

Università degli Studi di Firenze
Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Fisica

Appunti di relatività generale

Anno accademico 2008-2009

Indice

1	Relatività ristretta	4
1.1	Le trasformazioni di Lorentz	5
1.1.1	Contraazione dei tempi e dilatazione delle lunghezze	10
1.1.2	Proprietà delle trasformazioni di Lorentz	11
1.1.3	Struttura causale dello spazio-tempo	13
1.2	Vettori, forme, tensori	16
1.2.1	Vettori	16
1.2.2	Forme	16
1.2.3	Tensori	17
1.3	Cinematica relativistica	18
1.3.1	Il tempo proprio	18
1.3.2	La quadrivelocità	19
1.3.3	La quadriaccelerazione	20
1.4	Dinamica relativistica	20
1.4.1	La quadriforza e il quadrimomento	20
1.5	La particella libera relativistica	22
1.5.1	Approccio lagrangiano	22
1.5.2	Approccio hamiltoniano	23
1.5.3	Il limite di massa nulla	25
1.6	Teoria dei campi classica: l'elettromagnetismo	26
1.6.1	Invarianza di gauge	27
1.6.2	Conteggio dei gradi di libertà	29
1.6.3	Equazioni di Maxwell in forma covariante	30
1.6.4	Il tensore di Maxwell	33
1.6.5	La forza di Lorentz	37
1.6.6	Aspetti generali dei sistemi relativistici	39
1.6.7	Simmetrie dell'azione e teorema di Noether	41
1.6.8	Dualità elettromagnetica	52
1.7	Esercizi	59
2	Geometria differenziale	62
2.1	Varietà differenziabili	62
2.1.1	Applicazioni tra varietà	63
2.2	Vettori e campi vettoriali	63
2.3	Funzionali lineari e 1-forme	66
2.4	Tensori e campi tensoriali	66

2.5	Forme differenziali	67
2.5.1	Derivata esterna	70
2.5.2	Derivata interna	71
2.6	Pull-back e push-forward	72
2.7	Diffeomorfismi ed embedding	73
2.7.1	Mettrica indotta e lunghezza di una curva	73
2.8	Integrazione su varietà	75
2.8.1	Partizione dell'unità	76
2.8.2	Forma-volume	77
2.8.3	Operatore $*$ di Hodge	78
2.8.4	Equazioni di Maxwell e forme differenziali: il codifferenziale δ	79
2.9	Derivata covariante e trasporto parallelo	80
2.9.1	Curve autoparallele	83
2.9.2	Simboli di Christoffel	84
2.9.3	Geodetiche	86
2.10	Torsione e curvatura	87
2.10.1	Interpretazione geometrica	87
2.10.2	Le identità di Bianchi	89
2.10.3	Altre proprietà del tensore di curvatura	90
2.10.4	Tensore di Ricci e scalare di curvatura	91
2.10.5	Conteggio delle componenti del Riemann	92
2.11	Esercizi	93
3	Relatività generale	95
3.1	Il principio di equivalenza	95
3.1.1	Il redshift gravitazionale	96
3.1.2	Formulazione geometrica del principio di equivalenza: le coordinate normali	99
3.2	Campo gravitazionale e curvatura	102
3.2.1	L'equazione di deviazione geodetica	104
3.3	Le equazioni di campo di Einstein	105
3.3.1	L'azione di Hilbert	108
3.3.2	Termini di bordo e curvatura estrinseca	110
3.3.3	Il limite classico	111
3.3.4	Il tensore energia-impulso della materia	112
3.3.5	L'accoppiamento minimale	114
3.4	Teoria linearizzata	117
3.4.1	La gauge armonica	120
3.4.2	Conteggio dei gradi di libertà	122
3.4.3	Emissione di onde gravitazionali e momento di quadrupolo	123
3.4.4	Energia e impulso di un sistema gravitazionale	127
3.5	Simmetrie e soluzioni esatte	130
3.5.1	Simmetrie della metrica: i campi di Killing	130
3.5.2	Flusso di un campo vettoriale	130
3.5.3	Trasporto di Lie	131
3.5.4	Simmetria sferica: la metrica di Schwarzschild	135
3.6	I test della relatività generale	142
3.6.1	1° test: precessione del perielio di Mercurio	142

3.6.2	2° test: deviazione dei raggi di luce	143
3.6.3	3° test: emissione di quadrupolo	145
3.7	Esercizi	145

Capitolo 1

Relatività ristretta

Tra la fine dell'800 e gli inizi del 900 alcuni esperimenti (tra cui quello di Michelson e Morley) indussero Einstein a formulare due postulati:

1. **Postulato di relatività:** *le leggi della "fisica" sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento inerziali*, in altre parole non esiste un sistema di riferimento inerziale privilegiato.
2. **Esistenza di una velocità limite:** La velocità della luce in un sistema di riferimento inerziale è una costante indipendente dalla sorgente che la emette.

La formulazione del primo postulato è equivalente a quella che si dà in relatività galileiana, anche se in tal caso si parla di leggi della *meccanica*. Abbiamo messo "fisica" tra virgolette perchè al momento della formulazione del postulato la gravità ne è esclusa, quindi sono incluse soltanto le leggi dell'elettromagnetismo, delle interazioni forti e delle interazioni deboli.

In realtà stiamo nascondendo una parte del postulato, una sorta di *postulato 0*, che recita più o meno così: *lo spazio fisico in un sistema di riferimento inerziale è omogeneo, isotropo, e la geometria che descrive lo spazio è quella euclidea*. Senza questa precisazione non sapremmo neanche calcolare la distanza tra due punti, perchè il teorema di Pitagora non sarebbe definito. Inoltre, il tempo è omogeneo, ma non isotropo (il secondo principio della termodinamica stabilisce una "freccia" del tempo), e sebbene le leggi della meccanica e dell'elettromagnetismo siano invarianti sotto time reversal, bisogna fare comunque attenzione ad includere l'isotropia del tempo tra le ipotesi del postulato.

I sistemi di riferimento inerziali, in relatività galileiana, sono quelli per cui valgono le tre leggi della dinamica, ma questa definizione non funziona in relatività speciale: ad esempio il terzo principio della dinamica, il principio di azione e reazione, è incompatibile con il secondo postulato che vieta le interazioni istantanee tra due corpi. Con queste nuove definizioni, un sistema di riferimento inerziale è un sistema in cui vale il primo principio della dinamica: un corpo non soggetto a forze o sta fermo o si muove di moto rettilineo uniforme. Da questa definizione concludiamo che i sistemi di riferimento inerziali possono muoversi soltanto di moto relativo rettilineo uniforme.

La richiesta di omogeneità dello spazio implica l'ipotesi che dal punto di vista delle misurazioni i punti dello spazio sono indistinguibili, cioè la fisica è invariante per traslazioni. In linguaggio matematico, esiste una isometria che connette due punti qualsiasi dello spazio.

La richiesta di isotropia, viceversa, rappresenta l'ipotesi che le misurazioni non dipendano dall'orientazione del nostro sistema di riferimento, cioè le rotazioni devono essere una simmetria delle leggi della fisica: dovremo usare oggetti con proprietà "buone" di trasformazione sotto rotazioni, come scalari, vettori, tensori.

Infine, l'omogeneità del tempo implica che le misure non devono dipendere da come scegliamo l'origine dei tempi.

Il secondo postulato è una riformulazione teoretica dell'esperimento di Michelson e Morley. I due scienziati confrontarono due sistemi di riferimento con velocità relativa di circa 30Km/s , ma adesso la verifica sperimentale del postulato raggiunge precisioni molto maggiori, sfruttando ad esempio il decadimento del π^0 in due fotoni.

1.1 Le trasformazioni di Lorentz

Con questi due postulati come ipotesi, possiamo provare a dedurre la forma delle trasformazioni di Lorentz. Supponiamo di avere due sistemi di riferimento inerziali, K e K' , con coordinate rispettivamente x, y, z, t e x', y', z', t' , e in moto relativo tra loro con velocità v :

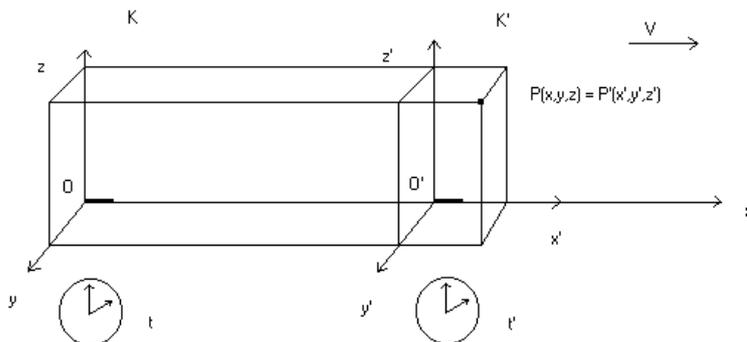


Figura 1.1: Sistemi di riferimento in moto relativo

Sfruttando l'omogeneità del tempo, fissiamo l'origine dei tempi nel sistema di riferimento K in modo che a $t = 0$, le origini degli assi di K e di K' coincidano, e nel sistema K' questo avvenga per $t' = 0$. Supponiamo inoltre che i due sistemi di riferimento siano provvisti di detector per rivelare l'arrivo di raggi di luce: infatti, nell'origine degli assi di K' è posizionata una sorgente che a $t = t' = 0$ emette un fronte d'onda sferico.

La forma del fronte d'onda dovrà essere regolata nel sistema K da un'equazione del tipo

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0$$

e per il postulato di relatività dovrà avere la stessa espressione in ogni sistema di riferimento inerziale, che altrimenti potrebbe accorgersi di essere in movimento rispetto a K semplicemente osservando una forma diversa del fronte. In particolare in K' avremo:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0$$

Per il secondo postulato, la velocità della luce sarà in entrambi i casi pari a c . Questa equazione è quadratica, e la sua forma ci ricorda il teorema di Pitagora e l'espressione della distanza tra due punti; cercheremo adesso di determinare le trasformazioni che permettono di connettere i due sistemi di riferimento inerziali K e K' . In entrambi dovrà valere il principio di inerzia: se un corpo non è soggetto a forze in K non lo sarà neanche in K' , dunque le trasformazioni che cerchiamo sono quelle trasformazioni che mandano moti uniformi in moti uniformi. È possibile dimostrare che le uniche trasformazioni di questo tipo sono trasformazioni lineari, ovvero della forma

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}t \\ z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}t \\ t' = a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t \end{cases}$$

Abbiamo orientato gli assi in modo che $x \equiv x'$, e che la velocità relativa tra i due sistemi sia parallela all'asse x , dunque ci possiamo chiedere che forma abbiano queste trasformazioni lineari nel piano ad esso ortogonale. Poiché l'orientazione degli assi y' e z' è arbitraria, le trasformazioni dovranno essere invarianti per rotazioni nel piano yz , e l'unico modo per realizzare tale richiesta è che

$$y' = y$$

$$z' = z$$

Inoltre, se le trasformazioni sono lineari, l'unica possibilità è che la quantità $x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$ sia mandata nella quantità $x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2$ a meno di un fattore di proporzionalità:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = \lambda(v)(x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2)$$

dove $\lambda(v)$ può dipendere soltanto dalla velocità relativa v . Invertendo il ragionamento, possiamo pensare al sistema di riferimento K' , che si muove con velocità $-v$ rispetto a K , in questo modo

$$\lambda(-v)(x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2) = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2$$

da cui

$$\lambda(v)\lambda(-v) = 1$$

Inoltre, poichè lo spazio è isotropo, λ non può dipendere dal segno di v , dunque $\lambda(v) \equiv \lambda(|v|)$, e quindi

$$\lambda^2(|v|) = 1 \Rightarrow \lambda(|v|) = \pm 1$$

Banalmente, -1 è scartato poichè per le nostre ipotesi se $v = 0$ i due sistemi coincidono, dunque l'equazione del fronte d'onda dovrà essere esattamente la stessa.

In generale, se il raggio non partisse da $(x, y, z, t) = (0, 0, 0, 0)$ ma da un generico punto (x_1, y_1, z_1, t_1) , le equazioni per il fronte d'onda sarebbero

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 - c^2(t - t_1)^2 = 0$$

$$(x' - x'_1)^2 + (y' - y'_1)^2 + (z' - z'_1)^2 - c^2(t' - t'_1)^2 = 0$$

Nel nostro caso particolare, poichè abbiamo visto che $y = y'$ e $z = z'$, uguagliando le due equazioni otteniamo

$$x^2 - c^2 t^2 = x'^2 - c^2 t'^2$$

Dobbiamo quindi cercare le trasformazioni che lasciano invariata la forma quadratica

$$(ct, x) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

Per semplificare le cose, consideriamo l'espressione

$$x^2 + c^2 t'^2 = x'^2 + c^2 t^2$$

o introducendo le coordinate $x_1 = x$ e $x_0 = ct$

$$x_1^2 + x_0'^2 = x_1'^2 + x_0^2$$

Nell'ipotetico piano $x_1 x_0'$, l'espressione $x_1^2 + x_0'^2$ rappresenta la distanza dall'origine, dunque le trasformazioni che mandano la coppia (x_1, x_0') nella coppia (x_1', x_0) lasciando invariata la forma quadratica sono delle trasformazioni ortogonali:

$$x_0' = x_0 \cos \theta - x_1' \sin \theta$$

$$x_1 = x_0 \sin \theta + x_1' \cos \theta$$

Invertendo, troviamo che

$$x_0' = \frac{x_0}{\cos \theta} - x_1 \tan \theta$$

$$x'_1 = -x_0 \tan \theta + \frac{x_1}{\cos \theta}$$

L'origine delle coordinate di K' è $x'_1 = 0$, da cui segue che tale punto nel sistema K ha legge oraria $x_1 = \sin \theta x_0$; tuttavia sappiamo anche che tale punto scorre lungo l'asse x_1 con legge di moto $x_1 = \frac{v}{c} x_0$, e da questo ricaviamo l'identificazione $\beta \equiv \frac{v}{c} = \sin \theta$. A questo punto possiamo definire $\cos \theta = \sqrt{1 - \beta^2}$ e $\tan \theta = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \equiv \gamma \beta$. Le coordinate nel sistema K' si riscrivono allora più brevemente come

$$\begin{cases} x'_0 = \gamma(x_0 - \beta x_1) \\ x'_1 = \gamma(x_1 - \beta x_0) \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} x_0 = ct \\ \beta = \frac{v}{c} \\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{array} \right)$$

Queste relazioni si possono invertire e si ha semplicemente

$$\begin{cases} x_0 = \gamma(x'_0 + \beta x'_1) \\ x_1 = \gamma(x'_1 + \beta x'_0) \end{cases}$$

La prima cosa che impariamo è che il luogo dei punti per cui $x'_0 \pm x'_1 = 0$ coincide con il luogo dei punti per cui $x_0 \pm x_1 = 0$:

$$x'_0 \pm x'_1 = \gamma(x_0 \pm x_1 - \beta(x_1 \pm x_0)) = \gamma(1 + \beta)(x_1 \pm x_0)$$

Ma queste equazioni corrispondono alle traiettorie dei raggi di luce nel piano: questo significa che tali traiettorie sono conservate dalle trasformazioni di Lorentz. Gli assi del sistema K' si ottengono osservando che un punto sull'asse x' ha equazione di moto $x_1 = \frac{v}{c} x_0$ con $v < c$ dunque l'asse x' sarà rappresentato come una retta inclinata di un angolo $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$; per quanto riguarda l'asse temporale, si ottiene immediatamente osservando che la retta $x_0 = x_1$ e la retta $x'_0 = x'_1$ devono coincidere.

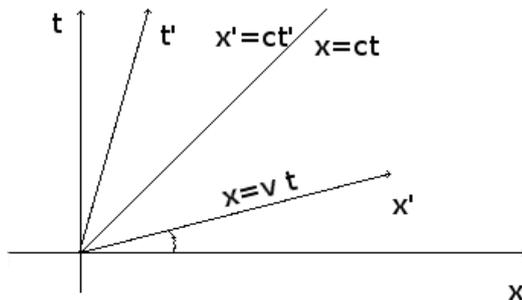


Figura 1.2: Sistemi di riferimento inerziali

Abbiamo visto come la simultaneità sia diventato un concetto relativo, e le traiettorie di tipo light-like si possano esprimere come rette inclinate a 45° rispetto all'asse x . La traiettoria dell'origine del sistema K' , secondo le trasformazioni di Lorentz, non è altro che il moto della sua origine, dunque è descritto dalla legge $x = vt$: poichè la bisettrice del vecchio sistema deve essere la bisettrice anche del nuovo, otteniamo automaticamente l'asse t' se facciamo in modo che quest'ultimo formi con l'asse t lo stesso angolo che x' forma con x . Consideriamo un evento O , e da esso facciamo emettere due raggi di luce, uno in direzione x positiva, e l'altro in direzione x negativa: le traiettorie dei due raggi saranno quindi inclinate a 45° e 135° , e se pensiamo O come il centro di una stanza, i due raggi nel sistema K raggiungeranno le pareti opposte dopo uno stesso tempo δt . Per vedere questo fatto tracciamo la parallela rispetto all'asse x passante per il punto $(a, \delta t)$, e osserviamo che automaticamente passa anche per $(-a, \delta t)$. Nel sistema K' , invece, le due rette parallele a x' passanti per i punti $(a, \delta t)$ e $(-a, \delta t)$ corrispondono a tempi t'_1 e t'_2 diversi, il che significa che

l'arrivo dei due raggi di luce alle rispettive pareti non è più simultaneo.

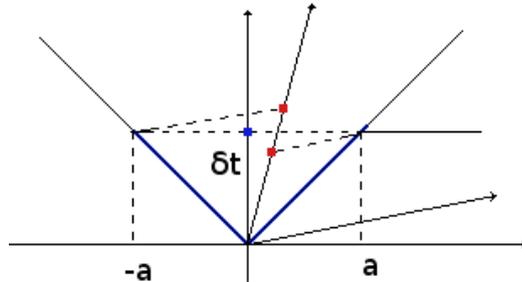


Figura 1.3: Relatività della simultaneità

Introdurremo dunque il concetto di *causalità*, e cercheremo di scoprire come le trasformazioni di Lorentz influiscono sull'ordinamento degli eventi. Definiamo la quantità

$$s^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

che per il postulato di relatività è *invariante* sotto trasformazioni di Lorentz, e introduciamo il quadrivettore

$$x^\mu = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Se introduciamo anche la matrice 4×4 $\eta_{\mu\nu}$, detta *matrice di Minkowski*:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

allora vediamo che possiamo riscrivere l'invariante di Lorentz s^2 in questo modo:

$$s^2 = \sum_{\mu, \nu=1}^4 \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$$

oppure, usando la convenzione di Einstein sugli indici ripetuti:

$$s^2 = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$$

o ancora, in notazione matriciale

$$s^2 = x^T \eta x$$

In questa notazione, una trasformazione di Lorentz è un'applicazione lineare dallo spazio di Minkowski \mathbb{R}^4 in se stesso:

$$\begin{pmatrix} (x')^0 \\ (x')^1 \\ (x')^2 \\ (x')^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

$$(x')^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$$

Se definiamo $\gamma = \cosh \Phi$, dove Φ è la cosiddetta *rapidità*, possiamo riscrivere la matrice Λ come

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \cosh \Phi & -\sinh \Phi & 0 & 0 \\ -\sinh \Phi & \cosh \Phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In questo modo Λ somiglia molto ad una matrice di rotazione, a parte un segno ed il fatto che non sono coinvolte le funzioni trigonometriche ma quelle iperboliche: scopriremo infatti che le trasformazioni di Lorentz non sono altro che una generalizzazione delle rotazioni spaziali ad uno spazio come quello di Minkowski, dove il prodotto scalare è diverso da quello euclideo. Infatti, il prodotto scalare euclideo in 4 dimensioni è definito dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e il gruppo ordinario delle rotazioni in 4 dimensioni conserva la distanza definita da

$$s^2 = \sum_{i=1}^4 (x^i)^2$$

ovvero una distanza di tipo euclideo (teorema di Pitagora): le funzioni coinvolte da tali trasformazioni sono quelle trigonometriche.

Al contrario, a causa della segnatura diversa della matrice η , il prodotto scalare e quindi la distanza da esso definita non sono quelli euclidei, e le trasformazioni che lasciano invariata la distanza potranno coinvolgere funzioni differenti da quelle trigonometriche, come in questo caso in cui abbiamo le funzioni iperboliche.

Per quanto riguarda le trasformazioni di Lorentz, dire che la distanza s^2 è conservata implica che

$$(x')^\mu \eta_{\mu\nu} (x')^\nu = x^\mu \eta_{\mu\nu} x^\nu$$

dove $(x')^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$, da cui segue

$$x^\alpha x^\beta \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta \eta_{\mu\nu} = x^\mu \eta_{\mu\nu} x^\nu$$

e rinominando gli indici muti μ, ν in α, β al secondo membro, scopriamo che le trasformazioni di Lorentz soddisfano a

$$\Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta \eta_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta}$$

In forma matriciale questa relazione si scrive come

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$$

dove Λ^T è dovuto al fatto che l'indice μ della matrice $\Lambda^\mu{}_\alpha$ non è immediatamente adiacente all'indice μ della matrice $\eta_{\mu\nu}$:

$$\Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta \eta_{\mu\nu} = (\Lambda^T)_\alpha{}^\mu \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\beta$$

Se ricordiamo qual'è la proprietà definitoria di una matrice ortogonale R :

$$R^T R = I$$

oppure

$$R^T I R = I$$

otteniamo una forma analoga a quella delle trasformazioni di Lorentz: le matrici Λ ed R infatti conservano entrambe un determinato prodotto scalare, in un caso quello minkowskiano definito dalla matrice η , nell'altro quello euclideo definito dall'identità I . Pertanto, definiremo trasformazione di Lorentz una qualunque applicazione lineare che soddisfi la proprietà $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$. È possibile verificare che l'insieme delle trasformazioni di Lorentz soddisfa le proprietà di gruppo, e definisce il cosiddetto *gruppo di Lorentz*.

1.1.1 Contrazione dei tempi e dilatazione delle lunghezze

In meccanica relativistica, la perdita della simultaneità ha due effetti, duali l'uno all'altro per l'equivalenza tra tempo e spazio:

1. la dilatazione dei tempi;
2. la contrazione delle lunghezze.

Osserviamo che le affermazioni i tempi si dilatano e le distanze si contraggono acquistano senso soltanto una volta che si è definito come avvengono le misure di tempo e di lunghezza: la misura della differenza temporale tra due eventi è effettuata considerando un orologio fermo nel sistema K in un certo punto \vec{x} , e segnando i tempi x_{01} e x_{02} relativi ai due eventi; la misura di lunghezza viceversa è effettuata contrassegnando *contemporaneamente* le estremità dell'oggetto che si vuole misurare.

1. Consideriamo il sistema K , in cui abbiamo due eventi che avvengono in uno stesso punto x ma sono separati da una distanza temporale $x_{01} - x_{02} = \Delta T$. Se un secondo sistema K' è in moto rispetto a K con velocità v , i due eventi avranno coordinate

$$\begin{aligned}x'_{01} &= \gamma(x_{01} - \beta x) \\x'_{02} &= \gamma(x_{02} - \beta x)\end{aligned}$$

da cui

$$x'_{01} - x'_{02} = \gamma(x_{01} - x_{02}) = \gamma \Delta T > \Delta T$$

dato che $\gamma > 1$: dunque i due eventi nel sistema K' sono separati da una distanza temporale maggiore di quella rilevata nel sistema K .

2. Un'asta di estremi a e b è a riposo nel sistema di riferimento K ; in tale sistema, la misura consiste semplicemente nel prendere un metro e misurare la distanza tra i due estremi $L = b - a$, mentre in un sistema in moto relativo consiste nel segnare, *allo stesso istante*, la posizione degli estremi a e b . Con questa prescrizione, le coordinate nel sistema K espresse in termini delle coordinate nel sistema K' sono

$$\begin{aligned}x_{1a} &= \gamma(x'_{1a} + \beta x'_{0a}) \\x_{1b} &= \gamma(x'_{1b} + \beta x'_{0b})\end{aligned}$$

Ma per ipotesi $x_{0a} = x_{0b}$ dunque

$$x_{1b} - x_{1a} = \gamma(x'_{1b} - x'_{1a}) = \gamma L' > L'$$

dunque nel sistema di riferimento in moto rispetto all'asta la lunghezza di quest'ultima risulta inferiore di un fattore γ .

Questi fenomeni sono figli del concetto di contemporaneità, infatti se questa fosse assoluta non osserveremmo contrazioni o dilatazioni. Ma anche se dobbiamo necessariamente rinunciare alla simultaneità, possiamo chiederci se le trasformazioni di Lorentz preservino comunque l'ordinamento temporale tra gli eventi: troveremo che questo accade soltanto per una certa classe di eventi. Se accettiamo il fatto che esista una velocità limite per la trasmissione dei

segnali, non tutti i punti dello spazio-tempo potranno essere raggiunti a partire da un particolare punto, e questo fa sì che ci siano zone *causalmente disconnesse* da altre. In queste condizioni l'unica cosa che ha senso preservare è l'ordinamento causa-effetto, dunque il discriminare affinché due eventi possano influire l'uno sull'altro è la loro reciproca distanza spazio-temporale: se due eventi $x_1 = (x_{10}, \vec{x}_1)$ e $x_2 = (x_{20}, \vec{x}_2)$ sono tali che il quadrivettore $x_1 - x_2$ abbia modulo quadro positivo, i due eventi si dicono separati da una distanza di tipo tempo, o *time-like*; se il modulo quadro è nullo, la distanza è di tipo luce, o *light-like*, infine se il modulo quadro è negativo, la distanza si dice di tipo spazio, o *space-like*.

1.1.2 Proprietà delle trasformazioni di Lorentz

1. La prima proprietà delle trasformazioni di Lorentz viene direttamente dalla loro definizione:

$$\det(\Lambda^T \eta \Lambda) = \det(\eta) \Rightarrow \det(\Lambda^T) \det(\Lambda) = \det^2(\Lambda) = 1$$

dunque una trasformazione di Lorentz ha determinante ± 1 . Geometricamente, questa proprietà implica che l'elemento di volume sia un invariante sotto trasformazioni di Lorentz: infatti una trasformazione di Lorentz non è altro che lo jacobiano del cambio di coordinate

$$\begin{aligned} (x')^\mu &= (x')^\mu(x) = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \\ J^\mu{}_\nu &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} \\ \Rightarrow dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 &= |\det(\Lambda)| d(x')^0 d(x')^1 d(x')^2 d(x')^3 = d(x')^0 d(x')^1 d(x')^2 d(x')^3 \end{aligned}$$

Inoltre, il fatto che esistano trasformazioni di Lorentz con determinante ± 1 implica che le trasformazioni dei due tipi non possono essere connesse da una trasformazione continua, perchè per cambiare di segno il determinante dovrebbe annullarsi, il che è impossibile. Matematicamente, si dice che il gruppo di Lorentz è *topologicamente disconnesso*.

2. Consideriamo la componente 00 della matrice η :

$$\eta_{00} = \Lambda^\mu{}_0 \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_0$$

Possiamo riscrivere la precedente espressione come

$$(\Lambda^0{}_0)^2 - \sum_{i=1}^3 (\Lambda^i{}_0)^2 = 1$$

Da questo discende immediatamente che

$$(\Lambda^0{}_0)^2 = 1 + \sum_{i=1}^3 (\Lambda^i{}_0)^2 \geq 1$$

Si hanno quindi due possibilità:

$$\Lambda^0{}_0 \geq 1 \qquad \Lambda^0{}_0 \leq -1$$

Ancora, le trasformazioni di Lorentz dei due tipi individuano due regioni disconnesse perchè per passare dall'una all'altra in maniera continua avremmo bisogno di una trasformazione con $\Lambda^0{}_0 = 0$, che non è ammessa.

Le matrici con $\Lambda^0{}_0$ positivo formano un sottogruppo del gruppo di Lorentz, infatti se introduciamo l'inversa della matrice di Minkowski, $\eta^{\mu\nu}$:

$$\eta^{\mu\alpha} \eta_{\alpha\nu} = \delta^\mu_\nu$$

possiamo riscrivere la relazione $\eta_{\alpha\beta} = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta \eta_{\mu\nu}$ come

$$\delta_\beta^\rho = \underbrace{\eta^{\rho\alpha} \Lambda^\mu{}_\alpha \eta_{\mu\nu}} \Lambda^\nu{}_\beta$$

da cui deduciamo che $\eta^{\rho\alpha} \Lambda^\mu{}_\alpha \eta_{\mu\nu} = (\Lambda^{-1})^\rho{}_\nu$. Se le matrici di Lorentz con $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ formano un sottogruppo, la loro inversa deve avere la stessa proprietà, infatti

$$\eta^{0\alpha} \Lambda^\mu{}_\alpha \eta_{\mu 0} = \eta^{00} \Lambda^0{}_0 \eta_{00} = \Lambda^0{}_0 \geq 1$$

Inoltre, anche il prodotto di due matrici di Lorentz deve avere la proprietà $\Lambda^0{}_0 \geq 1$, e per dimostrarlo introduciamo la procedura di innalzamento e abbassamento degli indici mediante la matrice η e la sua inversa:

$$x^\mu \rightarrow x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu$$

$$x_\mu \rightarrow x^\mu = \eta^{\mu\nu} x_\nu$$

Questa notazione permette di riscrivere in maniera più comoda il prodotto scalare:

$$s^2 = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = x_\mu x^\mu$$

L'elemento $(\Lambda\Lambda')^0{}_0$ si può scrivere come

$$(\Lambda\Lambda')^0{}_0 = \Lambda^0{}_\mu (\Lambda')^\mu{}_0 = \Lambda^0{}_0 (\Lambda')^0{}_0 + \sum_{i=1}^3 \Lambda^0{}_i (\Lambda')^i{}_0 \geq \Lambda^0{}_0 (\Lambda')^0{}_0 - \sum_{i=1}^3 |\Lambda^0{}_i (\Lambda')^i{}_0|$$

Se pensiamo all'ultimo termine come al prodotto scalare di due vettori dello spazio tridimensionale \vec{x} e \vec{y} , questo soddisferà la disuguaglianza di Cauchy:

$$|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq |\vec{x}| |\vec{y}|$$

per cui

$$(\Lambda\Lambda')^0{}_0 \geq \Lambda^0{}_0 (\Lambda')^0{}_0 - \sqrt{\sum_{i=1}^3 |\Lambda^0{}_i|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^3 |(\Lambda')^i{}_0|^2} = \Lambda^0{}_0 (\Lambda')^0{}_0 - \sqrt{|\Lambda^0{}_0|^2 - 1} \sqrt{|(\Lambda')^0{}_0|^2 - 1} > 0$$

Ma se l'elemento $\Lambda^0{}_0$ di una trasformazione di Lorentz è positivo, allora necessariamente è anche maggiore di 1. Abbiamo quindi dimostrato che all'interno del gruppo di Lorentz le matrici con $\Lambda^0{}_0 > 1$ formano un sottogruppo. Se ci restringiamo ulteriormente e consideriamo le matrici Λ tali che $\det(\Lambda) = 1$, anch'esse formano chiaramente un sottogruppo, e possiamo definire i seguenti sottoinsiemi del gruppo di Lorentz:

- (a) L_+^\uparrow : sono le matrici Λ tali che $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ e $\det(\Lambda) = 1$; tale sottoinsieme è anche un sottogruppo, e viene definito sottogruppo di Lorentz *ortocrono proprio*. Poichè l'identità ha sia $\Lambda^0{}_0 = 1$ che $\det \Lambda = 1$, queste trasformazioni sono tutte connettabili in maniera continua all'identità. Le particelle elementari vengono definite come rappresentazioni irriducibili del gruppo di Poincarè, che contiene come sottogruppi il gruppo di Lorentz ortocrono proprio e il gruppo delle traslazioni spazio-temporali.
- (b) L_-^\uparrow : sono le matrici Λ tali che $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ e $\det(\Lambda) = -1$; questo sottoinsieme non forma un sottogruppo, in quanto il prodotto di due matrici con determinante -1 ha determinante $+1$. Se definiamo la trasformazione detta di *parità*:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

tale trasformazione quando agisce su un quadrivettore $a^\mu = (a^0, \vec{a})$, inverte le componenti spaziali lasciando invariata quella temporale. Se $\Lambda \in L_-^\uparrow$, abbiamo

$$\det(P\Lambda) = 1$$

dunque $P\Lambda \in L_+^\uparrow$: questo ci dice che ogni trasformazione di Lorentz che appartiene al sottoinsieme L_-^\uparrow si può ottenere da una opportuna trasformazione gruppo di Lorentz ortocrono proprio composta con la parità P .

- (c) L_-^\downarrow : sono le matrici Λ tali che $\Lambda^0_0 \leq -1$ e $\det(\Lambda) = -1$; anche stavolta non si ha un sottogruppo, e se definiamo la trasformazione detta di *time reversal*:

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

questa lascia invariate le componenti spaziali di un quadrivettore mentre inverte il segno di quella temporale. Inoltre, se $\Lambda \in L_-^\downarrow$, si può verificare che $T\Lambda \in L_+^\uparrow$, dunque tutte le trasformazioni di Lorentz contenute in L_-^\downarrow si ottengono componendo L_+^\uparrow con la *time reversal*.

- (d) L_+^\downarrow : sono le matrici Λ tali che $\Lambda^0_0 \leq -1$ e $\det(\Lambda) = 1$; allo stesso modo si può verificare che se $\Lambda \in L_+^\downarrow$, allora $PT\Lambda \in L_+^\uparrow$.

Il gruppo di Lorentz quindi contiene un sottogruppo enorme, il sottogruppo ortocrono proprio L_+^\uparrow , mentre gli altri sottoinsiemi si ottengono combinando L_+^\uparrow con il sottogruppo discreto composto dagli elementi

$$(I, P, T, PT)$$

detto *sottogruppo di Weyl*.

1.1.3 Struttura causale dello spazio-tempo

L'indefinitezza del prodotto scalare fa sì che il modulo quadro di un quadrivettore non abbia segno definito. Tuttavia, l'invarianza del prodotto scalare sotto trasformazioni di Lorentz implica che qualunque segno esso abbia, esso sia un invariante relativistico; questo ci permette di definire tre regioni nello spazio di Minkowski:

1. $x^2 = x^\mu x_\mu > 0$; i quadrivettori di questa regione hanno modulo quadro positivo, e sono detti di tipo tempo, o *time-like*. Tra essi abbiamo due ulteriori sottocategorie, costituite dai vettori di tipo tempo diretti *nel futuro* o *nel passato*, rispettivamente con la proprietà $x^0 > 0$ e $x^0 < 0$: questa proprietà viene preservata dalle trasformazioni di Lorentz del gruppo ortocrono proprio, in altre parole due osservatori collegati da una trasformazione di L_+^\uparrow vedranno un quadrivettore di tipo tempo orientato nello stesso modo.
2. $x^2 = x^\mu x_\mu = 0$; i quadrivettori di questa regione hanno modulo quadro nullo, e sono detti di tipo luce, o *light-like*. Anche per essi possiamo distinguere tra vettori diretti nel futuro e nel passato, con le stesse proprietà di invarianza e di osservabilità dei vettori di tipo tempo.
3. $x^2 = x^\mu x_\mu < 0$; i quadrivettori di questa regione hanno modulo quadro negativo, e sono detti di tipo spazio, o *space-like*. Per questa regione dello spazio di Minkowski perde significato la distinzione tra vettori diretti nel futuro o nel passato, perchè una trasformazione di Lorentz può cambiare segno alla componente temporale di un quadrivettore di tipo spazio.

Consideriamo ad esempio due eventi in uno stesso punto:

$$(t_1, \vec{x}), (t_2, \vec{x}) \quad (t_2 > t_1)$$

La differenza tra i due eventi è il quadrivettore $(t_2 - t_1, \vec{0})$, di tipo tempo e future-directed: esso manterrà queste caratteristiche in tutti i sistemi di riferimento inerziali collegati da trasformazioni di Lorentz ortocrone proprie.

Ad ogni punto dello spazio-tempo (o anche *evento*) possiamo associare un *cono luce*, ovvero una ipersuperficie tridimensionale che separa le tre regioni dello spazio-tempo Minkowskiano.

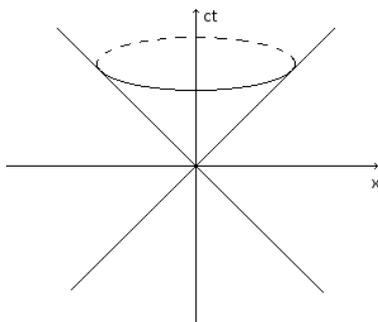


Figura 1.4: Cono luce

I punti sulla retta $|\vec{x}| = \pm x^0$ sono quei punti sui quali un osservatore posto nell'origine può influire mediante l'invio di un raggio di luce. All'interno del cono luce si ha $|t| > |\vec{x}|$, dunque la distanza dall'origine è un quadrivettore di tipo tempo: questo significa che l'osservatore nell'origine può influire su ciascuno di questi punti inviando un qualunque segnale che viaggi con velocità $v < c$. Vediamo inoltre che la traiettoria di un segnale che parte dall'origine all'interno del cono luce non ne può mai uscire: infatti se questo accadesse, in qualche punto la tangente alla curva dovrebbe essere minore di 1, ma questo non è possibile in quanto la velocità del segnale sarebbe superiore a c ; da questo risulta che le regioni interna ed esterna al cono luce sono *disconnesse causalmente*.

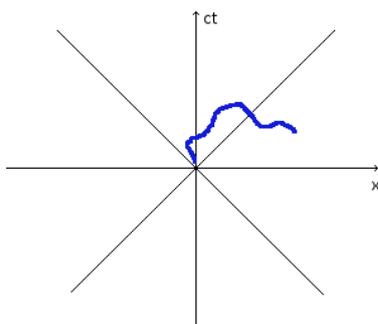


Figura 1.5: Traiettorie non fisiche

La definizione generale di cono luce è la seguente: il cono luce di un punto O è l'insieme di tutti i punti connessi a O che possono essere connessi da una curva di tipo luce (ovvero una curva il cui vettore tangente ha sempre modulo nullo); analogamente, l'interno del cono luce è l'insieme di tutti i punti che possono essere connessi ad O da una curva di tipo tempo. Dimosteremo adesso che l'orientazione nel tempo di un quadrivettore di tipo tempo è conservata da L_+^\uparrow : sia $p^0 > 0$, e $p^\mu p_\mu > 0$, allora

$$(p')^0 = \Lambda^0_{\nu} p^\nu > 0 \quad (\Lambda \in L_+^\uparrow)$$

ma abbiamo anche

$$\begin{aligned}\Lambda^0{}_\nu p^\nu &= \Lambda^0{}_0 p^0 + \sum_{i=1}^3 \Lambda^0{}_i p^i \geq \Lambda^0{}_0 p^0 - \sum_{i=1}^3 |\Lambda^0{}_i p^i| \geq \Lambda^0{}_0 p^0 + \sum_{i=1}^3 \Lambda^0{}_i p^i \geq \Lambda^0{}_0 p^0 - \sqrt{\sum_{i=1}^3 |\Lambda^0{}_i|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^3 |p^i|^2} = \\ &= \Lambda^0{}_0 p^0 + \sum_{i=1}^3 \Lambda^0{}_i p^i \geq \Lambda^0{}_0 p^0 - \sqrt{(\Lambda^0{}_0)^2 - 1} \sqrt{\sum_{i=1}^3 |p^i|^2}\end{aligned}$$

ma $p^0 > |\vec{p}|$ perchè p^μ è un vettore di tipo tempo, allora $(p')^0 > 0$ quindi anche il vettore trasformato è future-directed.

Costruiamo adesso la più generale trasformazione di Lorentz ortocrona. Siano K e K' due sistemi di riferimento in moto relativo con velocità \vec{v} , non più parallela all'asse x del sistema K :

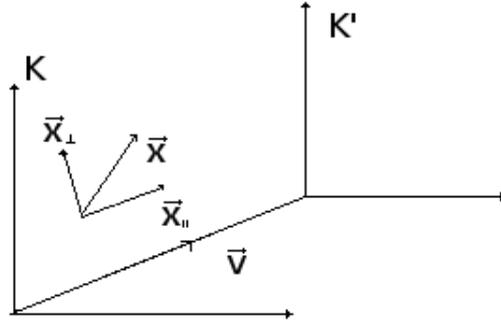


Figura 1.6: Boost in direzione generica

Avremo

$$\begin{aligned}\vec{x} &= \vec{x}_{\parallel} + \vec{x}_{\perp} \\ \begin{cases} \vec{x}_{\parallel} = \left(\frac{\vec{\beta} \cdot \vec{x}}{\beta^2}\right) \vec{\beta} \\ \vec{x}_{\perp} = \vec{x} - \vec{x}_{\parallel} \end{cases}\end{aligned}$$

Come sappiamo, la componente ortogonale non trasforma, mentre:

$$\begin{aligned}\begin{cases} (x')^0 = \gamma(x^0 - \vec{\beta} \cdot \vec{x}) \\ \vec{x}'_{\parallel} = \gamma(\vec{x}_{\parallel} - \vec{\beta} x^0) \\ \vec{x}'_{\perp} = \vec{x}_{\perp} \end{cases} \\ \Rightarrow \vec{x}' = \gamma \left(\frac{\vec{\beta} \cdot \vec{x}}{\beta^2} - x^0 \right) \vec{\beta} + \vec{x} - \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{x}}{\beta^2} \vec{\beta}\end{aligned}$$

Il vettore $\vec{\beta}$ ha tre componenti, dunque le trasformazioni di Lorentz di questo tipo (i *boost*) sono descritte da tre parametri; tuttavia sappiamo che il gruppo di Lorentz comprende anche le rotazioni spaziali, che sono descritte da altri tre parametri: in totale il gruppo di Lorentz dipenderà quindi da sei parametri.

1.2 Vettori, forme, tensori

Finora abbiamo introdotto un solo oggetto, il vettore nello spazio di Minkowski, e abbiamo indicato le sue proprietà di trasformazione sotto il gruppo di Lorentz:

$$(x')^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$$

Questo è il prototipo di un quadrivettore: in generale chiameremo *quadrivettore* un qualsiasi oggetto A^μ che nel passaggio tra due sistemi di riferimento inerziali, collegati mediante una trasformazione di Lorentz, trasforma in questo modo:

$$A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu$$

Introdurremo in generale il concetto di vettore, tensore, e forma: le definizioni continueranno a valere inalterate anche nel caso della relatività generale, nel senso che questi oggetti sono definiti dalle loro particolari proprietà di trasformazione sotto un cambio di base o di coordinate, che nel nostro caso corrisponde proprio alle trasformazioni di Lorentz.

1.2.1 Vettori

Consideriamo uno spazio vettoriale V (nel nostro caso lo spazio di Minkowski o *spazio degli eventi* (x, y, z, t)), e una sua base: un qualsiasi elemento $v \in V$ viene chiamato *vettore*, e in termini di una base e_a è rappresentabile come

$$v = v^a e_a$$

1.2.2 Forme

Dato uno spazio vettoriale V si può sempre costruire il suo duale V^* , ovvero lo spazio dei funzionali lineari (o *forme*) sullo spazio vettoriale di partenza: dato un elemento $f \in V^*$, la sua azione su un vettore è un elemento del campo su cui è definito lo spazio vettoriale (di solito \mathbb{R} o \mathbb{C}). Anche lo spazio duale è uno spazio vettoriale, dunque possiamo scegliere una base: considereremo una base $\{\omega^a\}$, detta base *duale*, definita dall'azione dei suoi elementi sugli elementi della base di V

$$\omega^a(e_b) = \delta_b^a$$

In termini di $\{\omega^a\}$ potremo rappresentare qualsiasi elemento f dello spazio duale come $f = f_a \omega^a$. Poichè gli elementi di V^* sono funzionali lineari, avremo che

$$f(v) = f(v^a e_a) = v^a f(e_a) = v^a f_b \omega^b(e_a) = v^a f_b \delta_a^b = v^a f_a$$

Osserviamo che l'oggetto $f(v)$ è definito indipendentemente dalla base scelta: qualsiasi sia la procedura con cui costruiamo vettori e funzionali, dovremo ottenere sempre lo stesso risultato, e questo vincola le regole di trasformazione dei vettori e delle forme. Supponiamo infatti di cambiare base, e di scrivere la vecchia base in termini della nuova tramite una trasformazione lineare:

$$e_a = M^b{}_a e'_b$$

Un vettore esiste ed è definito indipendentemente dalla base in cui è espresso, per cui lo possiamo esprimere in questi due modi equivalenti:

$$v = v^a e_a$$

$$v = (v')^b e'_b$$

ma tenendo conto della relazione tra le due basi abbiamo

$$v^a M^b{}_a e'_b = (v')^b e'_b$$

Poichè e'_b è una base, il vettore v è univocamente determinato dai coefficienti della sua espansione, per cui si deve avere

$$(v')^b = M^b{}_a v^a$$

e questa relazione definisce la legge di trasformazione sotto cambio di base per le componenti di un vettore v (nel caso della relatività speciale si ha $M^a{}_b \equiv \Lambda^\mu{}_\nu$). Adesso, poichè anche l'azione $f(v)$ deve essere indipendente dalla base scelta, dovremo avere

$$f_a v^a = (f')_a (v')^a$$

ma

$$\begin{aligned} f_a v^a &= (f')_a M^a{}_b v^b \\ \Rightarrow [f_b &= (f')_a M^a{}_b \Leftrightarrow (M^{-1})^b{}_a f_b = (f')_a] \end{aligned}$$

dunque se le componenti dei vettori trasformano con la matrice del cambio di base, affinché la quantità $f(v)$ sia indipendente dalla base scelta le componenti delle forme devono trasformare con la matrice inversa (e trasposta).

