, ..., x_n) \to 0$, nel senso della convergenza di $S(\mathbb{M}^n)$.

Per chiarire il senso di quanto sopra scriviamo una successione f_ν:

$$
\begin{aligned}
f_1 \quad &= (f_1^{[0]}(x_1), f_1^{[1]}(x_1,x_2), ..., f_1^{[N]}(x_1,...,x_N), 0, ...)\\
f_2 \quad &= (f_2^{[0]}(x_1), f_2^{[1]}(x_1,x_2), ..., f_2^{[N]}(x_1,...,x_N), 0, ...)\\
... \\
f_1 \quad &= (f_\nu^{[0]}(x_1), f_\nu^{[1]}(x_1,x_2), ..., f_\nu^{[N]}(x_1,...,x_N), 0, ...)\\
...
\end{aligned}
\tag{A.123}
$$

dove tutte le succesioni $f_\nu^{[i]}$, con $i = 1, 2, ...$, tendono a zero nel senso della convergenza dello spazio delle funzioni C^∞ rapidamente decrescenti.

In Ω si definisce un prodotto $\otimes$ *non commutativo* con

$$
(f \otimes g)^{[n]} = \sum_{k=0}^{n} f^{[k]}(x_1,...,x_k) g^{[n-k]}(x_{k+1},...,x_n), \tag{A.124}
$$

che è *associativo* e *continuo.*

Si può inoltre definire un'operazione di aggiunto, $f \mapsto f^+$, ponendo

$$
(f^+)^{[n]}(x_1,...,x_n) = \overline{f^{[n]}(x_n,...,x_1)}, \tag{A.125}
$$

e

$$
\begin{aligned}
[(f \otimes g)^+]^{[n]}(x_1,...,x_n) \quad &= \quad (\sum_{k=0}^{n} f^{[k]}(x_1,...,x_k) g^{[n-k]}(x_{k+1},...,x_n))^+ = \\
&= \quad \sum_{k=0}^{n} \overline{f^{[n]}(x_n,...,x_{n-k+1}) g^{[n-k]}(x_{n-k},...,x_1)} = \\
&= \quad \sum_{k'=n}^{k'=0} \overline{f^{[n-k']}(x_n,...,x_{k'+1})}\, \overline{g^{[k']}(x_{k'},...,x_1)} = \\
&= \quad (g^+ \otimes f^+)^{[n]}(x_1,...,x_n),
\end{aligned}
\tag{A.126}
$$

che è la regola per il prodotto.

In modo del tutto analogo si verifica che

$$
(\lambda f + \mu g)^+ = \overline{\lambda} f^+ + \overline{\mu} g^+, \tag{A.127}
$$

e

$$
(f^+)^+ = f. \tag{A.128}
$$

Infine l'identità dell'algebra si definisce con

$$I = (1, 0, ..., 0, ...), \tag{A.129}$$

con

$$\begin{aligned} I + f &= (1, 0, ..., 0, ...) + (f^{[0]}, f^{[1]}, ..., f^{[n]}, ...) = \\ &= (1 + f^{[0]}, f^{[1]}, ..., f^{[n]}, ...). \end{aligned}$$

E' poi

$$(f \otimes I)^{[n]} = \sum_{k=0}^{n} f^{[n]}(x_1, ..., x_k)\delta_{n-k,0} = f^{[n]}(x_1, ..., x_n), \tag{A.130}$$

e analogamente per $I \otimes f$.

A.3.1 Proprietà del prodotto

L'associatività del prodotto (A.124) si dimostra facilmente scrivendolo per disteso

$$\begin{gathered} (f \otimes (g \otimes h))^{[n]} = \\ = \sum_{k=0}^{n} f^{[k]}(x_1, ..., x_k)(g \otimes h)^{[n-k]}(x_{k+1}, ..., x_n) = \\ = \sum_{k=0}^{n} f^{[k]}(x_1, ..., x_k) \sum_{h=0}^{n-k} g^{[h]}(x_{k+1}, ..., x_{k+h}) f^{[n-k-h]}(x_{k+1+h}, ..., x_n), \end{gathered}$$

mentre

$$\begin{gathered} ((f \otimes g) \otimes h)^{[n]} = \\ = \sum_{k=0}^{n} \sum_{h=0}^{k} f^{[k]}(x_1, ..., x_h) g^{[k-h]}(x_{h+1}, ..., x_k) h^{[n-k]}(x_{k+1}, ..., x_n). \end{gathered} \tag{A.131}$$

Se ora nella seconda si pone $k - h \to h, \quad h \to k$, tenuto conto che è

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{h=0}^{k} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{h=0}^{n-k}, \tag{A.132}$$

si ottiene la prima espressione.

Per quanto riguarda la continuità si vuol verificare che

$$\lim_{\nu \to \infty} (f_\nu \otimes g)^{[n]} = (\lim_{\nu \to \infty} f_\nu \otimes g)^{[n]}, \tag{A.133}$$

nella topologia di $S(\mathbb{M}^n)$, ovvero che

$$\lim_{\nu\to\infty} f_\nu^{[k]}(x_1,...x_k)g^{[n-k]}(x_{k+1},...,x_n) = \sum_{k=0}^{n}(\lim_{\nu\to\infty} f_\nu^{[k]}(x_1,...,x_k))g^{[n-k]}(x_{k+1},...,x_n), \tag{A.134}$$

ma, poichè la somma è finita, questa uguaglianza è senz'altro vera (con $n \leq N$).

In definitiva, si può dire che Ω è un'algebra *topologica involutiva con identità*.

A.3.2 Proprietà di trasformazione

Definiamo la seguente proprietà di trasformazione delle funzioni $f = \{f^{[n]}\}$ sotto trasformazione di Poincaré

$$f \mapsto f_{\{\Lambda,a\}}, \tag{A.135}$$

con

$$f_{\{\Lambda,a\}} = \{f^{[n]}_{\{\Lambda,a\}}\}, \tag{A.136}$$

dove

$$f^{[n]}_{\{\Lambda,a\}}(x_1,...,x_n) = f^{[n]}(\Lambda^{-1}(x_1-a),...,\Lambda^{-1}(x_n-a)), \tag{A.137}$$

e dove Λ è una trasformazione di Lorentz e a è il parametro di una traslazione.

La regola definita è nient'altro che la regola di trasformazione di un campo scalare ϕ

$$\phi'(x) = \phi(\Lambda^{-1}x), \quad \text{dove} \quad \phi \quad \xrightarrow{\Lambda} \quad \phi'. \tag{A.138}$$

A.4 Il funzionale di Wightman.

Sia Ω' lo spazio *duale* di Ω, cioè lo spazio dei funzionali *lineari* e *continui* su Ω (spazio delle distribuzioni su Ω).

Ogni funzionale $F \in \Omega'$ si può scrivere nella forma (Teorema di Riesz, [2], pag. 292)

$$F(f) = F^{[0]}f^{[0]} + (F^{[1]},\, f^{[1]}) + ... + (F^{[n]},\, f^{[n]}) + ..., \tag{A.139}$$

dove $F^{[n]}\,\epsilon\, S'(\mathbb{M}^n)$, $f^{n]}\,\epsilon\, S(\mathbb{M}^n)$, e $f^[0] = C$.

Il funzionale F è chiaramente lineare.

Chiameremo F invariante di Poincaré se

$$F(f_{\{\Lambda,\, a\}}) = F(f), \tag{A.140}$$

dove

$$f_{\{\Lambda,\,a\}} = f(\Lambda^{-1}(x_1 - a), ..., \Lambda^{-1}(x_n - a)), \tag{A.141}$$

che equivale all'invarianza di tutte le componenti di $F^{[n]}$ nella (A.139).

F si dice normalizzato se

$$F(I) = 1 \tag{A.142}$$

e si dice Hermitiano se

$$F(f^+) = \overline{F(f)}, \quad \forall f \,\epsilon\, \Omega. \tag{A.143}$$

Infine, è *moltiplicativamente positivo* se

$$F(f \otimes f^+) \geq 0, \quad \forall f \,\epsilon\, \Omega, \tag{A.144}$$

(n.b. $\geq$, non $>$!).