1.2.3 Tensori

Una volta definiti vettori e forme, possiamo definire i *tensori*: consideriamo il prodotto cartesiano di r volte lo spazio vettoriale V con s volte il suo duale V^*

$$\underbrace{V \times \dots \times V}_r \times \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_s$$

Si può mostrare che l'oggetto così costruito eredita naturalmente una struttura di spazio vettoriale. Le applicazioni *multilineari* su questo spazio vettoriale si dicono *tensori di rango* (r, s) . Un tensore T quindi è un oggetto con $r + s$ entrate, tale che se $v_1, \dots, v_r \in V$ e $y_a, \dots, y_s \in V^*$, si ha

$$T(v_1, \dots, v_r, y_a, \dots, y_s) \in \mathbb{K}$$

dove \mathbb{K} è il campo su cui è definito lo spazio V . Poichè un tensore è una applicazione multilineare, si ha

$$\begin{aligned} T(v_1, \dots, v_r, y_a, \dots, y_s) &= T((v_1)^{a_1} e_{a_1}, \dots, (v_r)^{a_r} e_{a_r}, (y_1)_{b_1} \omega^{b_1}, \dots, (y_s)_{b_s} \omega^{b_s}) = \\ &= (v_1)^{a_1} \dots (v_r)^{a_r} (y_1)_{b_1} \dots (y_s)_{b_s} T(e_{a_1}, \dots, e_{a_r}, \omega^{b_1}, \dots, \omega^{b_s}) \end{aligned}$$

dunque l'azione di un tensore è completamente specificata una volta che indichiamo la sua azione su una base. Brevemente, scriveremo

$$T(e_{a_1}, \dots, e_{a_r}, \omega^{b_1}, \dots, \omega^{b_s}) = T^{b_1 \dots b_s}{}_{a_1, \dots, a_r}$$

In questo linguaggio, l'azione di un tensore su vettori e forme generici si scrive

$$T(v_1, \dots, v_r, y_a, \dots, y_s) = (v_1)^{a_1} \dots (v_r)^{a_r} (y_1)_{b_1} \dots (y_s)_{b_s} T^{b_1 \dots b_s}{}_{a_1, \dots, a_r}$$

Anche in questo caso, l'azione di un tensore su r vettori e s forme deve essere indipendente dalla base, e di nuovo questo vincola le componenti del tensore a trasformare in un ben preciso modo:

$$(T')^{b_1 \dots b_s}{}_{a_1, \dots, a_r} = M^{b_1}{}_{\beta_1} \dots M^{b_s}{}_{\beta_s} [T^{\beta_1 \dots \beta_s}{}_{\alpha_1, \dots, \alpha_r}] (M^{-1})^{\alpha_1}{}_{a_1} \dots (M^{-1})^{\alpha_r}{}_{a_r}$$

Ad esempio, $\eta_{\mu\nu}$ è un tensore di tipo $(0, 2)$: in base alla regola che abbiamo dato, la regola di trasformazione sotto una matrice di Lorentz $\Lambda^\mu{}_\nu$ è

$$\eta'_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} (\Lambda^{-1})^\alpha{}_\mu (\Lambda^{-1})^\beta{}_\nu \equiv \eta_{\mu\nu}$$

per definizione di trasformazione di Lorentz: infatti come sappiamo la metrica (oppure il prodotto scalare) è invariante sotto trasformazioni di Lorentz. Consideriamo adesso il *simbolo di Levi-Civita*, così definito

$$\tilde{\epsilon}^{\mu\nu\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{se } \mu\nu\alpha\beta \text{ è permutazione pari di } 0123 \\ -1 & \text{se } \mu\nu\alpha\beta \text{ è permutazione dispari di } 0123 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Il simbolo di Levi-Civita, completamente antisimmetrico, soddisfa la seguente identità: se $M^\mu{}_\nu$ è una matrice qualsiasi, si ha

$$M^\mu{}_{\mu'} M^{\nu'}{}_{\nu} M^{\alpha}{}_{\alpha'} M^{\beta}{}_{\beta'} \tilde{\epsilon}^{\mu'\nu'\alpha'\beta'} = \det M \tilde{\epsilon}^{\mu\nu\alpha\beta}$$

Se M in particolare è una trasformazione di Lorentz, abbiamo che sotto cambio di base il simbolo di Levi-Civita trasforma in questo modo

$$\tilde{\epsilon}^{\mu'\nu'\alpha'\beta'} = \frac{1}{\det \Lambda} \Lambda^{\mu'}{}_{\mu} \Lambda^{\nu'}{}_{\nu} \Lambda^{\alpha'}{}_{\alpha} \Lambda^{\beta'}{}_{\beta} \tilde{\epsilon}^{\mu\nu\alpha\beta}$$

Un oggetto che trasforma in questa maniera sotto cambio di coordinate non è un tensore ma una *densità tensoriale*; tuttavia, sappiamo che le trasformazioni di Lorentz ortocrone proprie hanno determinante unitario, pertanto sotto tale sottogruppo il simbolo di Levi-Civita si comporta come un tensore controvariante di tipo $(4,0)$. Sotto parità o inversione temporale, viceversa, la legge di trasformazione del simbolo di Levi-Civita acquista un segno -: un oggetto che trasforma come un tensore soltanto sotto un certo sottogruppo del gruppo di trasformazioni che definisce il nostro spazio vettoriale viene detto *pseudotensore*, e si parla di *pseudotensore di Levi-Civita*. Possiamo abbassare gli indici con la metrica, introducendo lo pseudotensore di Levi-Civita di rango $(0,4)$:

$$\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} = \eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\sigma} \eta_{\alpha\tau} \eta_{\beta\delta} \epsilon^{\rho\sigma\tau\delta} = \det(\eta) \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} = -\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$$

Alcune delle proprietà dello pseudo tensore di Levi-Civita sono illustrate nell'**esercizio 2**.

1.3 Cinematica relativistica

Costruiremo adesso la cinematica relativistica in termini di vettori, forme e tensori: questi oggetti infatti hanno buone proprietà di trasformazione sotto il gruppo di Lorentz e ci permettono quindi di costruire facilmente degli invarianti. In cinematica relativistica la prima cosa che dobbiamo imparare a fare è la derivata rispetto al tempo; a differenza del caso galileiano, stavolta il tempo non è più un invariante: nel caso galileiano infatti prendendo la derivata rispetto al tempo di un qualsiasi vettore si ottiene ancora un vettore, perchè il tempo è assoluto, cioè non trasforma sotto il gruppo di Galileo. Questa proprietà è immediatamente persa in relatività speciale, perchè il gruppo di Lorentz in generale coinvolge anche la coordinata temporale, pertanto la derivata rispetto al tempo di un quadrivettore non sarà più in generale un quadrivettore.

1.3.1 Il tempo proprio

Uno stratagemma tipico quando si costruiscono invarianti è il seguente: se pensiamo ad una particella in moto, relativamente ad essa esiste un sistema di riferimento privilegiato, ovvero il sistema in cui la particella è ferma. Possiamo pertanto definire un oggetto, il *tempo proprio*, come il tempo misurato nel sistema di riferimento di riposo della particella: per costruzione, tale tempo è un invariante relativistico.

Supponiamo adesso che la particella segua una traiettoria $\vec{x}(t)$: vogliamo sapere quanto tempo proprio è trascorso quando nel nostro sistema di riferimento siamo passati dall'istante t all'istante $t + \delta t$. Il nostro sistema è in moto rispetto a quello di riposo della particella, dunque per il fenomeno della dilatazione dei tempi avremo

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma(t)} = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Tale relazione è anche la definizione di tempo proprio. Per un intervallo di tempo finito $[t_i, t_f]$, la variazione di tempo proprio è fornita dal seguente integrale:

$$\Delta\tau = \int_{t_i}^{t_f} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt$$

Ricordiamo adesso il punto fondamentale della relatività speciale: abbiamo un oggetto invariante, l' s^2 :

$$s^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

e in base ad esso possiamo definire una distanza invariante tra due eventi:

$$\delta s^2 = c^2(t - t_0)^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 - (z - z_0)^2$$

In forma infinitesima abbiamo

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Nel sistema di riferimento di riposo della particella si ha semplicemente $ds^2 = c^2 d\tau^2$, mentre nel nostro sistema di riferimento

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Le due quantità devono essere uguali, per cui

$$\begin{aligned} d\tau^2 &= dt^2 - \frac{1}{c^2} (dx^2 + dy^2 + dz^2) = dt^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \\ &\Rightarrow ds = cd\tau \end{aligned}$$

1.3.2 La quadrivelocità

Se il tempo proprio è un invariante relativistico, derivare rispetto ad esso lascia inalterate le proprietà di trasformazione sotto Lorentz degli oggetti che deriviamo. A questo punto generalizzare la derivata galileiana della posizione \vec{x} rispetto al tempo t è la seguente:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} \rightarrow \frac{dx^\mu}{d\tau} \equiv v^\mu$$

dove v^μ viene detta *quadrivelocità*. Se vogliamo scrivere la quadrivelocità nel nostro sistema di riferimento, derivando quindi rispetto al nostro tempo, dobbiamo utilizzare la relazione $d\tau = \frac{dt}{\gamma(t)}$:

$$v^\mu = \gamma(t) \frac{dx^\mu}{dt} = \begin{pmatrix} \gamma(t)c \\ \gamma(t)\vec{v} \end{pmatrix}$$

dove abbiamo usato $x^0 = ct$.

Per essere consistente con la relatività galileiana, la quadrivelocità deve restituire qualcosa di simile alla velocità usuale \vec{v} nel limite non relativistico, ovvero quando $v \ll c$. In tale limite, infatti, si ha $\frac{v^2}{c^2} \sim 0$, da cui $\gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \sim 1$ e la quadrivelocità si scrive come

$$v^\mu = \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix}$$

Dunque una delle quattro componenti è costante e non porta informazione cinematica. Un altro modo per vederlo è osservare che le quattro componenti della quadrivelocità non sono indipendenti: ce ne possiamo accorgere considerandone il modulo quadro

$$\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \equiv \eta_{\mu\nu} v^\mu v^\nu \equiv v^\mu v_\mu = \gamma^2 c^2 - \gamma^2 v^2 = \gamma^2 c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = c^2$$

cioè il modulo relativistico della quadrivelocità è fissato ed è pari alla velocità della luce: è un vincolo al quale non possiamo sottrarci.

1.3.3 La quadriaccelerazione

Dopo aver imparato a definire la quadrivelocità, per collegare la cinematica con la dinamica dobbiamo imparare a costruire anche il quadrimpulso. Classicamente si ha $\vec{p} = m\vec{v}$, e la più immediata generalizzazione è

$$p^\mu = mv^\mu$$

dove con gli stessi ragionamenti effettuati per il tempo proprio, indicheremo con m la massa della particella misurata *nel sistema di riferimento a riposo*: m quindi è un invariante relativistico, e questa definizione automaticamente fa dell'oggetto p^μ un quadrivettore. In componenti

$$p^\mu = \begin{pmatrix} m\gamma c \\ m\gamma\vec{v} \end{pmatrix}$$

Da quanto visto per la quadrivelocità, anche il modulo del quadrimpulso è fissato e vale $p^\mu p_\mu = m^2 c^2$; inoltre per piccole velocità l'informazione portata dal quadrimpulso si riduce a quella dell'impulso spaziale \vec{p} , ma ci possiamo chiedere che significato abbia la componente 0. Per fare questo studiamo il termine $m\gamma c$ all'ordine successivo:

$$m\gamma c = \frac{mc}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \sim mc \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right) = mc + \frac{m}{2} \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{c} \left(mc^2 + \frac{1}{2} mv^2 + O\left(\frac{v^4}{c^4}\right) \right)$$

Il secondo addendo non è altro che l'energia cinetica della particella, mentre il termine mc^2 è un termine costante, naturalmente assente in una teoria non relativistica. In meccanica galileiana infatti l'energia è definita a meno di una costante additiva, e la presenza o meno di un termine costante è del tutto irrilevante: dunque, interpretare la componente 0 del quadrimpulso come energia della particella è consistente con il limite non relativistico. Tuttavia questo ci fa capire che in meccanica relativistica l'energia non è più arbitraria, perchè la natura quadrivettoriale del quadrimpulso (in particolare l'invarianza del suo modulo sotto trasformazioni di Lorentz) è strettamente legata alla presenza di questa ben precisa costante.

Questa differenza tra fisica galileiana e fisica relativistica è dovuta al fatto che abbiamo ingrandito il gruppo di simmetria della teoria: in meccanica relativistica il gruppo di Lorentz infatti tratta simmetricamente tempo e spazio, dunque le componenti temporali sono legate a quelle spaziali, mentre in meccanica classica il gruppo delle rotazioni interessa soltanto le componenti spaziali. Questo implica che le grandezze conservate, energia e impulso, non possono più essere definite indipendentemente.

1.4 Dinamica relativistica

1.4.1 La quadriforza e il quadrimomento

Una volta che abbiamo il quadrimpulso, per arrivare alla dinamica è sufficiente generalizzare la seconda legge:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \rightarrow \frac{dp^\mu}{dt} = \mathcal{F}^\mu$$

dove \mathcal{F}^μ è la *quadriforza*. In questo momento però non sappiamo cosa sia e che espressione abbia una quadriforza, a parte la proprietà ovvia di dover essere un quadrivettore. In realtà possiamo dedurre alcune proprietà generali della quadriforza semplicemente dal fatto di aver scritto una uguaglianza tra quadrivettori. Prima di tutto possiamo riscrivere la relazione derivando non più rispetto al tempo proprio ma rispetto al tempo di un sistema di riferimento inerziale generico t :

$$\gamma(t) \frac{dp^\mu}{dt} = \mathcal{F}^\mu \Rightarrow \frac{dp^\mu}{dt} = \frac{1}{\gamma(t)} \mathcal{F}^\mu$$

Nel limite non relativistico, il membro di sinistra tende alla derivata $\frac{d\vec{p}}{dt}$ che si trova nella seconda legge della dinamica, dunque

$$\frac{dp^i}{dt} = \frac{1}{\gamma} \mathcal{F}^i \Leftrightarrow \frac{dp^i}{dt} = F^i$$

per cui

$$\frac{1}{\gamma} \mathcal{F}^i = F^i$$

Allora le componenti spaziali della quadriforza devono tendere nel limite non relativistico alla forza nella sua versione galileiana. A volte si preferisce non usare le \mathcal{F}^i ma la loro espressioni in termini delle F^i , ovvero le componenti della forza misurata nel sistema di riferimento dell'osservatore:

$$\mathcal{F}^i = \gamma F^i$$

Vediamo cosa discende dal fatto che il prodotto $p^\mu p_\mu$ è fissato ed è pari a $m^2 c^2$:

$$p_\mu \frac{dp^\mu}{d\tau} = p_\mu \mathcal{F}^\mu$$

ma il primo membro non è altro che $\frac{d}{d\tau} (\frac{1}{2} p^\mu p_\mu)$, cioè $\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} m^2 c^2 = 0$. Dunque la quadriforza è sempre ortogonale al quadrimpulso, o equivalentemente alla quadrivelocità:

$$\mathcal{F}^\mu v_\mu = 0$$

$$\gamma c \mathcal{F}^0 - \gamma \vec{v} \cdot \vec{\mathcal{F}} \Rightarrow \mathcal{F}^0 = \frac{1}{c} \vec{v} \cdot \vec{\mathcal{F}}$$

cioè \mathcal{F}^0 non è arbitrario ma è univocamente determinato dalle altre componenti. Ma poichè $\mathcal{F}^i = \gamma F^i$:

$$\mathcal{F}^0 = \frac{\gamma}{c} \vec{F} \cdot \vec{v}$$

da cui

$$\frac{dp^0}{d\tau} = \mathcal{F}^0 = \frac{\gamma}{c} \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Ricordando che $p^0 = \frac{E}{c}$, si trova infine

$$\frac{1}{c} \frac{dE}{d\tau} = \frac{\gamma}{c} \vec{F} \cdot \vec{v} \Rightarrow \frac{dE}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

In definitiva, la quarta componente della seconda equazione della dinamica relativistica non è nient'altro che il *teorema delle forze vive*: la derivata rispetto al tempo dell'energia cinetica è pari alla potenza dissipata dalle forze, in altre parole abbiamo riottenuto il principio di conservazione dell'energia. Questo risultato è sempre una conseguenza dell'invarianza di Lorentz, che ci fa trattare allo stesso livello sia il tempo che lo spazio: infatti le tre componenti spaziali della seconda legge della dinamica ci dicono come variano col tempo gli impulsi, ovvero le grandezze conservate associate all'invarianza sotto traslazioni spaziali, pertanto per simmetria era necessario che ci fosse una quarta equazione che ci dicesse come varia col tempo l'energia, associata all'invarianza sotto traslazioni temporali.

Per un sistema di particelle, in meccanica classica, se la somma delle forze agenti sul sistema è nulla, l'impulso spaziale è conservato; in meccanica relativistica, se la somma delle quadriforze agenti sul sistema è nulla, otteniamo con lo stesso argomento la conservazione dell'impulso e dell'energia:

$$\sum p^\mu = \text{costante}$$

Possiamo definire inoltre un tensore antisimmetrico, detto *quadrimento della forza*:

$$M^{\mu\nu} = x^\mu \mathcal{F}^\nu - x^\nu \mathcal{F}^\mu$$

Se la somma dei quadrimomenti è nulla, ovvero $\sum_i M_i^{\mu\nu} = 0$, la grandezza

$$L^{\mu\nu} = \sum_i (x_i^\mu p_i^\nu - x_i^\nu p_i^\mu)$$

ovvero la generalizzazione del momento angolare, è conservata. L'oggetto $L^{\mu\nu}$ è antisimmetrico, e ha quindi 6 componenti indipendenti: infatti in relatività ristretta richiedere la sua conservazione equivale a richiedere l'invarianza sotto il gruppo di Lorentz, che è un gruppo a 6 parametri.

1.5 La particella libera relativistica

L'azione di una particella libera relativistica rappresenta il prototipo di quello che accadrà in relatività generale: tale azione condivide molte proprietà con l'azione di Einstein, ad esempio la difficoltà di quantizzazione.

1.5.1 Approccio lagrangiano

Una lagrangiana per la particella libera dovrà innanzitutto fornire le giuste equazioni di moto, ovvero

$$\dot{p}^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau} = 0$$

dove τ è il tempo proprio. Tale equazione di moto coinvolge dei quadrivettori (il quadrimpulso), e viene derivata dalle equazioni di Eulero-Lagrange

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = 0$$

che a loro volta coinvolgono la forma $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$: affinché le equazioni del moto abbiano le giuste proprietà di trasformazione, la lagrangiana dovrà essere complessivamente invariante sotto Lorentz, cioè uno scalare; inoltre, la lagrangiana dovrà essere quadratica nelle velocità \dot{x}^μ .

Avendo a che fare con una particella libera, l'unico oggetto rilevante è \dot{x}^μ , e l'unico invariante che sappiamo costruire con esso è $\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu$; la radice di questa quantità $\sqrt{\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu}$ ha un ben preciso significato:

$$\sqrt{\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu} = \sqrt{\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} = \frac{ds}{d\tau} = c$$

data la relazione tra ds e il tempo proprio $d\tau$. Possiamo quindi costruire la seguente lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \alpha \sqrt{\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu}$$

dove α è una costante arbitraria che non modifica le equazioni del moto. La prima cosa che possiamo fare per capire se la costruzione ha senso è guardare al limite non relativistico di questo oggetto: in tal caso la lagrangiana si deve ridurre al termine di energia cinetica $\frac{1}{2}mv^2$. In effetti si ha

$$\alpha \sqrt{\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu} = \alpha \dot{x}^0 \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \frac{\dot{x}^i \dot{x}^i}{\dot{t}^2}} = \alpha \dot{x}^0 \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^i}{dt}} = \alpha \dot{x}^0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Inserendo nell'azione si ottiene

$$S = \alpha \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \frac{dx^0}{d\tau} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Supponendo che il tempo x^0 sia una funzione crescente del tempo proprio, possiamo considerare il termine $\frac{dx^0}{d\tau} = c \frac{dt}{d\tau}$ come lo jacobiano per il cambio di variabile $\tau \rightarrow t$, da cui

$$S = \alpha c \int_{t(\tau_1)}^{t(\tau_2)} dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \sim \alpha c \int_{t(\tau_1)}^{t(\tau_2)} dt \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right) = \alpha c (t(\tau_2) - t(\tau_1)) - \frac{\alpha c}{2c^2} \int_{t(\tau_1)}^{t(\tau_2)} dt v^2$$

Affinchè le equazioni di moto risultanti da questa azione siano quelle della particella libera non relativistica, si dovrà avere

$$\alpha = -mc$$

Osserviamo inoltre che il termine costante $\alpha c(t_2 - t_1)$ non altera il risultato, essendo una costante.

Consideriamo allora le equazioni del moto derivanti dalla lagrangiana

$$\mathcal{L} = -mc\sqrt{\frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx_\mu}{d\lambda}} \equiv -mc\sqrt{x'^\mu x'_\mu}$$

dove λ è un generico parametro:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'^\mu} &= 0 \\ -mc \frac{d}{d\lambda} \frac{\partial \left(\sqrt{x'^\nu x'_\nu} \right)}{\partial x'^\mu} &= -mc \frac{d}{d\lambda} \frac{x'_\mu}{\sqrt{x'^\nu x'_\nu}} = -c \frac{d}{d\lambda} \frac{mx'_\mu}{\sqrt{x'^\nu x'_\nu}} = 0 \end{aligned}$$

Osserviamo che $\pi_\mu \equiv -mc \frac{x'_\mu}{\sqrt{x'^\nu x'_\nu}}$ è anche il momento coniugato alla variabile x^μ , rispetto al parametro λ . Le equazioni del moto così ottenute sono molto simili a quelle che ci interessano, infatti si riscrivono come

$$\frac{d\pi_\mu}{d\lambda} = 0$$

Osserviamo inoltre che tale espressione è in realtà indipendente dal parametro che corre sulla traiettoria: infatti, se $\lambda' = \lambda'(\lambda)$ è una funzione crescente di λ abbiamo

$$\begin{aligned} 0 &= -c \frac{d}{d\lambda} \frac{mx'_\mu}{\sqrt{x'^\nu x'_\nu}} = -c \left(\frac{d\lambda'}{d\lambda} \right) \frac{d}{d\lambda'} \frac{\frac{d\lambda'}{d\lambda}}{\left| \frac{d\lambda'}{d\lambda} \right|} \frac{m \frac{\partial x_\mu}{\partial \lambda'}}{\sqrt{\frac{dx^\nu}{d\lambda'} \frac{dx_\nu}{d\lambda'}}} = -c \left(\frac{d\lambda'}{d\lambda} \right) \frac{d}{d\lambda'} \frac{m \frac{dx_\mu}{d\lambda'}}{\sqrt{\frac{dx^\nu}{d\lambda'} \frac{dx_\nu}{d\lambda'}}} = 0 \\ &\Rightarrow -c \frac{d}{d\lambda'} \frac{m \frac{dx_\mu}{d\lambda'}}{\sqrt{\frac{dx^\nu}{d\lambda'} \frac{dx_\nu}{d\lambda'}}} \end{aligned}$$

Se a questo punto scegliamo come parametro il tempo proprio, otteniamo le equazioni del moto che cerchiamo

$$-c \frac{d}{d\tau} \frac{m \frac{dx_\mu}{d\tau}}{\sqrt{\frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx_\nu}{d\tau}}} = -c \frac{d}{d\tau} \frac{p^\mu}{c} = -\frac{dp^\mu}{d\tau} = 0$$

La differenza sostanziale rispetto alla meccanica, dove il tempo era assoluto, sta nel fatto che stavolta abbiamo dovuto specificare il tempo rispetto al quale calcoliamo le equazioni del moto.

1.5.2 Approccio hamiltoniano

Osserviamo che l'arbitrarietà di riparametrizzazione è presente anche a livello dell'azione:

$$S = -mc \int d\tau \sqrt{\frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx_\mu}{d\tau}} = -mc \int d\tau' \frac{d\tau}{d\tau'} \sqrt{\frac{dx^\mu}{d\tau'} \frac{dx_\mu}{d\tau'} \left(\frac{d\tau'}{d\tau} \right)^2}$$

Sempre supponendo che $\tau'(\tau)$ sia una funzione crescente, possiamo estrarre dalla radice il termine $\frac{d\tau'}{d\tau}$ e cancellare lo jacobiano; in questo modo

$$S = -mc \int d\tau' \sqrt{\frac{dx^\mu}{d\tau'} \frac{dx_\mu}{d\tau'}}$$

ovvero l'azione è la stessa, ma è espressa in termini del nuovo parametro τ' : questo ci permette di scegliere il parametro che preferiamo per parametrizzare la traiettoria della particella.

Se vogliamo costruire l'hamiltoniana per la particella libera dobbiamo come prima cosa calcolare i momenti coniugati:

$$\pi_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_\mu} = -mc \frac{\dot{x}^\mu}{\sqrt{\dot{x}^\nu \dot{x}_\nu}}$$

dove \dot{x}_μ indica la derivata rispetto ad un parametro qualsiasi, e π_μ è il momento coniugato a x^μ . Il suo modulo è dato da

$$\pi_\mu \pi^\mu = m^2 c^2 \frac{\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu}{\dot{x}^\nu \dot{x}_\nu} = m^2 c^2$$

ovvero è una costante: scopriamo che i momenti coniugati soddisfano alla stessa condizione a cui soddisfa il quadrimpulso di una particella di massa m . Questo rappresenta un problema, perchè nel formalismo hamiltoniano la traiettoria \dot{x}_μ e il suo momento coniugato π_μ non hanno nessun vincolo da soddisfare, se non quelli eventualmente derivanti in un secondo momento dalle equazioni del moto: adesso viceversa troviamo che π_μ deve soddisfare un vincolo ulteriore e indipendente; in altre parole, questo lega tra loro le quattro componenti di π_μ , a differenza delle componenti di \dot{x}_μ che sono indipendenti, per cui la relazione tra velocità e momenti coniugati non è invertibile. Nel formalismo hamiltoniano, in casi come questo si parla di *sistema hamiltoniano singolare*, e i vincoli che legano velocità e momenti vengono detti *vincoli primari* del sistema: la relazione $\pi_\mu \pi^\mu = m^2 c^2$ è quindi un vincolo primario del sistema. Per il momento trascuriamo questo vincolo, e proviamo a calcolare comunque l'hamiltoniana:

$$\mathcal{H} = \pi_\mu \dot{x}^\mu - \mathcal{L} = -mc \frac{\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu}{\sqrt{\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu}} - \mathcal{L} = -mc \sqrt{\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu} + mc \sqrt{\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu} = 0$$

Dunque, un'altra particolarità di questo sistema è che la sua hamiltoniana è nulla. Proviamo a scrivere l'azione nel formalismo hamiltoniano, ricordando che sono presenti dei vincoli:

$$S = \int d\lambda \pi_\mu \dot{x}^\mu - \mathcal{H} + N(\lambda) (\pi_\mu \pi^\mu)$$

dove $N(\lambda)$ è una funzione che agisce da moltiplicatore di Lagrange. Affinchè tutto sia consistente è necessario che il vincolo sia conservato nell'evoluzione temporale, in altre parole che la sua derivata rispetto al parametro sia nulla. Nel formalismo hamiltoniano, la derivata rispetto al tempo di un oggetto si calcola mediante la sua parentesi di Poisson con l'hamiltoniana

$$\{\mathcal{H}, \pi^\mu \pi_\mu - m^2 c^2\} = 0$$

Il membro di sinistra ha due modi per essere nullo: o è veramente nullo, oppure è proporzionale al vincolo stesso, essendo quest'ultimo nullo sulle soluzioni delle equazioni del moto. Nel nostro caso comunque l'hamiltoniana è nulla dunque le parentesi di Poisson sono banalmente nulle, ma può capitare che il secondo membro non si annulli identicamente, neanche se usiamo il vincolo stesso o altri eventuali vincoli primari: in tal caso, dovendo comunque imporre l'annullamento del primo membro, si dice che abbiamo generato un *vincolo secondario*.

In realtà, l'hamiltoniana corretta dovrà contenere tutti i vincoli: questo comporta che debbano annullarsi non soltanto la parentesi di Poisson dell'hamiltoniana coi vincoli, ma anche le parentesi tra vincoli. Si possono creare allora due situazioni: o le parentesi tra i vincoli restituiscono qualcosa di proporzionale ai vincoli stessi, per cui si annullano (si parla di vincoli di *prima classe*) oppure questo non accade (vincoli di *seconda classe*). Quando i vincoli sono di seconda classe è possibile determinare le funzioni $N(\lambda)$ ed avere una evoluzione completamente determinata; se invece i vincoli sono di prima classe non c'è modo di determinarle e rimangono funzioni arbitrarie: i vincoli di prima classe sono *generatori di simmetrie locali* del sistema, o simmetrie di gauge. Se siamo in presenza di simmetria di gauge l'evoluzione di un sistema non può essere determinata, perchè può essere modificata con una trasformazione di gauge ottenendo un qualcosa che è completamente equivalente dal punto di vista fisico: non esiste modo di risolvere in maniera completa un sistema con invarianza di gauge senza rompere l'invarianza di gauge stessa.

Nella formulazione hamiltoniana l'azione diventa quindi

$$S = \int d\lambda \pi^\mu \dot{x}_\mu - N(\lambda)(\pi^\mu \pi_\mu - m^2 c^2)$$

Il vincolo $\pi^\mu \pi_\mu - m^2 c^2 = 0$ è primario e di prima classe, perchè ha parentesi di Poisson nulle con se stesso. Faremo vedere che esso genera le trasformazioni di simmetria del sistema, definendo la seguente funzione

$$G = -\frac{1}{2} f(\lambda)(\pi^\mu \pi_\mu - m^2 c^2)$$

Consideriamone la parentesi di Poisson con x^α :

$$\{G, x^\alpha\}$$

Dal formalismo hamiltoniano ricordiamo che $\{x^\alpha(\lambda), \pi_\beta(\lambda)\} = \delta_\beta^\alpha$ e $\{\pi_\mu \pi^\mu, x^\alpha(t)\} = -2\dot{x}^\alpha$, da cui

$$\{G, x^\alpha\} = f(\lambda)\dot{x}^\alpha$$

Abbiamo visto che il sistema è invariante sotto riparametrizzazioni temporali, ovvero trasformazioni della forma $\lambda \rightarrow \lambda' = \lambda(\lambda)$. Se la riparametrizzazione è infinitesima si ha

$$\lambda' = \lambda + f(\lambda)$$

$$\Rightarrow x^\mu(\lambda) \rightarrow x^\mu(\lambda + f(\lambda)) \sim x^\mu(\lambda) + f(\lambda)\dot{x}^\mu(\lambda) \equiv x^\mu + \delta x^\mu$$

ovvero la variazione nella variabile x^μ dovuta alla riparametrizzazione infinitesima è data dalla parentesi di Poisson della stessa variabile con la funzione G , proporzionale al vincolo: in altre parole il vincolo genera (nel senso dei gruppi) la forma infinitesima della simmetria del sistema. A questo punto è chiaro perchè l'hamiltoniana debba essere nulla: a causa dell'invarianza di gauge non possiamo prevedere l'evoluzione temporale di nessuna delle sue variabili, infatti qualunque soluzione dell'equazione del moto, moltiplicata per $f(\lambda)$, continua ad essere soluzione.

1.5.3 Il limite di massa nulla

In relatività speciale il fatto di avere una particella a massa nulla non costituisce un problema, ad esempio poichè per un'onda elettromagnetica si ha la relazione di dispersione $E = |\vec{k}|$, il quadrimpulso del fotone soddisfa a $p^\mu p_\mu = 0$: se definiamo la massa come la radice del prodotto $p_\mu p^\mu$, il fotone avrà chiaramente massa nulla. Possiamo però chiederci quale sia l'azione che descrive il moto di un raggio luminoso o di una particella a massa nulla; infatti, se mandiamo a zero la massa nell'espressione dell'azione per la particella libera, otteniamo un'azione nulla:

$$S = -mc \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \frac{dx^0}{d\tau} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \rightarrow S = 0$$

Questo accade perchè la costruzione dell'azione per una particella libera si basa sulla costruzione di un invariante relativistico che è il tempo proprio: esso è definito come il tempo misurato nel sistema di riferimento in cui la particella è a riposo, ma per una particella a massa nulla tale sistema non esiste, dunque dovremo cambiare il punto di partenza. Nel formalismo hamiltoniano si ha

$$S = \int d\lambda p^\mu \dot{x}_\mu - N(\lambda)(p^\mu p_\mu)$$

e l'espressione è assolutamente regolare. Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange restituisce le due equazioni:

$$\frac{\delta S}{\delta p_\mu} = 0 \Rightarrow \dot{x}_\mu - 2N(\lambda)p_\mu = 0$$

$$\frac{\delta S}{\delta N} = 0 \Rightarrow p_\mu p^\mu = 0$$

$$\frac{\delta S}{\delta x^\mu} = 0 \Rightarrow \dot{p}^\mu = 0$$

La prima equazione ha come risultato

$$p_\mu = \frac{1}{2N(\lambda)} \dot{x}_\mu$$

e ci ricorda semplicemente che la relazione tra velocità e momenti non è invertibile, a causa della presenza della funzione arbitraria $N(t)$.

Se vogliamo descrivere una particella a massa nulla, in definitiva, possiamo utilizzare “solo” il formalismo hamiltoniano. Formalmente, se utilizziamo la relazione tra impulso e velocità per tornare nel formalismo lagrangiano:

$$S = \int d\lambda (p^\mu \dot{x}_\mu) - N(\lambda)(p^\mu p_\mu - m^2 c^2) \rightarrow S = \int d\lambda \frac{\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu}{2N(\lambda)} + N(\lambda) m^2 c^2$$

possiamo scrivere anche le equazioni del moto per $N(\lambda)$:

$$-\frac{\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu}{2N^2(\lambda)} + m^2 c^2 = 0$$

Queste equazioni possono essere risolte per $N(\lambda)$ soltanto se $m \neq 0$: se $m = 0$ $N(t)$ resta indeterminata, e le equazioni del moto ci informano semplicemente che per una particella di tipo luce $\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu = 0$. Nella formulazione lagrangiana, dunque, l'azione corretta per una particella a massa nulla è la seguente

$$S = \int d\lambda \frac{\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu}{2N(\lambda)}$$

Così scritta, $N(\lambda)$ ha una interessante interpretazione geometrica: essa non è nient'altro che una *metrica* scelta su una linea di universo. Poichè la scelta di una metrica in una dimensione corrisponde alla scelta di una funzione arbitraria (tutte le metriche sono equivalenti in una dimensione), l'arbitrarietà di $N(t)$ corrisponde all'arbitrarietà della scelta della metrica.

1.6 Teoria dei campi classica: l'elettromagnetismo

Vediamo dal punto di vista della teoria dei campi come si può costruire una teoria relativistica, considerando il caso più familiare dell'elettromagnetismo. Nel vuoto e in presenza di correnti il campo elettromagnetico è completamente specificato dalla risoluzione delle seguenti equazioni:

$$1) \nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \quad ; \quad 2) \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$3) \nabla \times \vec{E} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad ; \quad 4) \nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{J}$$

Se prendiamo la divergenza di 4) otteniamo

$$0 = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{E}) + \frac{4\pi}{c} \nabla \cdot \vec{J} \Rightarrow \frac{4\pi}{c} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} \right) = 0$$

ovvero riotteniamo l'equazione di continuità, che ci informa che la corrente elettromagnetica è conservata. Se consideriamo il rotore di 4), abbiamo

$$\frac{4\pi}{c} \nabla \times \vec{J} = \nabla \times \left(\nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

Ma $\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{B}) - \Delta \vec{B}$ da cui

$$\frac{4\pi}{c} \nabla \times \vec{J} = -\Delta \vec{B} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

Applicando il rotore anche alla 3):

$$0 = \nabla \times \left(\nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = \nabla (\nabla \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{4\pi}{c} \nabla \times \vec{J} = -\Delta \vec{B} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \\ -4\pi \nabla \rho - \frac{4\pi}{c} \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} = -\Delta \vec{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \end{cases}$$

Il contenuto dinamico delle equazioni di Maxwell sta nel fatto che i campi \vec{E} e \vec{B} soddisfano delle equazioni d'onda con sorgenti; in assenza di sorgenti tali equazioni si riducono all'equazione di D'Alembert, dunque c'è propagazione del campo elettromagnetico anche nel vuoto. Di solito, date queste equazioni, ci accorgiamo che le equazioni 2) e 3) possono essere risolte esattamente e si può scrivere i campi elettrico e magnetico in termini di potenziali:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \Rightarrow \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla \phi \Rightarrow \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \phi$$

Possiamo prendere queste espressioni per il campo elettrico e magnetico e introdurle nelle restanti equazioni di Maxwell 1) e 4), in questo modo scopriamo che

$$-\Delta \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{A}) = 4\pi \rho$$

$$\nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \phi + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) + \frac{4\pi}{c} \vec{J}$$

Un modo più trasparente di scriverle è

$$-\Delta \phi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = \frac{4\pi}{c} \rho c$$

$$-\Delta \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \nabla \left(\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = \frac{4\pi}{c} \vec{J}$$

Vediamo che c'è una prima struttura universale nelle due equazioni, corrispondente al d'alambertiano, poi abbiamo un termine un pò più complicato, infine a secondo membro le sorgenti.

1.6.1 Invarianza di gauge

La soluzione in termini di potenziali non è unica, perchè \vec{A} e ϕ sono determinati a meno di funzioni arbitrarie:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \nabla \times \vec{A}' \quad \vec{A}' = \vec{A} - \nabla f$$

Se facciamo variare \vec{A} del gradiente di una funzione però, \vec{E} sembra cambiare:

$$\vec{E} \rightarrow \vec{E}' = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} + \frac{1}{c} \nabla \frac{\partial f}{\partial t} - \nabla \phi$$

ma tale variazione può essere riassorbita in una ridefinizione di ϕ come

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi + \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}$$

Dunque sotto le trasformazioni

$$\begin{cases} \vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} - \nabla f \\ \phi \rightarrow \phi' = \phi + \frac{\partial f}{\partial t} \end{cases}$$

le equazioni di Maxwell restano invariate.

La gauge di Lorentz

Consideriamo adesso la combinazione

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

e ridefiniamo i potenziali secondo la nostra prescrizione:

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \rightarrow \nabla \cdot \vec{A} - \Delta f + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

Possiamo chiederci se siamo in grado di determinare una funzione f tale che i nuovi potenziali soddisfino a

$$\nabla \cdot \vec{A}' + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi'}{\partial t} = 0$$

Il problema consiste semplicemente nel trovare la funzione di Green dell'operatore d'alambertiano, infatti

$$\nabla^2 f - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \equiv \square f = -\nabla \cdot \vec{A} - \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

Se G è tale che

$$\square G(x) = \delta^4(x)$$

allora f è semplicemente

$$f = - \int d^4 x' G(x - x') \left(\nabla \cdot \vec{A}(x') + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t}(x') \right)$$

Dunque, poichè conosciamo la forma delle funzioni di Green del d'alambertiano, possiamo sempre selezionare dei particolari \vec{A} e ϕ in modo tale che la combinazione $\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t}$ si annulli: la scelta della funzione f si dice *scelta della gauge*, e questa particolare gauge prende il nome di *gauge di Lorentz*. Se scegliamo la gauge di Lorentz, le equazioni per i potenziali si semplificano notevolmente:

$$\begin{cases} -\Delta \phi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c} \rho c \\ -\Delta \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} \end{cases}$$

Quindi anche i potenziali, in questa gauge, soddisfano a delle equazioni d'onda in presenza di sorgenti.

La gauge di Coulomb

La gauge di Lorentz tratta simmetricamente ϕ ed \vec{A} , e per entrambi abbiamo delle equazioni d'onda, ma poichè la scelta di gauge è arbitraria, potevamo sceglierne una qualunque altra. Ad esempio scegliamo una gauge in cui $\nabla \cdot \vec{A} = 0$: anche in questo caso il problema consiste nel trovare una funzione f tale che

$$\Delta f = \nabla \cdot \vec{A}$$

La funzione di Green per il laplaciano si può ottenere immediatamente da considerazioni dimensionali: infatti l'equazione

$$\Delta G(\vec{x}) = \delta^3(x)$$

è invariante sotto rotazioni, dunque G può essere soltanto funzione del modulo di \vec{x} . Ma se mandiamo \vec{x} in $\lambda\vec{x}$, per le proprietà della delta di Dirac si ha

$$\frac{1}{\lambda^2} \Delta G(\lambda|\vec{x}|) = \delta^3(\lambda|\vec{x}|) = \frac{1}{\lambda^3} \delta^3(x)$$

dunque per pareggiare il conto delle λ è necessario che G sia proporzionale a $\frac{1}{r}$, in particolare sceglieremo

$$G(r) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{r}$$

In questo modo la funzione f si ottiene come

$$f = -\frac{1}{4\pi} \int d^3x' \frac{\nabla \cdot \vec{A}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

Vediamo adesso come diventano in questa nuova gauge le equazioni per i potenziali:

$$\begin{cases} \Delta\phi = -4\pi\rho \\ -\Delta\vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla\phi \end{cases}$$

dunque soltanto l'equazione per il potenziale vettore rimane una equazione d'onda, ovvero in questa gauge, detta *gauge di Coulomb*, soltanto il potenziale vettore si propaga. Il potenziale ϕ viene determinato in termini delle sorgenti come

$$\phi(t, \vec{x}) = \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

Sostituendo questa soluzione nella seconda equazione si ottiene:

$$-\Delta\vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \equiv \vec{J}^\perp$$

dove la scrittura \vec{J}^\perp è giustificata dal fatto che $\nabla \cdot \vec{J}^\perp = 0$ se \vec{J} è una corrente conservata.

1.6.2 Conteggio dei gradi di libertà

Osserviamo che siamo partiti con sei campi, tre componenti per il campo elettrico e altre tre per quello magnetico; abbiamo quindi risolto due equazioni di Maxwell introducendo un potenziale vettore e un potenziale scalare, riducendoci a quattro campi indipendenti; abbiamo infine fissato una combinazione utilizzando l'invarianza di gauge, togliendo un ulteriore grado di libertà. Ma in realtà sappiamo che i gradi di libertà totali del campo elettromagnetico non sono tre ma due, infatti rimane una ulteriore arbitrarietà che possiamo utilizzare per diminuire il numero di campi indipendenti: possiamo chiederci se una volta scelta una gauge, ad esempio quella di Lorentz, esista una f che permette di ridefinire i potenziali rimanendo nella stessa gauge. Nel caso della gauge di Lorentz banalmente basta utilizzare una funzione f che soddisfi l'equazione delle onde:

$$\square f = 0$$

ovvero f deve essere una *funzione armonica*. Una volta in gauge di Lorentz quindi abbiamo una arbitrarietà di cambio di gauge, detta *gauge residua*, utilizzando funzioni armoniche:

$$\phi \rightarrow \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} - \nabla f$$

in assenza di sorgenti, anche i potenziali soddisfano l'equazione delle onde, il che significa che essi sono funzioni armoniche: se abbiamo una funzione armonica, la derivata di una funzione armonica è ancora una funzione armonica, dunque possiamo sempre scegliere una f opportuna in modo che

$$\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

In questo modo arriviamo a due sole componenti indipendenti dei potenziali che si propagano: questo conteggio ci informa che un'onda elettromagnetica ha soltanto due polarizzazioni indipendenti.

Osserviamo che questo conteggio è avvenuto in due step: la condizione che fa scendere da 4 a 3 gradi di libertà è stata imposta senza bisogno di tener conto delle equazioni del moto, sfruttando unicamente l'invarianza di gauge; il passaggio da 3 a 2, invece, è dovuto proprio alle equazioni del moto, che restringono i campi ad essere delle funzioni armoniche. Col linguaggio della meccanica quantistica, una particella di spin 1 ha in linea di principio tre gradi di libertà, ma questi si riducono a due se la massa è nulla, in quanto le uniche direzioni possibili per lo spin sono quella parallela e quella antiparallela alla direzione di propagazione. Il fotone, il quanto del campo elettromagnetico, è una particella di spin 1 ma in base alle equazioni del moto ha massa nulla:

$$-\Delta\phi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \vec{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0$$

ovvero il modulo quadro del quadrimpulso relativistico dell'onda è sempre nullo: se interpretiamo questa quantità come la massa al quadrato del fotone, questa è necessariamente nulla e il fotone ha quindi solo due gradi di libertà.

1.6.3 Equazioni di Maxwell in forma covariante

In gauge di Lorentz i potenziali soddisfano alle equazioni

$$\begin{cases} \square\phi = \frac{4\pi}{c} (\rho c) \\ \square\vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} \end{cases}$$

Vogliamo provare a riscrivere le equazioni di Maxwell in forma manifestamente covariante: il primo passo è passare in gauge di Lorentz, per tentare di capire quali sono le loro proprietà di trasformazione in questa gauge.

Vogliamo arrivare ad imporre che le equazioni di Maxwell siano invarianti sotto trasformazioni di Lorentz. Iniziamo a scriverle in questo modo:

$$\square \begin{pmatrix} \phi \\ \vec{A} \end{pmatrix} = \frac{4\pi}{c} \begin{pmatrix} \rho c \\ \vec{J} \end{pmatrix}$$

dove $\square \equiv \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$. Definiamo l'oggetto a quattro componenti

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \nabla \right) \equiv \partial_\mu$$

Possiamo mostrare che questo oggetto trasforma come una forma sotto Lorentz, infatti se $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ è un cambio di coordinate:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\mu} &= \frac{\partial(x')^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial(x')^\nu} = \Lambda^\nu{}_\mu \frac{\partial}{\partial(x')^\nu} \\ &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \Lambda^\mu{}_\nu \frac{\partial}{\partial(x')^\nu} \end{aligned}$$

Il d'alambertiano può allora essere visto come il prodotto scalare con se stesso di ∂_μ , fatto con la metrica di Lorentz:

$$\square = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \eta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \eta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial(x')^\alpha} \Lambda^\alpha{}_\mu \frac{\partial}{\partial(x')^\beta} \Lambda^\beta{}_\nu$$

ma per definizione di trasformazione di Lorentz

$$\eta^{\mu\nu} \Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\beta{}_\nu = \eta^{\alpha\beta}$$

quindi

$$-\square = \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial(x')^\alpha} \frac{\partial}{\partial(x')^\beta} = -\square'$$

Vediamo allora che sotto trasformazioni di Lorentz l'operatore d'onda va in se stesso, ovvero si comporta come uno scalare. Affinchè le equazioni di Lorentz siano covarianti, è necessario che i due oggetti $\begin{pmatrix} \phi \\ \vec{A} \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} \rho c \\ \vec{J} \end{pmatrix}$ abbiano le stesse proprietà di trasformazione sotto Lorentz.

La quadricorrente

La densità di carica di una particella in moto nello spazio è data da

$$\rho = e\delta^3(\vec{x} - \vec{x}(t))$$

mentre la sua densità di corrente

$$\vec{J} = e\delta^3(\vec{x} - \vec{x}(t))\vec{v}$$

Possiamo riorganizzare ρ e \vec{J} in un oggetto J^μ così definito:

$$J^\mu = ec \int_\gamma \dot{x}^\mu \delta^4(x^\mu - x^\mu(\tau)) d\tau$$

dove γ è la traiettoria della particella, e τ è il tempo proprio, anche se formalmente possiamo sempre passare ad un qualunque altro tempo dato che anche questa definizione presenta invarianza sotto riparametrizzazione temporale. È possibile dimostrare che J^μ trasforma sotto Lorentz come un quadrivettore: per prima cosa cambiamo parametro e scegliamo il tempo usuale t

$$J^\mu = ec \int_\gamma \frac{dx^\mu}{d\tau} \delta^4(x^\mu - x^\mu(\tau)) d\tau = ec \int_\gamma \frac{dx^\mu}{dt} \delta^4(x^\mu - x^\mu(t)) dt$$

Poichè il legame tra $x^0(t)$ e t è una costante di proporzionalità

$$\delta(x^0 - x^0(t)) = \delta(x^0 - ct) = \frac{1}{c} \delta\left(\frac{x^0}{c} - t\right)$$

possiamo effettuare l'integrale sul tempo utilizzando la delta temporale:

$$J^\mu = ec \frac{1}{c} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}(t)) \frac{dx^\mu}{dt}$$

$$J^0 = ec \delta^3(\vec{x} - \vec{x}(t)) = \rho c$$

$$\vec{J} = e\vec{v} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}(t))$$

Le componenti di J^μ quindi non sono altro che la densità di carica e di corrente per una particella in moto. Poichè qualsiasi corrente si può costruire come somma delle correnti delle varie cariche che la costruiscono, una volta determinate le proprietà di trasformazione di J^μ , queste saranno le stesse per ogni corrente. Mostriamo infine che J^μ trasforma come un quadrivettore:

$$J^\mu = ec \int \frac{dx^\mu}{d\tau} \delta^4(x - x(\tau)) d\tau$$

dove siamo tornati al tempo proprio τ . $\frac{dx^\mu}{d\tau}$ è un quadrivettore, τ è un invariante, mentre per quanto riguarda la delta di Dirac, essa trasforma con il modulo della matrice jacobiana inversa della trasformazione di coordinate, in quanto si deve avere

$$\delta^n(x - \tilde{x})d^n x = \delta^n(x' - \tilde{x}')d^n x'$$

Affinchè l'integrale su tutto lo spazio faccia 1, indipendentemente dalla scelta delle coordinate:

$$\delta^n(x' - \tilde{x}') = |\det \Lambda^{-1}| \delta^n(x - \tilde{x})$$

ma le trasformazioni di Lorentz hanno determinante ± 1 , dunque la delta di Dirac quadridimensionale è un invariante relativistico. In definitiva l'unico oggetto che varia sotto trasformazioni di Lorentz è $\frac{dx^\mu}{d\tau}$, che è un quadrivettore:

l'integrale di un quadrivettore resta un quadrivettore dunque $J^\mu = \begin{pmatrix} \rho c \\ \vec{J} \end{pmatrix}$ trasforma come un quadrivettore. Un controllo di consistenza sulla quadrivettorialità di J^μ viene dall'equazione di continuità, infatti

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \rho c}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0$$

Ma questa equazione può essere vista come il seguente prodotto matriciale

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \quad \nabla \right) \begin{pmatrix} \rho c \\ \vec{J} \end{pmatrix} \equiv \partial_\mu J^\mu$$

dunque l'equazione di continuità si riscrive in forma breve come $\partial_\mu J^\mu = 0$. Questa equazione è chiaramente invariante di Lorentz, perchè sotto una trasformazione di Lorentz ∂_μ trasforma con Λ^{-1} mentre J^μ trasforma con Λ .

La forma covariante

Con queste definizioni, le equazioni di Maxwell si riscrivono:

$$\square \begin{pmatrix} \phi \\ \vec{A} \end{pmatrix} = \frac{4\pi}{c} \begin{pmatrix} \rho c \\ \vec{J} \end{pmatrix}$$

Affinchè tale equazione sia covariante di Lorentz è necessario che $\begin{pmatrix} \phi \\ \vec{A} \end{pmatrix}$ trasformi anch'esso come un quadrivettore, dunque in base a questa richiesta definiamo il quadrivettore

$$A^\mu = \begin{pmatrix} \phi \\ \vec{A} \end{pmatrix}$$

Osserviamo che questa è una costruzione puramente formale, in quanto abbiamo forzatamente imposto che A^μ trasformi come un quadrivettore, per ragioni di coerenza matematica: l'ultima parola sulla bontà di questa scelta è detta dagli esperimenti. In ogni caso, in questo modo le equazioni di Maxwell si riscrivono in forma compatta:

$$\square A^\mu = \frac{4\pi}{c} J^\mu$$

Adesso però ci ricordiamo che questa forma per le equazioni di Maxwell è stata ottenuta imponendo la gauge di Lorentz $\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{A} = 0$, dunque potremmo chiederci se la covarianza della scrittura non venga distrutta nel passaggio ad una gauge arbitraria. Con le nuove notazioni anche la gauge di Lorentz si può riscrivere in forma breve

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{A} \equiv \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \quad \nabla \right) \begin{pmatrix} \phi \\ \vec{A} \end{pmatrix} \equiv \partial_\mu A^\mu = 0$$

In questa forma, la condizione definitoria della gauge di Lorentz è manifestamente Lorentz-invariante. Anche le trasformazioni di gauge si riscrivono in forma covariante:

$$A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu f$$

dove $\partial^\mu \equiv \eta^{\mu\nu} \partial_\nu = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \\ -\nabla \end{pmatrix}$ è chiaramente un quadrivettore. Osserviamo che una trasformazione di gauge non modifica le proprietà di trasformazione di A^μ , perchè la somma di due quadrivettori resta un quadrivettore: ci aspettiamo allora che le equazioni di Maxwell possano esser scritte in forma covariante in qualsiasi gauge. Per verificarlo, riscriviamo le equazioni di Maxwell senza specificare la gauge:

$$\begin{cases} -\Delta\phi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial\phi}{\partial t^2} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial\phi}{\partial t} \right) = \frac{4\pi}{c} \rho c \\ -\Delta\vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial\vec{A}}{\partial t^2} + \nabla \left(\nabla \cdot \vec{A} + \nabla \frac{\partial\phi}{\partial t} \right) = \frac{4\pi}{c} \vec{J} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \square A^0 - \frac{\partial}{\partial x^0} (\partial_\mu A^\mu) = \frac{4\pi}{c} \rho c \\ \square A^i - \partial^i (\partial_\mu A^\mu) = \frac{4\pi}{c} J^i \end{cases} \Rightarrow \square A^\mu - \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu) = \frac{4\pi}{c} J^\mu$$

Ovvero abbiamo trovato una scrittura manifestamente covariante per le equazioni di Maxwell, senza bisogno di specificare la gauge.

1.6.4 Il tensore di Maxwell

Le equazioni di Maxwell possono essere rese ancora più compatte introducendo la cosiddetta *field strenght* del campo elettromagnetico:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

In questo modo, le equazioni di Maxwell si riscrivono come

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu$$

É possibile mostrare che $F^{\mu\nu}$ è un invariante di gauge: infatti, sotto la trasformazione

$$A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu f$$

si ha

$$F^{\mu\nu} \rightarrow \partial^\mu A^\nu + \partial^\mu \partial^\nu f - \partial^\nu A^\mu - \partial^\nu \partial^\mu f = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = F^{\mu\nu}$$

Vediamo adesso le componenti di $F^{\mu\nu}$:

$$F^{0i} = \partial^0 A^i - \partial^i A^0 = \partial^0 A^i + \partial_i A^0 = \frac{1}{c} \frac{\partial A^i}{\partial t} + \partial_i \phi = -E^i$$

$$\Rightarrow F^{i0} = E^i$$

$$F^{ij} = \partial^i A^j - \partial^j A^i = -\partial_i A^j + \partial_j A^i = -\epsilon_{ijk} \partial_i A^j = -(\nabla \times \vec{A})^k = -B^k \epsilon^{ijk}$$

ovvero le sei componenti indipendenti di $F^{\mu\nu}$ ricostruiscono in maniera non banale il campo elettrico e il campo magnetico non come due quantità separate, ma come unica quantità, sotto forma di un tensore a due indici antisimmetrico. Per introdurre il potenziale A^μ abbiamo risolto le due equazioni di Maxwell che non dipendevano dalle correnti; è possibile riesprimerle in linguaggio covariante, in questo modo:

$$B^k = -\frac{1}{2} \epsilon^{krs} F^{rs}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} (\partial_k F^{rs}) \epsilon^{krs} = 0$$

Possiamo provare a generalizzare questa equazione introducendo lo pseudotensore di Levi-Civita quadridimensionale:

$$\epsilon^{\alpha\mu\nu\rho} \partial_\mu F_{\nu\rho} = 0$$

Vediamo che componente per componente, questa equazione riproduce le due equazioni di Maxwell indipendenti dalle sorgenti:

$$\left. \begin{aligned} \alpha = 0 &\rightarrow \epsilon^{0ijk} \partial_i F_{jk} = 0 \\ \alpha = 1 &\rightarrow \partial_2 E^3 - \partial_3 E^2 = -\partial_0 B^1 \\ \alpha = 2 &\rightarrow \partial_3 E^1 - \partial_1 E^3 = -\partial_0 B^2 \\ \alpha = 3 &\rightarrow \partial_1 E^2 - \partial_2 E^1 = -\partial_0 B^3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

In ogni caso, l'equazione $\epsilon^{\alpha\mu\nu\rho} \partial_\mu F_{\nu\rho} = 0$ è un'identità, perchè espandendo $F_{\nu\rho}$ si ha

$$\epsilon^{\alpha\mu\nu\rho} \partial_\mu (\partial_\nu A_\rho - \partial_\rho A_\nu)$$

dove il tensore antisimmetrico $\epsilon^{\alpha\mu\nu\rho}$ è sempre contratto con una coppia di derivate, simmetrica per scambio. Infatti di solito non si parla di equazioni di Maxwell ma della cosiddetta *identità di Bianchi*. In questo linguaggio, le equazioni $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu$ contengono la dinamica, mentre $\epsilon^{\alpha\mu\nu\rho} \partial_\mu F_{\nu\rho} = 0$ ci informano che esiste una rappresentazione in termini di potenziali.

Il duale del tensore di Maxwell

Questi due set di equazioni possono essere riscritti in maniera più simmetrica, introducendo il *duale* del tensore elettromagnetico:

$$*F^{\nu\rho} = \frac{1}{2} \epsilon^{\nu\rho\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$$

In questo modo

$$\left\{ \begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu\nu} &= \frac{4\pi}{c} J^\nu \\ \partial_\mu *F^{\mu\nu} &= 0 \end{aligned} \right.$$

Scritte così, l'unica differenza tra le due equazioni è che la prima coinvolge una corrente elettrica, mentre nella seconda abbiamo 0 al secondo membro. Le equazioni diventerebbero effettivamente simmetriche se a secondo membro avessimo una corrente $\frac{4\pi}{c} J_m^\nu$, o banalmente in assenza di correnti.

Invarianti relativistici

Essendo un tensore di Lorentz del secondo ordine, $F^{\mu\nu}$ trasforma come

$$F^{\mu\nu} \rightarrow F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta F^{\alpha\beta}$$

Per un quadrivettore x^μ , l'unico invariante che possiamo costruire è $x^\mu x_\mu$, ma il tensore $F^{\mu\nu}$ permette di costruirne due:

$$\begin{aligned} 1) & F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \\ 2) & F^{\mu\nu} *F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \end{aligned}$$

Possiamo verificare che il primo invariante è legato alla differenza $\vec{E}^2 - \vec{B}^2$, infatti:

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} &= 2 (F^{0i} F_{0i} + F^{ij} F_{ij}) = -2F^{0i} F^{0i} + F^{ij} F^{ij} = -2E^i E^i + \epsilon^{ijk} \epsilon^{ilm} \partial^j A^k \partial^l A^m = -2E^i E^i + 2B^j B^j = \\ &= -2(\vec{E}^2 - \vec{B}^2) \end{aligned}$$

Il secondo, invece:

$$\frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\rho\sigma}F_{\alpha\beta}F_{\rho\sigma} = 2\epsilon^{0ijk}F_{0i}F_{jk} \equiv 4\epsilon^{ijk}F_{0i}F_{jk} = 2\epsilon^{ijk}E_i\epsilon_{ljk}B_l = 2\vec{E} \cdot \vec{B}$$

Dall'elettromagnetismo classico sappiamo che per un'onda piana esiste una scelta del sistema di riferimento tale che \vec{E} e \vec{B} abbiano stesso modulo (se $c = 1$), dunque tale che $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ risulti nullo, ma poichè esso è un invariante relativistico sarà nullo in qualunque altro sistema di riferimento inerziale. Sempre dall'elettromagnetismo si scopre che \vec{E} e \vec{B} sono ortogonali, dunque anche $F^{\mu\nu} * F_{\mu\nu}$ è nullo.

Abbiamo scritto due invarianti, ma potremmo chiederci se ne esistano altri: in realtà in questo caso il massimo numero di invarianti che si possono costruire è proprio due; per dimostrarlo possiamo pensare ad $F^{\mu\nu}$ come a una matrice:

$$F^\mu{}_\nu : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}$$

In questo modo F è un endomorfismo dello spazio di Minkowski. Le trasformazioni di Lorentz adesso agiscono su F come una trasformazione di similitudine:

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} \rightarrow \Lambda^\mu{}_\lambda \Lambda^\nu{}_\rho F^{\lambda\rho} &= \Lambda^\mu{}_\lambda F^{\lambda\rho} (\Lambda^T)^\rho{}_\nu \Leftrightarrow F \rightarrow \Lambda F \Lambda^T \\ &\Downarrow \\ F^\mu{}_\nu \rightarrow \Lambda^\mu{}_\lambda F^\lambda{}_\rho (\Lambda^{-1})^\rho{}_\nu &\Leftrightarrow F \rightarrow \Lambda F \Lambda^{-1} \end{aligned}$$

Per una matrice, gli unici oggetti invarianti sotto trasformazioni di similitudine sono i suoi autovalori, ovvero le radici del polinomio caratteristico. Per una matrice 4×4 gli autovalori sono 4, quindi in linea di principio potremmo pensare di costruire 4 invarianti, ma vedremo che nel nostro caso non sono tutti indipendenti. Il polinomio caratteristico di una matrice 4×4 A è

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)(\lambda - \lambda_4) = \\ &= \lambda^4 - \left(\sum_i \lambda_i\right) \lambda^3 + \left(\sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j\right) \lambda^2 - \left(\sum_{i<j<k} \lambda_i \lambda_j \lambda_k\right) \lambda + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \end{aligned}$$

Il primo coefficiente è la somma di tutti gli autovalori di A , ovvero la sua traccia; il secondo coefficiente può essere messo in relazione con la traccia di A e la traccia di A^2 :

$$\sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \lambda_i \lambda_j = \frac{1}{2} \left(\sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j - \sum_i \lambda_i^2 \right) = \frac{1}{2} \left(\left(\sum_i \lambda_i \right)^2 - \sum_i \lambda_i^2 \right) = \frac{1}{2} \left((Tr(A))^2 - Tr(A^2) \right)$$

Analogamente il secondo coefficiente:

$$\begin{aligned} \sum_{i<j<k} \lambda_i \lambda_j \lambda_k &= \frac{1}{3!} \sum_{i \neq j \neq k} \lambda_i \lambda_j \lambda_k = \frac{1}{3!} \left(\sum_{i,j,k} \lambda_i \lambda_j \lambda_k - 3 \sum_{i \neq j} \lambda_i^2 \lambda_j - \sum_i \lambda_i^3 \right) = \\ &= \frac{1}{3!} \left((Tr(A))^3 - 3(Tr(A))^2 Tr(A) + 2Tr(A^3) \right) \end{aligned}$$

Infine $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 = \det(A)$. Osserviamo che $Tr(A^4)$ non è più indipendente dagli altri, a causa del *teorema di Hamilton-Cayley*: una matrice soddisfa il suo polinomio caratteristico, cioè $P(A) = 0$, pertanto se A è di ordine 4 A^4 è sempre esprimibile come funzione di A , A^2 , A^3 e del determinante di A .

Nel caso di F , che è antisimmetrico, abbiamo:

$$Tr(F) = 0$$

$$Tr(F^2) = Tr(F^\mu{}_\nu F^\nu{}_\alpha)$$

$$\text{Tr}(F^3) = \text{Tr}((F^3)^T) = \text{Tr}(F^T F^T F^T) = -\text{Tr}(F^3) = 0$$

Per quanto riguarda la traccia di F^4 , non abbiamo proprietà di simmetria che ci consentano di concludere che sia nulla, dunque è il nostro secondo invariante:

$$\text{Tr}(F^4) = \frac{1}{16} (F * F)^2 + \frac{1}{2} [\text{Tr}(F^2)]^2$$

In questa scrittura compare il quadrato del prodotto $F * F$: questo infatti cambia segno sotto parità o time reversal a causa della presenza del tensore $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$.

Trasformazioni di Lorentz e campo elettromagnetico

Vediamo adesso come agisce una trasformazione di Lorentz sui campi elettrici e magnetici. Il modo più conveniente è pensare di nuovo a F come a una matrice:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se consideriamo la seguente trasformazione di Lorentz:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

abbiamo che

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta F^{\alpha\beta} \rightarrow F' = \Lambda F \Lambda^T$$

Da cui si scopre che

$$\begin{cases} E'^1 = E^1 \\ E'^2 = \gamma(E^2 - \beta B^3) \\ E'^3 = \gamma(E^3 + \beta B^2) \\ B'^1 = B^1 \\ B'^2 = \gamma(B^2 + \beta E^3) \\ B'^3 = \gamma(B^3 - \beta E^2) \end{cases}$$

Osserviamo che la legge di trasformazione è molto diversa da quella dei quadrivettori, per i quali le parti ortogonali alla direzione della velocità rimangono inalterate e soltanto quelle parallele trasformano. Se consideriamo adesso trasformazioni discrete, come $P = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$, è facile verificare che si ottiene

$$\begin{aligned} \vec{E} &\rightarrow -\vec{E} \\ \vec{B} &\rightarrow \vec{B} \end{aligned}$$

Questo risultato è concorde con quello che aspettiamo, ovvero che il campo elettrico trasformi sotto parità come un vettore, e il campo magnetico come uno pseudovettore. Se applichiamo la trasformazione di inversione temporale, $T = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$, questa differisce dalla parità per un fattore -1 : questo significa che il prodotto TFT è equivalente a FPF , dunque le regole di trasformazione dei campi sotto time reversal risulterebbero le stesse di quelle sotto parità. Però, dalle equazioni di Maxwell:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \\ \nabla \times \vec{B} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{J} \end{cases}$$

La trasformazione di time reversal ha il significato di far scorrere il tempo all'inverso, ovvero mandare t in $-t$. Ma se abbiamo una distribuzione di carica ρ , questa è insensibile al cambio di direzione, mentre se consideriamo una corrente, questa va in meno se stessa, perchè la trasformazione di time reversal inverte il segno delle velocità. Poichè l'elettromagnetismo è invariante sotto time reversal, le equazioni di Maxwell devono rimanere invariate, e questo accade soltanto se sotto time reversal $\vec{E} \rightarrow \vec{E}$ e $\vec{B} \rightarrow -\vec{B}$, dunque le regole di trasformazione che ci aspettiamo non sono quelle che si ottengono dalla applicazione ingenua della matrice T al tensore $F^{\mu\nu}$. Questa inconsistenza non si spiega in termini di fisica classica, ed è necessario introdurre la meccanica quantistica: esiste un teorema dovuto a Wigner, per cui ogni simmetria della fisica (ovvero una trasformazione che preserva le probabilità di transizione) può essere rappresentata da operatori unitari o antiunitari. L'operazione di time reversal è realizzata a livello operatoriale proprio da un operatore antiunitario, e questo rende complicata la sua introduzione a livello del formalismo tensoriale che abbiamo costruito, in formule

$$TFT^T = \text{EPIC FAIL}$$

1.6.5 La forza di Lorentz

Un altro oggetto indispensabile per l'elettromagnetismo e non contenuto nelle equazioni di Maxwell è la forza di Lorentz. Tale forza è espressa da

$$\vec{F} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\vec{v} \times \vec{B}$$

Se l'elettromagnetismo deve essere invariante sotto trasformazioni Lorentz, le tre componenti di \vec{F} non possono che essere le tre componenti di una quadriforza $\vec{\mathcal{F}}$:

$$\begin{aligned} F^i &= eE^i + \frac{e}{c}(\vec{v} \times \vec{B})^i = eF^{i0} + \frac{e}{c}\epsilon^{ijk}v^jB^k = \\ &= eF^{i0} - \frac{e}{c}F^{ij}v^j = \frac{e}{c\gamma}(c\gamma F^{i0} - \gamma v^j F^{ij}) \end{aligned}$$

Riconosciamo in γc e γv^i le quattro componenti della quadrivelocità v^μ , dunque

$$F^i = \frac{e}{\gamma c}(F^{i\mu}v_\mu)$$

Ricordiamo dalla dinamica relativistica che tra la forza \vec{F} e le componenti spaziali della quadriforza \mathcal{F}^μ c'era esattamente un fattore γ di differenza, dunque abbiamo

$$\mathcal{F}^i = \frac{e}{c}F^{i\mu}v_\mu$$

Recuperiamo anche la componente 0 della quadriforza: ricordiamo che $\mathcal{F}_\mu v^\mu = 0$, dunque

$$0 = v_0\mathcal{F}^0 + \frac{e}{c}v_i\mathcal{F}^i = v_0\mathcal{F}^0 + \frac{e}{c}v_iF^{i\mu}v_\mu \equiv v_0\mathcal{F}^0 + \frac{e}{c}v_\nu F^{\nu\mu}v_\mu - \frac{e}{c}v_0F^{0\mu}v_\mu$$

ma $v_\nu F^{\nu\mu}v_\mu = 0$ per l'antisimmetria, e rimaniamo con

$$v_0\mathcal{F}^0 - \frac{e}{c}v_0F^{0\mu}v_\mu = 0 \Rightarrow \mathcal{F}^0 = \frac{e}{c}F^{0\mu}v_\mu$$

Se rimettiamo tutto insieme, la quadriforza assume una forma assolutamente e trasparentemente covariante:

$$\mathcal{F}^\nu = \frac{e}{c}F^{\nu\mu}v_\mu$$

per cui la formulazione relativistica della dinamica per una particella carica in moto è data da

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = \frac{e}{c}F^{\mu\nu}v_\nu$$

Possiamo chiederci se questa equazione derivi da un principio di azione, ovvero se esista un modo di introdurre questa interazione all'interno della lagrangiana della particella libera. Ricordiamo che l'azione per la particella libera è

$$S_0 = -mc \int_{\gamma} d\tau \sqrt{\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu}$$

L'interazione elettromagnetica si introduce inserendo un termine di questo tipo:

$$S_{int} = \frac{e}{c} \int_{\gamma} d\tau \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau} A_\mu(x(\tau))$$

In questo modo l'azione completa diventa

$$S = -mc \int_{\gamma} d\tau \sqrt{\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu} + \frac{e}{c} \int_{\gamma} d\tau \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau} A_\mu(x(\tau))$$

Si può mostrare che effettivamente questo termine genera le corrette equazioni di moto:

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} + \frac{d}{d\tau} \frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial \dot{x}^\mu} - \frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial x^\mu} = 0$$

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial \dot{x}^\mu} - \frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial x^\mu} = \frac{e}{c} \left(\frac{d}{d\tau} A_\mu(x) - \dot{x}^\alpha \partial_\alpha A_\mu \right) = \frac{e}{c} \dot{x}^\alpha (\partial_\alpha A_\mu - \partial_\mu A_\alpha) = \frac{e}{c} v^\alpha F_{\alpha\mu} = -\frac{e}{c} F_{\mu\alpha} v^\alpha$$

dunque

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = \frac{e}{c} F_{\mu\alpha} v^\alpha$$

Osserviamo che la forma della lagrangiana di interazione è quella tipica dell'interazione elettromagnetica, dove si ha una corrente in interazione con un potenziale. Nel nostro caso la corrente è proprio J^μ e il potenziale è A^μ , infatti:

$$\begin{aligned} \frac{e}{c} \int_{\gamma} d\tau \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau} A_\mu(x(\tau)) &= \frac{e}{c} \int d^3x d\tau \delta^3(\vec{x} - \vec{x}(\tau)) \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau} A_\mu(\tau, \vec{x}) = \\ &= \frac{e}{c} \int d^4x \delta^3(\vec{x} - \vec{x}(t)) \frac{dx^\mu(t)}{dt} A_\mu(t, \vec{x}) = \frac{1}{c} \int d^4x J^\mu(\vec{x}, t) A_\mu(t, \vec{x}) \end{aligned}$$

Anche nel caso interagente, l'hamiltoniana della particella resta nulla, perchè anche l'interazione elettromagnetica non dipende dal tempo scelto per parametrizzare la traiettoria. Stavolta però abbiamo un nuovo vincolo perchè diversa è l'equazione che definisce i momenti coniugati:

$$\begin{aligned} p_\mu &\rightarrow p_\mu - \frac{e}{c} A_\mu \equiv \tilde{p}_\mu \\ &\Rightarrow \lambda (\tilde{p}^\mu \tilde{p}_\mu - m^2) \end{aligned}$$

L'azione nel formalismo hamiltoniano si scrive allora

$$S = \int p^\mu \dot{x}_\mu - \lambda \left(\left(p^\mu + \frac{e}{c} A^\mu \right)^2 - m^2 c^2 \right)$$

ovvero si ottiene immediatamente da quella per la particella libera mediante la sostituzione minimale:

$$p^\mu \rightarrow p^\mu + \frac{e}{c} A^\mu$$

1.6.6 Aspetti generali dei sistemi relativistici

Finora abbiamo considerato lagrangiane del tipo

$$L = L(q^i(t), \dot{q}^i(t))$$

cioè in cui le variabili canoniche erano le coordinate e le loro relative velocità. Se passiamo ai campi, questi ultimi acquisiscono a loro volta il ruolo di coordinate generalizzate, mentre la posizione diventa un parametro al pari del tempo; la lagrangiana $L(q^i(t), \dot{q}^i(t))$ diventa una densità di lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi^i(\vec{x}, t), \partial_\mu \phi^i(\vec{x}, t))$$

in modo che la lagrangiana vera e propria si ottenga integrando $\mathcal{L}(\phi^i(\vec{x}, t), \partial_\mu \phi^i(\vec{x}, t))$ sul volume del sistema. L'azione per un sistema di campi ϕ^i si ottiene semplicemente come

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi^i(\vec{x}, t), \partial_\mu \phi^i(\vec{x}, t))$$

Le equazioni del moto si ottengono mediante le equazioni di Eulero-Lagrange generalizzate

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i} = 0$$

Queste equazioni si ricavano con procedimenti analoghi a quelli che portano alle equazioni di Eulero-Lagrange per un sistema di coordinate, ma c'è un punto sostanziale di differenza: per derivare queste equazioni si deve porre a zero un termine di bordo, che nel formalismo classico è nullo perchè supponiamo sempre variazioni delle coordinate nulle al tempo iniziale e al tempo finale:

$$\delta q(t_i) = \delta q(t_f) = 0$$

Nel caso della teoria dei campi il bordo non è più costituito da due tempi, ma da una ipersuperficie spazio-temporale: dato che insieme alle derivate temporali compaiono anche quelle spaziali, integrando per parti si ricevono contributi dai campi all'infinito spaziale. In generale, quindi, per ottenere le equazioni del moto per un sistema di campi è necessario non solo imporre condizioni ai tempi iniziale e finale, ma anche imporre una opportuna condizione all'infinito spaziale, che ci permetta di trascurare i termini di bordo che compaiono nell'equazione. Consideriamo ad esempio la teoria di campo più semplice, la teoria scalare libera:

$$S = \int d^4x \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi$$

Variando l'azione si ha

$$\delta S = \int d^4x \partial_\mu (\delta \phi) \partial^\mu \phi = \int d^4x \partial_\mu (\delta \phi \partial^\mu \phi) - \delta \phi \square \phi$$

Il primo termine è una sorta di quadridivergenza, e per capirne la struttura esplicitiamo il prodotto scalare:

$$\begin{aligned} \int d^4x \partial_\mu (\delta \phi \partial^\mu \phi) &= \int d^4x \partial_t (\delta \phi \partial^t \phi) + \int d^4x \partial_i (\delta \phi \partial^i \phi) = \\ &= \int d^3x [\delta \phi(t_f, \vec{x}) \partial^t \phi(t_f, \vec{x}) - \delta \phi(t_i, \vec{x}) \partial^t \phi(t_i, \vec{x})] + \int d^4x \partial_i (\delta \phi \partial^i \phi) \end{aligned}$$

Se prendiamo delle variazioni che non cambiano il valore dei campi ai tempi iniziale e finale, il primo blocco in parentesi quadre si annulla perchè sono nulli i termini $\delta \phi(t_i, \vec{x})$ e $\delta \phi(t_f, \vec{x})$. Il secondo termine può essere riscritto come

$$\int d^4x \partial_i (\delta \phi \partial^i \phi) = - \int dt \int d^3x \nabla \cdot (\delta \phi \nabla \phi) = - \int dt \int_\Sigma \delta \phi (\nabla \phi) \cdot d\vec{\Sigma}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato il teorema di Gauss, e Σ è la superficie che racchiude il volume di integrazione; se tale volume è tutto lo spazio, possiamo scegliere come Σ una sfera con raggio $R \rightarrow \infty$. Affinchè le equazioni del

moto siano quelle che ci aspettiamo, ovvero $\square\phi = 0$, è necessario che anche l'integrale di superficie dia contributo nullo, e questo equivale a richiedere che il termine $\delta\phi(\nabla\phi)$ vada a zero più velocemente di $\frac{1}{r^2}$. Questa richiesta è non banale, perchè non sempre è concesso imporre arbitrarie condizioni al contorno; se pensiamo ad esempio ad un'onda sferica, questa scala come $\frac{1}{r}$, dunque il termine di superficie scala come $\frac{1}{r^2}$, e il contributo all'integrale è finito. Un caso importante in cui i termini di bordo sono importanti è proprio la relatività generale, in cui l'energia e l'impulso totali del sistema sono definiti da un integrale di bordo, e non di volume come accade di solito.

Il campo elettromagnetico

Se vogliamo scrivere una lagrangiana per l'elettromagnetismo, questa per prima cosa deve dare origine alle equazioni di Maxwell, che sono lineari nei campi; questo significa che la lagrangiana dovrà essere al più quadratica nei campi. Le equazioni del moto inoltre sono covarianti di Lorentz e invarianti di gauge: un modo sicuro per ottenere equazioni con queste caratteristiche è partire da una lagrangiana invariante di gauge e scalare sotto Lorentz. Gli unici oggetti quadratici invarianti di gauge che sappiamo costruire sono $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ e $\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}$, dunque una prima lagrangiana di prova può avere la forma

$$\mathcal{L} = a_1 F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + a_2 \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}$$

Il secondo termine in effetti viola la parità, ovvero una trasformazione del gruppo di Lorentz esteso, e poichè in elettromagnetismo la parità è conservata tale termine deve essere escluso dalla lagrangiana. In ogni caso, possiamo mostrare le equazioni del moto non sono modificate dalla sua presenza:

$$a_2 \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) F^{\rho\sigma} = 2a_2 \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial^\mu A^\nu F^{\rho\sigma} = \partial^\mu (2a_2 \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} A^\nu F^{\rho\sigma}) - 2a_2 \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} A^\nu \partial^\mu F^{\rho\sigma}$$

ma $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial^\mu F^{\rho\sigma}$ è identicamente nullo per l'identità di Bianchi, dunque

$$a_2 \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu} F^{\rho\sigma} = \partial^\mu (2a_2 \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} A^\nu F^{\rho\sigma}) \equiv 2a_2 \partial^\mu J_\mu$$

dove $J_\mu = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} A^\nu F^{\rho\sigma}$, cioè il termine aggiuntivo alla lagrangiana corrisponde a una divergenza totale, che non influenza le equazioni del moto: infatti, per il teorema di Stokes, l'integrale di volume di una divergenza è uguale al flusso attraverso la superficie che ricopre il volume di integrazione

$$\int d^4x \partial_\mu J^\mu = \int_\Sigma d\Sigma \cdot J$$

dove Σ è il bordo di un volume quadridimensionale. Nell'ipotesi in cui i campi vanno a zero all'infinito in modo sufficientemente veloce, l'integrale va a zero, e le equazioni del moto quindi non ne risentono. Questo risultato è l'analogo in meccanica analitica della possibilità di aggiungere alla lagrangiana una derivata totale rispetto al tempo senza influenzare le equazioni del moto. Esistono comunque casi in cui non possiamo imporre opportune condizioni al contorno per i campi, dunque il termine non va a zero: è il caso delle teorie non abeliane come la QCD, in cui questa stessa corrente dà contributi di tipo istantonico.

Rimaniamo quindi con una azione del tipo

$$S = a_1 \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

e dobbiamo sperare che questa fornisca le equazioni del moto giuste, altrimenti non avremmo altri invarianti da mettere in campo. Si ha

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = 0$$

Il secondo termine non dà contributo perchè la lagrangiana dipende solo dalle derivate dei campi, allora

$$2a_1 \partial_\mu (\eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} - \eta^{\mu\beta} \eta^{\nu\alpha}) F_{\alpha\beta} = 4a_1 \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$$

Nel vuoto quindi otteniamo le giuste equazioni del moto. In presenza di correnti, l'azione contiene un termine di interazione:

$$S = \frac{a_1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + s \int d^4x J_\mu A^\mu$$

dove abbiamo aggiunto un fattore $\frac{1}{4}$ per comodità; adesso abbiamo anche il termine di derivata rispetto ai campi, per cui

$$a_1 \partial_\mu F^{\mu\nu} = s J^\nu$$

Affinchè le equazioni del moto siano quelle corrette, è necessario che $\frac{s}{a_1} = \frac{4\pi}{c}$, e la scelta canonica è quella di prendere $a_1 = -\frac{1}{4\pi}$ e $s = -\frac{1}{c}$:

$$S = -\frac{1}{16\pi} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d^4x - \frac{1}{c} \int d^4x J_\mu A^\mu$$

In linea di principio aggiungere un termine che contiene esplicitamente A^μ potrebbe rompere l'invarianza di gauge, ma non è questo il caso: infatti sotto una trasformazione di gauge:

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu f$$

e si ha

$$\delta S = -\frac{1}{c} \int J_\mu \partial^\mu f d^4x = -\frac{1}{c} \int \partial^\mu (J_\mu f) d^4x + \frac{1}{c} \int (\partial^\mu J_\mu) f d^4x$$

Il primo termine al solito scompare scegliendo opportune condizioni al contorno per i campi, mentre il secondo è nullo perchè una qualunque corrente J^μ che voglia accoppiarsi all'elettromagnetismo deve essere conservata, cioè $\partial^\mu J_\mu = 0$; infatti se consideriamo

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu$$

e ne prendiamo la derivata

$$\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} \partial_\nu J^\nu$$

Ma il primo membro è identicamente nullo, da cui deve necessariamente essere $\partial_\nu J^\nu = 0$ se vogliamo che l'accoppiamento sia consistente. Nel caso della particella carica in interazione, avevamo

$$S = \int \frac{dx^\mu}{d\tau} A_\mu d\tau$$

e anche in questo caso l'azione era invariante di gauge, infatti

$$\delta S = \int \dot{x}^\mu \partial_\mu f d\tau = \int d\tau \frac{\partial f}{\partial \tau}$$

e l'ultimo membro dell'uguaglianza si annulla se sono soddisfatte opportune condizioni al contorno.

1.6.7 Simmetrie dell'azione e teorema di Noether

L'ultimo passo prima di passare alla relatività è introdurre il tensore energia-impulso per una teoria di campo o per un sistema di particelle. L'importanza del tensore energia-impulso sta nel fatto che esso sarà la sorgente del campo gravitazionale, alla stessa stregua della corrente J^μ dell'elettromagnetismo. A livello di teoria dei campi, il tensore energia-impulso si introduce iniziando a discutere le leggi di conservazione associate a un sistema di campi; tali leggi si determinano grazie al teorema di Noether, che data una simmetria permette di associarvi una legge di conservazione: per ogni simmetria continua, infatti, è possibile definire una corrente conservata. Questo risultato non si trasla automaticamente nel fatto di avere anche una *carica* conservata: ancora una volta, per ogni corrente conservata esisterà una corrispondente carica conservata soltanto se sono soddisfatte opportune condizioni al contorno, e non sempre questo accade.

Consideriamo una trasformazione di coordinate infinitesima

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x'^\mu(x) \sim x^\mu + \delta x^\mu$$

Questa induce automaticamente una trasformazione anche sui campi

$$\phi^i(x) \rightarrow \phi'^i(x') = \phi^i(x) + \delta\phi^i(x)$$

Sotto una trasformazione generica, dunque, un campo $\phi^i(x)$ viene mandato in un nuovo campo $\phi'^i(x')$. Per come interpretiamo le trasformazioni esse non cambiano il punto fisico in cui calcoliamo il campo, ma semplicemente trasformano le sue coordinate, mentre per quanto riguarda le componenti del campo queste in generale risulteranno combinate in maniera lineare. La linearità della combinazione è una proprietà dovuta al fatto che le nostre trasformazioni sono elementi di un gruppo, e richiediamo che i campi trasformino in particolari rappresentazioni lineari di questo gruppo. La più generale trasformazione dovrà quindi avere la forma

$$\phi'^i(x') = \Lambda^i_j \phi^j(x)$$

Se abbandonassimo queste limitazioni, in generale potremmo avere trasformazioni che al secondo membro presentano potenze arbitrarie dei campi. La trasformazione $x \mapsto x'(x)$ si dice una *simmetria dell'azione* se si ha

$$\int_{D'} d^4x' \mathcal{L}(\phi'^i(x), \partial'_\mu \phi'^i(x), x') = \int_D d^4x \mathcal{L}(\phi^i(x), \partial_\mu \phi^i, x)$$

Il punto non banale sta nel fatto che a primo e secondo membro la lagrangiana \mathcal{L} è *la stessa*: ovviamente trasformando tutto, anche la lagrangiana, l'uguaglianza sarebbe banale perchè deriverebbe semplicemente dall'invarianza dell'integrale sotto cambio di coordinate. Sotto queste ipotesi, la prima conseguenza è che le equazioni del moto della teoria sono *covarianti* sotto questa simmetria; ad esempio, poichè le equazioni del moto derivanti dalle due azioni si ottengono usando le equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x'^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial'_\mu \phi'^i)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi'^i} &= 0 \end{aligned}$$

Osserviamo che le due equazioni sono connesse proprio dalla trasformazione di coordinate $x \mapsto x'(x)$ (e dalla conseguente $\phi^i \mapsto \phi'^i(\phi^j)$), ovvero sono covarianti sotto tale trasformazione:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial'_\mu \phi'^i)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi'^i} &= \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{1}{\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\lambda \Lambda^i_j \phi^j)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Lambda^i_j \phi^j} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Lambda^i_j \phi^j)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Lambda^i_j \phi^j} = (\Lambda^{-1})^j_i \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^j)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^j} \right) \end{aligned}$$

Altri due punti fondamentali:

1. nella definizione di simmetria dell'azione l'uguaglianza tra i due integrali deve valere per qualsiasi dominio di integrazione D ;
2. in generale non avremo $\mathcal{L}(\phi) = \mathcal{L}(\phi')$: nel caso particolare in cui questo accade si parla di *invarianza in forma* della lagrangiana, ed è una caratteristica delle *simmetrie interne*, realizzate da trasformazioni che non coinvolgono lo spazio-tempo; in tal caso si ha infatti $D = D'$ e dunque si avrà anche $\mathcal{L}(\phi) = \mathcal{L}(\phi')$.

Il teorema di Noether ci garantisce che se abbiamo una simmetria continua della lagrangiana, corrispondentemente esiste una quantità conservata θ^μ , definita da

$$\theta^\mu = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^i)} \Delta \phi^i(x) - \delta x^\mu \mathcal{L}$$

dove per $\Delta \phi^i$ si intende la *variazione in forma* del campo, ovvero la variazione che si ottiene facendo ruotare il campo ma non il punto:

$$\Delta \phi^i(x) = \phi'^i(x) - \phi^i(x)$$

Tale oggetto può essere riscritto come

$$\Delta \phi^i(x) = \phi'^i(x) - \phi^i(x) = \phi'^i(x) - \phi'^i(x') + \phi'^i(x') - \phi^i(x)$$

Il termine $\phi'^i(x') - \phi^i(x)$ è per definizione la *variazione totale* $\delta \phi^i$, mentre il termine $\phi'^i(x) - \phi'^i(x')$ può essere espanso:

$$\Delta \phi^i(x) = -\delta x^\mu \partial_\mu \phi'^i(x) + \delta \phi^i$$

Poichè ci limitiamo al prim'ordine dello sviluppo, e δx^μ è già un termine del prim'ordine, il campo $\phi' = \phi + \delta \phi + \dots$ può essere preso all'ordine zero, possiamo confondere cioè $\phi' \sim \phi$:

$$\Delta \phi^i(x) = -\delta x^\mu \partial_\mu \phi^i(x) + \delta \phi^i$$

Poichè la corrente θ^μ è conservata, se i campi soddisfano le equazioni del moto (si dice che i campi sono *on shell*), allora $\partial_\mu \theta^\mu = 0$. Ad esempio se consideriamo la corrente elettromagnetica per uno scalare:

$$J^\mu = e(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*)$$

Questa corrente deriva dalla lagrangiana

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi$$

che è invariante sotto la simmetria $U(1)$:

$$\begin{aligned} \phi' &= e^{i\alpha} \phi \sim (1 + i\alpha)\phi \\ \phi'^* &= e^{-i\alpha} \phi^* \sim (1 - i\alpha)\phi^* \end{aligned}$$

In questo caso la trasformazione è interna dunque $\delta x^\mu = 0$, e resta soltanto il contributo della variazione in forma per i due campi ϕ e ϕ^* , per cui la corrente conservata

$$\theta^\mu = i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \phi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} \phi^* \right) = i(\phi \partial^\mu \phi^* - \phi^* \partial^\mu \phi)$$

Definiamo $J^\mu = i e \theta^\mu$, e consideriamone la quadridivergenza:

$$\partial_\mu J^\mu = e(\partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi + \phi^* \partial_\mu \partial^\mu \phi - \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - \phi \partial_\mu \partial^\mu \phi^*) = e(\phi^* \square \phi - \phi \square \phi^*)$$

Se i campi soddisfano le equazioni del moto, cioè $\square \phi = 0$ e $\square \phi^* = 0$, abbiamo che effettivamente la corrente è conservata; nel caso con massa, le equazioni sono semplicemente $\square \phi = m^2 \phi$ e $\square \phi^* = -m^2 \phi^*$ e il risultato è analogo.

Quantità conservate

Se abbiamo una corrente conservata, nell'ipotesi che i campi soddisfino opportune condizioni al contorno esiste una carica Q conservata, così definita:

$$Q = \int_{t=cost} d^3 x J^0(\vec{x})$$

Inoltre si scopre che Q è un invariante relativistico, ovvero non dipende dal sistema di riferimento considerato. Osserviamo che l'invarianza della lagrangiana sotto una certa simmetria non è in generale preservata dalle condizioni al contorno con cui risolviamo le equazioni del moto: in questo caso abbiamo comunque una corrente conservata, ma non una carica. Immaginiamo ad esempio di risolvere le equazioni del moto per il campo scalare con le seguenti condizioni al contorno:

$$\phi(\infty) = \phi^*(\infty)$$

Tali condizioni chiaramente rompono la simmetria perchè le trasformazioni di $U(1)$ vincolerebbero i campi ad avere un'espressione diversa all'infinito:

$$U(1) : \begin{cases} \Delta\phi(x) = i\alpha\phi(x) \\ \Delta\phi^*(x) = -i\alpha\phi^*(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \phi'(\infty) = (1 + i\alpha)\phi(\infty) \\ \phi'^*(\infty) = (1 - i\alpha)\phi^*(\infty) \end{cases}$$

In questo caso le soluzioni non possono dare origine ad una carica conservata:

$$0 = \int_{t=cost} d^3x \partial_\mu J^\mu = \int_{t=cost} d^3x \partial_0 J^0 + \int_{t=cost} d^3x \partial_i J^i = \int_{t=cost} d^3x \partial_0 J^0 + \int_\Sigma d\Sigma n^i (\phi \partial_i \phi^* - \phi^* \partial_i \phi)$$

$$Q = \int_{t=cost} d^3x J^0 = ie \int d^3x (\phi \partial^0 \phi^* - \phi^* \partial^0 \phi) (?????????)$$

In ogni caso ci limiteremo sempre a campi che soddisfano sempre le giuste condizioni al contorno.

In realtà il risultato è più generale, e la carica Q può essere definita come

$$Q = \int_\Sigma dV J_\mu n^\mu$$

dove Σ è una qualunque *superficie spaziale* e n^μ è il suo vettore normale. Una superficie spaziale è una superficie tridimensionale (o in generale $d - 1$ dimensionale, se d è la dimensione dello spazio) in cui la normale alla superficie è sempre un vettore di tipo tempo, ovvero $n^\mu n_\mu$. Ad esempio, se consideriamo la superficie $t = costante$, il suo vettore normale è

$$n^\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ed è chiaramente di tipo tempo. Per dimostrare che Q è conservata, consideriamo due superfici spaziali: le superfici spaziali Σ_1 e Σ_2 sono definite a $t = t_1$ e $t = t_2$, e sono grandi ma non infinite, ad esempio possiamo pensare a due grosse sfere.

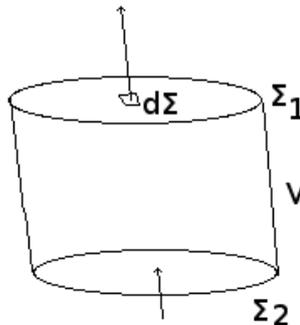


Figura 1.7: Ipersuperficie

Queste due superfici rappresentano le “basi” di un ipercilindro, che avrà una superficie laterale V e una superficie totale $S = V + \Sigma_1 + \Sigma_2$. L'integrale

$$\int_S \partial_\mu J^\mu d^4x$$

è nullo perchè $\partial_\mu J^\mu = 0$. Allora per il teorema di Gauss-Green:

$$\int_{\Sigma_1} J^\mu n_\mu^{\Sigma_1} dV_{\Sigma_1} + \int_{\Sigma_2} J^\mu n_\mu^{\Sigma_2} dV_{\Sigma_2} + \int_V J^\mu n_\mu^V dV_V = 0$$

Per quanto riguarda il flusso attraverso V , allargare il cilindro equivale ad allargare le sfere, e se J scala in modo sufficientemente veloce il contributo del flusso attraverso la superficie laterale diventa rapidamente trascurabile. All'aumentare della base dell'ipercilindro, dunque, gli unici contributi restano quelli di Σ_1 e Σ_2 ; osserviamo che lo stesso ragionamento varrebbe anche se le due Σ_i non fossero a tempi costanti, a patto che non si intersechino. Concludiamo che

$$\int_{\Sigma_1} J_\mu n_{\Sigma_1}^\mu dV_{\Sigma_1} = - \int_{\Sigma_2} J_\mu n_{\Sigma_2}^\mu dV_{\Sigma_2}$$

Ma nel teorema di Gauss il flusso è sempre considerato uscente, quindi possiamo eliminare il segno - invertendo l'orientazione della normale alla superficie a tempo $t_1 < t_2$ (per convenzione n^μ è orientato nella direzione di tempo crescente) (figura 2).

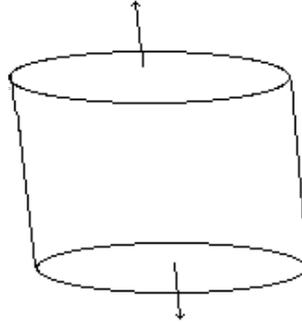


Figura 1.8:

In questo senso, possiamo scrivere

$$\int_{\Sigma_1} J_\mu n_{\Sigma_1}^\mu dV_{\Sigma_1} = \int_{\Sigma_2} J_\mu n_{\Sigma_2}^\mu dV_{\Sigma_2}$$

Ma l'integrale appena scritto è lo stesso integrale che definisce la carica Q , per cui abbiamo dimostrato che essa non dipende dalla particolare striscia temporale a cui la calcoliamo. La dimostrazione però ci informa anche che Q è un invariante relativistico: infatti, se effettuiamo una trasformazione di Lorentz sulle coordinate le superfici Σ_1 e Σ_2 continuano ad essere superfici spaziali dato che i loro vettori normali restano time-like.

Tensore energia-impulso di Noether

Il tensore energia-impulso di Noether è la corrente conservata associata all'invarianza sotto traslazioni: il gruppo di simmetria della relatività ristretta è il gruppo di Poincarè, e comprende sia il gruppo di Lorentz che il gruppo delle traslazioni. Sotto traslazioni si ha

$$x'^\mu = x^\mu + a^\mu \Rightarrow \delta x^\mu = a^\mu$$

e gli indici dei campi non vengono ruotati; in altre parole, sotto traslazioni la variazione totale di un campo è nulla:

$$\phi'^i(x') = \phi^i(x)$$

per cui la variazione in forma è data da

$$\Delta\phi^i(x) = -a^\mu \partial_\mu \phi^i(x)$$

La corrente conservata si scrive come:

$$\theta^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} a^\alpha \partial_\alpha \phi^i - a^\mu \mathcal{L} = a^\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} \partial_\alpha \phi^i - \delta_\alpha^\mu \mathcal{L} \right)$$

Osserviamo adesso che a^α è arbitrario, il che significa che possiamo definire il seguente oggetto

$$T^\mu{}_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} \partial_\alpha \phi^i - \delta_\alpha^\mu \mathcal{L}$$

Osserviamo che soltanto l'indice μ è conservato, mentre nessuna proprietà vale a priori per l'indice α : la sua presenza ci informa semplicemente che abbiamo non una ma quattro correnti conservate, il che è ragionevole dato che una traslazione spazio-temporale può essere effettuata in quattro possibili direzioni. Le cariche conservate sono

$$P_\alpha = \int_{t=cost} d^3x T^0{}_\alpha$$

oppure, reintroducendo a^α , abbiamo un'unica carica

$$Q(a) = \int_{t=cost} d^3x T^0{}_\alpha a^\alpha$$

Ma dal teorema di Noether sappiamo che Q è un invariante relativistico, qualunque sia a^α : poichè quest'ultimo è un quadrivettore, affinché $Q(a)$ sia un invariante è necessario che anche $T^0{}_\alpha$ trasformi come un quadrivettore, ovvero le quattro cariche conservate si riorganizzano come le quattro componenti di un quadrivettore. Questo non è strano perchè le leggi di conservazione associate alle traslazioni sono l'energia e l'impulso, e ci aspettiamo che dal tensore di Noether derivi il quadrimpulso del nostro sistema di campi. Per convincersi che effettivamente le P_α hanno a che fare con energia e impulso, consideriamo la componente 0_0 del tensore di Noether:

$$T^0{}_0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi^i)} \partial_0 \phi^i - \mathcal{L}$$

ma per definizione, questa è la densità di hamiltoniana del sistema.