Un funzionale *moltiplicativamente positivo* è Hermitiano (vedi (A.17, pag. 51) e soddisfa la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$|F(f \otimes g^+)|^2 \leq F(f \otimes f^+) F(g \otimes g^+). \tag{A.145}$$

La dimostrazione di questa relazione è esattamente quella per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz in teoria degli spazi di Hilbert. In realtà questa relazione si può dimostrare anche per il caso un po' più generale, in cui la forma F è una forma sesquilineare $\omega(u, v)$, con $u, v \,\epsilon\, \Omega$, (cioè lineare nel secondo argomento e antilineare nel primo) che sia *non negativa definita*

$$\omega(u, u) \geq 0, \quad \forall u \,\epsilon\, \Omega. \tag{A.146}$$

Se il simbolo di $=$ vale soltanto per $u = 0$, allora la forma si dice *positiva*.

Quindi, con la stessa dimostrazione della disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, si ha che, se ω è una forma non-negativa definita, allora

$$|\, \omega(u, v) \,|^2 \leq \omega(u, u) \omega(v, v), \quad \forall u, v \,\epsilon\, \Omega. \tag{A.147}$$

Sia ora F è un funzionale moltiplicativamente positivo e definiamo su Ω l'insieme di elementi

$$\mathcal{I} = \{f \,\epsilon\, \Omega : F(f \otimes f^+) = 0\}. \tag{A.148}$$

$\mathcal{I}$ è un'*ideale destro* e forma un sottospazio chiuso rispetto alla topologia indotta da E.

Infatti, se $F(f \otimes f^+) = 0$, segue che $F((g \otimes f) \otimes (g \otimes f)^+) = 0$, come si vede usando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz (A.145)

$$| F((g\otimes f)\otimes(g\otimes f)^{+}) |^2=| F(f\otimes g\otimes f^{+}\otimes g^{+}) |^2\leq F(f\otimes f^{+})F((g\otimes f^{+}\otimes g^{+})^{+}\otimes(g\otimes f^{+}\otimes g^{+}))=0, \tag{A.149}$$

poiché è zero il primo fattore a secondo membro.

Inoltre, la continuità del funzionale F garantisce la chiusura dell'insieme $\mathcal{I}$, cioè $\lim\limits_{n\to\infty} F(f_n) = F(\lim\limits_{n\to\infty} f_n)$, da cui segue che, se $\{f_n\}\,\epsilon\,\mathcal{I}$, ovvero $F(f_n \otimes f_n^{+}) = 0$, anche $F(f \otimes f^{+}) = 0$, dove $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$.

Applichiamo quanto detto al caso delle funzioni di Wightman, definendo su Ω il seguente funzionale moltiplicativamente positivo (come vedremo più sotto)

$$W(f) = w^{[0]}f^{[0]} + (w^{[1]},\, f^{[1]}) + ... + (w^{[n]},\, f^{[n]}) + ..., \tag{A.150}$$

dove $w^{[n]}(x_1, ..., x_n)$, con $n = 0, 1, w, ...$ e $w^{[0]}\,\epsilon\,\mathbb{C}$, è una successione di funzioni (distribuzioni) di Wightman del campo scalare autoaggiunto $\phi(x)$.

Il corrispondente ideale destro $\mathcal{I}$, che sarà indicato ancora con $\mathcal{I}$, non è vuoto.

Infatti, segue dalla condizione spettrale w.5 (cioè che $\tilde{w}(p_1, ..., p_n)$ ha il supporto dato dalla (3.18), pag. 15), che $\mathcal{I}$ contiene l'*ideale destro*

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{sp} = \{f\,\epsilon\,\Omega : f^{[0]} = 0, f^{[1]}(p_1), ..., f^{[n]}(p_1, ..., p_n) = 0, ...,\\ \text{per}\quad p_1, p_1 + p_2, ..., p_1 + p_2 + ... + p_n\,\epsilon\,\overline{V}^{+}.\},\end{aligned} \tag{A.151}$$

Che sia un ideale destro si vede immediatamente se si scrive il prodotto di un elemento generico $f \in \mathcal{I}_{sp}$ con un elemento generico $g \in \Omega$:

$$\begin{aligned}(f \otimes g)^{[n]} = \sum_{k=0}^{n} f^{[k]}(p_1, ..., p_k)g^{[n-k]}(p_{k+1}, ..., p_n)) = 0,\\ \text{se}\quad p_1, p_1 + p_2, ..., p_1 + ...p_k \in \overline{V}^{-}, \quad k = 0, 1, ..., n.\end{aligned} \tag{A.152}$$

D'altra parte, la valutazione di $w^{[n]}$ su questo termine, tenuto conto della formula

$$(f(x),\, \phi(x)) = \frac{1}{(2\pi)}(\hat{f}(k),\, \hat{\phi}(-k)), \tag{A.153}$$

che permette di esprimere $(f,\, \phi)$ in termini delle corrispondenti trasformate di Fourier, è zero, poiché nel supporto di $\hat{w}$, come dettato dalla proprietà $w.5$, sono zero le funzioni $\hat{f}^{[k]}$. Questo vale qualunque sia la funzione $g \in \Omega$.

Quindi si ha

$$f \otimes g \in \mathcal{I}_{sp}, \quad \text{per} \quad f \in \mathcal{I}_{sp} \quad \text{e} \quad \forall g \in \Omega. \tag{A.154}$$

Per la proprietà w.7 si ha che $\mathcal{I}$ contiene anche l'ideale *bilatero* $\mathcal{I}_{loc}$, definito da tutte le possibili combinazioni lineari di elementi della forma

$$f = (0, ..., 0, f^{[n]}, 0, ...), \tag{A.155}$$

dove

$$f^{[n]}(x_1, ..., x_n) = h(x_1, ..., x_j, x_{j+1}, ..., x_n) - h(x_1, ..., x_{j+1}, x_j, ..., x_n), \tag{A.156}$$

con il supporto di h in $(x_{j+1} - x_j)^2 < 0$. Questa condizione garantisce una $''$proprietà di località$''$ per le funzioni test $f^{[n]}$. Da notare che avremo necessariamente che $f^{[0]} = 0$ e $f^{[1]} = 0$.

La proprietà w.7, nel caso che stiamo considerando di un solo campo scalare autoaggiunto, ci dice che le funzioni di Wightman $w(x_1, ..., x_n)$ sono simmetriche nello scambio degli indici di variabile $1, 2, ..., n$.

$W(f \otimes f^+)$ avrà contributi del tipo

$$(w^{[n]}, (f \otimes f^+)^{[n]}) = \sum_{k=0}^{n} \int f^{[k]}(x_1, ..., x_k) f^{+[n-k]}(x_{k+1}, ..., x_n) w^{[n]}(x_1, ..., x_n) dx_1^4 ... dx_n^4, \tag{A.157}$$

dove le funzioni f sono antisimmetriche nello scambio degli indici. Quindi questi termini saranno zero.

Più precisamente, il termine k-esimo della somma è antisimmetrico nei primi k argomenti ed è inoltre antisimmetrico nei successivi n-k argomenti. Con k = 2,3,...,n si vede che la valutazione della distribuzione $w^{[n]}(x_1, ..., x_n)$ su tutti i termini è zero.

Quindi abbiamo verificato che $\mathcal{I}_{loc}$ è contenuto in $\mathcal{I}$ e quindi è un ideale destro poiché lo è $\mathcal{I}$.

Ma è anche un ideale sinistro. Per vedere questo scriviamo il prodotto $(g \otimes f)^{[n]})$, dove g è una funzione arbitraria di Ω e $f \in \mathcal{I}_{loc}$:

$$(g \otimes f)^{[n]}) = \sum_{k=0}^{n} g^{[k]}(x_1, ..., x_k) f^{[n-k]}(x_{k+1}, ..., x_n), \tag{A.158}$$

si vede che questa espressione è antisimmetrica negli indici $k+1, ..., n$, mentre g dipende dagli altri indici e non ha nessuna particolare simmetria.