Osserviamo che la corrente J^μ che compare nel teorema di Noether non è unica: data una simmetria infatti possono esistere infinite correnti conservate associate, tutte collegate da una trasformazione di questo tipo:

$$J^\mu \rightarrow J'^\mu = J^\mu + \partial_\nu f^{\nu\mu}$$

dove $f^{\nu\mu}$ è un oggetto antisimmetrico nello scambio degli indici, che prende il nome di *superpotenziale*. La nuova corrente J'^μ è anch'essa conservata dato che

$$\partial_\mu J'^\mu = \partial_\mu J^\mu + \partial_\mu \partial_\nu f^{\nu\mu} = \partial_\mu J^\mu = 0$$

per l'antisimmetria di $f^{\nu\mu}$. Possiamo chiederci se a infinite correnti conservate corrispondano infinite cariche conservate, ma la risposta è negativa:

$$\int_{t=cost} d^3x J'^0 = \int_{t=cost} d^3x J^0 + \int_{t=cost} \partial_\nu f^{0\nu} = Q + \int_{t=cost} \partial_i f^{0i} =$$

perchè $f^{00} = 0$. Se rinominiamo $f^{0i} \equiv F^i$, abbiamo

$$= Q + \int_{t=cost} \partial_i F^i = Q + \int_{\partial(t=cost)} \vec{F} \cdot \vec{n} dV$$

Se F è una funzione buona dei campi, ovvero decade all'infinito con sufficiente rapidità, il termine aggiuntivo si cancella e la carica risultante da J'^μ è la stessa.

Consideriamo il tensore energia-impulso del campo elettromagnetico:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\frac{1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \\ \Delta A^\mu &= -a^\nu \partial_\nu A^\mu \\ \theta^\mu &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \Delta - \delta x^\mu \mathcal{L} = -a^\lambda \frac{1}{4\pi} F^{\mu\nu} \partial_\lambda A_\nu + \frac{a^\mu}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = -\frac{a^\lambda}{4\pi} \left(F^{\mu\nu} \partial_\lambda A_\nu - \delta_\lambda^\mu \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right) \\ &\Rightarrow T_{em}^\mu{}_\nu = -\frac{1}{4\pi} \left(F^{\mu\alpha} \partial_\nu A_\alpha - \frac{1}{4} \delta_\nu^\mu (F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma}) \right)\end{aligned}$$

È possibile verificare immediatamente che il tensore energia-impulso è conservato dell'indice μ :

$$\begin{aligned}\partial_\mu T_{em}^\mu{}_\nu &= -\frac{1}{4\pi} \left(\partial_\mu F^{\mu\alpha} \partial_\nu A_\alpha + F^{\mu\alpha} \partial_\mu \partial_\nu A_\alpha - \frac{1}{4} \partial_\nu (F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma}) \right) = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{2} F^{\mu\alpha} \partial_\nu (\partial_\mu A_\alpha - \partial_\alpha A_\mu) - \frac{1}{4} \partial_\nu (F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma}) \right) = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{2} F^{\mu\alpha} \partial_\nu F_{\mu\alpha} - \frac{1}{4} \partial_\nu (F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma}) \right) = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{4} \partial_\nu (F^{\mu\alpha} F_{\mu\alpha}) - \frac{1}{4} \partial_\nu (F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma}) \right) = 0\end{aligned}$$

Questo tensore dipende esplicitamente dal potenziale A_μ , e per questo fallisce l'invarianza di gauge:

$$\delta_f T^\mu{}_\nu = -\frac{1}{4\pi} F^{\mu\alpha} \partial_\nu \partial_\alpha f$$

Questo significa che se integriamo il tensore energia-impulso su un volumetto finito, il risultato dipenderà in generale dalla scelta di gauge: questo ci impedisce innanzitutto di definire l'energia e l'impulso contenuti all'interno di un volumetto finito V . Fortunatamente le cariche conservate, che sono integrate su tutto lo spazio, risultano gauge-invarianti:

$$\begin{aligned}P_\nu &= \int_{t=cost} d^3x T^0{}_\nu \\ \delta P_\nu &= \int d^3x \delta_f T^0{}_\nu = \int d^3x \left(-\frac{1}{4\pi} F^{0\alpha} \partial_\nu \partial_\alpha f \right) = -\frac{1}{4\pi} \int d^3x \partial_\alpha (F^{0\alpha} \partial_\nu f)\end{aligned}$$

ovvero il termine aggiuntivo è una divergenza totale, che non dà contributi se i campi soddisfano opportune condizioni al contorno.

Allo stato attuale siamo in grado di ricavare da $T^\mu{}_\nu$ soltanto l'energia e l'impulso *totali* del sistema, ma sappiamo che in elettromagnetismo è possibile calcolare anche l'energia e l'impulso contenuti in un volumetto finito: infatti, la densità di energia di un sistema elettromagnetico è data da

$$E_{em} = \frac{\vec{E}^2 + \vec{B}^2}{8\pi}$$

e questa quantità è perfettamente gauge-invariante.

Dobbiamo a questo punto ricordare che in realtà esiste un insieme infinito di correnti conservate, connesse l'una all'altra dall'aggiunta di un opportuno superpotenziale. Consideriamo ad esempio il superpotenziale così definito:

$$S^{\mu\alpha}{}_\nu = \frac{1}{4\pi} F^{\mu\alpha} A_\nu$$

dove gli indici antisimmetrici del superpotenziale sono μ e α . In questo modo

$$(T_{new})^\mu{}_\nu = (T_{old})^\mu{}_\nu + \frac{1}{4\pi} \partial_\alpha (F^{\mu\alpha} A_\nu) = (T_{old})^\mu{}_\nu + \frac{1}{4\pi} (\partial_\alpha F^{\mu\alpha}) A_\nu + \frac{1}{4\pi} F^{\mu\alpha} \partial_\alpha A_\nu$$

dove

$$(T_{old})^\mu{}_\nu = -\frac{1}{4\pi} \left(F^{\mu\alpha} \partial_\nu A_\alpha - \frac{1}{4} \delta_\nu^\mu (F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma}) \right)$$

dunque

$$\begin{aligned} (T_{new})^\mu{}_\nu &= -\frac{1}{4\pi} \left(F^{\mu\alpha} (\partial_\nu A_\alpha - \partial_\alpha A_\nu) - \frac{1}{4} \delta_\nu^\mu (F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma}) \right) = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \left(F^{\mu\alpha} F_{\nu\alpha} - \frac{1}{4} \delta_\nu^\mu (F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma}) \right) \end{aligned}$$

Il nuovo tensore energia-impulso non dipende più dal campo A^μ , ed è quindi totalmente gauge-invariante: si può verificare che la componente $(T_{new})^0{}_0$ è esattamente $\frac{\vec{E}^2 + \vec{B}^2}{8\pi} \equiv u$ dove u è la densità di energia elettromagnetica. Per quanto riguarda le componenti spaziali:

$$T^0{}_i = -\frac{1}{4\pi} (F^{0j} F_{ij}) = \frac{1}{4\pi} \epsilon^{jik} E^j B^k = -\frac{1}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B})^i = -\frac{1}{c} S^i$$

dove \vec{S} è il vettore di Poynting. Il fatto che $\partial_\mu T^\mu{}_0 = 0$ si reinterpreta quindi come

$$\frac{\partial u}{\partial x^0} = \frac{1}{c} \nabla \cdot \vec{S} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot \vec{S}$$

ovvero la variazione di energia in un volume è pari al flusso del vettore di Poynting attraverso la superficie che racchiude il volume stesso. Per quanto riguarda la conservazione delle componenti spaziali:

$$\frac{\partial S_j}{\partial t} = \partial_i T^i{}_j$$

dove $T^i{}_j$ è il cosiddetto *tensore degli sforzi*, la cui denominazione proviene dalla teoria dell'elasticità:

$$T^i{}_j = \frac{1}{4\pi} \left(E^i E^j + B^i B^j - \frac{1}{2} \delta^{ij} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \right)$$

In elettromagnetismo il vettore di Poynting ha una duplice interpretazione: da una parte è legato alla variazione di energia, quando consideriamo l'equazione di conservazione associata a $T^0{}_0$, dall'altra dà informazioni sull'impulso del sistema, quando consideriamo l'equazione associata a $T^0{}_i$ e integriamo su una qualsiasi superficie spaziale. Se vogliamo generalizzare al caso in cui siano presenti delle sorgenti, prima di tutto l'energia non si conserverà perchè parte di essa potrà essere trasferita alle sorgenti stesse: in tal caso la divergenza del tensore energia-impulso non è più nulla, e si ha

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi} F^{\nu\alpha} J_\alpha$$

ma il membro di destra non è altro che la *densità di forza* di Lorentz, che agisce sulle sorgenti: ovviamente, se abbiamo una forza che agisce sul sistema, questo non è più conservativo e bisogna tenere conto del lavoro compiuto dalle forze. Ad esempio per la densità di energia si ha

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot \vec{S} + \frac{1}{4\pi} \vec{J} \cdot \vec{E}$$

dove $\vec{J} \cdot \vec{E}$ è proprio il lavoro compiuto dal campo elettrico sulle correnti.

Il tensore energia-impulso che abbiamo costruito ha anche un'altra proprietà: alziamo infatti il secondo indice con la metrica

$$(T_{new})^{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi} \left(F^{\mu\alpha} F_\alpha^\nu - \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} (F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma}) \right)$$

Il tensore così ottenuto è quindi simmetrico nello scambio $\mu \leftrightarrow \nu$.

Questa procedura ha partorito un tensore energia-impulso simmetrico e totalmente gauge-invariante, dove quest'ultima proprietà ci consente di parlare di densità di energia e di impulso anche in regioni finite di spazio. È l'ultimo caso in cui riusciamo ad ottenere entrambe queste proprietà, infatti si può mostrare che per particelle con spin maggiore di 1 non è possibile costruire un tensore energia-impulso che sia contemporaneamente simmetrico e gauge-invariante.

Inoltre, il tensore $(T_{new})^{\mu\nu}$ gode anche della proprietà di avere traccia nulla. Questa non è una proprietà fortuita, infatti se consideriamo un riscaldamento delle coordinate:

$$x^\mu \rightarrow \lambda x^\mu$$

Sotto questa trasformazione i potenziali, che hanno dimensione dell'inverso di una lunghezza, riscalano corrispondentemente come

$$A_\mu \rightarrow \lambda^{-1} A_\mu$$

dunque l'azione elettromagnetica risulta invariante sotto una trasformazione di scala. La corrente di Noether associata a questa simmetria è

$$J^\mu = x^\nu (T_{new})^\mu{}_\nu$$

e se imponiamo che sia conservata otteniamo

$$\partial_\mu x^\nu (T_{new})^\mu{}_\nu = x^\nu \partial_\mu (T_{new})^\mu{}_\nu + \delta_\mu^\nu (T_{new})^\mu{}_\nu = 0$$

ma $\partial_\mu (T_{new})^\mu{}_\nu = 0$, dunque si deve avere $(T_{new})^\mu{}_\mu = 0$: questo significa che una teoria invariante sotto trasformazioni di scala, o *dilatazioni*, ha un tensore energia-impulso a traccia nulla.

Simmetria sotto Lorentz

Consideriamo adesso il caso in cui l'azione sia invariante sotto il gruppo di Lorentz. Per capire come trasforma un campo sotto Lorentz, dobbiamo caratterizzare a livello infinitesimo le trasformazioni del gruppo, ovvero studiare gli elementi vicini all'identità:

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu{}_\nu$$

Una trasformazione di Lorentz è una trasformazione tale che

$$\eta_{\mu\nu} = \Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\beta{}_\nu \eta_{\alpha\beta} =$$

Se sostituiamo la rappresentazione infinitesima:

$$= (\delta^\alpha_\mu + \omega^\alpha{}_\mu) (\delta^\beta_\nu + \omega^\beta{}_\nu) \eta_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu} + \omega_{\nu\mu} + \omega_{\mu\nu}$$

Dunque deve risultare $\omega_{\nu\mu} + \omega_{\mu\nu} = 0$, ovvero $\omega_{\mu\nu}$ è un oggetto antisimmetrico, con 6 parametri indipendenti, esattamente come i parametri del gruppo di Lorentz. A livello infinitesimo, quindi

$$\delta x^\mu = \omega^\mu{}_\nu x^\nu \quad (\omega_{\mu\nu} + \omega_{\nu\mu} = 0)$$

Se un campo ha degli indici, le trasformazioni di Lorentz oltre a ruotare il punto ruoteranno in generale anche gli indici del campo. In generale, dato un campo ϕ^i appartenente ad una qualche rappresentazione del gruppo di Lorentz, avremo

$$\phi'^i(x') = M^i{}_j \phi^j(x)$$

Se la trasformazione è infinitesima, potremo espanderla in un intorno dell'identità

$$\phi'^i(x') \sim (\delta^i_j + \Omega^i{}_j) \phi^j(x)$$

dove gli Ω^i_j sono i *generatori* del gruppo di Lorentz nella particolare rappresentazione a cui appartiene ϕ^i . La variazione totale del campo sarà:

$$\delta\phi^i(x) = \Omega^i_j \phi^j(x)$$

Quando specifichiamo una trasformazione di Lorentz in realtà forniamo le velocità per i boost e gli angoli per le rotazioni, ovvero un set di 6 parametri raccolti nella matrice antisimmetrica $\omega_{\mu\nu}$. Ω^i_j non è altro che la stessa trasformazione in una rappresentazione diversa, e sarà quindi funzione di questi stessi parametri:

$$\Omega^i_j = \Omega^i_j(\omega)$$

All'ordine lineare:

$$\Omega^i_j(\omega)\phi^j = \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta} (\Omega^{\alpha\beta})^i_j \phi^j$$

dove il fattore $\frac{1}{2}$ tiene conto dell'antisimmetria. Consideriamo ad esempio la variazione del campo A^μ :

$$\delta A^\mu = \omega^\mu_\nu A^\nu = \omega_{\alpha\beta} (\eta^{\mu\alpha} \delta_\mu^\beta) A^\mu = \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta} (\eta^{\mu\alpha} \delta_\nu^\beta - \delta_\nu^\alpha \eta^{\beta\mu}) A^\nu$$

Gli indici α, β giocano lo stesso ruolo del caso generale, mentre gli indici $^\mu_\nu$ sono l'analogo di i_j : l'oggetto $(\eta^{\mu\alpha} \delta_\nu^\beta - \delta_\nu^\alpha \eta^{\beta\mu})$ è quindi il generatore del gruppo di Lorentz nella cosiddetta *rappresentazione vettoriale*. Nel caso di un campo scalare i generatori sono tutti nulli, ovvero $\Omega \equiv 0$, perchè il gruppo di Lorentz è rappresentato come l'identità sullo spazio vettoriale cui appartiene il campo scalare.

Determineremo adesso la corrente conservata associata all'invarianza sotto il gruppo di Lorentz, assumendo di avere anche invarianza sotto traslazioni, e quindi un tensore energia-impulso di Noether. La variazione totale del campo può essere scritta come

$$\delta\phi^i = \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta} (\Omega^{\alpha\beta})^i_j \phi^j \equiv \Omega^i_j \phi^j$$

La variazione in forma si ottiene come

$$\Delta\phi^i = -\omega^\mu_\nu x^\nu \partial_\mu \phi^i + \Omega^i_j \phi^j$$

per cui

$$\begin{aligned} \theta^\mu &= -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^i)} \Delta\phi^i - \delta x^\mu \mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^i)} \omega^\lambda_\nu x^\nu \partial_\lambda \phi^i - \delta^\mu_\alpha \omega^\alpha_\nu x^\nu \mathcal{L} - \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^i)} (\Omega^{\alpha\beta})^i_j = \\ &= T^\mu_{\alpha\omega^\alpha_\nu x^\nu} - \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^i)} (\Omega^{\alpha\beta})^i_j \phi^j \end{aligned}$$

Analogamente al caso delle traslazioni, in cui a ognuna della quattro direzioni indipendenti corrispondeva una corrente conservata, le trasformazioni di Lorentz dipendono da sei parametri per cui ci aspettiamo sei correnti conservate; per rendere manifesto questo fatto, raccogliamo i parametri:

$$\theta^\mu = T^\mu_{\alpha\omega^\alpha_\nu x^\nu} - \frac{1}{2} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^i)} \omega_{\alpha\beta} (\Omega^{\alpha\beta})^i_j \phi^j = \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta} \left(T^{\mu\alpha} x^\beta - T^{\mu\beta} x^\alpha - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^i)} (\Omega^{\alpha\beta})^i_j \phi^j \right)$$

Possiamo quindi definire un tensore a 3 indici:

$$M^{\mu\alpha\beta} = T^{\mu\alpha} x^\beta - T^{\mu\beta} x^\alpha - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^i)} (\Omega^{\alpha\beta})^i_j \phi^j$$

antisimmetrico nello scambio degli indici α, β . Ci aspettiamo che le leggi di conservazione sotto Lorentz siano legate in qualche modo al momento angolare \vec{J} o ad una sua generalizzazione del tipo

$$J^{\mu\nu} \sim x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu$$

In effetti, in una teoria di campo il quadrimpulso P^α è legato alla componente $T^{0\alpha}$ del tensore energia-impulso, dunque il termine $T^{\mu\alpha}x^\beta - T^{\mu\beta}x^\alpha$ sembrerebbe avere la forma corretta. Il termine $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^i)}(\Omega^{\alpha\beta})^i{}_j\phi^j$ viceversa infatti dipende da come trasformano i campi sotto Lorentz, dunque tiene conto dei gradi di libertà di spin: ad esempio, se lo spin del campo è 0, $\frac{1}{2}$ o 1, avremo

$$\begin{aligned}\Omega^{\alpha\beta} &= 0 \quad (\text{spin } 0) \\ \Omega^{\alpha\beta} &= \frac{1}{4}[\gamma^\alpha, \gamma^\beta] \quad (\text{spin } \frac{1}{2}) \\ \Omega^{\alpha\beta} &= \eta^{\mu\alpha}\delta_\nu^\beta - \delta_\nu^\alpha\eta^{\beta\mu} \quad (\text{spin } 1)\end{aligned}$$

La procedura di Belifante

Se i campi sono on shell, $M^{\mu\alpha\beta}$ è conservato nell'indice μ :

$$0 = \partial_\mu M^{\mu\alpha\beta} = \left(\underbrace{\partial_\mu T^{\mu\alpha}}_{=0}\right)x^\beta + T^{\beta\alpha} - T^{\alpha\beta} - \left(\underbrace{\partial_\mu T^{\mu\beta}}_{=0}\right)x^\alpha - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^i)}(\Omega^{\alpha\beta})^i{}_j\phi^j$$

dove abbiamo utilizzato la conservazione di $T^{\mu\nu}$ dovuta alla nostra assunzione di invarianza sotto traslazioni. Allora

$$T^{\alpha\beta} - T^{\beta\alpha} = -\partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^i)}(\Omega^{\alpha\beta})^i{}_j\phi^j$$

Questo significa che se la teoria è invariante sotto il gruppo di Poincarè la parte antisimmetrica del tensore energia-impulso di Noether non è arbitraria, bensì è legata alla divergenza della parte di spin. Per una particella di spin 0, $\Omega^{\alpha\beta} = 0$, e il tensore energia-impulso risulta correttamente simmetrico.

Tuttavia questa interpretazione è fuorviante, poichè la divisione del momento angolare in parte orbitale e parte di spin non ha realmente senso fisico nel caso di una teoria relativistica: infatti è possibile mostrare che scegliendo un opportuno superpotenziale la parte antisimmetrica del tensore energia-impulso può essere eliminata. Il termine che rompe la simmetria è proprio

$$\partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^i)}(\Omega^{\alpha\beta})^i{}_j\phi^j$$

La sua forma, antisimmetrica nei due indici α, β , ci suggerisce di definire il seguente superpotenziale:

$$C^{\mu\alpha;\nu} = C_1 \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^i)}(\Omega^{\alpha\nu})^i{}_j\phi^j - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi^i)}(\Omega^{\mu\nu})^i{}_j\phi^j \right) + C_2 \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi^i)}(\Omega^{\mu\alpha})^i{}_j\phi^j \right)$$

Per costruzione, $C^{\mu\alpha;\nu}$ è antisimmetrico negli indici μ, α ; definiamo allora il nuovo tensore energia-impulso

$$T_B^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \partial_\alpha C^{\mu\alpha;\nu}$$

o *tensore energia-impulso di Belifante*. Mostriamo che esiste una scelta di C_1 e C_2 tale che $T_B^{\mu\nu}$ risulti simmetrico:

$$\begin{aligned}T_B^{\mu\nu} - T_B^{\nu\mu} &= T^{\mu\nu} - T^{\nu\mu} + C_1 \left(\partial_\alpha \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^i)}(\Omega^{\alpha\nu})^i{}_j\phi^j - \partial_\alpha \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi^i)}(\Omega^{\mu\nu})^i{}_j\phi^j \right) + \\ &+ C_2 \left(\partial_\alpha \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi^i)}(\Omega^{\mu\alpha})^i{}_j\phi^j \right) - C_1 \left(\partial_\alpha \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi^i)}(\Omega^{\alpha\mu})^i{}_j\phi^j - \partial_\alpha \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi^i)}(\Omega^{\nu\mu})^i{}_j\phi^j \right) - \\ &- C_2 \left(\partial_\alpha \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^i)}(\Omega^{\nu\alpha})^i{}_j\phi^j \right)\end{aligned}$$

Vediamo subito che se scegliamo $C_1 = -C_2$ alcuni termini si cancellano:

$$T_B^{\mu\nu} - T_B^{\nu\mu} = T^{\mu\nu} - T^{\nu\mu} - 2C_1 \left(\partial_\alpha \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi^i)}(\Omega^{\mu\nu})^i{}_j\phi^j \right)$$

Ma $T^{\mu\nu} - T^{\nu\mu} = -\partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \phi^i)} (\Omega^{\mu\nu})^i_j \phi^j$, dunque è sufficiente scegliere $C_1 = -\frac{1}{2}$ per cancellare la parte antisimmetrica del tensore di Belifante. In questo modo $T_B^{\mu\nu}$ è un tensore simmetrico, e la corrente

$$M_B^{\mu;\alpha\beta} = x^\alpha T_B^{\mu\beta} - x^\beta T_B^{\mu\alpha}$$

è conservata nell'indice μ .

La particella libera

Cercheremo di scoprire adesso qual'è la corrente associata ad una particella libera. L'azione per una particella libera è

$$S = \int d\tau \sqrt{\eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}$$

Questa non è una teoria di campo ma una teoria di particelle, dunque una trasformazione di Lorentz può soltanto ruotare le variabili x^μ . La corrente conservata è data da

$$J = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \Omega^{\mu\nu} x^\nu(\tau) = \frac{1}{2} \omega_{\alpha\beta} (\eta^{\alpha\mu} \delta_\nu^\beta - \eta^{\beta\mu} \delta_\nu^\alpha) p_\mu x^\nu = \omega_{\alpha\beta} (p^\alpha x^\beta - p^\beta x^\alpha)$$

L'argomento della x^μ , il tempo proprio, è un invariante relativistico, dunque non viene toccato dalla trasformazione. Fattorizzando i parametri otteniamo la forma relativistica del momento angolare

$$J^{\alpha\beta} = p^\alpha x^\beta - p^\beta x^\alpha$$

Per un sistema di particelle:

$$J = \frac{1}{2} \sum_i (x_i^\mu p_i^\nu - x_i^\nu p_i^\mu)$$

1.6.8 Dualità elettromagnetica

Le equazioni di Maxwell in termini di $F^{\mu\nu}$ e del suo duale $*F^{\mu\nu}$ sono date da

$$\begin{cases} \partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu \\ \partial_\mu *F^{\mu\nu} = 0 \end{cases}$$

Dirac per primo notò che in assenza di sorgenti si ha $J^\nu = 0$, e le equazioni di Maxwell diventano simmetriche: le equazioni diventano cioè invarianti sotto una arbitraria combinazione lineare dei due campi $F^{\mu\nu}$ e $*F^{\mu\nu}$:

$$F'^{\mu\nu} = a F^{\mu\nu} + b *F^{\mu\nu}$$

$$*F'^{\mu\nu} = c F^{\mu\nu} + d *F^{\mu\nu}$$

In questo momento stiamo considerando $F^{\mu\nu}$ e il suo duale come campi arbitrari e indipendenti, in particolare non pensiamo più a $F^{\mu\nu}$ come a $\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$: saranno infatti in seguito le equazioni di Maxwell, in particolare $\partial_\mu *F^{\mu\nu} = 0$, a informarci che $F^{\mu\nu}$ è esprimibile in termini di un potenziale A^μ . In ogni caso, se $F^{\mu\nu}$ e $*F^{\mu\nu}$ soddisfano le equazioni di Maxwell, per linearità lo faranno anche $F'^{\mu\nu}$ e $*F'^{\mu\nu}$. In termini dei campi \vec{E} e \vec{B} :

$$\vec{E}' = \alpha \vec{E} + \beta \vec{B}$$

$$\vec{B}' = \gamma \vec{E} + \delta \vec{B}$$

Introduciamo il seguente oggetto

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} F^{\mu\nu} \\ *F^{\mu\nu} \end{pmatrix}$$

Le equazioni di Maxwell si riscrivono come

$$\partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = 0$$

e perdono parte della enorme simmetria che avevano considerando i campi F e $*F$ come oggetti separati. Il vettore $\mathcal{F}^{\mu\nu}$ infatti non è arbitrario, e se ne prendiamo lo $*$:

$$*\mathcal{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} *F^{\mu\nu} \\ -F^{\mu\nu} \end{pmatrix} = \mathcal{J}\mathcal{F}^{\mu\nu}$$

dove $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ è la matrice *simplettica* 2×2 . Le equazioni di Maxwell saranno quindi invarianti sotto tutte quelle trasformazioni lineari che preservano la condizione $*\mathcal{F}' = \mathcal{J}\mathcal{F}$, ovvero

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &\rightarrow M\mathcal{F} \\ \Rightarrow *\mathcal{F}' &= \mathcal{J}\mathcal{F}' \\ *(M\mathcal{F}) &= \mathcal{J}(M\mathcal{F}) \end{aligned}$$

ma l'operazione di $*$ commuta con M , dunque avremo

$$M*\mathcal{F} \equiv M\mathcal{J}\mathcal{F} = \mathcal{J}M\mathcal{F} \Rightarrow M\mathcal{J} = \mathcal{J}M$$

L'insieme delle matrici M 2×2 con questa proprietà forma un gruppo, detto gruppo *simplettico* $Sp(1)$.

Una base per le matrici 2×2 è costituita dalle matrici σ_1 , σ_2 , σ_3 e l'identità, e poichè $J \equiv i\sigma_2$, le uniche matrici che commutano con σ_2 avranno la forma

$$M = a\mathbb{1} + ib\sigma_2 = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{ib}{\sqrt{a^2 + b^2}}\sigma_2 \right)$$

Possiamo sempre porre $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \equiv \cos \theta$ e $\lambda \equiv \sqrt{a^2 + b^2}$, in questo modo

$$M = \lambda (\cos \theta + i \sin \theta \sigma_2) = \lambda \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

La matrice M dunque è una rotazione di $SO(2)$, riscalata per una costante arbitraria, ma un riscalamento arbitrario corrisponderebbe a ridefinire la scala delle cariche e pertanto lo ignoreremo: il gruppo $SO(2)$ residuo è detto *gruppo di dualità elettromagnetico*.

Una volta restaurata la presenza della corrente elettrica, la simmetria è apparentemente rotta:

$$\begin{cases} \partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J_e^\nu \\ \partial_\mu *F^{\mu\nu} = 0 \end{cases}$$

ma può essere ripristinata introducendo una corrente magnetica:

$$\begin{cases} \partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J_e^\nu \\ \partial_\mu *F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J_m^\nu \end{cases}$$

Anche per le correnti è possibile introdurre un unico vettore

$$I^\nu = \begin{pmatrix} J_e^\nu \\ J_m^\nu \end{pmatrix}$$

in modo che le equazioni di Maxwell si scrivano

$$\partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} I^\nu$$

Il monopolo di Dirac

Le equazioni di Maxwell nel vuoto mostrano una certa simmetria tra i campi \vec{E} e \vec{B} , e suggeriscono che in linea di principio non ci sia nessun motivo di privilegiare l'uno o l'altro. Tuttavia il nostro mondo sembra privilegiare il campo elettrico, per il quale esistono i monopoli, diversamente da quanto accade per il campo magnetico. L'introduzione di una corrente magnetica tuttavia rende nuovamente simmetriche le equazioni:

$$\begin{cases} \partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J_e^\nu \\ \partial_\mu * F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J_m^\nu \end{cases}$$

A questo punto esistono due possibilità:

1. supponiamo che esistano sia la carica elettrica che la carica magnetica, e che stiano in un rapporto universale della forma $g = ke$, dove g è la carica magnetica e k è una costante. In tal caso, con una rotazione possiamo sempre trovare un sistema di riferimento in cui $J_m^\nu = 0$, ovvero possiamo sempre scegliere un set di campi privilegiati in cui le equazioni di Maxwell hanno la forma che assumono nel nostro mondo:

$$\begin{cases} \partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J_e^\nu \\ \partial_\mu * F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J_m^\nu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \partial_\mu F'^{\mu\nu} = \cos\theta \partial_\mu F^{\mu\nu} + \sin\theta \partial_\mu * F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} (\cos\theta + k \sin\theta) J_e^\nu = \frac{4\pi}{c} J_e'^\nu \\ \partial_\mu * F'^{\mu\nu} = -\sin\theta \partial_\mu F^{\mu\nu} + \cos\theta \partial_\mu * F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} \left(-\frac{1}{k} \sin\theta + \cos\theta\right) J_m^\nu = \frac{4\pi}{c} J_m'^\nu \end{cases}$$

Scegliendo $\theta = \arctan k$ le equazioni si riducono infatti a

$$\begin{cases} \partial_\mu F'^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J_e'^\nu \\ \partial_\mu * F'^{\mu\nu} = 0 \end{cases}$$

con $J'^\nu = \sqrt{1+k^2} J_e^\nu$.

2. Se viceversa supponiamo che le cariche elettriche e le cariche magnetiche siano indipendenti, l'elettromagnetismo assume un volto nuovo. Innanzitutto, l'esistenza di un quadripotenziale A^μ era strettamente legata al fatto che l'equazione $\partial_\mu * F^{\mu\nu} = 0$ fosse risolubile esattamente in termini di un $F^{\mu\nu}$ antisimmetrico, ma questa proprietà viene meno se è presente una corrente J_m^ν , in quanto non è più possibile sfruttare l'identità di Bianchi per cui $\partial_\mu * F^{\mu\nu} \equiv 0$ se $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$.

Seguiremo la seconda ipotesi, per cui assumeremo l'esistenza di una carica magnetica statica, indipendente e isolata. In assenza di cariche elettriche le equazioni di Maxwell si scrivono

$$\begin{aligned} 1) \nabla \cdot \vec{E} &= 0 & 2) \nabla \cdot \vec{B} &= 4\pi g \delta^3(\vec{x}) \\ 3) \nabla \times \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & 4) \nabla \times \vec{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

Dato che g è una carica magnetica statica cercheremo soluzioni statiche, dunque $\nabla \times \vec{E} = 0$ e $\nabla \times \vec{B} = 0$, ovvero i campi elettrici e magnetici nel limite statico si disaccoppiano, e poichè le equazioni 1) e 3) sono risolte da $\vec{E} = 0$ non abbiamo propagazione di onde. Restano le due equazioni

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{B} &= 4\pi g \delta^3(\vec{x}) \\ \nabla \times \vec{B} &= 0 \end{aligned}$$

Tali equazioni sono l'analogo delle equazioni dell'elettrostatica, pertanto avranno la stessa soluzione:

$$\vec{B} = \frac{g}{r^2} \hat{r} \quad (\text{campo di monopolo})$$

Per rivelare un monopolo dovremmo innanzitutto sapere come il nostro rivelatore reagisce in presenza del campo da esso generato, ovvero dovremmo conoscere le modalità di interazione della materia col monopolo. Ma il campo di monopolo è pur sempre un campo magnetico, dunque la sua interazione con la materia è immediatamente ricavata dalla sostituzione minimale: l'hamiltoniana per un sistema di particelle è

$$H = \sum_{i=1}^n p_i^2 + V(x_i)$$

dunque dopo la sostituzione minimale avremo

$$H = \sum_{i=1}^n \left(p_i + \frac{e}{c} A_i \right)^2 + V(x_i)$$

Questa relazione vale sia in meccanica classica che in meccanica quantistica, ma ci troviamo subito davanti a un problema: in elettrodinamica l'esistenza del potenziale vettore \vec{A} era garantita dall'annullarsi della divergenza di \vec{B} , ma se esiste un campo di monopolo si ha $\nabla \cdot \vec{B} \neq 0$ e non è possibile definire un vettore \vec{A} tale che $\nabla \times \vec{A} = \vec{B}$. L'idea di Dirac fu la seguente: la divergenza di \vec{B} è data da

$$\nabla \cdot \vec{B} = 4\pi g \delta^3(x)$$

ovvero è zero dappertutto eccetto in un punto, in altre parole il potenziale vettore è definito ovunque a parte nell'origine. Supponiamo allora di connettere al monopolo una "stringa" di singolarità, tale da generare un campo \vec{B}_{str} con la seguente proprietà:

$$\nabla \cdot (\vec{B}_{mon} + \vec{B}_{str}) = 0$$



Figura 1.9: Stringa di singolarità

In tal caso possiamo definire un potenziale vettore \vec{A} , tale che $\nabla \times \vec{A} = \vec{B}_{mon} + \vec{B}_{str}$. Apparentemente abbiamo giocato sporco, modificando il problema e aggiungendo ad hoc un nuovo campo in modo da far tornare le cose; in realtà Dirac aggiunse la richiesta che la fisica non dovesse dipendere dal campo \vec{B}_{str} , ovvero che questo fosse inosservabile. \vec{B}_{str} dunque è soltanto un oggetto fittizio che rende matematicamente consistente la nostra procedura, e che allo stesso tempo è del tutto ininfluenza per la fisica. Consideriamo due possibili scelte di \vec{B}_{str} :

- $\vec{B}^{(+)} = -4\pi g \delta(x) \delta(y) \theta(z) \hat{z}$, ovvero un campo \vec{B}_{str} concentrato nella direzione z positiva.
- $\vec{B}^{(-)} = 4\pi g \delta(x) \delta(y) \theta(-z) \hat{z}$, lo stesso ma in direzione negativa.

Per una nota proprietà della θ , la sua derivata è proprio la delta di Dirac, per cui derivando rispetto a z i due campi per calcolarne la divergenza, ricostruiamo con la $\delta^3(\vec{x})$ un termine $-4\pi g \delta^3(\vec{x})$ che va a cancellare il contributo di divergenza del campo di monopolo.

Se consideriamo la regione $\mathbb{R}^3 / \{(0, 0, z)\}$, l'equazione da risolvere è

$$\vec{B}_{mon} = \nabla \times \vec{A}$$

perchè fuori dall'asse z $\vec{B}_{str} = 0$. Dunque

$$\frac{g}{r^2} \hat{r} = \nabla \times \vec{A}$$

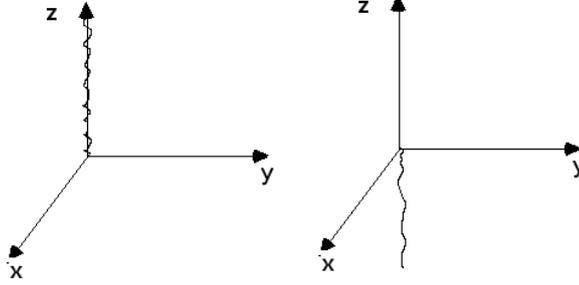


Figura 1.10: Diverse scelte del campo \vec{B}_{str}

La forma dell'equazione ci suggerisce di passare in coordinate polari:

$$\vec{A} = (A_r, A_\theta, A_\phi) \equiv A_r \hat{r} + A_\theta \hat{\theta} + A_\phi \hat{\phi}$$

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right)$$

$$\frac{g}{r^2} \hat{r} = \nabla \times \vec{A} = \frac{\hat{r}}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] + \frac{\hat{\theta}}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right] + \frac{\hat{\phi}}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right]$$

dove l'equazione si intende valida su $\mathbb{R}^3 / \{(0, 0, z)\}$. Prima di risolvere quest'equazione, ci ricordiamo che \vec{A} è determinato a meno del gradiente di una funzione arbitraria:

$$\vec{A} \sim \vec{A} + \nabla f$$

In coordinate polari, il gradiente è

$$\nabla f = \hat{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\hat{\theta}}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{\hat{\phi}}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi}$$

Dunque è sempre possibile scegliere una f opportuna che annulli la componente radiale di \vec{A} :

$$\frac{\partial f}{\partial r} = -A_r$$

Tale scelta di gauge si dice *gauge radiale*. Pur avendo messo a zero A_r non abbiamo esaurito tutte le possibili scelte di gauge, infatti il gradiente di una qualunque funzione di θ e ϕ non ha componenti in direzione radiale. Se $A_r = 0$, l'equazione si trasforma come

$$\frac{g}{r^2} \hat{r} = \nabla \times \vec{A} = \frac{\hat{r}}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] + \frac{\hat{\theta}}{r} \left[-\frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right] + \frac{\hat{\phi}}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) \right]$$

Una ulteriore osservazione è che poichè il campo di monopolo è solo radiale, le componenti di $\nabla \times \vec{A}$ lungo $\hat{\theta}$ e $\hat{\phi}$ devono annullarsi, ovvero

$$\frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) = 0$$

ma queste equazioni si risolvono banalmente come

$$A_\phi = \frac{f(\theta, \phi)}{r}$$

$$A_\theta = \frac{g(\theta, \phi)}{r}$$

Questo risultato ci suggerisce di cercare una funzione $f'(\theta, \phi)$ tale che:

$$\frac{g(\theta, \phi)}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} f'(\theta, \phi) = 0$$

In questo modo anche $A_\theta = 0$ e dell'equazione iniziale resta soltanto

$$\begin{aligned} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{f(\theta, \phi)}{r} \sin \theta \right] &= \frac{g}{r^2} \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \theta} (f(\theta, \phi) \sin \theta) &= g \sin \theta \end{aligned}$$

Questa equazione ha come soluzione

$$f = \frac{C(\phi) - g \cos \theta}{\sin \theta}$$

con $C(\phi)$ costante arbitraria che dipende soltanto da ϕ . Abbiamo quindi trovato un potenziale

$$\vec{A} = \frac{1}{r \sin \theta} (C(\phi) - g \sin \theta) \hat{\phi}$$

che genera il campo di monopolo dappertutto eccetto sull'asse z .

Se scegliamo il campo di stringa $\vec{B}^{(+)}$, posizionato lungo l'asse z positivo, l'asse z negativo (caratterizzato da $\theta = \pi$) non presenta singolarità pertanto non c'è motivo di avere un potenziale vettore \vec{A} singolare per $z < 0$. Imporre la regolarità per z negativi equivale ad imporre $C(\phi) + g = 0$, dato che $\sin \pi = 0$:

$$\vec{A}^{(+)} = -\frac{g}{r \sin \theta} (1 + \cos \theta) \hat{\phi}$$

In questo modo è sparita la singolarità per $\theta = \pi$, mentre è rimasta quella a $\theta = 0$: ma questo è necessario perchè la stringa di singolarità è concentrata sull'asse z positivo.

Se scegliamo $\vec{B}^{(-)}$ dobbiamo imporre che \vec{A} sia non singolare $\theta = 0$, dunque:

$$\vec{A}^{(-)} = \frac{g}{r \sin \theta} (1 - \cos \theta) \hat{\phi}$$

dove stavolta la singolarità in $\theta = \pi$ compensa esattamente quella derivante da $\vec{B}^{(-)}$. Se andiamo a studiare la differenza tra i due potenziali $\vec{A}^{(+)}$ e $\vec{A}^{(-)}$:

$$\vec{A}^{(+)} - \vec{A}^{(-)} = -\frac{g}{r \sin \theta} ((1 + \cos \theta) - (1 - \cos \theta)) \hat{\phi} = \frac{-2g}{r \sin \theta} \hat{\phi}$$

Se ricordiamo l'espressione del gradiente in coordinate polari:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi}$$

il termine $\frac{-2g}{r \sin \theta} \hat{\phi}$ può essere riscritto come

$$\frac{-2g}{r \sin \theta} \hat{\phi} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (-2g\phi) \hat{\phi}$$

ovvero la differenza tra i due potenziali corrisponde ad una trasformazione di gauge:

$$\vec{A}^{(+)} - \vec{A}^{(-)} = \nabla (-2g\phi)$$

Questo risultato è concorde con la richiesta di indipendenza della fisica dal campo \vec{B}_{str} , dato che l'elettromagnetismo è invariante sotto trasformazioni di gauge; in realtà si può mostrare che il campo di singolarità \vec{B}_{str} può essere collocato lungo una qualsiasi curva infinitamente estesa che parta dall'origine, e il risultato di ciascuna curva differisce dagli altri per una trasformazione di gauge.

La quantizzazione della carica elettrica

L'argomento sopra presentato vale in meccanica classica: sappiamo infatti che in meccanica quantistica il campo fondamentale è il potenziale vettore \vec{A} , e non i campi \vec{E} e \vec{B} . Il potenziale vettore viene introdotto nell'equazione di Schroedinger per una particella mediante la sostituzione minimale

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\nabla - \frac{ie}{c\hbar} \vec{A} \right)^2 \psi = E\psi$$

e si manifesta a livello di funzione d'onda come un fattore di fase: se ψ è una soluzione dell'equazione

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi = E\psi$$

la soluzione dell'equazione con \vec{A} sarà semplicemente

$$\psi' = \exp\left\{ \frac{ie}{c\hbar} \int_{\gamma} \vec{A} \cdot d\vec{x} \right\} \psi$$

dove γ è un particolare cammino seguito dalla particella.

Un cambio di gauge della forma

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \nabla f$$

si traduce in un ulteriore fattore di fase, che lascia la fisica inalterata:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\nabla - \frac{ie}{c\hbar} (\vec{A} + \nabla f) \right)^2 \psi = E\psi$$

$$\psi'' = e^{\frac{ie}{c\hbar} f} \psi'$$

L'invarianza di gauge si manifesta in meccanica quantistica in maniera più profonda: non interessa più soltanto i campi e i potenziali ma anche la materia, ovvero la funzione d'onda. Nel nostro caso possiamo passare da $\vec{A}^{(+)}$ a $\vec{A}^{(-)}$ mediante una trasformazione di gauge, che possiamo riassorbire in una ridefinizione della funzione d'onda come

$$\psi' = e^{-2i \frac{eg}{\hbar c} \phi} \psi$$

La funzione ψ'' deve essere monodroma: se ϕ varia di 2π , ψ'' deve tornare in se stessa, il che è verificato soltanto se

$$e^{-2i \frac{eg}{\hbar c} 2\pi} = 1$$

Ma questo implica che $2 \frac{eg}{\hbar c} = n$ con $n \in \mathbb{Z}$, cioè la meccanica quantistica ha un accoppiamento consistente col monopolo magnetico *solo se* g è un multiplo intero della quantità $\frac{\hbar c}{2e}$: da questo segue che se esiste almeno un monopolo in natura, la carica elettrica è quantizzata.

Dalla relazione tra le due cariche, osserviamo che se le cariche elettriche sono piccole, quelle magnetiche sono corrispondentemente grandi: la simmetria tra i campi elettrici e magnetici scambia quindi mondi in cui le cariche elettriche sono piccole con mondi in cui le cariche magnetiche sono grandi, e per questo si parla di *dualità strong-weak*. In termini di campi, si passa da una teoria fortemente accoppiata ad una teoria duale debolmente accoppiata.

Osserviamo che la meccanica quantistica ha fatto un altro servizio, riducendo in maniera drammatica la simmetria: se deve valere la condizione di quantizzazione della carica magnetica, infatti, dell' $SO(2)$ iniziale restano ammesse soltanto le trasformazioni di \mathbb{Z}_2 , ovvero le rotazioni di $\theta = 0$ e $\theta = \pi$. Si ha

$$J_e^\mu = e \begin{pmatrix} \delta^3(x) \\ \vec{v} \delta^3(x) \end{pmatrix} = \frac{\hbar c}{2g} \begin{pmatrix} \delta^3(x) \\ \vec{v} \delta^3(x) \end{pmatrix}$$

$$J_m^\mu = g \begin{pmatrix} \delta^3(x) \\ \vec{v}\delta^3(x) \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \cos\theta J_e^\mu + \sin\theta J_m^\mu = \left(\frac{\hbar c}{2g} \cos\theta + g \sin\theta\right) \begin{pmatrix} \delta^3(x) \\ \vec{v}\delta^3(x) \end{pmatrix} \equiv e' \begin{pmatrix} \delta^3(x) \\ \vec{v}\delta^3(x) \end{pmatrix} \\ -\sin\theta J_e^\mu + \cos\theta J_m^\mu = \left(-\frac{\hbar c}{2g} \sin\theta + g \cos\theta\right) \begin{pmatrix} \delta^3(x) \\ \vec{v}\delta^3(x) \end{pmatrix} \equiv g' \begin{pmatrix} \delta^3(x) \\ \vec{v}\delta^3(x) \end{pmatrix} \end{cases}$$

Se anche dopo la rotazione deve continuare a valere la relazione $g' = \frac{\hbar c}{2e'}$, si deve avere

$$\left(-\frac{\hbar c}{2g} \sin\theta + g \cos\theta\right) = \frac{\hbar c}{2\left(\frac{\hbar c}{2g} \cos\theta + g \sin\theta\right)}$$

ma questa uguaglianza è verificata solo se $\theta = 0, \pi$.

1.7 Esercizi

1. Dimostrare che per una matrice di Lorentz vale

$$\Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta \eta^{\alpha\beta} = \eta^{\mu\nu}$$

dove $\eta^{\mu\nu}$ è l'inversa della matrice di Minkowski $\eta_{\mu\nu}$.

2. Dimostrare che vale la formula:

$$\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon_{\rho\sigma\tau\delta} = - \sum_{\sigma \in \text{Perm}(\mu\nu\alpha\beta)} (-1)^\sigma \delta_\rho^{\sigma(\mu)} \delta_\sigma^{\sigma(\nu)} \delta_\tau^{\sigma(\alpha)} \delta_\delta^{\sigma(\beta)}$$

In realtà tale prodotto si può vedere come un determinante formale:

$$\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon_{\rho\sigma\tau\delta} = - \begin{vmatrix} \delta_\rho^\mu & \delta_\rho^\nu & \delta_\rho^\alpha & \delta_\rho^\beta \\ \delta_\sigma^\mu & \delta_\sigma^\nu & \delta_\sigma^\alpha & \delta_\sigma^\beta \\ \delta_\tau^\mu & \delta_\tau^\nu & \delta_\tau^\alpha & \delta_\tau^\beta \\ \delta_\delta^\mu & \delta_\delta^\nu & \delta_\delta^\alpha & \delta_\delta^\beta \end{vmatrix}$$

Inoltre, si può mostrare che valgono anche

$$\begin{aligned} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon_{\mu\rho\sigma\tau} &= - (\delta_\rho^\nu \delta_\sigma^\alpha \delta_\tau^\beta + \delta_\sigma^\nu \delta_\tau^\alpha \delta_\rho^\beta + \delta_\tau^\nu \delta_\rho^\alpha \delta_\sigma^\beta - \delta_\sigma^\nu \delta_\rho^\alpha \delta_\tau^\beta - \delta_\rho^\nu \delta_\tau^\alpha \delta_\sigma^\beta - \delta_\tau^\nu \delta_\sigma^\alpha \delta_\rho^\beta) \\ \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} &= -2 (\delta_\rho^\alpha \delta_\sigma^\beta - \delta_\sigma^\alpha \delta_\rho^\beta) \\ \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon_{\mu\nu\alpha\rho} &= -2(4-1)\delta_\sigma^\beta = -6\delta_\sigma^\beta \\ \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} &= -4! \end{aligned}$$

3. Espandere l'equazione $\partial_\mu J^\mu = 0$ dove

$$\partial_\mu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \quad \nabla \right)$$

$$J^\mu = \begin{pmatrix} \rho c \\ \vec{J} \end{pmatrix}$$

e verificare che essa dà luogo all'equazione di continuità.