Se si valuta su questo termine la funzione di Wightman $w^{[n]}(x_1, ..., x_n)$, si ottiene che, essendo questa totalmente antisimmetrica, e quindi anche negli indici $k+1, ..., n$, questo termine è zero.

Quindi $W(g \otimes f) = 0$ e $\mathcal{I}_{loc}$ è anche un ideale sinistro di Ω.

Possiamo ora dare la definizione di funzionale di Wightman: Un funzionale $F \,\epsilon\, \Omega'$ è un *funzionale di Wightman* se è *invariante* di Poincaré e se il suo *ideale destro* $\mathcal{I} = \{f : W(f \otimes f^+) = 0\}$ *contiene* gli ideali $\mathcal{I}_{sp}$ e $\mathcal{I}_{loc}$.

Vale la seguente **proposizione**:

a)-sia W un funzionale di Wightman, l'equazione (A.150) definisce le funzioni $w^{[n]}$, che soddisfano le condizioni w.1-w.5 e w.7 del Capitolo 3.

b)-Inversamente, se la sequenza di distribuzioni $\{w^{[n]}\}$ soddisfa le condizioni w.1-w.5 e w.7, allora il corrispondente funzionale W è un funzionale di Wightman.

Dimostrazione di (a)

Il funzionale $W \in \Omega'$ dato determina tutte le funzioni di Wightman $w^{[n]}(x_1, ..., x_n)$, infatti, scegliendo la funzione $f^{[n]}(x_1, ..., x_n) \neq 0$ e tutte la $f^{[k]}(x_1, ..., x_n) = 0$ con $k \neq n$, si estrae da W la distribuzione $w^{[n]}$ valutata su $f^{[n]}$.

Poiché $f^{[n]} \in \overline{S}(\overline{M}^n)$ e W è un funzionale lineare e continuo, cioè $W \in \bigoplus_{n=0}^{\infty} \overline{S}'(\overline{M}^n)$, le $w^{[n]}$ risultano distribuzioni temperate.

Quindi la proprietà **w.1** è dimostrata.

Per ipotesi W è moltiplicativamente positivo e quindi Hermitiano (vedi, a questo proposito, [1], I, Proposition 2.3.11, pag. 49, dove W viene chiamato semplicemente positivo). Ciò significa

$$W(f^+) = \overline{W(f)}, \quad \text{per} \quad \forall f \in \Omega. \tag{A.159}$$

Allora si ha, con la scelta fatta sopra

$$W(f^+) = (w^{[n]}(x_1, ..., x_n),\, f^{[n]+}(x_1, ..., x_n)), \tag{A.160}$$

ma $f^{[n]+}(x_1, ..., x_n) = \overline{f}(x_n, ..., x_1)$ e quindi

$$W(f^+) = (w^{[n]}(x_1, ..., x_n)\, \overline{f^{[n]}(x_n, ..., x_1)}) = \overline{(\overline{w^{[n]}(x_n, ..., x_1)}\, f^{[n]}(x_1, ..., x_n))}, \tag{A.161}$$

che è uguale a

$$\overline{W(f)} = \overline{(w^{[n]}(x_1, ..., x_n),\, f^{[n]}(x_1, ..., x_n))}. \tag{A.162}$$

Essendo $f^{[n]}$ arbitraria, si ha

$$\overline{w^{[n]}(x_n, ..., x_1)} = w^{[n]}(x_1, ..., x_n). \tag{A.163}$$

Quindi, la proprietà **w.2** è dimostrata.

La positività delle funzioni $w^{[n]}$ si ottiene da

$$W(f \otimes f^+) \geq 0, \tag{A.164}$$

e si vede facilmente che esplicitando questa disuguaglianza si ottiene proprio la condizione di positività per le funzioni w, cioè la **w.3**, a pag. 13 (scambiando $f \leftrightarrow f^+$ e tenendo conto che $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} = \frac{1}{2} \sum_{m,n=0}^{\infty}$).

La w.4 esprime la covarianza di Poincaré (invarianza nel nostro caso), ma per ipotesi W è invariante, cioè

$$W(f_{\{\Lambda,a\}}) = W(f), \tag{A.165}$$

dove $f_{\{\Lambda,a\}} = f(\Lambda^{-1}(x_1 - a), ..., \Lambda^{-1}(x_n - a))$.

Scegliendo $f^{[n]} = f_{\{\Lambda,a\}}$ e $f^{[k]} = 0$, per $k \neq n$, si ha

$$\begin{aligned} W(f_{\{\Lambda,a\}}) = (w^{[n]}(x_1, ..., x_n),\ f^{[n]}(\Lambda^{-1}(x_1 - a), ..., \Lambda^{-1}(x_n - a))) = \\ = (w^{[n]}(\Lambda x_1 + a, ..., \Lambda x_n + a),\ f^{[n]}(x_1, ..., x_n)). \end{aligned} \tag{A.166}$$

Per l'invarianza di W questa è uguale a

$$W(f) = (w^{[n]}(x_1, ..., x_n),\ f^{[n]}(x_1, ..., x_n)), \tag{A.167}$$

e, per l'arbitrarietà delle f si ha infine

$$w^{[n]}(\Lambda x_1 + a, ..., \Lambda x_n + a) = w^{[n]}(x_1, ..., x_n). \tag{A.168}$$

Quindi la proprietà **w.4** è dimostrata.

Se si sceglie come sopra $f^{[n]} \neq 0$ e $f^{[k]} = 0$ per $k \neq n$, si ha

$$W(f) = (w^{[n]}(x_1, ..., x_n),\ f^{[n]}(x_1, ...x_n)). \tag{A.169}$$

In termini delle trasformate di Fourier si ha

$$W(f^{[n]}) = \frac{1}{(2\pi)^{4n}}(\tilde{w}^{[n]}(p_1, ..., _n),\ \tilde{f}^{[n]}(-p_1, ..., -p_n)), \tag{A.170}$$

dove la trasformata di Fourier è definita da $\tilde{f}(p) = \int e^{ix\cdot p} f(x)dx$.

Quindi $f^{[n]} = 0$ se $p_1, p_1 + p_2, ..., p_1 + ... + p_n \in \overline{V^+}$. Ovvero, il supporto di $f^{[n]}$ è il complemento di $\overline{V^+}$, cioè l'insieme di V^- e di tutti i vettori di tipo spazio.

Applichiamo quanto detto all'espressione

$$W(f \otimes f^+) = 0, \tag{A.171}$$

poiché sappiamo che $f^{[n]} \in \mathcal{I}$.

Con la scelta fatta si ha

$$W(f \otimes f^+) = (w^{[n]},\ (f \otimes f^+)^{[n]}). \tag{A.172}$$

Se si sceglie $f \in \mathcal{I}_{sp}$ è anche $f \otimes f^+ \in \mathcal{I}_{sp}$, perchè sappiamo che $\mathcal{I}_{sp}$ è un ideale *destro*.

Per quanto detto più sopra, si ha

$$supp(f \otimes f^+)(-p_1, ..., -p_n) = \{p_1, p_1 + p_2, ..., p_1 + ... + p_n \in \quad \text{complemento} \quad \text{di} \quad \overline{V}^+. \tag{A.173}$$

Quindi

$$W(f \otimes f^+) = \frac{1}{(2\pi)^{4n}} (\tilde{w}^{[n]}(p_1, ..., p_n), (\widetilde{f \otimes f^+})^{[n]} (-p_1, ... - p_n)) = 0, \tag{A.174}$$

che implica che il supporto della funzione $w^{[n]}$ è

$$p_1, p_1 + p_2, ..., p_1 + ... + p_n \in \overline{V^+}. \tag{A.175}$$

Quindi, la proprietà **w.5** è dimostrata.

Per dimostrare la località, procedendo come sopra, scegliamo $f \in \mathcal{I}_{loc}$ e, poiché $\mathcal{I}_{loc}$ è un ideale destro , anche $f \otimes f^+$ sarà $\in \mathcal{I}_{loc}$. Ne segue che $f \otimes f^+$ è della forma

$$h(x_1, ..., x_j, x_{j+1}, ..., x_n) - h(x_1, ..., x_{j+1}, x_j, ..., x_n), \tag{A.176}$$

con h concentrata in $(x_j - x_{j+1})^2 < 0$.

Se , al solito si considera il termine n-esimo in $W(f)$, essendo $\mathcal{I}_{loc} \subset \mathcal{I}$

$$W(f \otimes f^+) = (w^{[n]}, (f \otimes f^+)^{[n]}) = 0, \tag{A.177}$$

cioè

$$(w^{[n]}(x_1, ..., x_j, x_{j+1}, ..., x_n), \sum_{k=0}^{n} f^{[k]}(x_1, ..., x_k) f^{+[n-k]}(x_{k+1}, ..., x_n)) = 0, \tag{A.178}$$

dove $f^{[n]} \neq 0$ solo se $(x_j - x_{j+1})^2 < 0$ e in tal caso è uguale alla forma (A.176), se $j < k$ (n.b. $f^{[0]} = 0$).

Quindi, anche $w^{[n]}(..., x_j, x_{j+1}, ...)$ è uguale a $w^{[n]}(..., x_{j+1}, x_j, ...)$ se $j < k$ e $(x_j - x_{j+1})^2 < 0$.

Se invece $j > k$, poiché

$$f^{+[n-k]}(x_{k+1}, ..., x_n) = \overline{f^{[n-k]}(x_n, ..., x_{k+1})}, \tag{A.179}$$

anche questa funzione sarà della forma (A.176), con supporto in $(x_j - x_{j+1})^2 < 0$.

Notare che, scelta la $f^{[n-k]}$ di questa forma, cioè appartenente a $\mathcal{I}_{loc}$, anche $f \otimes f^+ \in \mathcal{I}_{loc}$, perché $\mathcal{I}_{loc}$ è bilatero.

Quindi anche per $j > k$ la $w^{[n]}$ soddisfa la proprietà della località **w.7**.

Dimostrazione di (b).

Adesso le $w^{[n]}$ soddisfano per ipotesi le condizioni w.1-w.5 e w.7. Vogliamo dimostrare che W è un funzionale di Wightman, cioè, ricordiamolo, un funzionale normalizzato, moltiplicativamente positivo (e quindi Hermitiano), invariante di Poincaré e che ha come ideale destro $\mathcal{I}$, che contiene l'ideale $\mathcal{I}_{sp}$ e $\mathcal{I}_{loc}$, il quale ultimo è anche sinistro.

Prima di tutto W è un funzionale *lineare e continuo* su $\bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathbb{S}'(\mathbb{M}^n)$ perché tali sono le $w^{[n]}$.

E' *normalizzato* poiché, per definizione, $w^{[0]} = 1$. Quindi $W(f^{[0]}) = f^{[0]}$ e perciò $W(1) = 1$.

La proprietà di positività delle $w^{[n]}$, che si legge in modo sintetico

$$\int\int \sum_{m,n=0}^{\infty} \overline{f}(x_1, ..., x_m) w^{[n]}(x_m, ..., x_1, x'_1, ..., x'_n) f(x'_1, ..., x'_n) dx dx' \geq 0, \tag{A.180}$$

si traduce in

$$W(f \otimes f^+) = \sum_{n=0}^{\infty} (w^{[n]}, (f \otimes f^+)^{[n]}), \tag{A.181}$$

dove ogni addendo è ≥ 0.

Quindi $W(f \otimes f^+) \geq 0$ e W è *moltiplicativamente positivo*.

Per ciò che riguarda l'invarianza di Poincaré, poiché le $w^{[n]}$ sono invarianti (covarianti se ci sono campi tensoriali o spinoriali), cioè

$$w^{[n]}(x_1, ..., x_n) = w^{[n]}(\Lambda x_1 + a, ..., \Lambda x_n + a), \tag{A.182}$$

si ha, nel termine n-esimo di W

$$\begin{aligned}(w^{[n]}(\Lambda x_1 + a, ..., \Lambda x_n + a),\ f^{[n]}(x_1, ..., x_n) = \\ = (w^{[n]}(x_1, ..., x_n),\ f^{[n]}(\Lambda^{-1}(x_1 - a), ..., \Lambda^{-1}(x_n - a))),\end{aligned} \tag{A.183}$$

da cui, essendo $f^{[n]}$ arbitraria

$$W(f_{\{\Lambda,a\}}) = W(f), \tag{A.184}$$

cioè W è *invariante di Poincaré.*

W ha l'ideale destro $\mathcal{I}$, che a sua volta contiene $\mathcal{I}_{sp}$ e $\mathcal{I}_{loc}$. Infatti vi sono in Ω delle funzioni f tali che

$$W(f \otimes f^+) = 0, \tag{A.185}$$

come si può facilmente vedere se si tien conto delle proprietà di supporto delle $w^{[n]}$ e prendendo delle $f \otimes f^+$ che abbiano supporto complementare rispetto alle $w^{[n]}$. Quindi, l'insieme $\mathcal{I}$, definito dalla (A.185) non è vuoto.

Il ragionamento fatto per dimostrare le proprietà w.5 e w.7 nella parte (a) della dimostrazione può essere invertito. Cioè, se le $w^{[n]}$ soddisfano le condizioni w.5 e w.7, allora esistono delle funzioni che appartengono a $\mathcal{I}_{sp}$ e $\mathcal{I}_{loc}$.

Esistono perciò in W gli ideali $\mathcal{I}$, $\mathcal{I}_{sp}$ e $\mathcal{I}_{loc}$ e il teorema è dimostrato. ∎

Appendice B

La trasformata di Laplace delle distribuzioni temperate.

E' ben noto che la forma integrale

$$g(x) = \int_0^{\infty} e^{ikx} f(k) dk, \tag{B.1}$$

dove f è, per esempio, una funzione di $S(\mathbb{R}^1)$, è il valore al contorno di una funzione olomorfa, cioè di

$$g(x+iy) = \int_0^{\infty} e^{ikx-ky} f(k) dk, \tag{B.2}$$

che è la trasformata di Laplace di $e^{ikx} f(x)$, ed è *olomorfa nel semipiano complesso superiore* $y > 0$ (n.b. il fattore e^{-ky} migliora la convergenza dell'integrale, che però può essere di per se stesso convergente come è il caso se $f \,\epsilon\, L_1(0, \infty)$.

Per la dimostrazione di questo fatto vedi per esempio [2], pag.163.

Si vuole qui generalizzare questo risultato in due diversi modi:

a)-passare al caso di più variabili complesse,

b)-estenderlo al caso in cui f è una distribuzione temperata.

L'estensione del dominio di definizione al caso $y > 0$ è detta *tubo*, nel quale le parti reali delle variabili complesse non sono ristrette, mentre le parti immaginarie appartengono ad un *cono*.

Le funzioni olomorfe, che sono trasformate di Laplace di distribuzioni temperate, che si annullano fuori dal cono, non sono arbitrarie, ma posseggono certe caratteristiche proprietà di limitatezza.

E' essenziale per la teoria dei campe avere queste condizioni di limitatezza ben esplicite.

Cominciamo con il richiamare la definizione e le proprietà principali delle funzioni olomorfe di più variabili complesse.

B.1 Funzioni olomorfe di più variabili

Sia $\mathbb{C}^n$ lo spazio vettoriale di n variabili complesse, una funzione definita nell'intorno del punto $w \,\epsilon\, \mathbb{C}^n$ si dice olomorfa in w se $\exists$ una serie

$$\sum_{k_1,...,k_n=0}^{\infty} a_{k_1,...,k_n}(z_1-w_1)^{k_1}...(z_n-w_n)^{k_n}, \tag{B.3}$$

che converge per z in un intorno di w ed è uguale a $f(z)$.

Se la (B.3) converge in z, allora converge assolutamente e uniformemente per ogni ξ tale che

$$\mid \xi_j - w_j \mid \leq R_j = \mid z_j - w_j \mid - \epsilon; \quad j = 1,...,n; \forall\, \epsilon, \tag{B.4}$$

regione di $\mathbb{C}^n$ che è chiamata *polidisco.*

Esiste un teorema di Weierstrass che ci dice che possiamo derivare tale serie termine a termine.