4. Verificare che le equazioni di Maxwell

$$\begin{cases} -\Delta\phi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = \frac{4\pi}{c} \rho c \\ -\Delta \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \nabla \left(\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = \frac{4\pi}{c} \vec{J} \end{cases}$$

possono essere scritte in forma covariante.

5. determinare le leggi di trasformazione dei campi \vec{E} e \vec{B} sotto la trasformazione di Lorentz:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} F' &= \Lambda F \Lambda^T = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta\gamma E^1 & -\gamma E^1 & -E^2 & -E^3 \\ \gamma E^1 & -\beta\gamma E^1 & -B^3 & B^2 \\ \gamma(E^2 - \beta B^3) & \gamma(B^3 - \beta E^2) & 0 & -B^1 \\ \gamma(E^3 + \beta B^2) & -\gamma(B^2 + \beta E^3) & B^1 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\gamma^2(1 + \beta^2) E^1 & -\gamma(E^2 - \beta B^3) & -\gamma(E^3 + \beta B^2) \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

6. Calcolare la corrente di Noether associata alla simmetria dell'azione elettromagnetica sotto trasformazioni di scala, e mostrare che si ottiene

$$J^\mu = x^\nu T^\mu{}_\nu$$

7. Dire come variano le equazioni di conservazione per le componenti spaziali del tensore energia-impulso elettromagnetico in presenza di una sorgente J^μ .

8. Dimostrare che si può costruire un superpotenziale per M , in termini del quale si ottiene

$$M_B^{\mu\alpha\beta} = x^\alpha T_B^{\mu\beta} - x^\beta T^{\mu\alpha}$$

Suggerimento: siamo partiti da un $M^{\mu\alpha\beta}$ della forma

$$M^{\mu\alpha\beta} = x^\alpha T_B^{\mu\beta} - x^\beta T^{\mu\alpha} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} (\Omega^{\alpha\beta})^i{}_j \phi^j$$

Provare a far vedere che M_B e M differiscono per un superpotenziale, sfruttando il fatto che $T_B - T$ è un superpotenziale.

9. Mostrare che l'azione

$$S = -\frac{1}{4\pi} \int d^4x (\vec{E}^2 - \vec{B}^2)$$

apparentemente non invariante sotto le trasformazioni

$$\vec{E}' = \cos \theta \vec{E} - \sin \theta \vec{B}$$

$$\vec{B}' = \sin \theta \vec{E} + \cos \theta \vec{B}$$

lo è comunque.

Suggerimento: pensare a come sono realizzate le trasformazioni a livello dell'azione.

Capitolo 2

Geometria differenziale

2.1 Varietà differenziabili

Definizione 1. Una varietà differenziabile M è uno spazio topologico di Hausdorff per cui esiste una famiglia di aperti $\{U_\alpha\}$ con la proprietà

$$\bigcup_{\alpha} U_\alpha = M$$

Ognuno degli U_α è munito di un omeomorfismo $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$, che lo mappa in un aperto di \mathbb{R}^n . Il parametro n è la dimensione della varietà, e deve essere lo stesso per ogni aperto.

Supponiamo inoltre che due aperti $U_\beta, U_\gamma \in \{U_\alpha\}$ abbiano intersezione non nulla:

$$U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset$$

In generale, la regione in comune sarà descritta nei due aperti da coordinate diverse:

$$\phi_\beta : U_\beta \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\phi_\gamma : U_\gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$$

dunque richiederemo che l'applicazione

$$h_{\beta\gamma} = \phi_\beta \circ \phi_\gamma^{-1} : \phi_\gamma(U_\beta \cap U_\gamma) \rightarrow \phi_\beta(U_\beta \cap U_\gamma)$$

sia C^∞ , invertibile, e con inversa anch'essa C^∞ , sia cioè un diffeomorfismo C^∞ .

Le funzioni $h_{\beta\gamma}$ si dicono *funzioni di transizione* e hanno le seguenti proprietà:

1. $h_{\alpha\alpha} = I$, infatti $h_{\alpha\alpha} = \phi_\alpha \circ \phi_\alpha^{-1}$;
2. $h_{\alpha\beta}^{-1} = h_{\beta\alpha}$, infatti:

$$\left(\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}\right)^{-1} = \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$$

3. Se U_α, U_β e U_γ sono tre intorni con rispettive funzioni coordinate ϕ_α, ϕ_β e ϕ_γ , si verifica che (*proprietà di cociclo*)

$$h_{\alpha\gamma} = h_{\alpha\beta}h_{\beta\gamma}$$

infatti

$$h_{\alpha\gamma} = \phi_\alpha \circ \phi_\gamma^{-1} = \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} \circ \phi_\beta \circ \phi_\gamma^{-1} = h_{\alpha\beta}h_{\beta\gamma}$$

L'insieme $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}$ si dice *atlante*. In generale una varietà può ammettere più di un atlante: si dice allora che due atlanti sono *compatibili* se la loro unione è ancora un atlante. Ad esempio siano $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}$ e $\{V_\beta, \psi_\beta\}$ due atlanti per la varietà M , la loro unione

$$\{U_\alpha, \phi_\alpha\} \cup \{V_\beta, \psi_\beta\}$$

Se $\bigcup_\alpha U_\alpha = M$ e $\bigcup_\beta V_\beta = M$, automaticamente $\bigcup_\alpha U_\alpha \cup \bigcup_\beta V_\beta = M$; la compatibilità risiede allora nel mostrare che comunque prese ϕ_α, ψ_β , la funzione $\phi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}$ è un diffeomorfismo C^∞ . L'unione di tutti gli atlanti compatibili si dice *atlante massimale*, e si dice che quest'ultimo fornisce una *struttura differenziabile* alla varietà. Tale struttura ci permetterà infatti di definire una nozione di differenziabilità per le applicazioni tra varietà.

2.1.1 Applicazioni tra varietà

Introduciamo il concetto di *applicazione tra varietà*: sia $F : M \rightarrow N$ una applicazione continua (la continuità è una proprietà che possiamo richiedere dato che M e N sono spazi topologici). Vogliamo definire una nozione di differenziabilità per F in un punto p di M : in linea di principio questa domanda non ha senso perchè su \mathbb{R}^n la differenziabilità è definita mediante un rapporto incrementale che a denominatore presenta la differenza tra due punti infinitamente vicini. Su una varietà differenziabile tale differenza non è definita, pertanto dovremo procedere in modo diverso.

Poichè la varietà è differenziabile, preso un qualsiasi punto $p \in M$ questo apparterrà ad un aperto $U_\alpha \subset M$ e avrà delle coordinate in \mathbb{R}^m mediante la funzione ϕ_α ; analogamente l'immagine di p in N tramite F , $F(p)$, apparterrà anch'essa ad un intorno $V_\alpha \subset N$, e avrà delle coordinate in \mathbb{R}^n tramite ψ_α . Per la continuità, possiamo sempre trovare un intorno di p che venga mappato da F in un intorno di $F(p)$ che sia contenuto dentro V_α , pur di metterci sufficientemente vicini a p ; possiamo definire la seguente funzione:

$$f = \psi_\alpha \circ F \circ \phi_\alpha^{-1} : \mathbb{R}^m \supset U_\alpha \rightarrow V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$$

Tale funzione viene detta *rappresentante locale* di F ed è una applicazione da \mathbb{R}^m in \mathbb{R}^n , e possiamo applicare l'usuale nozione di differenziabilità: diremo quindi che l'applicazione F è *differenziabile* in $p \in M$ se il suo rappresentante locale f è differenziabile in $\phi_\alpha(p)$. Diremo inoltre che l'applicazione F è C^∞ se f lo è. Sfruttando l'invertibilità delle funzioni di transizione si può mostrare che questa definizione è indipendente dalla carta scelta.

In particolare, consideriamo una funzione che associa ad ogni punto di una varietà M un numero:

$$f : M \rightarrow \mathbb{R}$$

Se $x \in \mathbb{R}^n$ è l'immagine mediante la carta ϕ di un punto p di M , scriveremo con abuso di linguaggio $f(x)$ intendendo $(f \circ \phi^{-1})(x)$, dove $f \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

2.2 Vettori e campi vettoriali

Su una varietà differenziabile M il concetto di vettore è strettamente legato al concetto di derivazione. Sia p un punto di M , e $\gamma(t)$ una curva su M con le seguenti proprietà

$$\gamma :] - a, a[\rightarrow M$$

$$\gamma(0) = p$$

Se $\phi : U_p \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una carta e $\phi \circ \gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ è il rappresentante locale di γ , definiremo un vettore V applicato in p come:

$$V \equiv \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi \circ \gamma(t) - \phi \circ \gamma(0)}{t} = \left. \frac{d\phi \circ \gamma}{dt} \right|_{t=0}$$

Due curve γ_1 e γ_2 entrambe passanti per p a $t = 0$ si dicono *equivalenti* se $\frac{d(\phi \circ \gamma_1)}{dt}(0) = \frac{d(\phi \circ \gamma_2)}{dt}(0)$; inoltre è possibile mostrare che questa definizione di vettore è indipendente dalla scelta delle coordinate.

Esiste un modo alternativo per definire i vettori: oltre a γ , consideriamo anche le funzioni $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ e definiamo la funzione

$$f \circ \gamma :] - a, a[\rightarrow \mathbb{R}$$

Tale funzione ha derivata perfettamente definita, dunque considereremo

$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(0)$$

e definiremo questo oggetto *derivata direzionale* di f in p lungo la curva γ . Lo stesso oggetto può essere scritto isolando la funzione f

$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(0) \equiv \dot{\gamma}(0)(f)$$

definendo di fatto l'operatore $\dot{\gamma}(0) : M \rightarrow \mathbb{R}$. Per capire a cosa corrisponde questa costruzione possiamo pensare al caso di \mathbb{R}^n :

$$\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\gamma = \{x^\mu(t)\}$$

$$(f \circ \gamma)(t) = f(x(t))$$

$$\Rightarrow \left. \frac{d}{dt} f(x(t)) \right|_{t=0} = \dot{x}^\mu(t) \left. \frac{d}{dx^\mu} f \right|_{t=0} = \dot{x}^\mu(0) \partial_\mu f(x(0)) \equiv \dot{x}(0) \cdot \nabla f(x(0))$$

Questa è a tutti gli effetti la definizione di derivata direzionale su \mathbb{R}^n , e il vettore è nascosto nella direzione lungo la quale deriviamo. Su una varietà la definizione è ben posta anche senza l'introduzione di coordinate, ma se vogliamo effettuare un calcolo analogo dobbiamo usare una carta ϕ :

$$f \circ \gamma = (f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \gamma)$$

Infatti $(\phi \circ \gamma)(t)$ è la rappresentazione in coordinate della curva, mentre $(f \circ \phi^{-1}) \equiv \tilde{f}$ è la rappresentazione in coordinate di f . In definitiva $f \circ \gamma \equiv \tilde{f}(x^\mu(t))$: su \mathbb{R}^n questa scrittura è globalmente valida, su una varietà differenziabile in generale lo sarà solo localmente, in particolare nel dominio di validità della carta ϕ . Se consideriamo la derivata di \tilde{f} :

$$\left. \frac{d}{dt} \tilde{f}(x^\mu(t)) \right|_{t=0} = \dot{x}^\mu(0) \partial_\mu \tilde{f}(x(0))$$

La curva γ definisce un vettore tangente alla varietà nel punto p , le cui componenti nella base indotta dalla funzione ϕ sono proprio le $\dot{x}^\mu(0)$. Tali componenti sono sempre accompagnate a delle derivate che agiscono su una funzione, in altre parole un vettore su una varietà definisce una procedura di derivazione: dato un vettore con componenti v^μ per qualche carta ϕ , ad esso possiamo sempre associare la derivazione $v^\mu \partial_\mu$ dove ∂_μ sono le derivate lungo le direzioni coordinate definite dalla stessa carta ϕ . Al fine di scegliere una base comoda, se il punto $p \in M$ ha coordinate $\{x_0^\mu\}$ considereremo le curve così definite:

$$\gamma_1 = \{x_0^1(t) = x_0^1 + tx_0^i(t) = x_0^i \quad (i \neq 1)\}$$

$$\gamma_2 = \{x_0^2(t) = x_0^2 + tx_0^i(t) = x_0^i \quad (i \neq 2)\}$$

$$\gamma_n = \{x_0^n(t) = x_0^n + tx_0^i(t) = x_0^i \quad (i \neq n)\}$$

Ognuna delle curve si muove su una delle direzioni coordinate di \mathbb{R}^n : nel piano questo equivarrebbe a muoversi solo lungo la direzione x o y . Le derivazioni associate a queste curve sono

$$\begin{aligned} \gamma_1 &\rightarrow \partial_1 \\ \gamma_2 &\rightarrow \partial_2 \\ &\cdot \\ &\cdot \\ \gamma_n &\rightarrow \partial_n \end{aligned}$$

In questo modo otteniamo n derivazioni $\partial_1, \dots, \partial_n$, dove n è la dimensione della varietà M . Poichè ogni vettore potrà sempre essere rappresentato come combinazione lineare di $\partial_1, \dots, \partial_n$, tale insieme di derivazioni costituisce una base dello spazio dei vettori tangenti a M in p :

$$V = V^\mu \partial_\mu$$

La derivata direzionale rispetto a V di una funzione f nel punto p si indica talvolta come

$$V_p(f) = V^\mu(\phi(p)) \partial_\mu(f \circ \phi^{-1})$$

In questo modo è immediato scoprire come trasformano i vettori sotto cambio di coordinate: supponiamo che il punto p si trovi nell'intersezione di due intorni U e V con funzioni coordinate ϕ e ψ , dunque abbia coordinate $\phi(p) = x^\mu$, $\psi(p) = y^\mu$ nei due intorni. Un vettore generico v avrà coordinate $v^\mu(x)$ sulla base $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ definita da ϕ , e coordinate $\tilde{v}^\mu(y)$ sulla base $\frac{\partial}{\partial y^\mu}$ definita da ψ : il passaggio da un set di coordinate all'altro avviene tramite la funzione di transizione $h = \psi \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, in altre parole $y^\mu = y^\mu(x)$ e le derivate trasformano di conseguenza come

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial y^\nu}$$

ovvero secondo lo jacobiano della trasformazione. Poichè un vettore v in un punto p esiste indipendentemente dalla base in cui è espresso, si deve avere

$$v^\mu(\phi(p)) \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \tilde{v}^\mu(\psi(p)) \frac{\partial}{\partial y^\mu}$$

ma per quanto detto

$$\begin{aligned} v^\mu(\phi(p)) \frac{\partial}{\partial x^\mu} &= v^\mu(\phi(p)) \left. \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\mu} \right|_{x=\phi(p)} \frac{\partial}{\partial y^\nu} = \tilde{v}^\mu(\psi(p)) \frac{\partial}{\partial y^\mu} \\ \Rightarrow \tilde{v}^\nu(\psi(p)) &= \left. \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\mu} \right|_{x=\phi(p)} v^\mu(\phi(p)) \equiv J^\nu{}_\mu(\phi(p)) v^\mu(\phi(p)) \end{aligned}$$

Si può mostrare che per come abbiamo definito i vettori, essi costituiscono effettivamente uno spazio vettoriale, in particolare sono chiusi sotto somma e moltiplicazione per una costante. Ad esempio, per mostrare che se V_p è un vettore anche cV_p con $c \in \mathbb{R}$ lo è, possiamo considerare la curva $\gamma(t)$ (o un qualsiasi altro rappresentante della classe di equivalenza da essa definita) e la curva $\gamma(ct)$: per $t = 0$, entrambe passano per p , e derivando rispetto al parametro si ottiene:

$$\left. \frac{d}{dt} f \circ \gamma(ct) \right|_{t=0} = c \left. \frac{d}{ds} f \circ \gamma(s) \right|_{t=0} = c V^\mu(\phi(p)) \partial_\mu f(0)$$

dove $s = ct$. Lo spazio vettoriale definito dai vettori tangenti in un punto p si dice *spazio tangente* alla varietà M nel punto p e si indica con $T_p M$. Tale spazio ha sempre la stessa dimensione della varietà: infatti il numero di vettori di base indipendenti che possiamo scrivere è pari esattamente al numero di curve coordinate che possiamo scegliere. Infine, una applicazione *smooth* (ovvero C^∞) che associa ad ogni punto della varietà un vettore tangente si dice *campo vettoriale*.

2.3 Funzionali lineari e 1-forme

Ogni volta che abbiamo uno spazio vettoriale, possiamo sempre considerarne il duale. Se $T_p M$ è lo spazio tangente, indicheremo con $T_p^* M$ lo spazio dei funzionali lineari su $T_p M$ o *spazio cotangente*. Su $T_p M$, la base $\{\partial_\mu\}$ si dice *base canonica* o *base olonoma*, e corrispondentemente possiamo definire una base canonica dx^μ su $T_p^* M$, detta *base duale*, in questo modo:

$$dx^\mu(\partial_\nu) \equiv \delta_\nu^\mu$$

Un funzionale $\omega \in T_p^* M$ può essere espanso sulla base canonica come

$$\omega = \omega_\mu dx^\mu$$

Poichè ω è un funzionale lineare sui vettori, se $v \in T_p M$ è definito un accoppiamento naturale di questo tipo:

$$\omega(V) = \omega(v^\alpha \partial_\alpha) = v^\alpha \omega_\beta dx^\beta(\partial_\alpha) = v^\alpha \omega_\beta \delta_\alpha^\beta = v^\alpha \omega_\alpha$$

Questa definizione è identica al caso della relatività speciale, perchè dipende unicamente dalla struttura di spazio vettoriale, sia esso uno spazio tangente alla varietà o lo spazio vettoriale di Minkowski. Sotto cambio di coordinate la regola di trasformazione delle forme è vincolata da quella dei vettori: poichè l'oggetto $\omega(v)$ è indipendente dalla base scelta dovrà assumere lo stesso valore in qualunque sistema di coordinate: se ω_α, v^β e $\tilde{\omega}_\alpha, \tilde{v}^\beta$ sono le componenti della forma ω e del vettore v in due carte differenti, si dovrà avere

$$\omega(v) = \omega_\alpha v^\alpha = \tilde{\omega}_\beta \tilde{v}^\beta$$

Poichè sappiamo che $\tilde{v}^\beta = J^\beta_\alpha v^\alpha$, avremo

$$\omega_\alpha v^\alpha = \tilde{\omega}_\beta J^\beta_\alpha v^\alpha \Rightarrow \omega_\alpha = \tilde{\omega}_\beta J^\beta_\alpha \Rightarrow \tilde{\omega}_\beta = (J^{-1})^\alpha_\beta \omega_\alpha$$

Ovvero se i vettori trasformano con la matrice jacobiana del cambio di coordinate, i funzionali trasformano con la matrice inversa trasposta.

Una applicazione smooth che associa ad ogni punto di M un funzionale su $T_p^* M$ si dice una *1-forma*.

2.4 Tensori e campi tensoriali

Come abbiamo visto, è possibile equipaggiare ogni punto di una varietà differenziabile con uno spazio tangente $T_p M$ e uno spazio cotangente $T_p^* M$. Se consideriamo il seguente oggetto:

$$\times_{(q)} T_p^* M \times_{(r)} T_p M$$

ovvero il prodotto diretto di q volte lo spazio cotangente e r volte lo spazio tangente, definiremo un *tensore di rango* (q, r) come una applicazione multilineare da $\times_{(q)} T_p^* M \times_{(r)} T_p M$ in \mathbb{R} . In coordinate:

$$T(\omega_1, \dots, \omega_q; v_1, \dots, v_r) = (\omega_1)_{\mu_1} \dots (\omega_q)_{\mu_q} v_1^{\nu_1} \dots v_r^{\nu_r} T(dx^{\mu_1}, \dots, dx^{\mu_q}; \partial_{\nu_1}, \dots, \partial_{\nu_r}) \equiv (\omega_1)_{\mu_1} \dots (\omega_q)_{\mu_q} v_1^{\nu_1} \dots v_r^{\nu_r} T_{\nu_1 \dots \nu_r}^{\mu_1 \dots \mu_q}$$

Grazie alla multilinearità, per conoscere l'azione di un tensore su un set di vettori e forme è sufficiente conoscerne l'azione su di una base, in questo caso la base canonica dei vettori e delle forme. Poichè anche l'accoppiamento di un tensore con i suoi argomenti è indipendente dalla base, le componenti di un tensore trasformeranno concordemente con la posizione dei loro indici, ad esempio

$$T'^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} = T^{\rho\sigma}{}_{\lambda\tau} \frac{\partial y^\mu}{x^\rho} \frac{\partial y^\nu}{x^\sigma} \frac{\partial x^\lambda}{y^\alpha} \frac{\partial x^\tau}{y^\beta} \equiv J^\mu_\rho J^\nu_\sigma T^{\rho\sigma}{}_{\lambda\tau} (J^{-1})^\lambda_\alpha (J^{-1})^\tau_\beta$$

Una applicazione smooth che associa a ogni punto della varietà un tensore di tipo (q, r) si dice *campo tensoriale* di tipo (q, r) ; campi vettoriali e 1-forme sono particolari esempi di campi tensoriali, rispettivamente di tipo $(1, 0)$ e $(0, 1)$.

Il campo tensoriale più importante della geometria riemanniana è il cosiddetto *tensore metrico riemanniano*: data una varietà M , una metrica riemanniana è un campo tensoriale di tipo $(0, 2)$ che soddisfa:

1. $\forall p \in M, g_p(v, w) = g_p(w, v)$;
2. $g_p(u, u) \geq 0$.

Queste due proprietà definiscono un prodotto scalare definito positivo sullo spazio tangente ad ogni punto. Le componenti della metrica sono definite da

$$g_{\mu\nu} = g(\partial_\mu, \partial_\nu)$$

dunque il tensore g può essere espanso su una base:

$$g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu \equiv g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

Si può dimostrare che data una qualsiasi varietà *paracompatta* esiste sempre una metrica riemanniana.

Le metriche riemanniane non sono molto utili per la relatività: la definizione può essere estesa a comprendere anche le cosiddette metriche *pseudoriemanniane*, ovvero metriche in cui cade la seconda ipotesi ed è sostituita da:

- $g_p(u, v) = 0 \forall v \Rightarrow u = 0$, ovvero il prodotto scalare definito da g è non degenere (oppure $\det g_{\mu\nu} = 0$);

Il tensore $\eta_{\mu\nu}$ di Minkowski è un particolare esempio di metrica pseudoriemanniana.

Poichè la matrice $g_{\mu\nu}$ è invertibile possiamo introdurre l'inverso, $g^{\mu\nu}$, definito da:

$$g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta_\nu^\mu$$

Quando è presente, una metrica e il suo inverso generano un isomorfismo naturale tra spazio tangente e spazio cotangente: dato un vettore

$$v^\mu \rightarrow v^\mu g_{\mu\nu} \equiv v_\nu$$

e data una forma

$$\omega_\mu \rightarrow g^{\mu\nu} \omega_\nu \equiv \omega^\mu$$

Le metriche pseudoriemanniane si classificano in base alla segnatura del prodotto scalare che definiscono, ovvero il numero di 1 e -1 presenti sulla diagonale della forma quadratica, una volta ridotta in forma normale. Dato che la metrica è un campo tensoriale smooth e il suo determinante è sempre diverso da zero, la sua segnatura è indipendente dal punto scelto. Una metrica del tipo

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(\underbrace{-1, \dots, -1}_p, \underbrace{1, \dots, 1}_q)$$

si dice metrica con segnatura (p, q) , o semplicemente metrica (p, q) : ad esempio la metrica di Minkowski è una metrica $(3, 1)$. In generale, chiameremo *metrica lorentziana* una metrica con segnatura $(3, 1)$: data una metrica lorentziana, i vettori tangenti alla varietà possono essere classificati in base alla loro norma:

- tipo luce: $v_p^2 = 0$;
- tipo tempo: $v_p^2 > 0$;
- tipo spazio: $v_p^2 < 0$.

2.5 Forme differenziali

Abbiamo visto che le 1-forme sono elementi dello spazio duale a $T_p M$, lo spazio cotangente $T_p^* M$.

Definizione 2. Una r -forma T è un campo tensoriale di tipo $(0, r)$ alternante, ovvero completamente antisimmetrico nei suoi argomenti:

$$T(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_r) = -T(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_r) \quad \forall i, j$$

o in componenti

$$T_{\mu_1 \dots \mu_i \dots \mu_j \dots \mu_r} = -T_{\mu_1 \dots \mu_j \dots \mu_i \dots \mu_r}$$

È conveniente introdurre una base per le forme a partire da quella canonica per i campi tensoriali: se $\{dx^\mu\}$ è una base per le 1-forme, con $\mu = 1, \dots, \dim(M)$, una base per tensori $(0, r)$ in generale è data da

$$dx^{\mu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\mu_r}$$

Poichè le forme differenziali sono oggetti completamente antisimmetriche non distingueremo l'ordinamento dei vari elementi e una base potrà essere scritta come

$$\sum_{p \in S_r} dx^{\mu_{p_1}} \otimes \dots \otimes dx^{\mu_{p_r}} \text{sign}(p)$$

dove S_r è il gruppo delle permutazioni di r oggetti.

Esempi

1. Per un tensore di rango $(0, 2)$ (come la metrica) una base è data dal prodotto tensoriale $dx^{\mu_1} \otimes dx^{\mu_2}$, e la corrispondente base delle 2-forme si ottiene come:

$$dx^{\mu_1} \otimes dx^{\mu_2} \rightarrow dx^{\mu_1} \otimes dx^{\mu_2} - dx^{\mu_2} \otimes dx^{\mu_1}$$

2. Per le 3-forme:

$$\begin{aligned} dx^{\mu_1} \otimes dx^{\mu_2} \otimes dx^{\mu_3} \rightarrow & dx^{\mu_1} \otimes dx^{\mu_2} \otimes dx^{\mu_3} + dx^{\mu_2} \otimes dx^{\mu_3} \otimes dx^{\mu_1} + dx^{\mu_3} \otimes dx^{\mu_1} \otimes dx^{\mu_2} - \\ & - dx^{\mu_2} \otimes dx^{\mu_1} \otimes dx^{\mu_3} - dx^{\mu_3} \otimes dx^{\mu_2} \otimes dx^{\mu_1} - dx^{\mu_1} \otimes dx^{\mu_3} \otimes dx^{\mu_2} \end{aligned}$$

ovvero abbiamo sommato sulle permutazioni cicliche e anticicliche dei tre indici μ_1 , μ_2 e μ_3 , che portano rispettivamente segno 1 e -1.

In generale sottointenderemo la scrittura dei vari termini derivanti dall'antisimmetrizzazione definendo il cosiddetto *prodotto wedge*, o *prodotto esterno* \wedge :

$$dx^{\mu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\mu_r} \rightarrow dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}$$

Il prodotto esterno sta ad indicare un prodotto tensoriale totalmente antisimmetrico. Una volta costruita la base, le r -forme possono essere espanse in componenti: convenzionalmente si usa definire le 0-forme come le funzioni $M \rightarrow \mathbb{R}$, mentre per forme di ordine superiore, ad esempio le 1-forme

$$\omega = \omega_\mu dx^\mu$$

Per le 2-forme, una prima espansione ingenua potrebbe essere:

$$F = F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$$

ma il coefficiente $F_{\mu\nu}$ deve essere anch'esso antisimmetrico perchè una sua eventuale parte simmetrica saturata con $dx^\mu \wedge dx^\nu$ non dà contributo. Inoltre, essendo $dx^\mu \wedge dx^\nu = -dx^\nu \wedge dx^\mu$ la somma è da intendersi per $\mu < \nu$, o equivalentemente possiamo dividere per il numero di permutazioni di 2 oggetti:

$$F = \frac{1}{2!} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$$

Per le 3-forme:

$$H = \frac{1}{3!} H_{\mu\nu\lambda} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\lambda$$

In generale per una r -forma:

$$\omega = \frac{1}{r!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}$$

dove i coefficienti $\omega_{\mu_1 \dots \mu_r}$ sono totalmente antisimmetrici nello scambio degli indici.

Il processo di costruzione di r -forme volge al termine una volta che r raggiunge la dimensione della varietà: se $r > \dim(M)$ infatti due indici della r -forma dovranno necessariamente essere uguali, rendendo nulla l'espansione; ad esempio in 5 dimensioni possiamo avere al massimo delle 5-forme. La dimensione dello spazio delle r -forme, che si indica con $\Lambda^r(M)$, si ottiene osservando che il numero di combinazioni possibili di n elementi presi r alla volta è dato dal coefficiente binomiale $\binom{n}{r}$:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

o analogamente, una volta scelto il primo indice tra gli n possibili, per l'antisimmetria il secondo può assumere soltanto $n-1$ valori, e così via fino all' $(r-1)$ -esimo che può scegliere tra $n-(r-1)$ valori; poichè non è importante l'ordine, divideremo per il numero di permutazioni di r oggetti:

$$\frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r}$$

Il valore così determinato corrisponde al numero di elementi di base indipendenti che possiamo costruire. Notiamo subito una dualità tra lo spazio delle r -forme e lo spazio delle $(n-r)$ -forme, che a causa di una nota proprietà del binomiale risultano avere stessa dimensione:

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

Possiamo definire la cosiddetta algebra esterna delle r -forme su M , come somma diretta dei vari spazi:

$$\Lambda(M) = \bigoplus_{r=0}^n \Lambda^r(M)$$

dotata del seguente prodotto: se $\omega \in \Lambda^r(M)$ e $\eta \in \Lambda^s(M)$ (entrambe appartengono a $\Lambda(M)$), e la loro espansione in coordinate è

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{r!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} \\ \eta &= \frac{1}{s!} \eta_{\mu_1 \dots \mu_s} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_s} \end{aligned}$$

definiremo il prodotto $\omega \wedge \eta$ come

$$\omega \wedge \eta \equiv \frac{1}{r!} \frac{1}{s!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} \eta_{\mu_1 \dots \mu_s} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_s}$$

ovvero semplicemente giustapponiamo gli elementi di base delle due forme aggiungendo un prodotto wedge, e antisimmetrizzando il prodotto delle componenti.

Ad esempio, se $\omega = \omega_\mu dx^\mu$ ed $\eta = \eta_\nu dx^\nu$:

$$\omega \wedge \eta = \omega_\mu \eta_\nu dx^\mu \wedge dx^\nu = \frac{1}{2!} (\omega_\mu \eta_\nu - \omega_\nu \eta_\mu) dx^\mu \wedge dx^\nu$$

cioè la vera e propria componente di $\omega \wedge \eta$ è $\omega_\mu \eta_\nu - \omega_\nu \eta_\mu$.

Se $F = \frac{1}{2!}F_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu$ e $\omega = \omega_\mu dx^\mu$:

$$\begin{aligned} F \wedge \omega &= \frac{1}{2!}F_{\mu\nu}\omega_\lambda dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\lambda = \frac{1}{2!} \frac{1}{3!} (F_{\mu\nu}\omega_\lambda + F_{\nu\lambda}\omega_\mu + F_{\lambda\mu}\omega_\nu - F_{\mu\lambda}\omega_\nu - F_{\nu\mu}\omega_\lambda - F_{\lambda\nu}\omega_\mu) dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\lambda = \\ &= \frac{1}{3!} (F_{\mu\nu}\omega_\lambda + F_{\nu\lambda}\omega_\mu + F_{\lambda\mu}\omega_\nu) dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\lambda \end{aligned}$$

Osserviamo che per come è definito il prodotto $\omega \wedge \eta$, l'ordine delle due forme non è irrilevante, infatti:

$$\eta \wedge \omega = \frac{1}{s!} \frac{1}{r!} \eta_{\mu_1 \dots \mu_s} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_s} \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}$$

Se vogliamo riportare il prodotto $dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_s} \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}$ nello stesso ordine del caso precedente, dobbiamo far effettuare s salti, a ognuno degli r elementi di base di ω , ciascuno dei quali comporta un segno -:

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{r \cdot s} \eta \wedge \omega$$

In particolare, scopriamo che

$$\eta \wedge \eta = (-1)^{r^2} \eta \wedge \eta$$

ovvero se η è una forma di rango dispari il prodotto wedge con se stessa è identicamente nullo.

La dimensione dell'algebra esterna $\Lambda(M)$ si ottiene sommando le dimensioni dei vari sottospazi:

$$\dim(\Lambda(M)) = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} = 2^n$$

Tale risultato si può ottenere analogamente considerando l'elemento di base $dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_n}$, ovvero il prodotto antisimmetrizzato di n elementi di base dx^{μ_i} , e osservando che ognuno di essi può esserci o non esserci (2 possibilità), il che dà origine a 2^n possibilità.

2.5.1 Derivata esterna

É possibile introdurre sull'algebra esterna una nozione di derivata che generalizza a uno spazio curvo il concetto di rotore: se ω una r -forma, definiamo l'operatore

$$\begin{aligned} d : \Lambda^r(M) &\rightarrow \Lambda^{r+1}(M) \\ \omega &= \frac{1}{r!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} \\ d\omega &\equiv \frac{1}{r!} \partial_{[\lambda} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r]} dx^\lambda \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} \end{aligned}$$

dove le parentesi quadre indicano l'antisimmetrizzazione degli indici. Ad esempio consideriamo delle 1-forme in 3 dimensioni:

$$\begin{aligned} A &= A_i dx^i = A_x dx + A_y dy + A_z dz \\ dA &= \partial_i A_j dx^i \wedge dx^j = \frac{1}{2!} (\partial_i A_j - \partial_j A_i) dx^i \wedge dx^j \\ &\Rightarrow (dA)_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i \end{aligned}$$

dunque la matrice dei coefficienti è 3×3 e antisimmetrica, dunque avrà soltanto tre componenti diverse da zero:

$$\begin{aligned} (dA)_{12} &= \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 \equiv (\nabla \times \vec{A})_3 \\ (dA)_{23} &= \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2 \equiv (\nabla \times \vec{A})_1 \end{aligned}$$

$$(dA)_{31} = \partial_3 A_1 - \partial_1 A_3 \equiv (\nabla \times \vec{A})_2$$

ovvero la derivata esterna di una 1-forma in tre dimensioni è equivalente al rotore del corrispondente vettore, poichè le 2-forme sono duali alle 1-forme, e l'isomorfismo tra forme e vettori generato dalla metrica δ_{ij} è banale.

In spazi curvi, viceversa, la derivata esterna agisce per definizione su forme. Consideriamo il quadripotenziale dell'elettromagnetismo $A^\mu = (\phi, \vec{A})$: con la metrica possiamo definire la forma

$$A = A_\mu dx^\mu$$

e considerarne la derivata esterna

$$dA = \partial_\lambda A_\mu dx^\lambda \wedge dx^\mu = \frac{1}{2} (\partial_\lambda A_\mu - \partial_\mu A_\lambda) dx^\lambda \wedge dx^\mu \equiv \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\lambda \wedge dx^\mu$$

Ovvero se definiamo la field strenght dell'elettromagnetismo come una 2-forma, cioè del tipo $F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\lambda \wedge dx^\mu$, le sue componenti sono definite dall'equazione

$$F = dA$$

Questa definizione vale automaticamente su qualsiasi varietà ed è invariante sotto qualsiasi cambio di coordinate.

Consideriamo una seconda applicazione della derivata esterna ad una r -forma:

$$d(d\omega) = \frac{1}{r!} \partial_\alpha \partial_\lambda \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} dx^\alpha \wedge dx^\lambda \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} \equiv 0$$

per l'antisimmetria degli elementi di base nello scambio $\alpha \leftrightarrow \lambda$. Dunque se $F = dA$ si ha

$$dF = d^2 A = 0$$

ma espandendo la forma dF :

$$dF = \frac{1}{2} \partial_\lambda F_{\mu\nu} dx^\lambda \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu = \frac{1}{3!} (\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu}) dx^\lambda \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu$$

Le componenti di questa 3-forma devono annullarsi identicamente, cioè si deve avere

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0$$

Questo corrisponde alla seconda equazione di Maxwell:

$$0 = \partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\lambda\alpha\mu\nu} \partial_\lambda F_{\mu\nu} = \partial_\beta * F^{\beta\alpha}$$

ovvero anche la seconda equazione di Maxwell si può in forma indipendente dalle coordinate.

2.5.2 Derivata interna

Possiamo definire un secondo tipo di derivata sull'algebra esterna delle forme. Se $X = X^\mu \partial_\mu$ è un campo vettoriale su M e ω è una r -forma, definiamo

$$i_X : \Lambda^r(M) \rightarrow \Lambda^{r-1}(M)$$

$$i_X(\omega) = \frac{1}{(r-1)!} X^\nu \omega_{[\nu\mu_2 \dots \mu_r]} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}$$

Ancora una volta abbiamo $i_X^2 = 0$ per l'antisimmetria:

$$i_X^2(\omega) = X^\nu X^\mu \omega_{[\nu\mu\mu_3 \dots \mu_r]} \equiv 0$$

2.6 Pull-back e push-forward

Sia f una applicazione differenziabile tra due varietà M ed N :

$$f : M \rightarrow N$$

Tramite questa applicazione possiamo mettere in corrispondenza non soltanto i punti tra le varietà, ma anche i rispettivi spazi tangenti o cotangenti.

Sia p un punto di M , mappato in $f(p)$ punto di N . Se γ è una curva su M che passa per p è immediato osservare che la curva $f \circ \gamma$ passa per $f(p)$, perciò possiamo stabilire la seguente corrispondenza: al vettore v_p associato alla curva γ nel punto p (o meglio alla derivata direzionale lungo γ), associamo il vettore $(f_*v)_{f(p)}$ definito dalla derivata della curva $f \circ \gamma$ nel punto $f(p)$. Date due carte ϕ e ψ su M ed N rispettivamente, p avrà coordinate $x = \phi(p)$, mentre $f(p)$ avrà coordinate $y = \psi(f(p))$. Avremo:

$$\begin{aligned} x^\mu(t) &= \phi(\gamma(t)) \\ y^\mu(t) &= \tilde{f}^\mu(x(t)) \quad (\equiv \psi(f(\gamma(t)))) \\ \Rightarrow \dot{y}^\mu(t) &= \frac{\partial \tilde{f}^\mu}{\partial x^\alpha}(x(t)) \dot{x}^\alpha(t) \end{aligned}$$

Per $t = 0$ $\dot{x}^\alpha(0) \equiv v^\alpha$ ed otteniamo effettivamente le componenti del vettore f_*v :

$$(f_*v)^\mu(y) = \frac{\partial \tilde{f}^\mu(x)}{\partial x^\alpha}(x(0)) v^\alpha(x)$$

Osserviamo che questa espressione ha la stessa forma della regola di trasformazione dei vettori, a parte il fatto che la jacobiana non è relativa ad un cambio di coordinate ma ad una mappa tra varietà. In astratto, ricordiamo che i vettori $v \in T_p M$ agiscono sulle funzioni $h : M \rightarrow \mathbb{R}$, mentre i vettori $w \in T_{f(p)} N$ agiscono sulle funzioni $h' : N \rightarrow \mathbb{R}$, dunque il vettore f_*v è definito in base alla sua azione su una funzione h' :

$$(f_*(v))(h') \equiv v(h' \circ f)$$

dove $h' \circ f$ è una funzione da M in \mathbb{R} . L'applicazione

$$f_* : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$$

si dice *push-forward*.

Mentre il push-forward associa ad un vettore di M un vettore di N , è possibile definire un'altra applicazione che associa ad una forma di N una forma di M : data l'inversione di marcia rispetto al caso precedente l'applicazione prende il nome di *pull-back*. Se $\omega \in T_{f(p)}^* N$, la funzione f^* le associa una forma $f^*\omega \in T_p^* M$ definendo la sua azione su un vettore $v \in T_p M$:

$$(f^*\omega, v) \equiv (\omega, f_*v)$$

In componenti si ha

$$(f^*\omega)_\alpha = \omega_\mu \frac{\partial \tilde{f}^\mu}{\partial x^\alpha} \equiv \omega_\mu J^\mu{}_\alpha$$

Questo spiega anche perchè le forme vengono portate indietro anzichè in avanti: l'applicazione f non è in generale un diffeomorfismo dunque il suo jacobiano J non sarà invertibile, pertanto il suo trasposto è l'unico endomorfismo di $T_p^* M$ che possiamo definire in maniera canonica.

2.7 Diffeomorfismi ed embedding

Una classe molto utile di mappe è costituita dalle mappe del tipo

$$f : M \rightarrow M$$

Se f è surgettiva e iniettiva, si dice che f è un *diffeomorfismo* di M . Un'altra classe interessante è composta dalle mappe $f : M \rightarrow N$ con $\dim(M) \leq \dim(N)$. In particolare consideriamo mappe con le seguenti proprietà:

1. $f_* : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ è un'iniezione, ovvero il rango della matrice jacobiana $\frac{f^\mu}{x^\alpha}$ è massimo. In tal caso diremo che la funzione f definisce una *immersione* di M dentro N ;
2. f è iniettiva ed è anche una immersione. In tal caso diremo che f è un *embedding*.

In pratica, la proprietà 1) per il teorema del Dini ci informa che l'applicazione è localmente invertibile, ovvero localmente M può essere "immersa" in N . La 2) assicura che l'invertibilità è globale, ovvero possiamo M può essere immerso in maniera 1:1 in N : in altre parole M è una *sottovarietà* di N . Ad esempio, supponiamo di avere un cerchio (varietà unidimensionale) e di volerlo immergere in \mathbb{R}^2 (varietà bidimensionale):

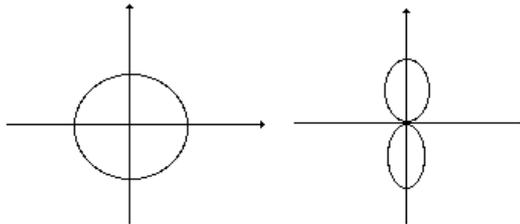


Figura 2.1: Esempio di embedding (sinistra) e di immersione (sinistra)

L'ellisse di sinistra è un embedding, dato che punti diversi del cerchio sono mappati in punti diversi, mentre questo l'oggetto di destra è soltanto una immersione, dato che l'origine corrisponde agli angoli 0 e π .

2.7.1 Metrica indotta e lunghezza di una curva

L'operazione di pull-back può essere estesa a tensori di rango $(0, r)$, detti tensori covarianti, in questo modo: se $f : M \rightarrow N$ è un'applicazione differenziabile e $T \in (T^*_p N)^r$, allora il tensore $f^*T \in (T^*_p M)^r$ è definito da

$$(f^*T)_p(v_1, \dots, v_r) = T(f_*v_1, \dots, f_*v_r)$$

Se f è un embedding da M in N , in particolare M è una sottovarietà di N , e se N ha una metrica M la eredita mediante pull-back: possiamo infatti definire una metrica su M come

$$g_M = f^*g_N$$

In coordinate, se $f^\mu(x)$ è la mappa tra le due varietà:

$$g_{mn}^{(M)}(x) = \frac{\partial f^\mu}{\partial x^m} \frac{\partial f^\nu}{\partial x^n} g_{\mu\nu}^{(N)}$$

Consideriamo ad esempio la sfera S_2 embedded in \mathbb{R}^3 , e vediamo quale metrica viene indotta sulla sfera dalla metrica di \mathbb{R}^3 . Una mappa da S_2 in \mathbb{R}^3 può essere definita dal passaggio in coordinate polari:

$$x^\mu = \begin{cases} x = R \sin \theta \cos \phi \\ y = R \sin \theta \sin \phi \\ z = R \cos \theta \end{cases}$$

La metrica di \mathbb{R}^3 è

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

oppure, in componenti, $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$. La metrica indotta su S_2 sarà allora

$$ds_{S_2}^2 = g_{\theta\theta}d\theta^2 + 2g_{\theta\phi}d\theta d\phi + g_{\phi\phi}d\phi^2$$

dove le componenti si ottengono applicando la regola:

$$\begin{aligned} g_{\theta\theta} &= \delta_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \theta} \frac{\partial x^\nu}{\partial \theta} = \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial \theta} \right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta} \right)^2 = \\ &= R^2 \cos^2 \theta \cos^2 \phi + R^2 \cos^2 \theta \sin^2 \phi + R^2 \sin^2 \theta = R^2 \\ g_{\theta\phi} &= \delta_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \theta} \frac{\partial x^\nu}{\partial \phi} = \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial x}{\partial \phi} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial y}{\partial \phi} + \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\partial z}{\partial \phi} = -R^2 \cos \theta \cos \phi \sin \theta \sin \phi + R^2 \cos \theta \sin \phi \sin \theta \cos \phi = 0 \\ g_{\phi\phi} &= R^2 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

da cui

$$ds^2 = R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

Data una metrica riemanniana la lunghezza di una curva $x^\mu(t)$ di estremi a e b è definita da

$$L_{ab} = \int_a^b d\tau \sqrt{g_{\mu\nu}(x(\tau)) \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau} \frac{dx^\nu(\tau)}{d\tau}}$$

Ad esempio possiamo considerare l'embedding del cerchio di raggio $R \sin \theta_0$ nella sfera S_2 definito da $\theta_0 \mapsto (\theta_0, \phi)$. La metrica sul cerchio indotta dall'immersione nella sfera si ottiene sostituendo all'interno della metrica della sfera $\theta = \theta_0$, e si ha

$$ds_{S_1}^2 = R^2 \sin^2 \theta_0 d\phi^2$$

L'integrale

$$L_{0,2\pi} = \int_0^{2\pi} d\phi \sqrt{g_{\phi\phi} \frac{d\phi}{d\phi} \frac{d\phi}{d\phi}}$$

che rappresenta la lunghezza della curva immersa in S_2 , restituisce proprio il valore che ci aspettiamo, $2\pi R \sin \theta$.

Se la metrica non è riemanniana non è detto che $g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$ sia positivo, e dovremo quindi distinguere tra le curve: diremo che una curva è di *tipo tempo* se $g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu > 0$, mentre diremo che è di *tipo spazio* $g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu < 0$. Le curve che corrispondono a moti fisici devono essere sempre globalmente di uno stesso tipo: diversamente, corrisponderebbero a traiettorie che entrano o escono dal cono luce, ovvero a moti con velocità superiori a quella della luce. Con questa distinzione, per curve di tipo tempo la definizione di lunghezza rimane quella usuale

$$L_t = \int_a^b \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}$$

mentre per curve di tipo spazio

$$L_s = \int_a^b \sqrt{-g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}$$

Un'altra differenza tra il caso euclideo e quello pseudoriemanniano è la seguente: le curve estremali del funzionale lunghezza, le *geodetiche*, sono curve di minima lunghezza nel caso riemanniano e di massima nel caso pseudoriemanniano di massima. Fisicamente questo si può capire pensando al paradosso dei gemelli: due gemelli si trovano in origine all'evento iniziale (x_1, \vec{x}) , il primo ("1") resta fermo nel punto \vec{x} mentre l'altro ("2") comincia a muoversi seguendo

la traiettoria in figura. Entrambi si incontrano nuovamente nell'evento (x_2, \vec{x}) . La lunghezza delle due traiettorie, calcolata con la metrica minkoskiana, restituisce

$$L_1 = \int_{x_1}^{x_2} c^2 \sqrt{\eta_{00} \frac{dt}{x^0} \frac{dt}{x^0}} = x_2 - x_1$$

mentre

$$L_2 = \int_{x_1}^{x_2} c^2 \sqrt{\eta_{00} \frac{dt}{x^0} \frac{dt}{x^0} + \eta_{ii} \frac{dx^i}{dx_0} \frac{dx^i}{dx_0}} = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < x_2 - x_1$$

dato che l'integrando è minore di 1. Dunque la traiettoria seguita dal gemello fermo, una linea retta, risulta essere la retta di massima lunghezza, contrariamente a quanto accade in geometria euclidea. Osserviamo comunque che a rigore il paradosso dei gemelli non può essere trattato all'interno della relatività ristretta, a causa del punto di inversione nella traiettoria del gemello in moto, cui il suo sistema di riferimento smette di essere inerziale.