Usando questo risultato possiamo scrivere

$$a_{k_1,...,k_n} = \frac{1}{k_1!...k_n!} \left. \frac{\partial^{|k|} f(z_1,...,z_n)}{(\partial z_1)...(\partial z_n)} \right|_{z=w}, \tag{B.5}$$

(dove $\mid k \mid = k_1 + ... + k_n$).

Quindi, una funzione olomorfa è C^∞ e, in particolare, lo è nelle parti reali delle variabili z se si pone la parte immaginaria uguale a zero.

Si può comprendere la particolarità di ciò usando la formula integrale di Cauchy

$$f(z_1,...,z_n) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \oint .. \oint \frac{f(\xi_1,...,\xi_n)}{(\xi_1 - z_1)...(\xi_n - z_n)} d\xi_1...d\xi_n, \tag{B.6}$$

dove gli integrali sono estesi al polidisco $\mid \xi_j - w_j \mid \leq R_j, \quad j = 1,...,n.$

Questa formula è valida per $z \,\epsilon$ polidisco.

Da ciò segue la stima (vedi anche [7], pag.198, eq.5.9)

$$\frac{1}{k_1!...k_n!} \left| \frac{\partial^{|k|} f(z_1,...,z_n)}{(\partial z_1)^{k_1}...(\partial z_n)^{k_n}} \right| \leq \frac{C}{R_1^{k_1}...R_n^{k_n}} \tag{B.7}$$

(ciò segue anche dal fatto che, se la serie (B.3) converge, il termine generico è limitato

$$\mid a_{k_1,...k_n} \mid\mid z_1 - w_1 \mid^{k_1} ... \mid z_n - w_n \mid^{k_n} < M, \tag{B.8}$$

ovvero, per $z - w = R$

$$| a_{k_1,...k_n} |< \frac{M}{R_1^{k_1}...R_n^{k_n}}. \tag{B.9}$$

Questa uguaglianza è essenzialmente ciò che distingue una funzione olomorfa da una funzione C^∞).

Ci sono *due* principi importanti che governano il comportamento delle funzioni olomorfe di una variabile, che sono validi anche nel caso di più variabili: il principio di continuazione analitica e la determinazione di una funzione a partire dai valori assegnati in un intorno reale.

In accordo al primo possiamo estendere il dominio di una funzione olomorfa in modo unico mediante polidischi sovrapponentisi, tenendo conto di eventuali non uniformità e quindi di punti di diramazione (superfici di Riemann). In nessuna delle applicazioni che ci interessano ciò sarà necessario.

Il secondo principio ha origine dal fatto che tutti i coefficienti di una seria di potenze di una funzione olomorfa possono essere ottenuti calcolando le derivate (B.5) nella direzione dell'asse reale. Quindi, una funzione olomorfa è determinata in tutto un intorno di $\mathbb{C}^n$ dai suoi valori in un intorno reale, cioè di un'aperto di $\mathbb{R}^n$.

Un esempio importante si ha nel caso di una trasformazione sotto $L_+^\uparrow$, che viene estesa alle trasformazioni del gruppo di Lorentz complesso.

Ciò è possibile una volta che si siano determinati dei parametri $\lambda_1, ..., \lambda_6$, reali e indipendenti per il gruppo reale e complessi e indipendenti per il gruppo complesso.

Basta ottenere ciò in un intorno dell'identità, perchè poi le proprietà di gruppo permetteranno di estendere il risultato a tutto il gruppo.

Nell'applicazione pratica ci saranno due tipi di funzioni

$$F(\Lambda\xi_1, ..., \Lambda\xi_n) \tag{B.10}$$

e

$$S(\Lambda)_{\alpha,\beta}, \tag{B.11}$$

dove F è una funzione olomorfa negli n argomenti e $S(\Lambda)$ è una delle rappresentazioni irriducibili $\mathcal{D}^{(j/2,\, k/2)}$ di $SL(2,C)$,

Poichè una funzione olomorfa di una funzione olomorfa è anch'essa olomorfa, la prima funzione sarà del tipo voluto se si ha una opportuna parametrizzazione di Λ. Ciò è anche vero per la seconda, poiché la rappresentazione $\mathcal{D}(\Lambda)$ è un polinomio in Λ, cosicchè, con una opportuna parametrizzazione di Λ si ha il risultato voluto.

Un'appropriata parametrizzazione di Λ si ha passando ai 6 generatori infinitesimi $\Sigma_{\mu\nu}$, antisimmetrici in μ e ν, in un intorno dell'identità del gruppo.

Vale la pena citare il teorema ″edge of the wedge″, che generalizza al caso di più variabili complesse il principio di identità per le funzioni di una variabile complessa.

Bisogna premettere la definizione di *cono*:

sia $\mathcal{O}$ un aperto di $\mathbb{C}^n$, che contiene un intorno reale E, aperto in $\mathbb{R}^n$. Un cono convesso con vertice nell'origine di $\mathbb{R}^n$ è un insieme di punti di $\mathbb{R}^n$ $\mathcal{C}$ tali che, se $x \,\epsilon\, \mathcal{C}$ anche $\lambda x \,\epsilon\, \mathcal{C}$, $\forall \lambda > 0$.

Teorema *edge of the wedge.*

″ Sia F_1 una funzione olomorfa in

$$D_1 = (\mathbb{R}^n + i\mathcal{C}) \cap \mathcal{O} \tag{B.12}$$

e F_2 in

$$D_2 = (\mathbb{R}^n - i\mathcal{C}) \cap \mathcal{O}. \tag{B.13}$$

Supponiamo inoltre che esistano i limiti

$$\lim_{y \to 0,\, y \,\epsilon\, \mathcal{C}} F_1(x + iy) = F_1(x) \tag{B.14}$$

e

$$\lim_{y \to 0,\, y \,\epsilon\, \mathcal{C}} F_2(x - iy) = F_2(x) \tag{B.15}$$

e siano continui e uguali su E, con limite uniforme su E.

Allora esiste un intorno complesso N di E e una funzione olomorfa G che coincide con F_1 in D_1 e con F_2 in D_2 ed è olomorfa in N. N è indipendente da F_1 e F_2, pur dipendendo da E, $\mathcal{C}$ e $\mathcal{O}$ ″.

(Non diamo la dimostrazione di questo teorema, che è complicata e sostamzialmente tecnica. Vedi, per esempio [6], pag.81).

Questo teorema si estende al caso distribuzionale. Si può cioè sostituire alle (B.14) e (B.15), restando il resto invariato

$$\lim_{y \to 0,\, y \,\epsilon\, \mathcal{C}} \int F_1(x + iy) f(x) dx = T(f) \tag{B.16}$$

e

$$\lim_{y \to 0,\, y \,\epsilon\, \mathcal{C}} \int F_2(x - iy) f(x) dx = T(f), \tag{B.17}$$

dove T è una distribuzione e f una funzione test (vedi, per esempio, [6], pag.82).

B.2 La trasformata di Laplace delle distribuzioni temperate

Riprendendo la discussione sulla trasformata di Laplace di una distribuzione, osserviamo che la sua definizione può essere ricondotta a quella della trasformata di Fourier nel seguente modo

$$\mathcal{L}(f)(p + iq) = \mathcal{F}(e^{-qx} f(x))(p), \tag{B.18}$$

dove abbiamo definito

$$\mathcal{F}(f(x)) = \int_{\infty}^{\infty} e^{ip\cdot x} f(x). \tag{B.19}$$

La (B.18) si legge più chiaramente come

$$\int_{0}^{\infty} e^{-qx} f(x)dx, \tag{B.20}$$

estesa a valori complessi di $q \to q - ip$, ovvero

$$\int_{0}^{\infty} e^{-(q-ip)x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx}(e^{-qx} f(x))dx, \tag{B.21}$$

cioè è uguale alla trasformata di Fourier della funzione $e^{-qx}f(x)$, dove $f(x)$ ha supporto in $x > 0$.

La (B.18) definisce la trasformata di Laplace $\tilde{f}(p+iq)$ di una distribuzione $f \,\epsilon\, \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, data dal primo membro della (B.18), alla quale è associato l'insieme

$$\Gamma(f) = \{q \,\epsilon\, \mathbb{R}^n : e^{-qx} f(x) \,\epsilon\, \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \text{rispetto a}\, x\}. \tag{B.22}$$

La $\tilde{f}$ è una funzione di p e dipende dal parametro $q \,\epsilon\, \Gamma(f)$.

Quest'ultima condizione su q è la condizione cruciale per l'esistenza della trasformata di Fourier e per la corrispondenza 1-1 tra le distribuzioni e le loro trasformate di Laplace.

Naturalmente la trasformata di Fourier è definita nel modo consueto per una distribuzione; cioè, se $\tilde{f}$ è la trasformata di Fourier della distribuzione f allora

$$(\tilde{f},\, \phi) = (f,\, \tilde{\phi}), \tag{B.23}$$

dove $\phi \,\epsilon\, \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $\tilde{\phi}$ è la sua trasformata di Fourier.

In realtà potremmo dare la definizione (B.18) per una distribuzione $f \,\epsilon\, \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, dove $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ è uno spazio che contiene $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, purchè valga la condizione $q \,\epsilon\, \Gamma(f)$.

Il vantaggio della definizione data è però che, limitandoci alle distribuzioni temperate, si avrà una corrispondenza 1-1 tra distribuzioni e loro trasformate.

Come si è visto la proprietà importante della trasformata di Laplace è la sua analiticità.

Diamo qui il principale risultato riguardo a questa proprietà senza dimostrazione, che è estremamente tecnica e che si può trovare per esempio in [6], Theorem 2-10, pag. 62, o in [7], Corollary B.9, pag. 99. Questo risultato è adattato al caso che ci interessa, e cioè al caso in cui l'insieme $\Gamma(f)$ è dettato dalla metrica di Minkowski, che determina i valori di q per i quali il fattore $\exp(-(q \cdot x))$, dove $(\,\cdot\,)$ è il prodotto scalare di Minkowski, è un fattore di convergenza per l'integrazione a secondo membro della (B.18).

Dobbiamo premettere alcune nozioni.

Il tipo di distribuzioni che ci interessa è del tipo ritardato, cioè distribuzioni con supporto nel *cono futuro*, definito da

$$V^{+} = \{x \,\epsilon\, \mathbb{M} : x^{\circ} \;>\mid x \mid \equiv \sqrt{\vec{x}^2}\}, \tag{B.24}$$

dove $\mathbb{M}$ è lo spazio di Minkowski, $x = (x^\circ, \vec{x}) \,\epsilon\, \mathbb{M}$ e il prodotto scalare di Minkowski viene indicato con $(x \cdot y)$.

Si definisce anche il *cono futuro chiuso*

$$\overline{V}^+ = \{x \,\epsilon\, \mathbb{M} : x^\circ \ \geq\mid x \mid\}. \tag{B.25}$$

Queste definizioni sono date per lo spazio $\mathbb{M}$. Si possono però estendere con un'ovvia generalizzazione ad uno spazio $\mathbb{M}^n$.

Si definisce poi *tubo futuro* l'insieme di punti

$$T_n^+ = \mathbb{M}^n + i(V^+)^n. \tag{B.26}$$

E' importante notare che T_n^+ non contiene punti reali. Cioè in V^+ non vi è il punto $x^\circ = 0$, $\vec{x} = 0$.

Si ha allora il seguente risultato ([7]), Corollario B.9, pag. 99)

> $''$ la trasformata di Laplace di una distribuzione temperata $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{M}^n)$, con supporto in $(\overline{V}^+)^n$, è una funzione olomorfa nel tubo futuro $T_n^+ = \mathbb{M}^n + i(V^+)^n$ e soddisfa la seguente stima
>
> $$\mid (\mathcal{L}f) \leq A \frac{(1+\mid k \mid)^m}{\min\limits_j (q_j^2)^l}, \tag{B.27}$$
>
> dove A, m, l sono numeri non negativi che dipendono da f e $k = p + iq$.
>
> Inversamente, ogni funzione olomorfa che soddisfi nel tupo T_n^+ la stima precedente è la trasformata di Laplace di una distribuzione di $\mathcal{S}'(\mathbb{M}^n)$, con supporto in $(\overline{V}^+)^n.''$

Non deve stupire che la trasformata di Laplace di una distribuzione possa essere una *funzione*. Per esempio, la trasformata di Laplace della delta di Dirac $\delta(\xi - \xi_\circ)$ è data da

$$\begin{gathered}
= (\mathcal{L}(\delta(dx - x_\circ))(p + iq), \phi(p)) = \\
= (\mathcal{F}(e^{-qx}\delta(x - x_\circ))(p), \phi(p)) = \\
= (e^{-qx}\delta(x - x_\circ), \mathcal{F}(\phi)(x)) = \\
= e^{-qx_\circ}\mathcal{F}(\phi)(x_\circ) = \\
= e^{-qx_\circ} \int^{ipx_\circ} \phi(p)dp = \\
= \int e^{i(p+iq)x_\circ}\phi(p)dp = (e^{i(p+iq)}, \phi(p))
\end{gathered}$$

da cui

$$\mathcal{L}(\delta(x - x_\circ))(p + iq) = e^{i(p+iq)x_\circ}, \tag{B.28}$$

che è una *funzione* di $p + iq$.

Per una distribuzione $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, tale che $q = 0$ è un punto della frontiera del dominio nel quale $e^{-(q\cdot x)}f(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, è interessante sapere se esise il limite in senso distribuzionale della trasformata di Laplace $\mathcal{L}(f)(p+iq)$, intesa come distribuzione rispetto a p, con q come parametro, per $q \to 0$.

A questa questione risponde il seguente teorema (Vedi [7], Theorem B.11, pag.101):

Teorema

> $''$ Sia $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $\Gamma(f)$ l'insieme dei punti $q \in \mathbb{R}^n$, per i quali è $e^{-(q\cdot x)}f(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, e sia $q = 0$ un punto di frontiera di $\Gamma(f)$. Allora il $\lim\limits_{q\to 0} \mathcal{L}(f)(p+iq)$ esiste in $\mathcal{S}'$ ed è uguale a $\mathcal{F}(f(x))(p)''$.

Per la discussione delle funzioni di Schwinger del Capitolo 6 sarà utile anche il seguente risultato (vedi, per esempio, [7], Proposition B.15, pag.106):

$''$ Data una funzione $h(k)$, $k = p + iq$, su $i\mathbb{R}^n$, essa è la restrizione all'insieme dei punti immaginari puri $i\mathbb{R}^n_+$, della trasformata di Laplace di una distribuzione $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, con supporto in $\overline{\mathbb{R}^n_+}$, se si ha:

$$(h,\, u) = (f,\, \hat{u}), \tag{B.29}$$

dove $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n_+)$ e

$$\hat{u}(x) = \int_{\mathbb{R}^n_+} e^{-(x\cdot q)}u(q)d^nq, \quad x \in \overline{\mathbb{R}^n_+}, \tag{B.30}$$

e dove il funzionale lineare su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ $(h,\, u)$, definito da

$$(h,\, u) = \int h(iq)u(q)d^nq. \tag{B.31}$$

In queste formule $\mathbb{R}^n_+$ e $\overline{\mathbb{R}^n_+}$ sono lo spazio delle variabili $(x_1, ..., x_n)$ positive e non negative rispettivamente.

La corrispondenza così stabilita $f \to h$ è **biunivoca**.$''$

Appendice C

Trasformazioni di Lorentz complesse, punti di Jost e punti Euclidei non eccezionali.

Per estendere ulteriormente il dominio di analiticità delle funzioni di Wightman $\{w\}$ rispetto al tubo inferiore $\mathcal{T}_n^-$ (o T_{n-1}^- per le funzioni $\{W\}$), possiamo seguire l'idea di Bargmann, Hall e Wightman di utilizzare le trasformazioni di Lorentz complesse.