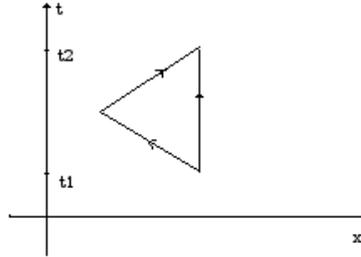


Figura 2.2: Traiettorie seguite dai due gemelli

2.8 Integrazione su varietà

Consideriamo una varietà di dimensione n e una particolare carta

$$\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Scegliamo una n -forma

$$\omega = \frac{1}{n!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_n} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_n}$$

Poichè il rango della forma è il massimo possibile, possiamo sempre riordinare gli elementi della base in modo da avere

$$\omega = \omega_{1 \dots n} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

Definiamo a questo punto l'integrale di una n -forma sull'aperto U come

$$\int_U \omega \stackrel{DEF}{=} \int_{\phi(U)} \omega_{1 \dots n} d^n x$$

dove $d^n x$ è la misura di Lebesgue o di Riemann. Verifichiamo che questa definizione è consistente, ovvero è indipendente dal sistema di coordinate scelto: consideriamo un diffeomorfismo $F : M \rightarrow M$ che associa

$$x^\mu \mapsto y^\mu$$

in particolare $x^\mu = F^\mu(y)$. La regola di trasformazione per una n forma è

$$\omega = \omega_{1\dots n} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = \omega_{1\dots n} \frac{\partial x^1}{\partial y^{\mu_1}} \dots \frac{\partial x^n}{\partial y^{\mu_n}} dy^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dy^{\mu_n} =$$

Poichè il prodotto $dy^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dy^{\mu_n}$ è completamente antisimmetrico, si ha

$$\frac{\partial x^1}{\partial y^{\mu_1}} \dots \frac{\partial x^n}{\partial y^{\mu_n}} dy^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dy^{\mu_n} = \det \left| \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu} \right| dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n$$

da cui

$$\omega = \omega_{1\dots n} \det \left| \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu} \right| dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n = \omega_{1\dots n} \det (J^{-1}) dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n$$

ma questo deve anche essere uguale a $\omega'_{1\dots n} dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n$, dunque

$$\omega'_{1\dots n} = \omega_{1\dots n} \det (J^{-1})$$

Possiamo quindi scrivere

$$\int_{F(\phi(U))} \omega'_{1\dots n} d^n y = \int_{F(\phi(U))} \omega_{1\dots n} \det \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu} \right) d^n y = \text{sign} \left(\det \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu} \right) \right) \int_{\phi(U)} \omega_{1\dots n} d^n x$$

Nel futuro considereremo soltanto varietà orientabili:

Definizione 3. Una varietà M si dice orientabile se possiamo scegliere un atlante tale che $\det (J_{\phi_{ij}}) > 0$ per ognuna delle funzioni di transizione ϕ_{ij} .

Dunque per varietà orientabili l'integrale è invariante e la definizione è ben posta. L'utilità di lavorare con varietà orientabili sta nel fatto che nel calcolo di un integrale i vari intorni contribuiscono tutti con lo stesso segno, ad esempio se due intorni U_i e U_j hanno intersezione non vuota, l'integrale su $U_i \cup U_j$ può essere scomposto in questo modo

$$\int_{U_i \cup U_j} = \int_{U_i} + \int_{U_j} - \int_{U_i \cap U_j}$$

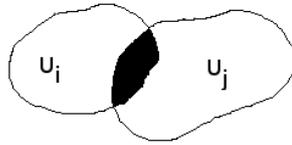


Figura 2.3: Intersezione tra due intorni U_i, U_j

2.8.1 Partizione dell'unità

Formalmente, l'integrale su una varietà è definito introducendo la cosiddetta *partizione dell'unità*.

Definizione 4 (Varietà paracompatta). Sia M una varietà differenziabile. M si dice paracompatta se esiste un ricoprimento $\{U_i\}$ di aperti di M tale che ogni punto di M è ricoperto da un numero finito di U_i .

Definizione 5 (Partizione dell'unità). Sia $\{\epsilon_i(p)\}$ una famiglia di funzioni differenziabili che soddisfa le seguenti proprietà:

1. $0 \leq \epsilon_i(p) \leq 1$;
2. $\epsilon_i(p) = 0$ se $p \notin U_i$;
3. $\sum_i \epsilon_i(p) = 1 \quad \forall p \in M$.

Allora $\{\epsilon_i(p)\}$ si dice *partizione dell'unità*.

Una volta definita la partizione dell'unità, l'integrale di una forma differenziale su una varietà viene definito come

$$\int_M \omega = \sum_i \int_{\phi_i(U_i)} \epsilon_i(p) \omega_{1\dots n} d^n x$$

2.8.2 Forma-volume

L'integrazione di funzioni è definita introducendo la cosiddetta *forma-volume*: se ω è una qualsiasi n -forma sulla varietà, ovunque non nulla, definiamo l'integrale di una funzione $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ come

$$\int_M f \stackrel{DEF}{\equiv} \int_M \omega f$$

Se la varietà è dotata di una metrica esiste una forma volume canonica e mai nulla, $g_{\mu\nu}(x)$. Le sue proprietà di trasformazione sotto diffeomorfismi sono le seguenti:

$$g_{\mu\nu}(x) = g'_{\alpha\beta}(y) \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^\nu}$$

dunque

$$\det g = \det g' \left(\det \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu} \right) \right)^2$$

In particolare il determinante di $g'_{\alpha\beta}$ avrà lo stesso segno del determinante di $g_{\mu\nu}$, per cui se la metrica è euclidea possiamo considerare la radice quadrata di ambo i membri:

$$\sqrt{\det g} \equiv \sqrt{g} = \sqrt{g'} \left| \det \left(\frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu} \right) \right| = \det \left(\frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu} \right)$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo sfruttato il fatto che i diffeomorfismi che consideriamo hanno determinante positivo. Nel caso minkowskiano il determinante di $g_{\mu\nu}$ è negativo pertanto scriveremo

$$\sqrt{-g} = \sqrt{-g'} \left(\frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu} \right)$$

Ci accorgiamo quindi che la radice del determinante della metrica trasforma come una n -forma, possiamo quindi definire

$$\omega = \frac{1}{n!} \sqrt{-g} \tilde{\epsilon}_{\mu_1 \dots \mu_n} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_n} \equiv \frac{1}{n!} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_n} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_n}$$

dove $\tilde{\epsilon}_{\mu_1 \dots \mu_n}$ ed $\epsilon_{\mu_1 \dots \mu_n}$ sono rispettivamente il simbolo ed il tensore di Levi-Civita n -dimensionali. Per una varietà dotata di metrica minkowskiana la definizione canonica dell'integrale sulla varietà è allora

$$\int_M f = \int_M f \sqrt{-g} d^n x$$

Consideriamo adesso il caso di una r -forma su una varietà n -dimensionale: la nostra definizione di integrale si applica soltanto se il rango della forma ha lo stesso valore della dimensione della varietà su cui integriamo. Se N è una

sottovarietà r -dimensionale di M esiste un embedding $F : N \rightarrow M$ che ci permette di definire il pull-back della forma $\omega \in \Lambda^r(M)$:

$$\omega \in \Lambda^r(M) \rightarrow F^*\omega \in \Lambda^r(N)$$

Definiremo dunque

$$\int_N F^*\omega \stackrel{DEF}{=} \int_{F(N)} \omega$$

Una volta introdotta l'integrazione sulle varietà, si può mostrare che vale il seguente

Teorema 1 (Teorema di Stokes). *Se N è una varietà di dimensione n e ω è una n -forma, vale*

$$\int_N d\omega = \int_{\partial N} \omega$$

Ad esempio, sia N una varietà 2-dimensionale e sia ∂N il suo bordo. Se consideriamo la 1-forma $A = A_i dx^i$:

$$\int_N dA = \frac{1}{2} \int_N (\partial_i A_j - \partial_j A_i) dx^i \wedge dx^j = \int_{\partial N} A_i dx^i$$

In uno spazio piatto questo risultato riproduce il teorema di Stokes: il flusso del rotore di \vec{A} attraverso una superficie S è pari alla circuitazione di \vec{A} lungo il bordo della superficie.

2.8.3 Operatore $*$ di Hodge

In presenza di una metrica la forma-volume canonica è definita da

$$\eta = \sqrt{|g|} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_n} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_n}$$

dove $\epsilon_{\mu_1 \dots \mu_n} = \sqrt{|g|} \tilde{\epsilon}_{\mu_1 \dots \mu_n}$ è il tensore di Levi-Civita n -dimensionale. Usando la metrica possiamo definire anche il tensore di Levi-Civita controvariante:

$$\epsilon^{\mu_1 \dots \mu_n} = g^{\mu_1 \nu_1} \dots g^{\mu_n \nu_n} \epsilon_{\nu_1 \dots \nu_n} = \sqrt{|g|} g^{\mu_1 \nu_1} \dots g^{\mu_n \nu_n} \tilde{\epsilon}_{\nu_1 \dots \nu_n} \equiv g^{-1} \tilde{\epsilon}^{\nu_1 \dots \nu_n}$$

dove le componenti di $\tilde{\epsilon}^{\nu_1 \dots \nu_n}$ sono le stesse di $\tilde{\epsilon}_{\nu_1 \dots \nu_n}$, essendo entrambi semplicemente dei simboli e non dei tensori. Dunque

$$\epsilon^{\mu_1 \dots \mu_n} = \frac{\text{sign}(g)}{\sqrt{|g|}} \tilde{\epsilon}^{\nu_1 \dots \nu_n}$$

Definiamo l'operatore $*$ di Hodge di una p -forma F :

$$F = F_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}$$

$$* : \Lambda^p(M) \rightarrow \Lambda^{n-p}(M)$$

$$F \mapsto *F = \frac{1}{p!(n-p)!} F_{\mu_1 \dots \mu_p} \epsilon^{\mu_1 \dots \mu_p \nu_1 \dots \nu_{n-p}} dx^{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_{n-p}} \equiv \frac{1}{p!(n-p)!} F^{\mu_1 \dots \mu_p} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_p \nu_1 \dots \nu_{n-p}} dx^{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_{n-p}}$$

Proviamo a calcolare $**F$:

$$** : \Lambda^p \rightarrow \Lambda^p$$

$$**F = \frac{1}{(n-p)!(p!)^2} F_{\mu_1 \dots \mu_p} \epsilon^{\mu_1 \dots \mu_p \nu_1 \dots \nu_{n-p}} \epsilon^{\nu_1 \dots \nu_{n-p} \alpha_1 \dots \alpha_p} dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_p} \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{(n-p)!(p!)^2} F_{\mu_1 \dots \mu_p} \epsilon^{\mu_1 \dots \mu_p \nu_1 \dots \nu_{n-p}} \epsilon_{\nu_1 \dots \nu_{n-p} \alpha_1 \dots \alpha_p} dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_p}$$

Il prodotto $\epsilon^{\mu_1 \dots \mu_p \nu_1 \dots \nu_{n-p}} \epsilon_{\nu_1 \dots \nu_{n-p} \alpha_1 \dots \alpha_p}$ dà come risultato

$$\begin{aligned} \epsilon^{\mu_1 \dots \mu_p \nu_1 \dots \nu_{n-p}} \epsilon_{\nu_1 \dots \nu_{n-p} \alpha_1 \dots \alpha_p} &= \frac{\text{sign}(g)}{\sqrt{|g|}} \sqrt{|g|} \tilde{\epsilon}^{\mu_1 \dots \mu_p \nu_1 \dots \nu_{n-p}} \tilde{\epsilon}_{\nu_1 \dots \nu_{n-p} \alpha_1 \dots \alpha_p} = \\ &= (-1)^{p(n-p)} \text{sign}(g) \tilde{\epsilon}^{\mu_1 \dots \mu_p \nu_1 \dots \nu_{n-p}} \tilde{\epsilon}_{\alpha_1 \dots \alpha_p \nu_1 \dots \nu_{n-p}} = (-1)^{p(n-p)} \text{sign}(g) (n-p)! \delta_{\alpha_1}^{[\mu_1} \dots \delta_{\alpha_p}^{\mu_p]} \end{aligned}$$

per cui

$$**F = (-1)^{p(n-p)} \frac{\text{sign}(g)}{(n-p)!(p!)^2} (n-p)! F_{\mu_1 \dots \mu_p} \delta_{\alpha_1}^{[\mu_1} \dots \delta_{\alpha_p}^{\mu_p]} dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_p} =$$

La saturazione di $F_{\mu_1 \dots \mu_p}$ con $\delta_{\alpha_1}^{[\mu_1} \dots \delta_{\alpha_p}^{\mu_p]}$, entrambi antisimmetrici, dà luogo a $p! F_{\alpha_1 \dots \alpha_p}$, e abbiamo infine

$$**F = (-1)^{p(n-p)} \frac{\text{sign}(g)}{p!} F_{\alpha_1 \dots \alpha_p} dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_p} = (-1)^{p(n-p)} \text{sign}(g) F$$

In particolare, in 4 dimensioni e in presenza di una metrica minkowskiana abbiamo semplicemente

$$*(F) = (-1)^{1+p(4-p)} F$$

2.8.4 Equazioni di Maxwell e forme differenziali: il codifferenziale δ

Mediante il duale di Hodge è possibile definire una nuova derivata, detta *codifferenziale*:

$$\delta : \Lambda^p(M) \rightarrow \Lambda^{p-1}$$

$$\delta \equiv - * d *$$

Infatti se F è una p -forma, $*F$ è $(n-p)$ -forma, $d * F$ una $(n-p+1)$ -forma, e infine $- * d * F$ una $(p-1)$ -forma. Osserviamo che $\delta^2 = * d * d * = \text{sign}(g) (-1)^{p(n-p)} * d d * = 0$ perchè $d^2 = 0$.

Se F è la 2-forma che definisce la field strenght del campo elettromagnetico, δF sarà una 1-forma e possiamo impostare l'equazione

$$\delta F = J$$

dove $J = J_\mu dx^\mu$ è una opportuna 1-forma. Applicando una seconda volta il codifferenziale otteniamo identicamente zero a primo membro, dunque $\delta J = 0$. Esplicitando

$$\begin{aligned} *J &= \frac{1}{1!3!} J^\mu \epsilon_{\mu\alpha_1\alpha_2\alpha_3} dx^{\alpha_1} \wedge dx^{\alpha_2} \wedge dx^{\alpha_3} \\ d * J &= \frac{1}{3!} \partial_\lambda \left(J^\mu \sqrt{|g|} \right) \tilde{\epsilon}_{\mu\alpha_1\alpha_2\alpha_3} dx^\lambda \wedge dx^{\alpha_1} \wedge dx^{\alpha_2} \wedge dx^{\alpha_3} \\ - * d * &= - \frac{1}{4!1!} \frac{1}{3!} \partial_\lambda \left(J^\mu \sqrt{|g|} \right) \tilde{\epsilon}_{\mu\alpha_1\alpha_2\alpha_3} \epsilon^{\lambda\alpha_1\alpha_2\alpha_3} = - \frac{1}{3!} \frac{\text{sign}(g)}{\sqrt{|g|}} \partial_\lambda \left(J^\mu \sqrt{|g|} \right) \tilde{\epsilon}_{\mu\alpha_1\alpha_2\alpha_3} \tilde{\epsilon}^{\lambda\alpha_1\alpha_2\alpha_3} = \\ &= - \frac{\text{sign}(g)}{\sqrt{|g|}} \partial_\lambda \left(J^\mu \sqrt{|g|} \right) \delta_\mu^\lambda = - \frac{\text{sign}(g)}{\sqrt{|g|}} \partial_\mu \left(J^\mu \sqrt{|g|} \right) \end{aligned}$$

Dunque la condizione $\delta J = 0$ si traduce in

$$\partial_\mu \left(J^\mu \sqrt{|g|} \right) = 0$$

che nel caso di metrica costante torna ad essere la familiare equazione di conservazione della corrente elettromagnetica.

Se $F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$ possiamo calcolare δF :

$$*F = \frac{1}{2!2!} F^{\mu\nu} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta$$

$$\begin{aligned}
d * F &= \frac{1}{2!2!} \partial_\rho \left(\sqrt{|g|} F^{\mu\nu} \right) \tilde{\epsilon}_{\mu\nu\alpha\beta} dx^\rho \wedge dx^\alpha \wedge dx^\beta \\
*d * F &= \frac{1}{2!2!3!} 3! \partial_\rho \left(\sqrt{|g|} F^{\mu\nu} \right) \tilde{\epsilon}_{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon^{\rho\alpha\beta}{}_\gamma dx^\gamma = \frac{1}{2!2!} \partial_\rho \left(\sqrt{|g|} F^{\mu\nu} \right) \tilde{\epsilon}_{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon^{\rho\alpha\beta\sigma} g_{\sigma\gamma} dx^\gamma = \\
&= \frac{1}{2!2!} \partial_\rho \left(\sqrt{|g|} F^{\mu\nu} \right) \tilde{\epsilon}_{\mu\nu\alpha\beta} \tilde{\epsilon}^{\rho\sigma\alpha\beta} \frac{\text{sign}(g)}{\sqrt{|g|}} g_{\sigma\gamma} dx^\gamma = \frac{1}{2!2!} \frac{\text{sign}(g)}{\sqrt{|g|}} \partial_\rho \left(\sqrt{|g|} F^{\mu\nu} \right) \delta_{[\mu}^\rho \delta_{\nu]}^\sigma g_{\sigma\gamma} dx^\gamma = \\
&= \frac{1}{2!} \frac{\text{sign}(g)}{\sqrt{|g|}} \partial_\rho \left(\sqrt{|g|} F^\rho{}_\gamma \right) dx^\gamma \\
- * d * F &= -\frac{1}{2!} \frac{\text{sign}(g)}{\sqrt{|g|}} \partial_\rho \left(\sqrt{|g|} F^\rho{}_\gamma \right) dx^\gamma
\end{aligned}$$

In uno spazio piatto $- * d * F$ si riduce quindi alla divergenza del tensore $F_{\mu\nu}$: per una opportuna scelta della 1-forma J le equazioni di Maxwell inomogenee possono essere scritte in uno spazio curvo come

$$\delta F = \frac{4\pi}{c} J$$

Dunque, la teoria di Maxwell può essere generalizzata ad uno spazio curvo mediante l'ausilio di derivata esterna e * di Hodge.

2.9 Derivata covariante e trasporto parallelo

In una varietà piatta come \mathbb{R}^n una operazione che appare naturale è il trasporto parallelo di un vettore applicato in un punto, inteso come spostamento rigido del suo punto di applicazione. Tuttavia quando abbiamo definito i vettori su una varietà curva M abbiamo sottolineato come questi siano intrinsecamente legati al proprio punto di applicazione: presi due punti p e q i rispettivi spazi tangenti $T_p M$ e $T_q M$ sono assolutamente scorrelati, e dato un campo vettoriale V questo implica che operazioni assolutamente normali in uno spazio piatto come il rapporto incrementale

$$\frac{V(q) - V(p)}{q - p}$$

perdano di significato a causa dell'impossibilità di sommare o sottrarre punti della varietà. Non appare chiaro inoltre come confrontare i due vettori $V(p)$ e $V(q)$: anche se avessero numericamente stesse componenti rispetto alla carta ϕ che mappa p e q in \mathbb{R}^n , poichè la geometria (ad esempio la metrica) su una varietà curva cambia da punto a punto i loro moduli saranno in generale diversi.

Dobbiamo quindi introdurre una nozione di spostamento del punto di applicazione dei vettori in modo da poter confrontare in maniera consistente spazi tangenti diversi. Il trasporto parallelo della meccanica può essere codificato in un set di regole formulate in modo indipendente dal sistema di coordinate scelto: per spostare un vettore da un punto P a un punto P' , si consideri la curva di minima lunghezza che congiunge P con P' e l'angolo che il vettore forma con tale curva in P ; il trasporto parallelo del vettore è quindi effettuato mantenendo costanti per tutto il moto il suo modulo e il suo angolo con la geodetica. Su una varietà riemanniana le curve di minima lunghezza sono le geodetiche e gli angoli si ottengono mediante prodotti scalari, dunque questa nozione coincide col trasporto parallelo ingenuo della meccanica se la varietà è \mathbb{R}^n dotata della metrica euclidea $g_{ij} = \delta_{ij}$: se $\dot{x}^i(t) \equiv \dot{x}^i$ sono le componenti del vettore tangente alla retta $x^i(t)$ e v^i sono le componenti del vettore nel punto iniziale $x^i \equiv x^i(0)$, l'angolo tra i due vettori è dato da

$$\angle(v, \dot{x}(0)) = \frac{g(v, \dot{x})}{\sqrt{g(v, v)g(\dot{x}, \dot{x})}} = \frac{v^i \dot{x}_i}{v^2 \dot{x}^2}$$

Indicheremo con $v_{\parallel}(t)$ il vettore trasportato parallelamente lungo la curva nei vari punti $x(t)$, tale che $v_{\parallel}(0) = v$. In questa maniera le sue componenti sono definite dalla relazione

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{v_{\parallel}^i(t) \dot{x}_i}{v_{\parallel}^2 \dot{x}^2} \right) = 0$$

Il vettore tangente \dot{x} è costante per definizione di retta, mentre il modulo v^2 è costante per ipotesi, dunque l'equazione che definisce il trasporto parallelo su \mathbb{R}^n si riduce a

$$\frac{dv^i(t)}{dt} = 0$$

ovvero all'equazione per la costanza delle componenti del vettore nel trasporto.

La procedura che abbiamo definito è coerente e dà i giusti risultati su uno spazio piatto come \mathbb{R}^n ma non è immediatamente generalizzabile ad uno spazio curvo, dove le curve di minima lunghezza in generale non saranno più rette: ad esempio su una sfera le geodetiche sono individuate dagli archi di cerchio massimo. Sul piano inoltre possiamo pensare di trasportare parallelamente un vettore seguendo un cammino come in figura: trasportando parallelamente il vettore lungo il cammino $x \rightarrow x+h \rightarrow z \rightarrow x$ il vettore finale coincide con quello iniziale, in altre parole il trasporto parallelo di un vettore sul piano lungo un cammino chiuso costruito con spezzate di geodetica lascia invariato il vettore.

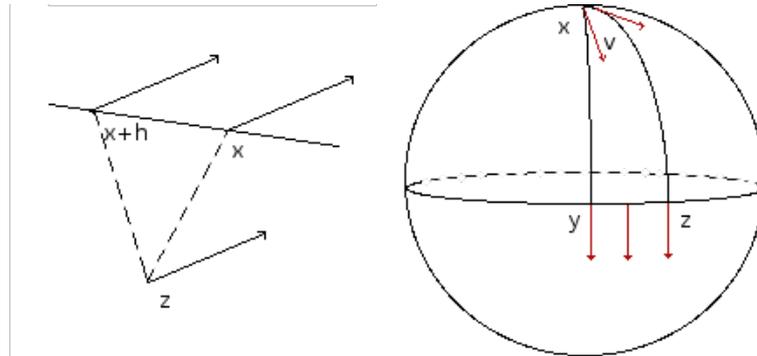


Figura 2.4: Trasporto parallelo sul piano e sulla sfera

Consideriamo adesso sulla sfera il polo nord e due punti sull'equatore connessi mediante archi di cerchio massimo, cioè tratti di geodetica: se v è un vettore tangente alla geodetica di partenza il suo angolo col vettore tangente è nullo, e il trasporto parallelo mantiene questa condizione fino al punto y in cui l'angolo con la geodetica equatoriale risulta essere retto. Nel punto z il vettore cambia nuovamente geodetica tornando parallelo al secondo meridiano, infine nel punto di partenza x il vettore finale risulta formare un angolo non nullo con quello iniziale: applicando direttamente alla sfera la definizione di trasporto parallelo su \mathbb{R}^n abbiamo ottenuto una procedura che in generale non conserva i vettori nel trasporto lungo cammini chiusi composti da spezzate di geodetica. In particolare, la differenza di comportamento tra \mathbb{R}^n e la sfera risiede nell'angolo formato dai vettori iniziale e finale ed è legata alle proprietà di *curvatura* degli spazi in questione: per ottenere una nozione di trasporto parallelo che abbia certe caratteristiche indipendentemente dalla curvatura dello spazio dobbiamo definire un nuovo modo di fare le derivate e introdurre il concetto di *connessione*.

Se $\mathfrak{X}^{(1,0)}(M)$ è l'insieme dei campi vettoriali sulla varietà M , sia $\nabla : \mathfrak{X}^{(1,0)}(M) \times \mathfrak{X}^{(1,0)}(M) \rightarrow \mathfrak{X}^{(1,0)}(M)$ un operatore differenziale che soddisfa le seguenti proprietà:

$$\nabla(X, Y) \equiv \nabla_X Y$$

1. $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$;

2. $\nabla_{x+y}Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$;
3. $\nabla_{fX}Z = f\nabla_X Z$, dove $f : M \rightarrow \mathbb{R}$;
4. $\nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y$ (Leibniz).

Un oggetto che soddisfa queste quattro proprietà viene detto *connessione affine*, o *derivata covariante*. Se $\{e_\mu\}$ è una base dello spazio dei campi vettoriali la derivata di $\nabla_{e_\lambda} e_\mu$ sarà ancora un campo $\in \mathfrak{X}^{(1,0)}(M)$ dunque esprimibile come combinazione lineare degli elementi della base:

$$\nabla_{e_\lambda} e_\mu = \Lambda_{\lambda\mu}^\alpha e_\alpha$$

I coefficienti $\Gamma_{\lambda\mu}^\alpha$ ci informano di come i vettori di base cambiano direzione e modulo spostandosi lungo una certa direzione, e rappresentano l'espressione in componenti della connessione affine. Una volta specificati i Γ , se $X = X^\mu e_\mu$ e $Y = Y^\nu e_\nu$ possiamo calcolare la derivata covariante di X lungo il campo Y :

$$\nabla XY = \nabla_{X^\mu e_\mu} Y^\nu e_\nu = X^\mu \nabla_{e_\mu} (Y^\nu e_\nu) = X^\mu e_\mu (Y^\nu) + X^\mu Y^\nu \Gamma_{\mu\nu}^\alpha e_\alpha$$

Se scegliamo la base canonica $e_\mu \equiv \partial_\mu$ abbiamo:

$$\nabla_X Y = X^\mu (\partial_\mu Y^\alpha) \partial_\alpha + X^\mu Y^\nu \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \partial_\alpha = X^\mu (\partial_\mu Y^\alpha + X^\nu Y^\nu \Gamma_{\mu\nu}^\alpha) \partial_\alpha$$

Se $X = e_\mu$ abbiamo:

$$\nabla_{e_\mu} Y \equiv \nabla_\mu Y = (\partial_\mu Y^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda) \partial_\lambda$$

dunque l'espressione in componenti della derivata covariante è

$$(\nabla_\mu Y)^\lambda = (\partial_\mu Y^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda) \partial_\lambda$$

Possiamo estendere la definizione di derivata covariante a 1-forme e a tensori di rango più elevato postulando che la derivata covariante soddisfi Leibniz con il prodotto tensoriale e commuti con la contrazione canonica forma-vettore, ovvero

$$\nabla : \mathfrak{X}^{(1,0)}(M) \times \mathfrak{X}^{(r,q)}(M) \rightarrow \mathfrak{X}^{(r,q)}(M)$$

$$\nabla_X(T \otimes S) = (\nabla_X T) \otimes S + T \otimes \nabla_X S$$

$$\omega \otimes X \xrightarrow{\mathcal{C}} \omega(X) \Rightarrow \nabla(\omega \otimes X) \xrightarrow{\mathcal{C}} \nabla(\omega(X))$$

dove \mathcal{C} indica l'operazione di contrazione. Per definizione $\mathfrak{X}^{(0,0)}(M)$ è l'insieme delle funzioni su M , e assumeremo che la derivata covariante agisca sulle funzioni come la derivata direzionale:

$$\nabla_X f = X(f)$$

In componenti la derivata covariante di una forma si ottiene considerando il tensore $(1, 1)$ $\omega \otimes X = \omega_\mu f^\nu dx^\mu \otimes \partial_\nu$: per definizione

$$\nabla_Y(\omega \otimes X) \equiv \nabla_Y \omega \otimes X + \omega \otimes \nabla_Y X$$

Contraendo gli indici:

$$Y^\mu \partial_\mu (\omega(X)) = (\nabla_Y \omega)(X) + \omega(\nabla_Y X)$$

$$\Rightarrow (\nabla_Y \omega) = Y^\mu \partial_\mu (\omega(X)) - \omega(\nabla_Y X)$$

In componenti:

$$\omega = \omega_\mu dx^\mu \quad ; \quad Y = \partial_\mu \quad ; \quad X = \partial_\lambda$$

$$(\nabla_\mu \omega)_\lambda = \partial_\mu \omega_\lambda - \omega(\nabla_\mu \partial_\lambda) = \partial_\mu \omega_\lambda - \omega(\Gamma_{\mu\lambda}^\alpha \partial_\alpha) = \partial_\mu \omega_\lambda - \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha \omega_\alpha$$

Mettendo a confronto le derivate covarianti di vettori e 1-forme:

$$(\nabla_\mu v)^\lambda \equiv \nabla_\mu v^\lambda = \partial_\mu v^\lambda + \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda v^\alpha$$

$$(\nabla_\mu \omega)_\lambda \equiv \nabla_\mu \omega_\lambda = \partial_\mu \omega_\lambda - \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha \omega_\alpha$$

Per un tensore di rango arbitrario:

$$\begin{aligned} \nabla_\lambda T^{\mu_1 \dots \mu_n}_{\nu_1 \dots \nu_p} &= \partial_\lambda T^{\mu_1 \dots \mu_n}_{\nu_1 \dots \nu_p} + \Gamma_{\lambda\alpha_1}^{\mu_1} T^{\alpha_1 \dots \mu_n}_{\nu_1 \dots \nu_p} + \dots + \Gamma_{\lambda\alpha_n}^{\mu_n} T^{\mu_1 \dots \alpha_n}_{\nu_1 \dots \nu_p} - \\ &\quad - \Gamma_{\lambda\nu_1}^{\beta_1} T^{\mu_1 \dots \mu_n}_{\beta_1 \dots \nu_p} - \dots - \Gamma_{\lambda\nu_p}^{\beta_p} T^{\mu_1 \dots \mu_n}_{\nu_1 \dots \beta_p} \end{aligned}$$

Ad esempio consideriamo

$$\nabla_\lambda T^{\mu\nu} = \partial_\lambda T^{\mu\nu} + \Gamma_{\lambda\alpha}^\mu T^{\alpha\nu} + \Gamma_{\lambda\alpha}^\nu T^{\mu\alpha}$$

$$\nabla_\lambda T^\mu{}_\nu = \partial_\lambda T^\mu{}_\nu + \Gamma_{\lambda\alpha}^\mu T^\alpha{}_\nu - \Gamma_{\lambda\nu}^\alpha T^\mu{}_\alpha$$

2.9.1 Curve autoparallele

Se $\gamma(t)$ è una curva indicheremo simbolicamente con $\dot{x}^\mu(t)$ il suo vettore tangente. Se v è un vettore applicato su un punto p appartenente alla curva, diremo che $v_\parallel(t)$ è il *trasportato di v parallelamente alla curva* se si ha

$$\nabla_{\dot{x}} v_\parallel(t) = 0$$

o più in generale

$$\nabla_{\dot{x}} v_\parallel(t) = f(t)\dot{x}(t)$$

Esplicitamente si ha

$$(\nabla_{\dot{x}} v_\parallel(t))^\alpha = \dot{x}^\mu \partial_\mu v_\parallel^\alpha(t) + \Gamma_{\rho\sigma}^\alpha \dot{x}^\rho v_\parallel^\sigma(t) = 0$$

oppure

$$\frac{dv_\parallel^\alpha(t)}{dt} + \Gamma_{\rho\sigma}^\alpha \dot{x}^\rho v^\sigma = 0$$

Vedremo in seguito che su uno spazio piatto è sempre possibile scegliere un sistema di coordinate tale che i Γ si annullano identicamente, ad esempio su \mathbb{R}^n in coordinate cartesiane la definizione di trasporto parallelo torna ad essere quella che ci aspettiamo, cioè $\frac{dv_\parallel^\alpha(t)}{dt} = 0$. Osserviamo che $\gamma(t)$ è una curva generica, non più una geodetica, e l'unica memoria del circuito seguito dal trasporto parallelo è contenuta nei Γ . Per semplicità in seguito indicheremo con $v(t) \equiv v_\parallel(t)$ il trasportato di v per ogni valore t del parametro.

Un caso particolare è quando il vettore tangente ad una curva è trasportato parallelamente a se stesso muovendosi lungo la curva: in tal caso l'equazione diventa

$$\ddot{x}^\alpha + \Gamma_{\rho\sigma}^\alpha \dot{x}^\rho \dot{x}^\sigma = 0$$

e viene detta equazione delle *curve autoparallele*. Nel piano le curve autoparallele sono rette, dunque la sua generalizzazione ad uno spazio curvo è una curve autoparallela; scopriremo che sotto opportune ipotesi le curve autoparallele coincidono con le curve geodetiche.

2.9.2 Simboli di Christoffel

Tutti i concetti introdotti finora non fanno riferimento alla metrica, dato che il parallelismo è una nozione di geometria affine e non di geometria metrica. Tuttavia se la varietà M ha dimensione d i coefficienti Γ che definiscono la connessione affine costituiscono un set di d^3 funzioni del tutto arbitrarie, e l'unico criterio per sceglierle è fornito dalle caratteristiche che possedere la connessione stessa. Ad esempio pretenderemo che il trasporto parallelo conservi le lunghezze e gli angoli tra i vettori: una connessione affine che ha questa proprietà si dice *connessione metrica*, dato che nello spazio piatto gli angoli e lunghezze sono definiti tramite il prodotto scalare indotto dalla metrica. In particolare, se abbiamo due vettori v e w trasportati parallelamente lungo una curva γ con vettore tangente \dot{x} , il prodotto scalare $g((v(t), w(t)))$ non deve cambiare sotto trasporto parallelo:

$$\nabla_{\dot{x}} g(v(t), w(t)) = 0$$

Ma se i vettori sono trasportati parallelamente, soddisfano entrambi $\nabla_{\dot{x}} v = \nabla_{\dot{x}} w = 0$, e poichè il prodotto scalare (v, w) equivale a considerare la contrazione doppia

$$\mathfrak{X}^{(2,2)} \ni g \otimes v \otimes w \xrightarrow{\mathcal{C}^2} g(v, w) \in \mathfrak{X}^{(0,0)}$$

possiamo utilizzare le proprietà della derivata covariante per ottenere

$$\begin{aligned} \nabla_{\dot{x}} (g(v, w)) &= (\nabla_{\dot{x}} g)(v, w) + g(\nabla_{\dot{x}} v, w) + g(v, \nabla_{\dot{x}} w) = 0 \\ \Rightarrow \nabla_{\dot{x}} (g(v, w)) &= (\nabla_{\dot{x}} g)(v, w) = \dot{x}^\mu (\nabla_\mu g)(v, w) = 0 \end{aligned}$$

Dunque, l'unico modo affinché il prodotto scalare sia conservato è che $\nabla_{\dot{x}} g = 0$: questa condizione prende il nome di *compatibilità metrica*. Una prima conseguenza è la possibilità di abbassare e alzare gli indici con la metrica passando attraverso le derivate covarianti, ovvero $g_{\mu\nu}$ si comporta come una metrica costante rispetto alla derivata covariante, come accadeva con $\eta_{\mu\nu}$ e la derivata usuale ∂_μ . Tuttavia la richiesta di compatibilità metrica è molto stringente e vincola la forma dei coefficienti della connessione: consideriamo infatti

$$(\nabla_\lambda g)(\partial_\mu, \partial_\nu) = \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha g_{\alpha\nu} - \Gamma_{\lambda\nu}^\alpha g_{\mu\alpha}$$

Tale espressione deve annullarsi per la conservazione del prodotto scalare sotto trasporto parallelo. Per convenienza definiamo adesso il simbolo

$$\Gamma_{\nu, \lambda\mu} \equiv g_{\alpha\nu} \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha$$

Osserviamo che questo è soltanto un abbassamento formale, dato che non sappiamo quali siano le proprietà di trasformazione dei coefficienti della connessione. Per risolvere l'equazione utilizziamo il seguente trucco: riscriviamo l'equazione permutando ciclicamente i tre indici

$$\partial_\lambda g_{\mu\nu} - \Gamma_{\nu, \lambda\mu} - \Gamma_{\mu, \lambda\nu} = 0$$

$$\partial_\mu g_{\nu\lambda} - \Gamma_{\lambda, \mu\nu} - \Gamma_{\nu, \mu\lambda} = 0$$

$$\partial_\nu g_{\lambda\mu} - \Gamma_{\mu, \nu\lambda} - \Gamma_{\lambda, \nu\mu} = 0$$

Sommando le prime due equazioni e sottraendo la terza otteniamo:

$$\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \partial_\nu g_{\lambda\mu} + (\Gamma_{\mu, \nu\lambda} - \Gamma_{\mu, \lambda\nu}) + (\Gamma_{\lambda, \nu\mu} - \Gamma_{\lambda, \mu\nu}) - (\Gamma_{\nu, \lambda\mu} + \Gamma_{\nu, \mu\lambda}) = 0$$

Sommiamo a destra e sinistra $2\Gamma_{\nu, \lambda\mu}$:

$$\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \partial_\nu g_{\lambda\mu} + (\Gamma_{\mu, \nu\lambda} - \Gamma_{\mu, \lambda\nu}) + (\Gamma_{\lambda, \nu\mu} - \Gamma_{\lambda, \mu\nu}) - (\Gamma_{\nu, \mu\lambda} - \Gamma_{\nu, \lambda\mu}) = 2\Gamma_{\nu, \lambda\mu}$$

da cui

$$\Gamma_{\nu,\lambda\mu} = \frac{1}{2} (\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \partial_\nu g_{\lambda\mu}) + \frac{1}{2} (\Gamma_{\mu, [\nu\lambda]} + \Gamma_{\lambda, [\nu\mu]} + \Gamma_{\nu, [\lambda\mu]})$$

Ricordando che $\Gamma_{\nu,\lambda\mu} = g_{\nu\alpha} \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha$, moltiplichiamo a destra e sinistra per $g^{\beta\nu}$:

$$\Gamma_{\lambda\mu}^\beta = \frac{1}{2} g^{\beta\nu} (\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \partial_\nu g_{\lambda\mu}) + \frac{1}{2} g^{\beta\nu} (\Gamma_{\mu, [\nu\lambda]} + \Gamma_{\lambda, [\nu\mu]} + \Gamma_{\nu, [\lambda\mu]})$$

Dunque la richiesta di compatibilità metrica vincola i coefficienti della connessione ad essere determinati dalle derivate prima della metrica e dalla loro parte antisimmetrica negli indici bassi. L'utilità di questa espressione è chiara una volta che conosciamo le proprietà di trasformazione dei Γ sotto cambio di coordinate:

$$\nabla_{\partial_\mu} \partial_\nu = \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \partial_\alpha$$

Passando da coordinate x a coordinate $x' = x'(x)$, i nuovi coefficienti saranno definiti da

$$\nabla_{\partial'_\mu} \partial'_\nu = \Gamma'_{\mu\nu}{}^\alpha \partial'_\alpha$$

Ma

$$\partial'_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\rho}$$

dunque

$$\Gamma'_{\mu\nu}{}^\alpha \partial'_\alpha = \nabla_{\partial'_\mu} (\partial'_\nu) = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \nabla_\rho \left(\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu} \partial_\lambda \right) = \underbrace{\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\rho}}_{=\delta_\mu^\beta} \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x'^\beta \partial x'^\nu} \partial_\sigma + \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu} \Gamma_{\rho\lambda}^\sigma \partial_\sigma$$

Riesprimendo la base $\{\partial_\mu\}$ in termini della base $\{\partial'_\beta\}$:

$$\Gamma'_{\mu\nu}{}^\alpha \partial'_\alpha = \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\sigma} \partial'_\alpha + \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\sigma} \Gamma_{\rho\lambda}^\sigma \partial'_\alpha$$

dunque

$$\Gamma'_{\mu\nu}{}^\alpha = \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\sigma} \Gamma_{\rho\lambda}^\sigma$$

In assenza del primo termine la legge di trasformazione per Γ sarebbe esattamente di tipo tensoriale, ma la presenza di un termine non omogeneo ci costringe a concludere che $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ non è un tensore di rango (1,2): in particolare il suo annullarsi è una proprietà dipendente dal sistema di coordinate.

Osserviamo che il termine inhomogeneo è simmetrico nello scambio dei due indici bassi, dunque considerando la combinazione antisimmetrica

$$\Gamma_{[\mu\lambda]}^\alpha = \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha - \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha$$

questa non contiene termini inhomogenei dunque trasforma come un tensore, infatti si definisce il cosiddetto *tensore di torsione*:

$$T_{\mu\lambda}^\alpha \equiv \Gamma_{[\mu\lambda]}^\alpha = -\Gamma_{\lambda\mu}^\alpha$$

mentre la particolare combinazione

$$\Gamma_{\mu, [\nu\lambda]} + \Gamma_{\lambda, [\nu\mu]} + \Gamma_{\nu, [\lambda\mu]}$$

viene detta *tensore di contorsione*.

La relatività generale è basata su spazi in cui il tensore di torsione è *nullo*, dunque i coefficienti della connessione si possono scrivere come

$$\Gamma_{\mu\nu}^\beta = \frac{1}{2} g^{\beta\lambda} (\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu})$$

ovvero sono univocamente determinati dalla metrica e prendono il nome di *simboli di Christoffel*. Questo risultato è il contenuto del teorema fondamentale della geometria riemanniana (e pseudoriemanniana): su una varietà riemanniana (o pseudoriemanniana) dotata di una metrica $g_{\mu\nu}$ esiste una unica connessione compatibile con la metrica e a torsione nulla.

2.9.3 Geodetiche

Adesso mostreremo sotto quali condizioni le linee autoparallele sono anche curve estremali per il funzionale lunghezza: consideriamo una varietà lorentziana M con metrica $g_{\mu\nu}$ ed una curva di tipo tempo $x^\mu :]a, b[\rightarrow M$

$$g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu > 0$$

Il funzionale che descrive la lunghezza di questa curva è

$$S = \int_p^q \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} dt$$

La curva estrema di questo funzionale si ottiene dalle equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{2g_{\alpha\beta} \dot{x}^\beta}{2\sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}} \right] &= \frac{\partial_\alpha g_{\rho\sigma} \dot{x}^\rho \dot{x}^\sigma}{2\sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}} \\ \Rightarrow \frac{\dot{x}^\rho \partial_\rho g_{\alpha\beta} \dot{x}^\beta}{\sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}} + g_{\alpha\beta} \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{x}^\beta}{\sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}} \right) &= \frac{\partial_\alpha g_{\rho\sigma} \dot{x}^\rho \dot{x}^\sigma}{2\sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}} \end{aligned}$$

Osserviamo che il primo e il terzo termine sono dello stesso tipo, dunque possono essere raccolti:

$$g_{\alpha\beta} \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{x}^\beta}{\sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}} \right) + \frac{\dot{x}^\rho \dot{x}^\sigma}{\sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}} \frac{1}{2} (\partial_\rho g_{\alpha\sigma} + \partial_\sigma g_{\alpha\rho} - \partial_\alpha g_{\rho\sigma}) = 0$$

dove abbiamo sfruttato la simmetria del prodotto $\dot{x}^\rho \dot{x}^\sigma$. Moltiplicando per $g^{\alpha\lambda}$:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{x}^\lambda}{\sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}} \right) + \frac{\dot{x}^\rho \dot{x}^\sigma}{\sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}} \underbrace{\frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} (\partial_\rho g_{\alpha\sigma} + \partial_\sigma g_{\alpha\rho} - \partial_\alpha g_{\rho\sigma})}_{=\Gamma_{\rho\sigma}^\lambda} = 0$$

L'equazione è molto simile a quella delle linee autoparallele, a meno della radice $\sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}$; tuttavia, poichè $g_{\mu\nu}$ dipende soltanto dalle coordinate, anche stavolta l'azione S è invariante rispetto al parametro della curva. Definiamo allora il cosiddetto *tempo proprio della curva*:

$$\tau(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} dt'$$

Poichè $\sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}$ è una funzione positiva la funzione τ è monotona nel parametro t la relazione tra i due parametri è invertibile; ma se deriviamo rispetto a τ entrambi i membri:

$$\frac{d\tau}{dt} = 1 = \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} \frac{dt}{d\tau} = \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial t} \frac{\partial x^\nu}{\partial t}} \frac{dt}{d\tau} = \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau}}$$

Scegliendo il tempo proprio per parametrizzare la curva l'equazione delle curve estremali diventa

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} \Gamma_{\rho\sigma}^\lambda = 0$$

ovvero coincide con l'equazione delle curve autoparallele, che alla luce di questo risultato si interpretano in due modi: o come linee che puntano sempre nella stessa direzione o come le curve di lunghezza estrema.

Il principio di equivalenza di Einstein prevede che data una porzione sufficientemente piccola dello spazio-tempo sia sempre possibile trovare un sistema di riferimento in cui il campo gravitazionale può essere fatto sparire, o meglio può essere riassorbito nella geometria dello spazio-tempo; in assenza di altre interazioni una particella non sarà più soggetta ad alcuna forza, pertanto si muoverà di moto libero: in uno spazio piatto il moto libero è caratterizzato da una traiettoria rettilinea, ma come abbiamo visto in uno spazio curvo questo si traduce in una traiettoria autoparallela.