Il gruppo di Lorentz complesso $L(\mathbb{C})$ si definisce come il gruppo delle trasformazioni lineari omogenee dello spazio 4-dimensionale complesso di Minkowski, che lasciano invariata la forma quadratica

$$zw = z^\circ w^\circ - \vec{z} \cdot \vec{w} \equiv g_{\lambda\mu} z^\lambda w^\mu, \tag{C.1}$$

ovvero il gruppo delle matrici 4×4 complesse, che soddisfano la condizione di pseudo-ortogonalità

$$\Lambda^T g \Lambda = g, \tag{C.2}$$

dove g è la metrica dello spazio di Minkowski.

$L(\mathbb{C})$ ha due componenti connesse $L_\pm$, corrispondenti ai due segni $det(\Lambda) = \pm 1$, delle quali L_+ è connessa all'identità. Questo gruppo è isomorfo al gruppo $O(4, \mathbb{C})$ delle trasformazioni ortogonali complesse dello spazio 4-dimensionale Euclideo. Questo isomorfismo sarà importante quando tratteremo delle funzioni di Schwinger, in Sezione 6.

$L_+(\mathbb{C})$ contiene la riflessione $PT(z \to -z)$, che, essendo $L_+(\mathbb{C})$ connesso, può essere raggiunta mediante una linea continua di trasformazioni di $L_+(\mathbb{C})$ a partire dall'identità; esplicitamente si ha che

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & 0 & i\sin\alpha \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ i\sin\alpha & 0 & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}, \tag{C.3}$$

ha $det(\Lambda) = 1$, ma è tale che $\Lambda(0) = 1$ e $\Lambda(\pi) = -1$. Nel gruppo di Lorentz reale, queste due trasformazioni non sono connesse.

Esiste un'omomorfismo analogo a quello tra $SL(2\mathbb{C})$ e il gruppo di Lorentz proprio $L_+^\uparrow$. Se infatti poniamo

$$\underbrace{\Lambda(\Lambda-1,\Lambda_r)z} = \Lambda_l \underline{z} \Lambda_r^T; \quad \overbrace{\Lambda(\Lambda_l,\Lambda_r)z} = (\Lambda_r^T)^{-1}\tilde{z}\Lambda_r^{-1}, \tag{C.4}$$

dove $\Lambda_{r,l}\,\epsilon\, SL(2\mathbb{C})$ e

$$\underbrace{z} = \begin{pmatrix} z^\circ + z^3 & z^1 - iz^2 \\ z^1 + iz^2 & z^\circ - z^3 \end{pmatrix}, \quad \overbrace{z} = \begin{pmatrix} z^\circ - z^3 & -z^1 + -iz^2 \\ -z^1 - iz^2 & z^\circ + -z^3 \end{pmatrix}, \tag{C.5}$$

e dove $det(\underbrace{z}) = z^2$.

E' evidente che la trasformazione conserva $z^2 = (z^\circ)^2 - \vec{z}^2$ poiché $det(\Lambda_{l,r}) = 1$ e quindi $\Lambda(\Lambda_l,\Lambda_r)$ appartiene a $SL(2\mathbb{C})$. Ma $SL(2\mathbb{C})$ è connesso e perciò si ha $det(\Lambda(\Lambda_l,\Lambda_r)) = 1$, essendo Λ un elemento di $O(3,1)$ con $det(\Lambda) = 1$. Quindi $\Lambda(\Lambda_l,\Lambda_r)\,\epsilon\, L_+(\mathbb{C})$.

Si ha perciò l'omomorfismo

$$SL(2\mathbb{C}) \times SL(2\mathbb{C}) \longrightarrow L_+(\mathbb{C}) \tag{C.6}$$

con

$$(\Lambda_l,\Lambda_r) \longrightarrow \Lambda(\Lambda_l,\Lambda_r). \tag{C.7}$$

Questo omomorfismo applica $SL(2\mathbb{C}) \times SL(2\mathbb{C})$ su tutto l'intero gruppo $L_+(\mathbb{C})$ e il suo nucleo è $\{\pm 1\}$.

Quindi $SL(2\mathbb{C}) \times SL(2\mathbb{C})$ è il ricoprimento universale di $L_+(\mathbb{C})$, essendo connesso e semplicemente connesso. Come gruppo di Lie ha dimensione (complessa) 6.

Nel caso $(\Lambda_l,\Lambda_r) \to (\Lambda,\overline{\Lambda})$ (dove $\overline{\Lambda}$ è la coniugata di Λ) corrisponde ad una trasformazione *reale* di Lorentz. Infatti, l'omomorfismo

$$SL(2\mathbb{C}) \longrightarrow L_+^\uparrow \tag{C.8}$$

si realizza con

$$\underline{\Lambda x} = \underline{\Lambda}\ \underline{x}\ \underline{\Lambda}^\dagger, \tag{C.9}$$

dove

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x^\circ + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^\circ - x^3 \end{pmatrix} \tag{C.10}$$

Le rappresentazioni finito-dimensionali di $SL(2\mathbb{C})\times SL(2\mathbb{C})$ sono classificate, come nel caso del gruppo $SL(2\mathbb{C})$, da due numeri interi o semi-interi (j,k) e sono date dalla seguente azione sullo spazio dei multi-spinori

$$(\mathcal{D}^{(j,k)}(\Lambda_l,\Lambda_r)\psi)^{\alpha_1,\dots,\alpha_{2j};\beta'_1,\dots,\beta'_{2k}} = \sum_{\gamma_1,\dots,\gamma_{2j};\delta'_1,\dots,\delta'_{2k}} (\prod_s^{2j}(\Lambda_l)^{\alpha_s}_{\gamma_s})(\prod_t^{2k}(\Lambda_r)^{\beta'_t}_{\delta'_t})\psi^{\gamma_1,\dots,\gamma_{2j};\delta'_1,\dots,\delta'_{2k}}, \tag{C.11}$$

dove la ψ e la sua trasformata sono simmetriche nei due gruppi di indici (senza apice e con apice) separatamente.

Per $(\Lambda_l,\Lambda_r)\to(\Lambda,\overline{\Lambda})$ si hanno le rappresentazioni di $SL(2\mathbb{C})$.

L'estensione del gruppo di Lorentz al gruppo di Lorentz complesso permette la dimostrazione del seguente teorema

Teorema (Bargmann-Hall-Wightman)

> $''$ Ogni funzione analitica $f(\zeta)$, covariante rispetto al gruppo $L^\uparrow_+$ nel tubo T^-_n, ha un'unica continuazione analitica nel *tubo esteso* T_n
>
> $$T_n = \bigcup_{\Lambda\in L_+(\mathbb{C})} \Lambda T^-_n \tag{C.12}$$
>
> ed è covariante in T_n rispetto a $L_+(\mathbb{C})$, cioè
>
> $$f(\Lambda(\Lambda_l,\Lambda_r)\zeta) = V(\Lambda_l,\Lambda_r)f(\zeta), \tag{C.13}$$
>
> per $\zeta\in T_n$, con $\Lambda_l,\Lambda_r\in SL(2\mathbb{C})$ e dove $V(\Lambda_l,\Lambda_r)$ è una rappresentazione di $SL(2\mathbb{C})\times SL(2\mathbb{C})$ $''$.

La dimostrazione è tecnica e la ometteremo (vedi [7], Theorem 9.1, pag.362). Essa è essenzialmente basata sulla possibilità di considerare la trasformata sotto il gruppo complesso $L_+(\mathbb{C})$ della funzione $f(\zeta)$ anche come funzione analitica dei parametri del gruppo, cioè come una funzione $f(\zeta,\Lambda_l,\Lambda_r)$. Poichè questa funzione, nel caso del gruppo di Lorentz reale, ovvero nel caso $f(\zeta,\Lambda,\overline{\Lambda})$ è covariante e olomorfa per ipotesi e poichè il gruppo di Lorentz reale si può considerare una sezione reale di $L_+(\mathbb{C})$, come spazio topologico parametrizzato dai parametri del gruppo, per il principio d'identità delle funzioni olomorfe (di più variabili) si ha che la $f(\zeta)$ si può estendere analiticamente a tutto il tubo esteso T_n.