2.10 Torsione e curvatura

Non essendo un tensore, la connessione non possiede caratteristiche indipendenti dal sistema di coordinate scelto, ma abbiamo già visto che alcune delle sue proprietà (ad esempio la simmetria) sono caratterizzate dal tensore di torsione, formalmente definito da

$$T : \mathfrak{X}^{(1,0)}(M) \times \mathfrak{X}^{(1,0)}(M) \rightarrow \mathfrak{X}^{(1,0)}(M)$$

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

Dove $[X, Y]$ è il commutatore di due campi vettoriali:

$$\begin{aligned} [X, Y] &= X^\mu \partial_\mu (Y^\nu \partial_\nu) - Y^\nu \partial_\nu (X^\mu \partial_\mu) = X^\mu (\partial_\mu Y^\nu) \partial_\nu + X^\mu Y^\nu \partial_\mu \partial_\nu - Y^\nu (\partial_\nu X^\mu) \partial_\mu - Y^\nu X^\mu \partial_\nu \partial_\mu = \\ &= X^\mu (\partial_\mu Y^\nu) \partial_\nu - Y^\nu (\partial_\nu X^\mu) \partial_\mu = (X^\mu \partial_\mu Y^\nu - Y^\mu \partial_\mu X^\nu) \partial_\nu \end{aligned}$$

Dunque il commutatore di due campi vettoriali è ancora un campo vettoriale, di componenti $(X^\mu \partial_\mu Y^\nu - Y^\mu \partial_\mu X^\nu)$: poichè l'insieme dei campi vettoriali è chiuso sotto commutazione, esso costituisce un'algebra di Lie, associata al gruppo di Lie dei diffeomorfismi su M . Possiamo verificare che il tensore di torsione appena definito coincide con la parte antisimmetrica del coefficiente di connessione: se scegliamo $X = \partial_\mu$ e $Y = \partial_\nu$

$$T(\partial_\mu, \partial_\nu) = \nabla_{\partial_\mu} \partial_\nu - \nabla_{\partial_\nu} \partial_\mu + [\partial_\mu, \partial_\nu] = (\Gamma_{\mu\nu}^\alpha \Gamma_{\nu\mu}^\alpha) \partial_\alpha$$

dunque

$$T_{\mu\nu}^\alpha \partial_\alpha = (\Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \Gamma_{\nu\mu}^\alpha) \partial_\alpha$$

Un altro tensore importante è il *tensore di curvatura*, o *tensore di Riemann*:

$$R : \mathfrak{X}^{(1,0)}(M) \times \mathfrak{X}^{(1,0)}(M) \times \mathfrak{X}^{(1,0)}(M) \rightarrow \mathfrak{X}^{(1,0)}(M)$$

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

Se $Z = \partial_\lambda$ le componenti del tensore di curvatura sono:

$$\begin{aligned} R(\partial_\mu, \partial_\nu) \partial_\lambda &= \nabla_\mu \nabla_\nu \partial_\lambda - \nabla_\nu \nabla_\mu \partial_\lambda - \nabla_{[\partial_\mu, \partial_\nu]} \partial_\lambda = \nabla_\mu (\Gamma_{\nu\lambda}^\alpha \partial_\alpha) - \nabla_\nu (\Gamma_{\mu\lambda}^\alpha \partial_\alpha) = \\ &= \partial_\mu \Gamma_{\nu\lambda}^\alpha \partial_\alpha + \Gamma_{\nu\lambda}^\alpha \Gamma_{\mu\alpha}^\beta \partial_\beta - \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha \partial_\alpha - \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\beta \partial_\beta = \left(\partial_\mu \Gamma_{\nu\lambda}^\beta + \Gamma_{\nu\lambda}^\alpha \Gamma_{\mu\alpha}^\beta - \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\beta - \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\beta \right) \partial_\beta \end{aligned}$$

Simbolicamente si usa scrivere

$$R(\partial_\mu, \partial_\nu) \partial_\lambda = R^\beta{}_{\lambda, \mu\nu} \partial_\beta$$

dove la virgola separa gli indici antisimmetrici μ, ν .

2.10.1 Interpretazione geometrica

Il tensore di Riemann contiene informazioni sulla variazione di un vettore v quando viene trasportato parallelamente lungo un cammino chiuso infinitesimo. Il vettore trasportato parallelamente infatti soddisfa all'equazione differenziale

$$\frac{dv^\alpha}{dt} + \Gamma_{\beta\lambda}^\alpha \dot{x}^\beta v^\lambda$$

con la condizione iniziale $v(0) = v$. Se abbiamo una curva infinitesima $x^\beta = x^\beta(0) + t\delta^\beta$ possiamo risolvere l'equazione perturbativamente:

$$v^\lambda(t) = v^\lambda(0) \frac{dv^\lambda}{dt}(0)t + O(t^2) = v^\lambda(0) - t\Gamma_{\beta\rho}^\lambda \delta^\beta v^\rho + O(t^2)$$

Costruiamo un cammino chiuso infinitesimo con quattro vertici P, Q, R e S . Sia γ la curva che unisce i punti P e Q , ed η la curva che unisce Q ed R .

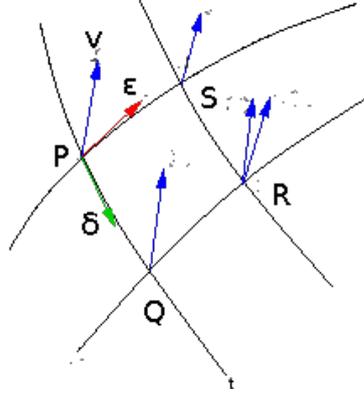


Figura 2.5: Cammino chiuso infinitesimo

Se $x^\mu(t)$ è una parametrizzazione di γ con $x^\mu(0) = P^\mu$ e $x^\mu(1) = Q^\mu$, indicheremo con δ^μ il vettore tangente alla curva nel punto P^μ : al prim'ordine l'espansione di γ è

$$\phi^\mu(\gamma) = x^\mu(0) + t\delta^\mu + O(t^2)$$

Una costruzione analoga può essere fatta per la curva η :

$$\phi^\mu(\eta) = x^\mu(0) + s\xi^\mu + O(s^2)$$

Un vettore $v^\mu(t)$ applicato in P trasportato parallelamente a γ soddisfa l'equazione differenziale:

$$\frac{dv^\mu}{dt} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{dt} v^\beta = 0$$

con la condizione iniziale $v^\mu(0) = v^\mu$. Al prim'ordine $v^\mu(t) = v^\mu(0) + t \frac{dv^\mu(0)}{dt} \equiv v^\mu(P) + t \frac{dv^\mu(P)}{dt}$, dunque

$$v^\mu(t) = v^\mu(P) - t\Gamma_{\alpha\beta}^\mu(P)\delta^\alpha v^\beta(P)$$

Per $t = 1$ si ha il vettore trasportato parallelamente nel punto Q :

$$v^\mu(Q) = v^\mu(P) - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu(P)\delta^\alpha v^\beta(P)$$

Se vogliamo trasportare ancora il vettore dal punto Q al punto R :

$$\begin{aligned} v^\mu(R) &= v^\mu(P) - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu(P)\delta^\alpha v^\beta(P) - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu(Q)\xi^\alpha \left(v^\beta(P) - \Gamma_{\lambda\sigma}^\beta(P)\delta^\lambda v^\sigma(P) \right) = \\ &= v^\mu(P) - \left(\Gamma_{\alpha\beta}^\mu(P) + \delta^\rho \partial_\rho \Gamma_{\alpha\beta}^\mu(P) \right) \xi^\alpha \left(v^\beta(P) - \Gamma_{\lambda\sigma}^\beta(P)\delta^\lambda v^\sigma(P) \right) = \\ &= v^\beta(P) - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu(P)\xi^\alpha v^\beta(P) - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu(P)\xi^\alpha \Gamma_{\lambda\sigma}^\beta(P)\delta^\lambda v^\sigma(P) - \delta^\rho \partial_\rho \Gamma_{\alpha\beta}^\mu(P)\xi^\alpha v^\beta(P) - \delta^\rho \partial_\rho \Gamma_{\alpha\beta}^\mu(P)\xi^\alpha \Gamma_{\lambda\sigma}^\beta(P)\delta^\lambda v^\sigma(P) \end{aligned}$$

Possiamo trascurare il termine proporzionale a $\delta^2 \xi$ perchè di ordine 2 in δ , e rimaniamo con

$$v^\mu(R) = v^\beta(P) - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu(P)\xi^\alpha v^\beta(P) - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu(P)\xi^\alpha \Gamma_{\lambda\sigma}^\beta(P)\delta^\lambda v^\sigma(P) - \delta^\rho \partial_\rho \Gamma_{\alpha\beta}^\mu(P)\xi^\alpha v^\beta(P)$$

Se adesso invertiamo l'ordine degli spostamenti e consideriamo la differenza tra i due risultati, l'unico termine che sopravvive è quello proporzionale al termine $\epsilon\delta$:

$$\delta v^\mu = -\delta^\rho \epsilon^\alpha v^\beta \left(\partial_\rho \Gamma_{\alpha\beta}^\mu - \partial_\alpha \Gamma_{\rho\beta}^\mu + \Gamma_{\rho\tau}^\mu \Gamma_{\alpha\beta}^\tau - \Gamma_{\alpha\tau}^\mu \Gamma_{\rho\beta}^\tau \right) \equiv -\delta^\rho \epsilon^\alpha v^\beta R_{\beta,\rho\alpha}^\mu$$

ovvero la differenza tra i due cammini è proporzionale al tensore di Riemann.

Il significato geometrico della torsione è più immediato: consideriamo due vettori ϵ^μ e δ^μ , e trasportiamo parallelamente prima ϵ^μ lungo la curva a cui è tangente δ^μ , poi δ^μ lungo la curva a cui è tangente ϵ^μ . Sullo spazio piatto la differenza dei due vettori finali è nulla, ovvero le punte dei due vettori finali si toccano in modo da chiudere un parallelogramma; su uno spazio curvo in generale questo non è vero:

$$\epsilon_{\parallel}^\mu = \epsilon^\mu - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \delta^\alpha \epsilon^\beta$$

Trasportando ϵ lungo δ abbiamo

$$\delta^\mu + \epsilon^\mu - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu(P) \delta^\alpha \epsilon^\beta$$

Scambiando i due vettori si ha

$$\delta^\mu + \epsilon^\mu - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \epsilon^\alpha \delta^\beta$$

La differenza tra i due vettori è

$$\left(\Gamma_{\alpha\beta}^\mu - \Gamma_{\beta\alpha}^\mu \right) \epsilon^\alpha \delta^\beta$$

e corrisponde al vettore che congiunge le due punte: imporre torsione nulla coincide con l'imporre la chiusura del parallelogramma infinitesimo definito da ϵ e δ .

2.10.2 Le identità di Bianchi

Le proprietà del tensore di Riemann saranno di fondamentale importanza per derivare le equazioni di Einstein:

1. $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$; è immediato dalla definizione;

2. **Prima identità di Bianchi:**

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$$

In coordinate si ha

$$R(\partial_\alpha, \partial_\beta) \partial_\lambda + R(\partial_\beta, \partial_\lambda) \partial_\alpha + R(\partial_\lambda, \partial_\alpha) \partial_\beta \equiv R^p{}_{\lambda, \alpha\beta} + R^p{}_{\alpha, \beta\lambda} + R^p{}_{\beta, \lambda\alpha} = 0$$

Per dimostrare questa proprietà, definiamo un simmetrizzatore:

$$C(T(X, Y, Z)) \equiv T(X, Y, Z) + T(Y, Z, X) + T(Z, X, Y)$$

Applicando C alla derivata covariante lungo Z della torsione:

$$C(\nabla_Z(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]))$$

Poichè la torsione è nulla, tutta l'espressione è nulla, dunque:

$$C(\nabla_Z \nabla_X Y - \nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_Z [X, Y]) = 0$$

Poichè sommiamo su tutte le permutazioni cicliche, possiamo riordinare ciclicamente gli indici:

$$C(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_Z [X, Y]) = 0$$

ma poichè la torsione è nulla $\nabla_Z [X, Y] = \nabla_{[X, Y]} Z + [[X, Y], Z]$, e poichè il commutatore soddisfa l'identità di Jacobi, si ha $C([[X, Y], Z]) = 0$, dunque:

$$C(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z) = 0$$

Ma il termine simmetrizzato non è che il tensore di Riemann $R(X, Y)Z$:

$$\Rightarrow C(R(X, Y)Z) = 0$$

3. Seconda identità di Bianchi:

$$(\nabla_X R)(Y, Z)W + (\nabla_Y R)(Z, X)W + (\nabla_Z R)(X, Y)W = 0$$

oppure

$$C((\nabla_{\underline{X}}R)(\underline{Y}, \underline{Z})W)$$

dove la sottolineatura indica gli indici sommati ciclicamente. Sfruttiamo ancora il fatto che la torsione sia nulla:

$$C(R(T(X, Y), Z)W) = 0$$

$$C(R(\nabla_X Y, Z)W - R(\nabla_Y X, Z)W - R([X, Y], Z)W) = 0$$

Ancora una volta possiamo riorganizzare ciclicamente gli indici:

$$C(R(\nabla_Z X, Y)W + R(X, \nabla_Z)W - R([X, Y], Z)W) = 0$$

Se consideriamo la derivata covariante lungo Z di $R(X, Y)W$:

$$\nabla_Z(R(X, Y)W) = (\nabla_Z R)(X, Y)W + R(\nabla_Z X, Y)W + R(X, \nabla_Z Y)W + R(X, Y)\nabla_Z W$$

Ma

$$\nabla_Z(R(X, Y)W) - R(X, Y)\nabla_Z W \equiv [\nabla_Z, R(X, Y)]W = \nabla_Z(R)(X, Y)W + R(\nabla_Z X, Y)W + R(X, \nabla_Z Y)W$$

Se sommiamo ciclicamente il primo e il secondo membro:

$$C([\nabla_Z, R(X, Y)]W) = \underline{C(\nabla_Z(R)(X, Y)W)} + C(R([X, Y], Z)W)$$

Dobbiamo mostrare che il termine sottolineato è nullo, dunque mostriamo che

$$C([\nabla_Z, R(X, Y)]W) - C(R([X, Y], Z)W) = 0$$

Se scegliamo $X = \partial_\mu$, $Y = \partial_\lambda$ e $Z = \partial_\rho$, abbiamo che il secondo termine è identicamente nullo a causa del commutatore $[X, Y]$, mentre per il secondo

$$C([\nabla_\mu, R(\partial_\lambda, \partial_\rho)]W) = C([\nabla_\mu, [\nabla_\lambda, \nabla_\rho]]) = 0$$

per l'identità di Jacobi. In componenti si ha

$$\nabla_\lambda R^\mu{}_{\rho, \alpha\beta} + \nabla_\alpha R^\mu{}_{\rho, \beta\lambda} + \nabla_\beta R^\mu{}_{\rho, \lambda\alpha} = 0$$

2.10.3 Altre proprietà del tensore di curvatura

Il tensore di curvatura gode di altre proprietà, alcune delle quali esplicitamente legate all'annullarsi della torsione e alla compatibilità metrica:

- Consideriamo la seguente espressione in componenti:

$$R^\lambda{}_{\alpha, \mu\nu} v^\alpha = \nabla_\mu \nabla_\nu v^\lambda - \nabla_\nu \nabla_\mu v^\lambda \equiv [(\nabla_\mu, \nabla_\nu)v]^\lambda$$

ovvero il tensore di Riemann equivale al commutatore di due derivate covarianti.

- Le derivate covarianti come sappiamo agiscono anche su forme e tensori: vediamo allora cosa succede applicando l'operatore $[\nabla_\mu, \nabla_\nu]$ ad un tensore della forma $T^{\alpha\beta}$: per Leibniz avremo

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]T^{\alpha\beta} = R^\alpha{}_{\lambda,\mu\nu}T^{\lambda\beta} + R^\alpha{}_{\lambda,\mu\nu}T^{\alpha\lambda}$$

Nel caso di una forma:

$$([\nabla_\mu, \nabla_\nu]\omega)_\lambda$$

possiamo sfruttare la compatibilità metrica:

$$([\nabla_\mu, \nabla_\nu]\omega)_\lambda = g_{\lambda\alpha}([\nabla_\mu, \nabla_\nu]\omega)^\lambda = g_{\lambda\alpha}R^\alpha{}_{\rho,\mu\nu}\omega^\rho = R_{\lambda\rho,\mu\nu}\omega^\rho = -R_{\rho\lambda,\mu\nu}\omega^\rho = -R^\rho{}_{\lambda,\mu\nu}\omega_\rho$$

- Se consideriamo l'inverso della metrica, $g^{\mu\nu}$, abbiamo $\nabla_\mu g^{\alpha\beta}$ per la compatibilità con la metrica, dunque

$$0 = [\nabla_\mu, \nabla_\nu]g^{\alpha\beta} = R^\alpha{}_{\lambda,\mu\nu}g^{\lambda\beta} + g^{\alpha\lambda}R^\beta{}_{\lambda,\mu\nu} \equiv R^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} + R^{\beta\alpha}{}_{\mu\nu} = 0$$

Dunque in presenza di compatibilità metrica e torsione nulla il tensore di Riemann è antisimmetrico anche nei primi due indici.

- L'ultima proprietà del tensore di Riemann è la seguente:

$$R_{\lambda\mu,\alpha\beta} = R_{\alpha\beta,\lambda\mu}$$

Infatti per la prima identità di Bianchi sugli ultimi tre indici si ha

$$R_{\lambda\mu,\alpha\beta} = -R_{\lambda\alpha,\beta\mu} - R_{\lambda\beta,\mu\alpha} = R_{\alpha\lambda,\beta\mu} + R_{\beta\lambda,\mu\alpha} =$$

Sempre per la prima identità di Bianchi sugli ultimi tre indici:

$$\begin{aligned} &= -R_{\alpha\beta,\mu\lambda} - R_{\alpha\mu,\lambda\beta} - R_{\beta\mu,\alpha\lambda} - R_{\beta\alpha,\lambda\mu} = 2R_{\alpha\beta,\lambda\mu} + \underbrace{R_{\mu\alpha,\lambda\beta} + R_{\mu\beta,\alpha\lambda} + R_{\mu\lambda,\beta\alpha}}_{=0} - R_{\mu\lambda,\beta\alpha} = \\ &= 2R_{\alpha\beta,\lambda\mu} - R_{\mu\lambda,\beta\alpha} \\ &\Rightarrow R_{\lambda\mu,\alpha\beta} = R_{\alpha\beta,\lambda\mu} \end{aligned}$$

2.10.4 Tensore di Ricci e scalare di curvatura

In base alle proprietà del tensore di Riemann possiamo definire il *tensore di Ricci*:

$$R_{\alpha\beta} = R^\mu{}_{\alpha,\mu\beta}$$

Osserviamo che la definizione del tensore di Ricci non necessita di metrica perchè il Riemann è già definito con un indice alto. Possiamo mostrare che se la torsione è nulla e c'è compatibilità metrica, $R_{\alpha\beta} = R_{\beta\alpha}$, infatti

$$R_{\alpha\beta} = R^\mu{}_{\alpha,\mu\beta} = R_{\mu\beta}{}^\mu{}_\alpha = R^\mu{}_{\beta,\mu\alpha} = R_{\beta\alpha}$$

Oltre al tensore di Ricci possiamo definire lo *scalare di curvatura*:

$$R \equiv g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}$$

La seconda identità di Bianchi implica il seguente fatto: se in essa contraiamo μ con α :

$$\nabla_\lambda R_{\rho\beta} + \nabla_\alpha R^\alpha{}_{\rho,\beta\lambda} + \nabla_\beta R^\mu{}_{\rho,\lambda\mu} = 0$$

$$\Rightarrow \nabla_\lambda R_{\rho\beta} + \nabla_\alpha R^\alpha_{\rho,\beta\lambda} - \nabla_\beta R_{\rho\lambda} = 0$$

Contraendo λ con ρ :

$$\nabla_\rho R^\rho_\beta + \nabla_\alpha R^{\alpha\rho} \beta_\rho - \nabla_\beta R = 0$$

ma

$$\nabla_\alpha R^{\alpha\rho} \beta_\rho = \nabla_\alpha R^{\rho\alpha} \rho\beta = \nabla_\alpha R^\alpha_\beta$$

dunque

$$\nabla_\rho R^\rho_\beta + \nabla_\alpha R^\alpha_\beta - \nabla_\beta R = 0 \Rightarrow \nabla_\rho \left(R^\rho_\beta - \frac{1}{2} \delta^\rho_\beta R \right) = 0$$

Ovvero il tensore

$$G^\rho_\beta = R^\rho_\beta - \frac{1}{2} \delta^\rho_\beta R$$

è covariantemente conservato. Se abbassiamo gli indici:

$$G_{\rho\beta} = R_{\rho\beta} - \frac{1}{2} g_{\rho\beta} R$$

osserviamo che $G_{\rho\beta}$ è simmetrico perchè lo sono $R_{\rho\beta}$ e $g_{\rho\beta}$: dunque esso sarà covariantemente conservato in entrambi gli indici. Questo tensore, simmetrico e covariantemente conservato, prende il nome di *tensore di Einstein*, ed avrà un ruolo fondamentale in relatività generale.

2.10.5 Conteggio delle componenti del Riemann

Conteremo adesso quante sono le componenti indipendenti del tensore di Riemann: guarderemo a $R_{\lambda\mu,\alpha\beta}$ come ad una matrice i cui indici sono le coppie (λ, μ) e (α, β) . Essendo coppie di indici antisimmetrici, in d dimensioni esse potranno assumere $\frac{d(d-1)}{2}$ valori possibili; inoltre il Riemann è simmetrico nello scambio delle due coppie, e una matrice $\frac{d(d-1)}{2} \times \frac{d(d-1)}{2}$ simmetrica ha soltanto

$$\frac{1}{2} \frac{d(d-1)}{2} \left(\frac{d(d-1)}{2} + 1 \right) = \frac{d(d-1)}{8} (d^2 - d + 2)$$

elementi indipendenti. Se utilizziamo anche la prima identità di Bianchi, questa lega tra loro in maniera algebrica i due diversi set di indici del Riemann:

$$R_{\lambda\mu,\alpha\beta} + R_{\lambda\alpha,\beta\mu} + R_{\lambda\beta,\mu\alpha} = 0$$

Questo oggetto è completamente antisimmetrico in μ, α, β , infatti se lo volessimo antisimmetrizzare dovremmo sommare su tutte le permutazioni cicliche e su tutte le permutazioni anticicliche; banalmente, essendo il Riemann antisimmetrico in α, β , possiamo riassorbire le permutazioni anticicliche con un segno - e trasformarle in cicliche. Infine, se il Riemann è totalmente antisimmetrico in tre dei suoi indici, è automaticamente antisimmetrico anche nel quarto, sempre grazie all'antisimmetria delle due coppie di indici: il numero di vincoli indipendenti forniti dalla prima identità di Bianchi è dato quindi da

$$\frac{d(d-1)(d-2)(d-3)}{4!}$$

dove abbiamo diviso per $4!$ perchè l'ordine degli indici non è importante. In totale abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{d(d-1)}{8} (d^2 - d + 2) - \frac{d(d-1)(d-2)(d-3)}{4!} &= \frac{d(d-1)(3d^2 - 3d + 6 - d^2 + 5d - 6)}{24} = \\ &= \frac{d(d-1)(2d^2 + 2d)}{24} = \frac{d^2(d^2 - 1)}{12} \end{aligned}$$

Questo risultato ci informa che in una dimensione spaziale non è possibile generare un tensore di Riemann perchè non abbiamo una coppia di indici da antisimmetrizzare; in due dimensioni viceversa il Riemann ha una sola componente:

$$R_{12,12}$$

In tre dimensioni esiste un modo molto semplice di contare le componenti del Riemann, dualizzandolo con il tensore di Levi-Civita 3-dimensionale $\epsilon^{\alpha\beta\mu}$:

$$T^{\lambda\mu} = \epsilon^{\lambda\alpha\beta} R_{\alpha\beta,\rho\sigma} \epsilon^{\mu\rho\sigma}$$

Il tensore $T^{\mu\nu}$ così costruito è simmetrico grazie alla simmetria nello scambio delle coppie $(\alpha\beta), (\rho\sigma)$, per cui il numero di componenti indipendenti del tensore di Riemann è pari al numero di componenti di un tensore simmetrico in 3 dimensioni: $\frac{3(3+1)}{2} = 6$, che coincide con $\frac{3^2*8}{12} = 6$. In tre dimensioni anche il tensore di Einstein è simmetrico e ha 6 componenti indipendenti: si può mostrare infatti che $T^{\mu\nu} \simeq G^{\mu\nu}$, ovvero l'informazione contenuta nel Riemann e nel tensore di Einstein è identica. La prima dimensione in cui il tensore di Riemann contiene più informazione del tensore di Einstein è $d = 4$, infatti il numero di componenti indipendenti del Riemann è $\frac{4^2*15}{12} = 20$ mentre un tensore simmetrico in 4 dimensioni ne ha soltanto 10.

2.11 Esercizi

1. dimostrare che su una varietà la somma di due vettori in uno stesso punto p è ancora un vettore.
2. Calcolare la componente $g_{\phi\phi}$ della metrica su S_2 indotta dall'embedding in \mathbb{R}^3 .
3. Se $F = F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$ e $G = G_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$, determinare le componenti di $F \wedge G$.
4. Dimostrare la proprietà associativa del prodotto esterno:

$$(\omega \wedge \eta) \wedge \xi = \omega \wedge (\eta \wedge \xi)$$

5. Calcolare i coefficienti di connessione del piano in coordinate polari e in coordinate cartesiane.
6. Definendo la matrice jacobiana

$$J^\alpha{}_\lambda = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\lambda}$$

e la matrice

$$\left(\hat{\Gamma}_\mu\right)^\alpha{}_\lambda = \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha$$

dimostrare che

$$\left(\Gamma'_\mu\right) = J^{-1} (\partial_\mu J) + J^{-1} \Gamma_\mu J$$

7. Data l'equazione delle linee autoparallele:

$$\ddot{x}^\alpha + \Gamma_{\rho\sigma}^\alpha \dot{x}^\rho \dot{x}^\sigma = 0$$

e considerando la metrica della sfera:

$$ds^2 = R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

scrivere l'equazione delle linee autoparallele e dimostrare che sono cerchi massimi.

8. Considerare uno spazio piatto con la metrica di Minkowski in 2+1 dimensioni:

$$dT^2 - d\rho^2 - \rho^2 d\theta^2$$

con la seguente identificazione:

$$(t, \theta) \sim (t + 2\pi j, \theta + 2\pi)$$

Verificare che lo spazio rimane senza curvatura, e che un parallelogramma *lungo l'asse temporale* non si chiude.

Osservazione: questa geometria può nascere considerando il campo gravitazionale generato da un filo infinito.

9. Dimostrare la seconda identità di Bianchi senza usare i vettori di base.
10. Mostrare che se $\nabla_{\mu}g_{\alpha\beta} = 0$, anche $\nabla_{\mu}g^{\alpha\beta} = 0$.

Capitolo 3

Relatività generale

3.1 Il principio di equivalenza

Einstein tentò di capire come funzionasse realmente l'interazione gravitazionale. La sua idea principale fu quella di tornare al principio di equivalenza nella sua forma debole:

Il moto di un oggetto in un campo gravitazionale è indipendente dalla sua massa

In altre parole, il rapporto tra la massa inerziale che compare nella seconda equazione della dinamica $\vec{F} = m_i \vec{a}$ e la massa gravitazionale che compare a secondo membro nell'equazione del moto

$$\vec{F} = \frac{m_g M}{r^2} \vec{r}$$

è una costante universale che non dipende dalle caratteristiche interne del sistema:

$$\frac{m_g}{m_i} = \text{costante}$$

In tal caso possiamo ridefinire le unità di misura facendo in modo che questa costante sia 1, consistentemente con una moltitudine di esperimenti, tra cui quello più famoso è quello di Eötvös: l'apparato sperimentale originario consisteva in due masse agli estremi di un'asta rigida, appesa dal suo centro tramite un sottile filo. L'esperimento era predisposto in modo tale che se le masse inerziali e gravitazionali dei corpi alle estremità della sbarra fossero state diverse, le due forze non si sarebbero cancellate esattamente e nel tempo l'asta sarebbe ruotata: l'esito fu negativo con una precisione di 1 su 20 milioni (un pò sospetta), successivamente migliorata a 1 su 100 miliardi.

Ovviamente dobbiamo guardare al moto di un oggetto in campo gravitazionale schermandolo dalle altre interazioni: supponiamo ad esempio di essere in un campo gravitazionale costante, in tal caso tutti gli oggetti in qualsiasi punto del nostro laboratorio verranno attratti verso terra con la stessa accelerazione.

Einstein osservò che lo stesso risultato può essere ottenuto se il laboratorio risulta essere uniformemente accelerato rispetto ad un sistema inerziale: anche in tal caso infatti qualsiasi oggetto cadrà verso il pavimento del laboratorio con accelerazione costante. Questa è una conseguenza del fatto che il rapporto $\frac{m_g}{m_i}$ è 1, e se il nostro laboratorio si trova in caduta libera in un campo gravitazionale, gli effetti di quest'ultimo sono annullati e oggetti che inizialmente si muovevano di moto uniforme continueranno a farlo: in altre parole il nostro sistema è divenuto inerziale.

Siamo giunti quindi alla conclusione che in virtù dell'uguaglianza tra massa inerziale e gravitazionale, dal punto di vista delle leggi della meccanica un sistema di riferimento in accelerazione uniforme è indistinguibile da un sistema in un campo gravitazionale uniforme. Qui sta il salto logico di Einstein, che generalizzò il principio di equivalenza debole (*WEP*: Weak Equivalence Principle) introducendo il cosiddetto principio di equivalenza di Einstein (*EEP*):

1. Vale il principio di equivalenza debole;
2. dato un campo gravitazionale, questo **localmente** è **indistinguibile** da un sistema uniformemente accelerato;
3. le misure fisiche sono indipendenti dal tempo e dal luogo in cui sono effettuate.

Il punto saliente del principio è che il campo gravitazionale non è più necessariamente costante; esso vale per tutte le leggi fisiche valide in sistemi inerziali, ma Einstein non si pronunciò sulle interazioni gravitazionali: esiste il cosiddetto principio di equivalenza *forte*, che estende il principio di Einstein includendo anche le interazioni dovute alla gravità.

Ci rendiamo subito conto che se cade l'ipotesi di località un sistema di riferimento che accelera uniformemente e un sistema di riferimento in caduta libera in un campo gravitazionale non costante (come quello della terra) sono ben distinguibili: ad esempio possiamo lasciar cadere due oggetti e osservare le traiettorie, ottenendo che in un sistema accelerato gli oggetti si muoveranno lungo rette parallele, mentre in un campo gravitazionale tenderanno a convergere verso la sorgente del campo, diminuendo in particolare la loro distanza.

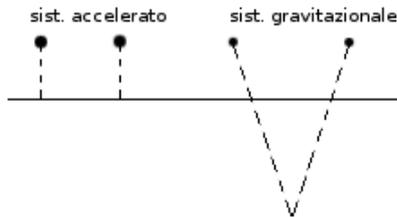


Figura 3.1: Traiettorie di due corpi accelerati o in caduta libera

In altre parole, anche se non possiamo osservare direttamente il campo gravitazionale, il principio di equivalenza ammette che possano essere osservate le sue differenze, in termini tecnici le cosiddette *forze di marea*: impareremo che esse corrispondono ad una *curvatura* dello spazio-tempo, in altre parole possiamo rendere conto di una eventuale curvatura dello spazio tramite misure non locali.

Osserviamo in ogni caso che l'aggettivo "locale" va interpretato nel senso più restrittivo del termine, cioè "locale" non soltanto nello spazio bensì nello spazio-tempo: possiamo infatti accorgerci della non equivalenza tra due sistemi anche facendo misure per lunghi periodi di tempo. Il principio di equivalenza di Einstein in definitiva vale esattamente soltanto per campi costanti, oppure in presenza di una distribuzione infinita e uniforme di materia.

3.1.1 Il redshift gravitazionale

Consideriamo un sistema in moto accelerato con accelerazione \vec{a} , solidale con un emitter e un receiver di onde elettromagnetiche, a loro volta separati da una distanza z : l'emitter invia un raggio di luce, che in condizioni normali impiegherebbe un tempo $\Delta t = \frac{z}{c}$ per raggiungere il receiver.

Una volta emesso il raggio, però, sia l'emitter che il receiver accelerano e al tempo δt entrambi avranno maturato una velocità $v = a\Delta t = a\frac{z}{c}$. Ci aspettiamo un analogo relativistico dell'effetto Doppler, e per determinare questo effetto consideriamo il potenziale A^μ per un'onda elettromagnetica, per studiarne il cambio di frequenza nel passaggio da un sistema di riferimento a riposo a uno in movimento. Innanzitutto un'onda elettromagnetica nel vuoto soddisfa alle equazioni

$$\begin{cases} \square A_\mu = 0 \\ \partial^\mu A_\mu = 0 \end{cases}$$

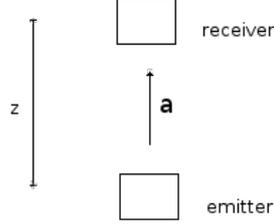


Figura 3.2:

Poichè A^μ è un quadrivettore anche $\epsilon^\mu(k)$ lo è, e necessariamente $e^{ik \cdot x}$ dovrà essere una funzione scalare, in particolare anche k^μ è un quadrivettore. Le due condizioni dunque implicano che $A^\mu = \epsilon^\mu(k)e^{i\vec{k} \cdot x}$ con $k^2 = 0$ ed $\epsilon^\mu k_\mu = 0$. Se imponiamo che il moto avvenga lungo l'asse x^1 :

$$k \cdot x = \frac{2\pi}{\lambda} (x^1 - ct)$$

La parte temporale del vettore d'onda è legata alla frequenza dell'onda, e in generale si ha

$$k \sim \nu(1, \vec{n})$$

Sotto un boost di Lorentz in direzione $\hat{\beta}$ ci aspettiamo che la componente temporale cambi come

$$k'^0 = \gamma(k^0 - \vec{\beta} \cdot \vec{k})$$

Se il raggio viene emesso nella direzione x^1 si ha più semplicemente

$$k'^0 = \gamma(k^0 - \beta k)$$

ma poichè A_μ soddisfa l'equazione d'onda, abbiamo anche

$$k^2 \epsilon_\mu(k) e^{ik \cdot x} = 0$$

il che implica $k^2 = 0$, cioè $k_0^2 = (k^1)^2$ o ancora $k_0 = k_1$, per cui la componente temporale diventa

$$k'^0 = \gamma(k^0 - \beta k^0) = \gamma k^0 (1 - \beta) = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} k^0$$

Il legame tra k^0 e la lunghezza d'onda è

$$k^0 = \frac{2\pi c}{\lambda}$$

da cui si ottiene

$$\frac{2\pi c}{\lambda'} = \frac{2\pi c}{\lambda} \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \Rightarrow \frac{1}{\lambda'} = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}$$

Se $\beta \ll 1$ tale relazione si può approssimare come

$$\frac{1}{\lambda'} \sim \frac{1}{\lambda} (1 - \beta) \Rightarrow \frac{\Delta \lambda}{\lambda} \sim \beta$$

In questo fenomeno dunque otteniamo una variazione di lunghezza d'onda pari a $\frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \frac{az}{c^2}$. Per il principio di equivalenza il sistema deve essere indistinguibile dal caso in cui ci troviamo sulla terra, sottoposti ad un campo gravitazionale

costante pari a \vec{g} , e facciamo cadere un emettitore da una torre verso un receiver posto al suolo sulla verticale: dobbiamo ottenere esattamente $\frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{gz}{c^2}$. Ma il numeratore del membro di destra non è altro che la differenza di potenziale tra la cima della torre e il suolo:

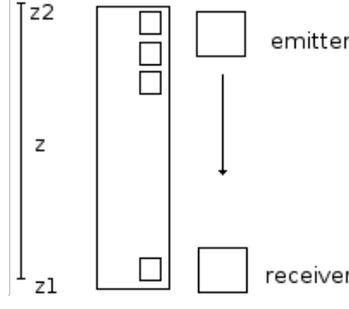


Figura 3.3: Stesso esperimento in campo gravitazionale

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\phi(z_2) - \phi(z_1)}{c^2}$$

Il principio di equivalenza quindi prevede un redshift sia nel caso di un sistema uniformemente accelerato che di un sistema sottoposto ad un campo gravitazionale costante. Einstein non aveva a disposizione l'apparato sperimentale adatto per verificare questa predizione, furono in seguito Pound e Rebka a darne un riscontro sperimentale, tuttavia Einstein si convinse di aver ragione utilizzando la meccanica quantistica: un principio sacro in fisica, cui non vorremmo mai rinunciare, è il principio di conservazione dell'energia; in base ad esso, e all'equivalenza tra massa ed energia, possiamo prevedere il redshift anche senza invocare il principio di equivalenza. Consideriamo infatti un fotone con energia $h\nu$ che viene emesso dalla cima della torre verso il suolo: a questa energia è possibile associare una massa equivalente $m_{eq} = \frac{h\nu}{c^2}$. Quando arriva al suolo, il fotone dovrà avere la stessa energia di quando è stato emesso, dunque avremo

$$E = T + V = h\nu + \frac{h\nu}{c^2}gz_2 = h\nu' + \frac{h\nu}{c^2}gz_1 = T' + V' = E'$$

dunque ancora una volta

$$\frac{\nu' - \nu}{\nu} = \frac{gz}{c^2}$$

In definitiva, se vale il principio di conservazione dell'energia si deve avere redshift gravitazionale, concordemente con (e indipendentemente da) quanto previsto dal principio di equivalenza. Questo è un primo suggerimento del fatto che una descrizione appropriata degli effetti gravitazionali debba abbandonare l'idea di poter descrivere lo spazio-tempo come una varietà lorentziana piatta, perchè in tale ambiente il redshift gravitazionale è inesorabilmente inibito: consideriamo di nuovo l'esempio della torre di altezza h , e l'emissione di un'onda elettromagnetica di lunghezza d'onda λ dal suolo verso la cima. L'osservatore al suolo misura l'intervallo di tempo che intercorre tra le partenze di un fronte d'onda e di quello immediatamente successivo, espresso in termini del tempo proprio da

$$\Delta\tau_0 = \int_{t_i^{(0)}}^{t_f^{(0)}} dt \sqrt{g_{\mu\nu}(x, y, z = 0, t) \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}} = \int_{t_i^{(0)}}^{t_f^{(0)}} dt \sqrt{g_{00}(x, y, z = 0, t)} c$$

L'osservatore in cima alla torre che riceve l'onda farà la stessa misurazione, trovando un tempo proprio

$$\Delta\tau_h = \int_{t_i^{(h)}}^{t_f^{(h)}} dt \sqrt{g_{\mu\nu}(x, y, z = h, t) \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}} = \int_{t_i^{(h)}}^{t_f^{(h)}} dt \sqrt{g_{00}(x, y, z = h, t)} c$$

Poichè l'intervallo di tempo proprio in questo caso coincide con il periodo dell'onda emessa o ricevuta, ci aspettiamo che i due osservatori trovino due risultati diversi a causa del redshift. Ma se la metrica $g_{\mu\nu}(x, z, y, t)$ è quella di Minkowski, in particolare è indipendente dal tempo e dalla posizione, non abbiamo motivo di sospettare che il secondo fronte d'onda segua una traiettoria diversa da quella del primo per raggiungere l'osservatore in cima alla torre, per cui gli intervalli di tempo $t_f^{(h)} - t_i^{(h)}$ e $t_f^{(0)} - t_i^{(0)}$ coincideranno. L'unica altra possibilità per i due integrali di essere diversi è che $g_{\mu\nu}(x, y, z = h, t) \neq g_{\mu\nu}(x, y, z = 0, t)$, ma poichè la metrica di Minkowski è costante i due risultati sono esattamente gli stessi, ovvero uno spazio-tempo piatto non può prevedere il redshift gravitazionale.

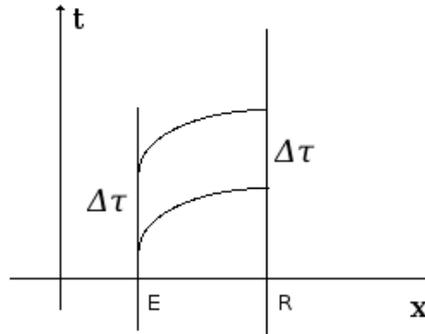


Figura 3.4: Emissione di due fronti d'onda consecutivi in spazio-tempo piatto

Per reinterpretare il redshift gravitazionale dobbiamo quindi supporre che la metrica del nostro spazio-tempo sia funzione del punto:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu$$

o equivalentemente, dobbiamo passare ad una descrizione dello spazio-tempo in termini di varietà *curve*.

3.1.2 Formulazione geometrica del principio di equivalenza: le coordinate normali

In base a quanto osservato per il redshift gravitazionale, curvatura dello spazio e campo gravitazionale sembrano essere due effetti strettamente legati. Il principio di equivalenza afferma che localmente un sistema uniformemente accelerato e un sistema sottoposto ad un campo gravitazionale sono indistinguibili, in altre parole le leggi della fisica si riducono a quelle della relatività speciale e non è possibile rivelare la presenza di un campo gravitazionale. Dal punto di vista della geometria questo significa che localmente possiamo sempre scegliere un sistema di coordinate equivalente a quello Minkowskiano: consideriamo infatti un punto O dello spazio-tempo, e sia P un altro punto, sufficientemente vicino ad O in modo che esista un'unica geodetica $\gamma(t)$ che congiunge P con O , e soddisfa

$$\gamma(0) = O$$

$$\gamma(1) = P$$

Definiremo le coordinate $\xi^\mu(1)$ del punto P come

$$\xi^\mu(P) = \frac{dx^\mu}{dt}(O)$$

ovvero come le coordinate del vettore tangente alla geodetica, in una qualche carta. Queste coordinate prendono il nome di *coordinate normali*, o *coordinate di Riemann*, o ancora, se la varietà è un gruppo, *mappa esponenziale*: infatti, se O è l'identità del gruppo, un elemento g connesso all'origine è sempre rappresentabile in forma esponenziale come

$$g = e^{\xi^a T_a}$$

dove T_a sono i generatori del gruppo, e le ξ^a sono le coordinate normali dell'elemento g .

Consideriamo adesso un punto Q che sta sulla geodetica da O a P , e viene raggiunto dalla geodetica $\gamma(t)$ per $0 < t_0 < 1$:

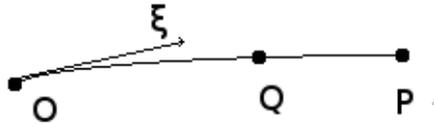


Figura 3.5: Sistema di coordinate normali

Osserviamo che l'equazione delle geodetiche è invariante sotto riparametrizzazioni affini, ovvero se $x^\mu(\tau)$ è una soluzione dell'equazione

$$\frac{d^2 x^\mu(\tau)}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha(\tau)}{d\tau} \frac{dx^\beta(\tau)}{d\tau} = 0$$

anche $x^\mu(at + b)$ lo è, infatti

$$\frac{d^2 x^\mu(at + b)}{dt^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha(at + b)}{dt} \frac{dx^\beta(at + b)}{dt} = a^2 \left(\frac{d^2 x^\mu(s)}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha(s)}{ds} \frac{dx^\beta(s)}{ds} \right) = 0$$

dove $s = at + b$. Questa libertà residua di riparametrizzazione coincide con la possibilità di scegliere l'origine e la scala del tempo, ed è non banale dato che nello scrivere l'equazione delle geodetiche in questa forma abbiamo implicitamente scelto il tempo proprio in modo che $\sqrt{g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}$ sia costante.

In definitiva possiamo considerare la curva $\gamma(t_0 \cdot t)$, garantito che sarà ancora una geodetica; questa nuova curva passa per O a $t = 0$, e per Q per $t = 1$, dunque se ne prendiamo nuovamente la derivata in O :

$$\xi^\mu(Q) = \left. \frac{d}{dt} (x^\mu(t_0 \cdot t)) \right|_{t=0} = t_0 \xi^\mu(P)$$

Il punto Q , sulla stessa geodetica di P , ha coordinate $t_0 \xi^\mu(P)$: analogamente qualunque altro punto sulla geodetica caratterizzato da un valore λ del parametro avrà coordinate della forma $\xi^\mu(\lambda) = \lambda \xi^\mu(P)$. In queste nuove coordinate l'equazione della stessa geodetica è data da

$$\xi^\mu(\lambda) = \lambda \xi^\mu(P) \quad 0 < \lambda < 1$$

Ma se $\xi^\mu(\lambda)$ è una geodetica soddisferà l'equazione delle geodetiche nelle nuove coordinate:

$$\frac{d^2 \xi^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{d\xi^\alpha}{d\lambda} \frac{d\xi^\beta}{d\lambda} = 0$$

Poichè $\xi(\lambda)$ è lineare nel parametro avremo $\frac{d^2 \xi^\mu}{d\lambda^2} = 0$, dunque

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu(\xi(\lambda)) \xi^\alpha(P) \xi^\beta(P) = 0$$

Moltiplicando per λ^2 :

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \xi^\alpha(\lambda) \xi^\beta(\lambda) = 0$$

Questa relazione deve valere per ogni geodetica che esce da O , dunque questa condizione ha le seguenti implicazioni: se deriviamo una volta

$$\left(\partial_\lambda \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \right) \xi^\alpha \xi^\beta + \Gamma_{\lambda\beta}^\mu \xi^\beta + \Gamma_{\alpha\lambda}^\mu \xi^\alpha = 0$$

Derivando una seconda volta:

$$\left(\partial_\rho \partial_\lambda \Gamma_{\alpha\beta}^\mu\right) \xi^\alpha \xi^\beta + \left(\partial_\lambda \Gamma_{\rho\beta}^\mu\right) \xi^\beta + \left(\partial_\lambda \Gamma_{\alpha\rho}^\mu\right) \xi^\alpha + \left(\partial_\rho \Gamma_{\lambda\beta}^\mu\right) \xi^\beta + \Gamma_{\lambda\rho}^\mu + \left(\partial_\rho \Gamma_{\alpha\lambda}^\mu\right) \xi^\alpha + \Gamma_{\rho\lambda}^\mu = 0$$

Se O è un punto dello spazio-tempo in cui la geometria è regolare ci aspettiamo che i simboli di Christoffel siano regolari per $\lambda \rightarrow 0$, perciò rimaniamo con

$$\Gamma_{\lambda\rho}^\mu(0) + \Gamma_{\rho\lambda}^\mu(0) \Rightarrow \Gamma_{\lambda\rho}^\mu(0)$$

ovvero tutti i simboli di Christoffel, calcolati in O , si annullano; questo continua a valere anche abbassando l'indice alto con la metrica:

$$\Gamma_{\alpha,\lambda\rho}(0) = 0$$

Se consideriamo la somma

$$\Gamma_{\alpha,\lambda\rho}(0) + \Gamma_{\lambda,\alpha\rho}(0) = \frac{1}{2} (\partial_\lambda g_{\alpha\rho}(0) + \partial_\rho g_{\alpha\lambda}(0) - \partial_\alpha g_{\rho\lambda}(0)) + \frac{1}{2} (\partial_\alpha g_{\lambda\rho}(0) + \partial_\rho g_{\alpha\lambda}(0) - \partial_\lambda g_{\alpha\rho}(0)) = \partial_\rho g_{\alpha\lambda} = 0$$

Dall'annullarsi dei Γ in O ricaviamo anche l'annullarsi delle derivate prime della metrica: questo implica che espandendo la metrica intorno ad O i termini lineari sono assenti

$$g_{\mu\nu}(\xi) = g_{\mu\nu}(0) + \frac{1}{2} A_{\alpha\beta} \xi^\alpha \xi^\beta$$

Osserviamo che a meno di ruotare le coordinate normali con una trasformazione lineare (in modo che le geodetiche rimangano rette) possiamo prendere la parte costante $g_{\mu\nu}(0)$ uguale ad $\eta_{\mu\nu}$. Per studiare la forma del termine quadratico deriviamo una terza volta l'equazione delle geodetiche, e consideriamo solo i termini che daranno contributo per $\xi = 0$:

$$\begin{aligned} \partial_\lambda \Gamma_{\rho\sigma}^\mu + \partial_\lambda \Gamma_{\sigma\rho}^\mu + \partial_\rho \Gamma_{\lambda\sigma}^\mu + \partial_\sigma \Gamma_{\lambda\rho}^\mu + \partial_\rho \Gamma_{\sigma\lambda}^\mu + \partial_\sigma \Gamma_{\rho\lambda}^\mu &= 0 \\ \Rightarrow \partial_\lambda \Gamma_{\rho\sigma}^\mu(0) + \partial_\rho \Gamma_{\sigma\lambda}^\mu(0) + \partial_\sigma \Gamma_{\lambda\rho}^\mu(0) &= 0 \end{aligned}$$

Dunque la somma ciclica delle derivate prime dei Γ (e non semplicemente la derivata) si annulla in O : se la derivata prima fosse stata nulla avremmo dovuto concludere che il Riemann stesso era nullo in O , e data la sua natura tensoriale sarebbe stato nullo in qualsiasi altro sistema di coordinate. Infatti, se scriviamo il Riemann nel punto O :

$$R^\mu{}_{\lambda,\rho\sigma}(0) = \partial_\rho \Gamma_{\lambda\sigma}^\mu(0) - \partial_\sigma \Gamma_{\lambda\rho}^\mu(0)$$

perchè i Γ si annullano in O . Se aggiungiamo a questa espressione lo scambiato in $\lambda - \sigma$:

$$\partial_\rho \Gamma_{\lambda\sigma}^\mu(0) - \partial_\sigma \Gamma_{\lambda\rho}^\mu(0) + \partial_\rho \Gamma_{\lambda\sigma}^\mu(0) - \partial_\lambda \Gamma_{\rho\sigma}^\mu(0)$$

Adesso, aggiungiamo e sottraiamo il termine necessario a ricostruire la somma ciclica delle derivate dei γ , ovvero $\partial_\rho \Gamma_{\sigma\lambda}^\mu$:

$$\partial_\rho \Gamma_{\lambda\sigma}^\mu(0) - \partial_\sigma \Gamma_{\lambda\rho}^\mu(0) + \partial_\rho \Gamma_{\lambda\sigma}^\mu(0) - \partial_\lambda \Gamma_{\rho\sigma}^\mu(0) - \partial_\rho \Gamma_{\sigma\lambda}^\mu(0) + \partial_\rho \Gamma_{\sigma\lambda}^\mu(0)$$

La somma ciclica si annulla per il risultato precedente, rimaniamo quindi con

$$R^\mu{}_{\lambda,\rho\sigma}(0) + R^\mu{}_{\sigma,\rho\lambda}(0) = 3\partial_\rho \Gamma_{\lambda\sigma}^\mu(0)$$

Questo risultato ci informa che in O le derivate prime dei Γ sono espresse da una somma di componenti del Riemann: se il Riemann è diverso da zero nell'origine le derivate seconde della metrica non possono essere identicamente nulle. Per dedurre la forma delle derivate seconde della metrica, esplicitiamo le derivate prime del Γ :

$$\partial_\rho \Gamma_{\lambda\sigma}^\mu(0) = \frac{1}{3} (R^\mu{}_{\lambda,\rho\sigma}(0) + R^\mu{}_{\sigma,\rho\lambda}(0))$$

Poichè la derivata prima della metrica in O è nulla, questa si comporta come una costante rispetto alla derivata e possiamo abbassare senza conseguenze l'indice μ :

$$\partial_\rho \Gamma_{\mu, \lambda \sigma}(0) = \frac{1}{3} (R_{\mu \lambda, \rho \sigma}(0) + R_{\mu \sigma, \rho \lambda}(0))$$

Allora se sommiamo lo scambiato in $\mu - \lambda$

$$\begin{aligned} \partial_\rho \Gamma_{\mu, \lambda \sigma}(0) + \partial_\rho \Gamma_{\lambda, \mu \sigma}(0) &= \frac{1}{3} (R_{\mu \lambda, \rho \sigma}(0) + R_{\mu \sigma, \rho \lambda}(0) + R_{\lambda \mu, \rho \sigma}(0) + R_{\lambda \sigma, \rho \mu}(0)) = -\frac{1}{3} (R_{\lambda \sigma, \mu \rho}(0) + R_{\mu \sigma, \lambda \rho}(0)) \\ \Rightarrow \partial_\rho \partial_\sigma g_{\lambda \mu}(0) &= -\frac{1}{3} (R_{\lambda \sigma, \mu \rho}(0) + R_{\mu \sigma, \lambda \rho}(0)) \\ \Rightarrow g_{\mu \nu}(\xi) &= \eta_{\mu \nu} - \frac{1}{6} \xi^\rho \xi^\sigma (R_{\mu \rho, \nu \sigma}(0) + R_{\nu \rho, \mu \sigma}(0)) + O(\xi^3) \end{aligned}$$

3.2 Campo gravitazionale e curvatura

Nel sistema di coordinate così costruito l'affermazione che la geometria può essere fatta sparire ha un ben preciso significato: in ogni punto dello spazio-tempo possiamo sempre scegliere un sistema di coordinate tale che la metrica sia quella minkowskiana a meno di correzioni dell'ordine di ξ^2 , e siamo insensibili alle derivate prima della metrica, che risultano essere quindi soltanto un artefatto delle coordinate, senza alcuna informazione fisica. In più, abbiamo dimostrato che in queste coordinate l'equazione delle geodetiche passanti per l'origina si riduce all'equazione di una retta: ragionando in modo inverso, l'equazione di una retta nello spazio euclideo

$$\ddot{x}^\mu = 0$$

è generalizzata in maniera naturale dall'equazione delle geodetiche

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = 0$$

Nello spazio piatto il moto libero segue una traiettoria rettilinea, dunque possiamo pensare che in uno spazio curvo la traiettoria seguita da un oggetto in caduta libera sia una geodetica: in questo senso possiamo pensare di poter riassorbire gli effetti di deviazione dalla traiettoria rettilinea dovuti alla presenza di un campo gravitazionale, nei coefficienti della connessione Γ .