Questo teorema, applicato alle funzioni $w(z_1,...,z_n)=W(\zeta_1,...,\zeta_{n-1})$ di Wightman, permette di affermare che queste funzioni sono analitiche nelle variabili $(z_1,...,z_n)$, nel *tubo esteso*

$$\mathcal{T}_n = \bigcup_{\Lambda\in L_+(\mathbb{C})} \Lambda\mathcal{T}^-_n. \tag{C.14}$$

L'interesse di questo risultato risiede nel fatto che, sebbene in T^-_n non vi siano punti reali, come abbiamo notato nell'Appendice **B.2**, viceversa vi sono punti reali in T_n. Da ciò segue che le funzioni di Wightman, che come si è visto sono valori limite di funzioni olomorfe, sono esse stesse funzioni analitiche in un qualche dominio reale delle variabili spazio-temporali.

Appendice D

Dimostrazioni

D.1 Dimostrazione del Teorema 9.

L'applicazione dallo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{E}^{n-1})$, con supporto nei punti dell'insieme (β),

$$\xi_j \in \mathbb{E}^{n-1}, \quad \xi_j^4 < 0, \quad j = 1, ...n-1, \qquad (\beta)$$

su di un sottoinsieme denso dello spazio $\mathcal{S}(\mathbb{M}^{n-1})$, con

$$q_j \in \mathbb{M}^{n-1}, \quad q_j^0 \geq 0, \quad j = 1, ..., n-1, \qquad (\alpha)$$

definita dall'equazione (6.31):

$$\hat{u}(q_1, ..., q_{n-1}) = \int e^{\sum_{j=1}^{n-1}(\xi_j^4 q_j^0 + i\vec{\xi}_j \cdot \vec{q}_j)} u(\xi_1, ..., \xi_{n-1}) d^{n-1}\xi, \tag{D.1}$$

è lineare e continua. Infatti è la restrizione a valori puramente immaginari di una funzione $\hat{u}(k)$, con $k_j^\circ = p_j^\circ + iq_j^\circ$, cioè della trasformata di Fpurier di una funzione rapidamente decrescente. Come tale, è un'applicazione biunivoca e bicontinua dalli spazio $\mathcal{S}$ in se stesso, vedi, per esempio, [14], Lemma a pag. 107.

Dalla biunivocità segue che, se $\hat{u} = 0$ anche $u = 0$, quindi il nucleo dell'applicazione è l'origine.

Per dimostrare che applica l'insieme $\mathcal{S}(\mathbb{E}^{n-1})$, in un insieme denso, basterà dimostrare che, se $f \in \mathbb{S}'(\mathbb{R}^n_+)$ è tale che $(f, \hat{u}) = 0$, ne segue $f \equiv 0$, perché allora l'insieme delle $\hat{u}$ è tale da sottendere tutto l'insieme di definizione delle distribuzioni di $\mathbb{S}'(\mathbb{E}^{n-1})$.

Ora

$$(f, \hat{u}) = (\hat{f}, u) = 0, \tag{D.2}$$

dove $\hat{f}(\xi_1, ..., \xi_{n-1})$ è la trasformata di Fourier della distribuzione temperata f. Ma ora u nella seconda espressione è arbitraria e ciò significa che $\hat{f} = 0$. Essendo la trasformata di Fourier biunivoca, ne segue che anche $f = 0$.

D.2 Dimostrazione dell'equazione (6.46)

Il risultato (6.46) e (6.47) (vedi [7], Ex.9.18, pag. 371) si dimostra considerando $\frac{n(n-1)}{2}$ 4-vettori unitari $e_{i,j}$, con $i < j$, e definendo una funzione di questi 4-vettori

$$f(e_{i,j}) = \sup_{s\in\mathbb{E}, |s|=1} \min_{i<j} \mid (s \cdot e_{i,j}) \mid . \tag{D.3}$$

Questa funzione è strettamente positiva e continua, come ore verificheremo.

Infatti, consideriamo $N = \frac{n(n-1)}{2}$ successioni $\{u_k^m\}$, $k = 1, ..., N$ e $m = 1, 2, ...$, convergenti ai limiti $\{u_1, ...u_N\}$.

Possiamo allora scegliere un unico valore $\varepsilon > 0$, tale che tutti gli intervalli $(u_k - \varepsilon, u_k + \varepsilon)$ siano disgiunti e si possono determinare dei valori degli indici delle successioni $m_1, m_2, ..., m_N$ tali che, per $m'_1 > m_1, ..., m'_N > m_N$ si abbia $\mid u_k^{m'_k} - u_k \mid < \varepsilon$, dove $k = 1, ..., N$.

Il minimo dei valori $\{u_1^m, ..., u_N^m\}$, per un dato m, pari al massimo degli indici precedenti, si troverà in un certo intervallo e in tale intervallo resterà per qualsiasi $m' > m$. La successione di questi minimi convergerà necessariamente ad un limite, che sarà il minimo dei limiti $\{u_1, ..., u_N\}$.

Quindi si ha il risultato

$$\lim_{m\to\infty} \min_k u_k^m = \min_k \lim_{m\to\infty} u_k^m. \tag{D.4}$$

Questo risultato si può applicare alla funzione f (il *sup* opera solo su s), che quindi è continua e, come già detto, è strettamente positiva. Oltre a ciò il suo dominio di definizione è *compatto* (sia il vettore s che i vettori $e_{i,j} = \frac{x_i - x_j}{|x_i - x_j|}$ sono unitari e quindi $(s \cdot e_{i,j})$ è limitato) e quindi si ha $f(e_{i,j}) \geq c > 0$, per una qualche costante c.

Bibliografia

[1] O. Bratteli and D.W.Robinson, ″ Algebras and Quantum Statistical Mechanics I″, Springer, 1979.

[2] I.Stakgold, ″Green's Functions and Boundary Value Problems″, John Wiley & Sons, 1979.

[3] W.Rudin, ″Functional Analysis″, Mc Graw-Hill, 1991.

[4] Vedi per esempio [1], pag. 56, theor. 2.3.16.

[5] A.S.Wightman, ″La théorie quantique locale et la théorie quantique des champs″, Ann.Inst.Henri Poincaré, Vol. I, $n°$ 4, 1964, p.403-420. Vedi anche [7], Exercise 8.7, pag.336 e Ex. 8.8, pag. 337.

[6] R.F.Streater and A.S.Wightman, ″PCT, spin and statistics, and all that″, Benjamin, New York-Amsterdam, second ed. 1968.

[7] N.N.Bogoliubov, A.A.Logunov, A.I.Oksak e I.T.Todorov, ″General Principles of Quantum Field Theory″, Kluwer Acad. Pub. 1990.

[8] R.Haag, ″Local Quantum Physics″, Springer-Verlag, 1992.

[9] Gordon N.Fleming, ″Reeh-Schlieder Meets Newton-Wigner″, gnf1@earthlink.net

[10] K.Osterwalder and R.Schrader, ″Axioms for Euclidean Green's functions″, Commun.math.Phys., **31**, 83-112 (1973); ″Axioms for Euclidean Green's functions II″, Commun.marh.Phys., **42**, 281-305 (1975).

[11] M.Reed and B.Simon, ″Methods of Modern Mathematical Physics″, Academic Press, 1975, Vol. II.

[12] A.H.Zemanian, ″Distribution Theory and Transformn Analysis″, McGraw-Hill Book Company, 1965.

[13] M.Reed and B.Simon, ″Methods of Modern Mathematical Physics″, Academic Press, 1975, Vol. I.

[14] V.S.Vladimirov, ″Le distribuzioni nella fisica matematica″, Edizioni Mir, 1981.

[15] Res Jost, ″The General Theory of Quantized Fields″, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1965.

[16] M.Reed and B.Simon, ″Methods of modern mathematical physics″, II, Academic Press, 1975.

[17] A.U.Schmidt, ″Mathematical problems of gauge quantum field theory: a survey of the Schwinger model″, Universitatis Iagellonicae acta mathematica, fasciculus XXXIV, hep-th/9707166 4 Mar 2002.

[18] D.Buchholz, ″Current trends in axiomatic quantum theory″, hep-th/9811233 v2 3 Dec 1998.