Per verificare la consistenza di questa assunzione dovremo considerare il limite classico dell'equazione delle geodetiche, e confrontarlo con l'equazione di Newton

$$\ddot{\vec{x}} = -\nabla\phi$$

Nel limite classico le velocità \dot{x}^i sono piccole rispetto alla velocità della luce, e ci aspettiamo che le varie grandezze non dipendano dal tempo. Inoltre, per consistenza dobbiamo scegliere il tempo t come parametro per la traiettoria:

$$\dot{x}^\mu = \begin{pmatrix} \dot{x}^0 \\ \dot{x}^i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} c \\ \vec{0} \end{pmatrix}$$

L'equazione delle geodetiche si scrive allora come:

$$\ddot{x}^0 = -\Gamma_{00}^0 c^2 - \Gamma_{0i}^0 \dot{x}^i c - \Gamma_{ij}^0 \dot{x}^i \dot{x}^j$$

Gli ultimi due termini sono di ordine v e v^2 pertanto possono essere trascurati, rimaniamo quindi con

$$\ddot{x}^0 = -\Gamma_{00}^0 c^2$$

Il simbolo di Christoffel Γ_{00}^0 ha questa forma:

$$\Gamma_{00}^0 = -\frac{1}{2}g^{0\lambda}(\partial_0 g_{\lambda 0} + \partial_0 g_{0\lambda} - \partial_\lambda g_{00})$$

Nel limite statico, tutte le derivate rispetto al tempo sono nulle:

$$\Rightarrow \Gamma_{00}^0 = g^{0\mu} \partial_\mu g_{00}$$

Ci aspettiamo che nel limite classico la metrica si riduca sostanzialmente alla metrica minkowskiana con piccole correzioni, pertanto a meno di termini di ordine superiore il prodotto $g^{0\mu} \partial_\mu g_{00}$ può essere tranquillamente confuso con $\eta^{0\mu} \partial_\mu g_{00}$, dato che il termine $\partial_\mu g_{00}$ è già del prim'ordine:

$$\eta^{0\mu} \partial_\mu g_{00} = \partial_0 g_{00} = 0$$

da cui

$$\ddot{x}^0 = 0$$

Questo primo risultato in realtà è un controllo di consistenza della nostra tacita identificazione $x^0 = ct$: in questo limite infatti le equazioni geodetiche danno come risultato $\ddot{x}^0 = 0$ ovvero $x^0 = at + b$, dunque pur di ridefinire scala e origine dei tempi è lecito identificare x^0 con ct . Nel caso delle coordinate spaziali:

$$\ddot{x}^i = -\Gamma_{00}^i c^2 = -\frac{1}{2}g^{i\mu}(\partial_0 g_{\mu 0} + \partial_0 g_{0\mu} - \partial_\mu g_{00}) c^2 = -\frac{1}{2}\delta^{i\mu}(-\partial_\mu g_{00}) = -\frac{c^2}{2}\partial_i g_{00}$$

dove ancora una volta abbiamo sfruttato il fatto che le deviazioni rispetto alla metrica di Minkowski sono piccole, dunque $g^{\mu i} \partial_i g_{00} \sim \eta^{\mu i} \partial_i g_{00}$. Confrontando con l'equazione

$$\ddot{\vec{x}} = -\nabla\phi \Rightarrow \ddot{x}^i = -\partial_i \phi$$

i due risultati coincidono pur di identificare g_{00} con $1 + \frac{2\phi}{c^2}$.

Questo risultato mostra che nel limite classico la curvatura dello spazio è legata alla presenza di un campo gravitazionale. In particolare il tempo proprio di un osservatore non è più invariante sotto traslazioni: se immaginiamo due osservatori fermi in due punti spaziali diversi, essi avranno valori di g_{00} diversi, e misureranno tempi propri diversi relativamente ad intervalli analoghi (redshift gravitazionale).

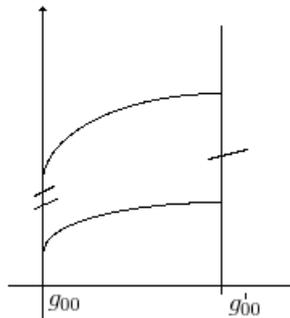


Figura 3.6: g_{00} variabile nello spazio

Ad esempio, nel caso di campo gravitazionale costante, avremo

$$g_{00}(x_1) = 1 + \frac{2gh_1}{c^2}$$

$$g_{00}(x_2) = 1 + \frac{2gh_2}{c^2}$$

dove h_1 e h_2 è l'altezza dal suolo.

3.2.1 L'equazione di deviazione geodetica

Il principio di equivalenza ci assicura che localmente non è possibile rivelare la presenza di un campo gravitazionale, ma che i suoi effetti possono essere misurati mediante misure non locali effettuate in diversi sistemi di riferimento, consideriamo quindi un set di osservatori distribuiti lungo una curva $\gamma(s)$, tutti in caduta libera lungo la propria geodetica $x^\mu(s, t)$.

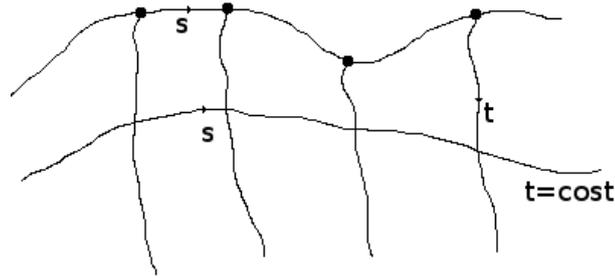


Figura 3.7: Moto di un set di osservatori

Se uniamo tutti i punti sulle varie traiettorie per lo stesso valore del parametro t otteniamo un'istantanea della distanza relativa tra gli osservatori. In particolare possiamo calcolare la derivata di $x^\mu(s, t)$ rispetto ad s , ovvero la distanza relativa tra due osservatori in funzione di t :

$$S^\mu = \left. \frac{\partial x^\mu(s, t)}{\partial s} \right|_t$$

Viceversa, $T^\mu \equiv \left. \frac{\partial x^\mu(s, t)}{\partial t} \right|_s$ rappresenta la velocità di un singolo osservatore lungo la propria geodetica. Definiamo la velocità di variazione della distanza relativa tra due osservatori:

$$v = \nabla_T S = T^\mu \nabla_\mu S$$

L'accelerazione sarà definita analogamente dalla derivata seconda:

$$a = \nabla_T v = \nabla_T \nabla_T S$$

o in componenti

$$a^\mu = (T^\rho \nabla_\rho (T^\sigma \nabla_\sigma S))^\mu$$

Se pensiamo a $x^\mu(t_0, s)$ e $x^\mu(t, s_0)$ come a delle curve coordinate, S e T non sono altro che i rispettivi vettori tangenti, dunque commuteranno tra loro:

$$[\partial_\mu, \partial_\nu] = 0 \rightarrow \left[\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial s} \right] = 0$$

Poichè questa è una proprietà tra vettori è valida in qualunque sistema di riferimento, per cui avremo $[T, S] = 0$, cioè

$$T^\alpha \partial_\alpha S^\mu - S^\alpha \partial_\alpha T^\mu = 0$$

Poichè la torsione è nulla:

$$\nabla_T S - \nabla_S T - [T, S] = 0 \Rightarrow \nabla_T S = \nabla_S T$$

e possiamo scrivere

$$a = \nabla_T \nabla_T S = \nabla_T \nabla_S T = \nabla_S \nabla_T T + [\nabla_T, \nabla_S] T$$

T è il vettore tangente ad una geodetica per cui $\nabla_T T = 0$, mentre inoltre il commutatore delle derivate covarianti è proprio il tensore di Riemann:

$$a = R(T, S)T$$

In componenti

$$a^\mu = R^\mu{}_{\lambda, \rho\sigma} T^\rho S^\sigma T^\lambda$$

Dunque l'accelerazione relativa tra due curve geodetiche infinitesimamente vicine è pilotata dalla curvatura della geometria e non dalla metrica, che non è mai entrata esplicitamente nei calcoli. L'equazione appena scritta prende il nome di *equazione della deviazione geodetica*, e le forze derivanti dall'accelerazione geodetica non sono altro che le forze di marea. Fisicamente il tensore di Riemann descrive la forza relativa tra due osservatori nel campo gravitazionale, dunque il concetto di forza assoluta perde di significato: ad esempio, per rivelare le onde gravitazionali non è sufficiente un solo bersaglio, a differenza di quanto accade in elettromagnetismo in cui per rivelare un'onda elettromagnetica è sufficiente un solo elettrone. È possibile mostrare che se abbiamo un sistema gravitazionale la curvatura contribuirà sempre con effetti attrattivi tra le geodetiche: intuitivamente, dal punto di vista fisico questo è ovvio se pensiamo alle linee di flusso del campo gravitazionale generato da una massa puntiforme, che convergono tutte verso il centro di gravità.

3.3 Le equazioni di campo di Einstein

Consideriamo le “equazioni di campo” per il campo gravitazionale classico:

$$\begin{cases} \Delta\phi = 4\pi G\rho \\ m \frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\nabla_i \Phi \end{cases}$$

La prima equazione somiglia molto alla prima equazione di Maxwell, e in virtù di questa somiglianza potremmo pensare di generalizzare immediatamente ad un formalismo covariante scrivendo

$$\square\phi = 4\pi G\rho$$

ma già qui ci rendiamo conto che se ϕ deve essere un potenziale scalare, le sue proprietà di trasformazione sotto Lorentz saranno in generale diverse da quelle di ρ , che trasforma come la componente temporale di un quadrivettore. In ogni caso, una lagrangiana che genera queste equazioni per il potenziale ϕ può essere scritta come

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{8\pi G} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - mc \int d\tau \sqrt{\eta_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta} f(\phi)$$

dove il secondo termine tiene conto di una eventuale accoppiamento di ϕ con una particella di massa m . La teoria descritta da questa lagrangiana però non rispecchia i dati sperimentali: nel limite di particella massless infatti l'interazione sparisce, cioè un raggio di luce che passa vicino a un pianeta non viene deviato, contrariamente a quanto accade in natura. Inoltre, le onde gravitazionali previste dalla teoria trasporterebbero una energia negativa, e corrisponderebbero alla propagazione di particelle di spin 0.

Se vogliamo continuare a percorrere la strada della somiglianza con l'elettrostatica, possiamo pensare che ϕ corrisponda ad un certo potenziale scalare A^0 , componente temporale di un quadripotenziale gravitazionale A^μ , con componenti spaziali $\nabla\phi$: la lagrangiana per questa teoria è

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{8\pi G} G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} - mc \int d\tau \sqrt{\eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} - m \int A_\mu dx^\mu$$

ma anch'essa per $m \rightarrow 0$ ha dei problemi per quanto riguarda la deviazione dei raggi di luce e il segno dell'energia trasportata dalle onde gravitazionali (corrispondenti stavolta alla propagazione di particelle di spin 1). Inoltre, sia la

teoria scalare che quella vettoriale non prevedono il redshift gravitazionale, in quanto sono teorie formulate nell'ambito della relatività speciale.

L'ultima teoria proposta prima della relatività generale, tra tutte quella più vicina a descrivere correttamente l'interazione gravitazionale, descriveva il campo gravitazionale in termini di un tensore simmetrico a due indici, $h_{\mu\nu}$. Questa teoria, detta *teoria linearizzata di Einstein*, ha tutte le previsioni giuste ma le sue equazioni del moto sono inconsistenti, nel senso che non hanno soluzione quando andiamo ad accoppiare la materia e la gravità; in ogni caso questa teoria può essere resa consistente aggiungendo dei termini opportuni, in modo da giungere alla teoria della relatività generale.

Abbiamo concluso che gli effetti del campo gravitazionale sono racchiusi nella forma di $g_{\mu\nu}(x)$, la metrica dello spazio-tempo: se vogliamo derivare la relatività generale abbiamo quindi bisogno di equazioni di campo per la metrica, che assume il ruolo di unico campo fondamentale (esistono teorie in cui anche la connessione Γ viene trattata come un campo). Qualunque forma esse abbiano, le equazioni di campo nel limite non relativistico si devono ridurre a

$$\Delta\phi = \frac{4\pi}{c}\rho$$

ovvero all'equazione di Poisson per il campo ϕ . In tale limite la sorgente del campo gravitazionale è la massa, che però non è un oggetto covariante a causa della sua equivalenza con l'energia, che trasforma come la componente temporale di un quadrivettore (il quadrimpulso). In teoria dei campi tutta l'informazione su massa, energia ed impulso è racchiusa all'interno del tensore energia-impulso, dunque per coerenza con la relatività speciale questo sostituirà la massa nel ruolo di sorgente del campo gravitazionale.

Le equazioni di campo avranno quindi la forma:

$$P^{\mu\nu} = kT^{\mu\nu}$$

dove $P^{\mu\nu}$ è un tensore incognito da determinare in base ad una serie di ipotesi:

1. nel limite non relativistico l'equazione di campo dovrà ridursi all'equazione di Poisson, dunque il primo membro dovrà dipendere almeno dalle derivate seconde spaziali; per covarianza, dipenderà in generale anche dalle derivate seconde temporali ($\Delta \rightarrow \square$).
2. Derivate di ordine più alto sono escluse per evitare problemi con la *causalità*: ad esempio nel caso dell'equazione di radiazione classica se teniamo conto dei termini di autointerazione del campo elettrico con se stesso otteniamo l'*equazione di Abraham-Lorentz*.
3. Poichè la procedura di Belinfante ci permette sempre di costruire un tensore energia-impulso simmetrico, richiederemo che anche $P^{\mu\nu}$ lo sia.
4. In relatività speciale, $T^{\mu\nu}$ è *conservato*, ovvero soddisfa a $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$; in relatività generale questa proprietà viene promossa a

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \rightarrow \nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

dunque poichè il tensore energia-impulso è covariantemente conservato, anche il primo membro dovrà esserlo.

5. **Ipotesi tecnica:** assumeremo che la dipendenza di $P^{\mu\nu}$ dalle derivate seconde sia al più lineare.

Si può mostrare che in quattro dimensioni queste ipotesi sono sovrabbondanti, in particolare possiamo eliminare la 3) e la 5): in tal caso infatti è sufficiente postulare la conservazione covariante del primo membro e la sua dipendenza al più dalle derivate seconde.

Sotto le nostre ipotesi possiamo quindi scrivere

$$P_{\mu\nu}(\partial^2 g, \partial g, g) = kT_{\mu\nu}$$

Dato che in ogni punto x_0 possiamo sempre definire un sistema di coordinate normali, le derivate prime della metrica si annullano e la metrica all'ordine zero risulta essere quella minkowskiana, ovvero il tensore $P_{\mu\nu}$ dipenderà solo da $\eta_{\mu\nu}$ e linearmente dalle sue derivate seconde:

$$P_{\mu\nu} = (A^{\alpha\beta\rho\sigma})_{\mu\nu} \partial_\alpha \partial_\beta g_{\rho\sigma}$$

Ma in coordinate normali le derivate seconde si possono scrivere esplicitamente in termini del tensore di Riemann:

$$P_{\mu\nu} = (A^{\alpha\beta\rho\sigma})_{\mu\nu} R_{\alpha\beta,\rho\sigma}$$

o equivalentemente

$$P_{\mu\nu} - (A^{\alpha\beta\rho\sigma})_{\mu\nu} R_{\alpha\beta,\rho\sigma} = 0$$

La precedente espressione coinvolge quantità tensoriali, dunque il suo annullarsi in un sistema di riferimento implica l'annullarsi in qualsiasi altro sistema: in altre parole il tensore P non è nient'altro che una combinazione lineare di tensori di Riemann. Le uniche combinazioni lineari del tensore di Riemann che mantengono carattere tensoriale sono

1. $aR_{\mu\nu}$;
2. $bg_{\mu\nu}R$;

In linea di principio potremmo pensare che $P_{\mu\nu}$ contenga anche un termine $C_{\mu\nu}$ che non dipende esplicitamente dalle derivate della metrica, ma questo non può che essere proporzionale alla metrica stessa, dunque

$$P_{\mu\nu} = aR_{\mu\nu} + bg_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} + bg_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu}$$

Se imponiamo che $P_{\mu\nu}$ sia covariantemente conservato:

$$\nabla^\mu R_{\mu\nu} + b\nabla_\nu R + \nabla^\mu g_{\mu\nu} = 0$$

L'ultimo termine è identicamente nullo, dunque il problema si riduce a trovare una combinazione covariantemente conservata di $R_{\mu\nu}$ e $g_{\mu\nu}R$: per la seconda identità di Bianchi

$$\nabla^\mu R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\nabla_\nu R$$

da cui otteniamo

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} + b\right) \nabla_\nu R = 0 &\Rightarrow b = -\frac{1}{2} \\ \Rightarrow P_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} \end{aligned}$$

dove riconosciamo in $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ il tensore di Einstein $G_{\mu\nu}$. L'equazione di campo così ottenuta prende il nome di *equazione di campo di Einstein*, e si riscrive come

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}$$

Il termine proporzionale a Λ viene detto termine di *costante cosmologica*, e lo assumeremo uguale a zero anche se ci sono parziali evidenze della sua necessità. Storicamente, la costante cosmologica fu introdotta da Einstein perchè voleva ottenere un universo statico, ovvero in una situazione di equilibrio; in realtà si può mostrare che anche con l'introduzione di questo termine l'equilibrio è instabile, e basta una minima perturbazione per farlo espandere o contrarre. Oggi il termine di costante cosmologica è associato all'energia del vuoto ed è introdotto dalle teorie che cercano di spiegare l'espansione dell'universo; le osservazioni hanno in effetti rivelato una costante Λ positiva, ma enormemente più piccola del valore predetto dalle teorie.

3.3.1 L'azione di Hilbert

Le equazioni di Einstein sono del secondo ordine nelle derivate e coinvolgono grandezze tensoriali, dunque una eventuale lagrangiana che dia luogo alle corrette equazioni dovrà contenere almeno le derivate prime della metrica ed essere scalare sotto diffeomorfismi: infatti le equazioni di Eulero-Lagrange in linea di principio si ottengono variando l'azione rispetto a $g_{\mu\nu}$ e alle sue derivate prime, ma poichè in coordinate normali la metrica all'ordine zero è minkowskiana le sue derivate prime si annullano questa procedura non dà risultati utili.

In realtà siamo stati troppo stringenti riguardo alle equazioni del moto: affinché esse abbiano forma tensoriale non è necessario che l'azione sia invariante sotto diffeomorfismi, ma è sufficiente che la sua variazione sia nulla a meno di una divergenza totale:

$$\delta S = \int_M d^4x \sqrt{-g} (\nabla_\lambda J^\lambda)$$

Hilbert inoltre suggerì che la lagrangiana potesse contenere anche derivate seconde a patto che alla fine queste non contribuissero alle equazioni del moto, ovvero che si potessero riorganizzare anche in questo caso in una divergenza totale. Egli propose la seguente azione, detta *azione di Hilbert*

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} R$$

dove R è lo scalare di curvatura, l'unico scalare che conosciamo che dipenda dalle derivate seconde della metrica. Per vedere se questa azione genera le giuste equazioni del moto, prendiamone la variazione:

$$\delta S = \int d^4x \delta (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu})$$

Per comodità di calcolo sceglieremo come campo fondamentale $g^{\mu\nu}$, l'inverso della metrica. La variazione a questo punto contiene tre termini:

$$\delta S = \int d^4x \delta (\sqrt{-g}) g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \int d^4x \sqrt{-g} \delta (g^{\mu\nu}) R_{\mu\nu} + \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta (R_{\mu\nu})$$

Il secondo termine non necessita di ulteriori manipolazioni, dunque calcoliamo la variazione di $\sqrt{-g}$:

$$\delta (\sqrt{-g}) = \frac{-\delta g}{2\sqrt{-g}}$$

Per calcolare δg usiamo un trucco:

$$\delta g = \delta (\det g) = \delta (e^{Tr \log g}) = e^{Tr \log g} Tr (g^{-1} \delta g) = \det g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}$$

Se ricordiamo che $\delta (g^{\mu\nu} g_{\mu\nu}) = 0$, abbiamo

$$g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}$$

dunque

$$\begin{aligned} \delta g &= -g g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \\ \Rightarrow \delta \sqrt{-g} &= -\frac{-g}{2\sqrt{-g}} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} = -\frac{\sqrt{-g}}{2} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \end{aligned}$$

Se sostituiamo il risultato nella variazione dell'azione

$$\delta S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu} + \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta (R_{\mu\nu})$$

Osserviamo che il primo termine riproduce già il primo membro dell'equazione di Einstein, dunque dobbiamo sperare che il secondo termine non dia contributo:

$$\delta R_{\mu\nu}(\Gamma) = \delta R^\lambda{}_{\mu,\lambda\nu} = \delta (\partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda + \Gamma_{\mu\lambda}^\tau \Gamma_{\tau\nu}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\tau \Gamma_{\tau\mu}^\lambda) =$$

$$= \partial_\nu \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda - \partial_\nu \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda + (\delta \Gamma_{\mu\lambda}^\tau) \Gamma_{\tau\nu}^\lambda + \Gamma_{\mu\lambda}^\tau (\delta \Gamma_{\tau\nu}^\lambda) - (\delta \Gamma_{\nu\lambda}^\tau) \Gamma_{\tau\mu}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\tau (\delta \Gamma_{\tau\mu}^\lambda)$$

Osserviamo che in questa variazione compare la variazione $\delta\Gamma$: il simbolo di Christoffel non è un tensore, ma poichè la sua variazione è definita da

$$\delta\Gamma = \Gamma' - \Gamma$$

il termine inomogeneo si elide e complessivamente $\delta\Gamma$ trasforma come un tensore. Poichè $R_{\mu\nu}$ è un tensore, la sua variazione resta un tensore, dunque tutti i termini

$$\partial_\nu \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda - \partial_\nu \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda + (\delta \Gamma_{\mu\lambda}^\tau) \Gamma_{\tau\nu}^\lambda + \Gamma_{\mu\lambda}^\tau (\delta \Gamma_{\tau\nu}^\lambda) - (\delta \Gamma_{\nu\lambda}^\tau) \Gamma_{\tau\mu}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\tau (\delta \Gamma_{\tau\mu}^\lambda)$$

Se consideriamo

$$\begin{aligned} \nabla_\lambda \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda &= \partial_\lambda \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \Gamma_{\lambda\mu}^\rho \delta \Gamma_{\rho\nu}^\lambda + \Gamma_{\lambda\nu}^\rho \delta \Gamma_{\mu\rho}^\lambda - \Gamma_{\lambda\rho}^\lambda \delta \Gamma_{\mu\nu}^\rho \\ \nabla_\nu \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda &= \partial_\nu \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda + \Gamma_{\nu\mu}^\rho \delta \Gamma_{\rho\lambda}^\lambda + \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \delta \Gamma_{\mu\rho}^\lambda - \Gamma_{\nu\rho}^\lambda \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\rho = \partial_\nu \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda + \Gamma_{\nu\mu}^\rho \delta \Gamma_{\rho\lambda}^\lambda \end{aligned}$$

vediamo che i vari termini di $\delta R_{\mu\nu}$ si riorganizzano in modo da formare un oggetto complessivamente tensoriale:

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\lambda \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \nabla_\nu \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda$$

Il termine aggiuntivo nella variazione allora si scrive come

$$\begin{aligned} \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\nabla_\lambda \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \nabla_\nu \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda) &= \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\lambda \underbrace{(g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - g^{\mu\nu} \delta_\nu^\lambda \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda)}_{\equiv v^\lambda} = \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\lambda v^\lambda \end{aligned}$$

ovvero corrisponde all'integrale sulla forma volume della quadridivergenza covariante di un vettore. Possiamo dimostrare la seguente identità:

$$\begin{aligned} \nabla_\mu J^\mu &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} J^\mu) \\ \nabla_\mu J^\mu &= \partial_\mu J^\mu + \Gamma_{\mu\rho}^\mu J^\rho = \partial_\mu J^\mu + \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} (\partial_\mu g_{\alpha\rho} + \partial_\rho g_{\mu\alpha} - \partial_\alpha g_{\mu\rho}) J^\rho \end{aligned}$$

Il primo e il terzo termine tra parentesi costituiscono un termine complessivamente antisimmetrico nello scambio $\mu - \alpha$, che saturato con $g^{\mu\alpha}$ non dà contributo, dunque

$$\nabla_\mu J^\mu = \partial_\mu J^\mu + \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} (\partial_\rho g_{\mu\alpha}) J^\rho = \partial_\mu J^\mu + \frac{1}{g} \frac{g}{2} g^{\mu\alpha} (\partial_\rho g_{\mu\alpha}) J^\rho$$

Raccogliendo $\frac{1}{\sqrt{-g}}$ abbiamo

$$\nabla_\mu J^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \left(\sqrt{-g} \partial_\mu J^\mu + \frac{1}{2\sqrt{-g}} g g^{\mu\alpha} (\partial_\rho g_{\mu\alpha}) J^\rho \right)$$

ma $\frac{1}{2\sqrt{-g}} g g^{\mu\alpha} (\partial_\rho g_{\mu\alpha}) = \partial_\rho \sqrt{-g}$ dunque

$$\nabla_\mu J^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\rho (\sqrt{-g} J^\rho)$$

Inserendo questo risultato nell'integrale

$$\int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\lambda v^\lambda = \int d^4x \partial_\lambda (\sqrt{-g} v^\lambda)$$

Per il teorema di Stokes l'ultimo integrale si può riscrivere come integrale di superficie del flusso del vettore $\sqrt{-g} v^\lambda$:

$$\int_\Sigma d\Sigma \sqrt{-g} n_\lambda v^\lambda$$

dove n^λ è il vettore normale alla ipersuperficie Σ che racchiude la varietà. La tentazione di concludere con "se i campi soddisfano opportune condizioni al contorno l'integrale dà contributo" è forte, ma sfortunatamente non è questo il caso.

3.3.2 Termini di bordo e curvatura estrinseca

Consideriamo di nuovo il termine

$$g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} (\nabla_\lambda \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \nabla^\alpha \delta \Gamma_{\alpha\lambda}^\lambda) =$$

Espandendo i Christoffel si ha

$$= \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\lambda (\delta(g^{\lambda\rho}) \Gamma_{\rho,\mu\nu} + g^{\lambda\rho} (\partial_\mu \delta g_{\rho\nu} + \partial_\nu \delta g_{\rho\mu} - \partial_\rho \delta g_{\mu\nu})) - \nabla^\alpha (g^{\lambda\rho} (\partial_\alpha \delta g_{\rho\lambda} + \partial_\lambda g_{\rho\alpha} - \partial_\rho \delta g_{\alpha\lambda}) + \delta g^{\lambda\rho} \Gamma_{\rho,\alpha\lambda}) =$$

Anche in questo caso i vari termini dovranno riorganizzarsi in oggetti tensoriali, in particolare si scopre che tutte le derivate della metrica e della sua variazione diventano derivate covarianti:

$$= \nabla^\rho g^{\mu\nu} (\nabla_\mu g_{\rho\nu} - \nabla_\rho \delta g_{\mu\nu})$$

Ancora una volta possiamo identificare questo risultato con la quadridivergenza covariante di una forma v_ρ :

$$v_\rho = g^{\mu\nu} (\nabla_\mu \delta g_{\rho\nu} - \nabla_\rho \delta g_{\mu\nu})$$

dunque l'integrale di volume può essere ridotto ad un integrale di superficie:

$$\int d^4x \nabla^\rho v_\rho = \int d^4x \partial^\rho (\sqrt{-g} v_\rho) = \int_\Sigma d\Sigma \sqrt{-g} n^\rho (g^{\mu\nu} (\nabla_\mu g_{\rho\nu} - \nabla_\rho \delta g_{\mu\nu}))$$

Introduciamo il proiettore in direzione parallela al bordo della varietà:

$$h^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \pm n^\mu n^\nu$$

dove il segno \pm dipende dal fatto che il vettore normale n^μ sia time-like o space-like. Osserviamo che nell'integrale possiamo sostituire $h^{\mu\nu}$ a $g^{\mu\nu}$, infatti:

$$\int d\Sigma \sqrt{-g} n^\rho n^\mu n^\nu (\nabla_\mu g_{\rho\nu} - \nabla_\rho \delta g_{\mu\nu}) = 0$$

poichè l'espressione tra parentesi è antisimmetrica nello scambio $\rho - \mu$. L'integrale iniziale si riscrive infine

$$\int d\Sigma \sqrt{-g} n^\rho h^{\mu\nu} (\nabla_\mu g_{\rho\nu} - \nabla_\rho \delta g_{\mu\nu})$$

Il principio variazionale impone che le variazioni $\delta g_{\mu\nu}$ siano nulle sul bordo: in particolare, la derivata covariante di $\delta g_{\mu\nu}$ sarà necessariamente nulla muovendosi sul bordo della varietà. Le espressioni

$$\nabla_{\parallel}^\mu = h^{\mu\nu} \nabla_\nu$$

$$\nabla_{\perp} = n^\rho \nabla_\rho$$

non sono altro che le derivate covarianti in direzione parallela e perpendicolare al bordo, dunque l'integrale si riscrive

$$\int d\Sigma \sqrt{-g} (n^\rho \nabla_{\parallel}^\rho \delta g_{\rho\nu} - \nabla_{\perp} \delta g_{\mu\nu})$$

Avremo $\nabla_{\parallel} \delta g_{\mu\nu} = 0$ ma in generale $\nabla_{\perp} \delta g_{\mu\nu}$ sarà diverso da zero perchè su di esso il principio variazionale non pone vincoli: soltanto opportune condizioni al contorno per la variazione $\delta g_{\mu\nu}$ potrebbero portare l'integrale ad annullarsi, ma si può mostrare che queste porterebbero a comportamenti non fisici; in definitiva l'azione di Hilbert è inconsistente con le equazioni di Einstein. Questo problema fu scoperto e risolto 50 anni dopo da alcuni fisici, che risolsero il problema aggiungendo all'azione un termine di bordo

$$S_E = \int_M d^4x \sqrt{-g} R + 2 \int_{\partial M} d\Sigma h_a{}^b \nabla_b n^a$$

che prende il nome di *curvatura estrinseca*.

3.3.3 Il limite classico

Le corrette equazioni di Einstein derivano quindi dall'azione

$$S = \frac{1}{k} \int_M d^4x \sqrt{-g} R + 2 \int_{\partial M} d\Sigma h_a{}^b (\nabla_b \eta^a)$$

Per adesso trascureremo il termine di curvatura estrinseca, e determineremo la costante k che compare nell'equazione di Einstein:

$$G^{\mu\nu} = kT^{\mu\nu}$$

Consideriamo una distribuzione di materia ρ , che si muova con una certa quadrivelocità u^μ : l'unico tensore energia impulso che possiamo costruire è

$$T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu$$

Nel limite non relativistico $u^0 \rightarrow c$ e $u^i \ll c$, dunque tra le componenti di $T^{\mu\nu}$ quella che domina è $T^{00} = \rho c^2$. Per alzare ed abbassare gli indici, ad esempio per scrivere l'elemento $T^0{}_0$, dovremmo in linea di principio utilizzare la metrica $g_{\mu\nu}$:

$$T^0{}_0 = g_{0\mu} T^{0\mu}$$

Ma per piccole velocità, le correzioni alla metrica piatta sono di ordine $\frac{1}{c^2}$ o superiore, dunque possiamo confondere $g_{0\mu}$ con $\eta_{0\mu}$ e ottenere $T^0{}_0 \sim \rho c^2$. L'equazione di Einstein si scrive allora

$$R^\mu{}_\nu - \frac{1}{2} \delta^\mu_\nu R = kT^\mu{}_\nu$$

Per isolare il tensore di Riemann prendiamo la traccia di questa espressione:

$$R - \frac{4}{2} R = kT \Rightarrow R = -kT$$

Allora

$$R^\mu{}_\nu = kT^\mu{}_\nu - \frac{1}{2} \delta^\mu_\nu T$$

Abbiamo già discusso che la componente dominante del tensore energia-impulso è $T^0{}_0$, dunque la componente importante di questa equazione sarà la ${}^0{}_0$:

$$R^0{}_0 = k \left(T^0{}_0 - \frac{1}{2} T \right)$$

Anche la traccia sarà dominata dalla componente ${}^0{}_0$, dunque

$$R^0{}_0 = \frac{k}{2} T^0{}_0 = \frac{k}{2} \rho c^2$$

La componente R_{00} del Ricci si ottiene come

$$\begin{aligned} R^\lambda{}_{\mu,\alpha\beta} &= \partial_\alpha \Gamma^\lambda_{\mu\beta} - \partial_\beta \Gamma^\lambda_{\mu\alpha} + O(\Gamma^2) \\ \Rightarrow R^\lambda{}_{\mu,\lambda\beta} &= \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{\mu\beta} - \partial_\beta \Gamma^\lambda_{\mu\lambda} + O(\Gamma^2) \\ \Rightarrow R_{00} &= \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{00} - \partial_0 \Gamma^\lambda_{0\lambda} + O(\Gamma^2) \end{aligned}$$

dove i termini del tipo $\Gamma\Gamma$ possono essere trascurati perchè di ordine superiore, e per alzare un indice a R_{00} è sufficiente la metrica di Minkowski perchè i termini $\partial\Gamma$ sono già del prim'ordine. Nel limite non relativistico ci aspettiamo soluzioni statiche, dunque scompare anche il termine di derivata temporale e otteniamo:

$$R^0{}_0 = \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{00} = \partial_\lambda g^{\lambda\alpha} (\partial_0 g_{\alpha 0} + \partial_0 g_{\alpha 0} - \partial_\alpha g_{00}) = -\frac{1}{2} \partial_\lambda (g^{\lambda\alpha} \partial_\alpha g_{00}) \sim -\frac{1}{2} \partial_\lambda (\eta^{\lambda\alpha} \partial_\alpha g_{00})$$

$$\Rightarrow R^0_{\ 0} = -\frac{1}{2}\square g_{00}$$

ovvero, ricordando che $g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2}$:

$$R^0_{\ 0} = -\frac{1}{c^2}\square\phi \sim \frac{1}{c^2}\Delta\phi$$

Rimettendo il risultato nell'equazione di Einstein:

$$\frac{\Delta\phi}{c^2} = \frac{k}{2}\rho c^2 \Rightarrow \Delta\phi = \frac{k}{2}\rho c^4$$

e questa equazione va confrontata con l'equazione classica

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho$$

da cui abbiamo

$$k = \frac{8\pi G}{c^4}$$

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

3.3.4 Il tensore energia-impulso della materia

Un punto ancora oscuro riguarda la scelta del tensore energia-impulso da usare nei vari casi, ovvero le modalità con cui la materia si accoppia alla gravità. Possiamo scrivere una azione per la materia come

$$S_{mat} = \int d^4x \mathcal{L}_{mat}(\Phi, g_{\mu\nu})$$

dove $\mathcal{L}_{mat}(\Phi, g_{\mu\nu})$ non è uno scalare bensì una densità tensoriale, ovvero può essere sempre scritta come $\sqrt{-g}$ volte uno scalare. La dipendenza dalla metrica della lagrangiana di materia è fondamentale per avere un accoppiamento con il campo gravitazionale: infatti se l'azione totale è

$$S = \frac{1}{\tilde{k}} \int d^4x R \sqrt{-g} + \int d^4x \mathcal{L}_{mat}(\Phi, g_{\mu\nu})$$

le equazioni di Einstein dovranno derivare dalla sua variazione rispetto a $g^{\mu\nu}$. Il primo termine darà luogo al tensore di Einstein, il secondo:

$$\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{\tilde{k}} \int d^4x \sqrt{-g} G_{\mu\nu} + \int d^4x \frac{\delta \mathcal{L}_{mat}}{\delta g^{\mu\nu}}$$

dunque

$$\frac{1}{\tilde{k}} \sqrt{-g} G_{\mu\nu} + \frac{\delta \mathcal{L}_{mat}}{\delta g^{\mu\nu}} = 0$$

da cui otteniamo

$$G_{\mu\nu} = -\frac{\tilde{k}}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{L}_{mat}}{\delta g^{\mu\nu}}$$

Definiremo allora il tensore energia-impulso come

$$T_{\mu\nu} \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \mathcal{L}_{mat}}{\partial g^{\mu\nu}}$$

In questo modo l'equazione di Einstein è

$$G_{\mu\nu} = \frac{\tilde{k}}{2} T_{\mu\nu}$$

da cui $\tilde{k} = 2k = \frac{16\pi G}{c^4}$.

Osservazione: in realtà abbiamo commesso un lieve abuso di notazione perchè le derivate funzionali di solito si prendono delle azioni e non delle lagrangiane.

L'azione del campo gravitazionale libero è quindi

$$S_0 = \frac{c^4}{16\pi G} \int d^4x R \sqrt{-g}$$

Con questa definizione, il tensore energia-impulso della materia sarà sempre e inesorabilmente simmetrico.

L'azione della materia dovrà essere invariante sotto diffeomorfismi, ovvero sotto trasformazioni di coordinate del tipo

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu(x)$$

Se la trasformazione è infinitesima

$$x'^\mu = x^\mu + \epsilon \xi^\mu(x)$$

la variazione corrispondente della metrica è

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(x) &= g'_{\alpha\beta}(x') \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} \\ \Rightarrow g_{\mu\nu}(x) &= g'_{\alpha\beta}(x + \xi\epsilon) (\delta_\mu^\alpha + \epsilon \partial_\mu \xi^\alpha) (\delta_\nu^\beta + \epsilon \partial_\nu \xi^\beta) = \end{aligned}$$

Espandendo la metrica all'ordine ϵ si ha

$$\begin{aligned} &= \epsilon (\xi^\rho \partial_\rho g'_{\alpha\beta}(x) + g'_{\alpha\beta}(x)) (\delta_\mu^\alpha + \epsilon \partial_\mu \xi^\alpha) (\delta_\nu^\beta + \epsilon \partial_\nu \xi^\beta) = \\ &= g'_{\mu\nu}(x) + \epsilon (\xi^\rho \partial_\rho g'_{\alpha\beta}(x) + g'_{\mu\beta}(x) \partial_\nu \xi^\beta + g'_{\alpha\nu}(x) \partial_\mu \xi^\alpha) + O(\epsilon^2) \end{aligned}$$

Questo significa che sotto diffeomorfismi infinitesimi la variazione in forma della metrica ha la forma

$$\delta g_{\mu\nu} = (g - g')_{\mu\nu}(x) = \epsilon (\xi^\rho \partial_\rho g'_{\alpha\beta}(x) + g'_{\mu\beta}(x) \partial_\nu \xi^\beta + g'_{\alpha\nu}(x) \partial_\mu \xi^\alpha)$$

Se avessimo voluto considerare $(g' - g)(x)$ anzichè $(g - g')(x)$, a livello infinitesimo è sufficiente cambiare segno all'espressione, dunque

$$\delta g_{\mu\nu} = (g - g')_{\mu\nu}(x) \rightarrow \delta g_{\mu\nu} = (g' - g)_{\mu\nu}(x) = \epsilon (\xi^\rho \partial_\rho g'_{\alpha\beta}(x) + g'_{\mu\beta}(x) \partial_\nu \xi^\beta + g'_{\alpha\nu}(x) \partial_\mu \xi^\alpha)$$

Infatti se $x' = x + \epsilon \xi(x)$, $x = x' - \epsilon \xi(x' - \epsilon \xi)$, ovvero all'ordine lineare in ϵ

$$x = x' - \epsilon \xi(x) + O(\epsilon^2)$$

L'espressione appena trovata per la variazione del tensore $g_{\mu\nu}$ non ha apparentemente una forma tensoriale, ma si può mostrare che può essere riscritta come

$$\delta g_{\mu\nu} = -\epsilon (\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu)$$

Infatti

$$\begin{aligned} \delta g_{\mu\nu} &= -\epsilon (\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu) = -\epsilon (\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu - 2\Gamma_{\mu\nu}^\alpha \xi_\alpha) = \\ &= -\epsilon (\xi^\alpha \partial_\mu g_{\nu\alpha} + g_{\nu\alpha} \partial_\mu \xi^\alpha + \xi^\alpha \partial_\nu g_{\mu\alpha} + g_{\mu\alpha} \partial_\nu \xi^\alpha - \xi_\alpha g^{\alpha\rho} (\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu})) = \\ &= -\epsilon (\xi^\rho \partial_\rho g_{\mu\nu} + g_{\nu\alpha} \partial_\mu \xi^\alpha + g_{\mu\alpha} \partial_\nu \xi^\alpha) \end{aligned}$$

Poichè la fisica non deve dipendere dalle coordinate scelte, richiederemo che l'azione totale sia invariante sotto diffeomorfismi. In particolare, la variazione del termine libero dovrà annullarsi indipendente dalla presenza o meno della materia:

$$\delta g_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \delta g^{\alpha\beta}$$

$$\begin{aligned}\delta S_0 &= \frac{1}{\tilde{k}} \int d^4x \frac{\partial \sqrt{-g} R}{\partial g^{\mu\nu}} = \frac{1}{\tilde{k}} \int d^4x \sqrt{-g} G_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} = \frac{-2\epsilon}{\tilde{k}} \int d^4x \sqrt{-g} G_{\mu\nu} \nabla^\mu \xi^\nu = \\ &= \frac{-2\epsilon}{\tilde{k}} \int d^4x \sqrt{-g} \left(\nabla_\mu (G^{\mu\nu} \xi_\nu) - (\nabla_\mu G^{\mu\nu}) \xi_\nu \right) =\end{aligned}$$

La divergenza totale non dà contributo nel caso di opportune condizioni al contorno su $G^{\mu\nu} \xi_\nu$, e rimaniamo con

$$= \frac{-2\epsilon}{\tilde{k}} \int d^4x \sqrt{-g} ((\nabla_\mu G^{\mu\nu}) \xi_\nu)$$

Poichè ξ_ν è arbitrario, l'integrando si deve annullare identicamente affinché l'azione sia invariante sotto diffeomorfismi: questo implica che la divergenza covariante del tensore di Einstein deve essere identicamente nulla calcolata *su qualsiasi metrica*:

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$$

Questa proprietà in realtà è assicurata dalla seconda identità di Bianchi, in altre parole la geometria garantisce l'invarianza sotto diffeomorfismi del termine di azione libera. Vediamo adesso cosa succede derivando la lagrangiana della materia rispetto a $g_{\mu\nu}$:

$$\int d^4x \left(2\epsilon \frac{\delta \mathcal{L}_{mat}}{\delta g^{\mu\nu}} \nabla^\mu \xi^\nu \right) + \frac{\delta S}{\delta \Phi^i} \delta \Phi^i$$

I campi Φ^i e $g_{\mu\nu}$ sono indipendenti, dunque lo saranno anche le rispettive equazioni del moto. L'annullarsi della variazione $\frac{\delta S}{\delta \Phi^i} \delta \Phi^i$ dà luogo alle equazioni del moto dei campi di materia, dunque se i campi sono on shell tale termine è identicamente nullo e dobbiamo considerare soltanto

$$\int d^4x \sqrt{-g} \left(\epsilon \underbrace{\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{L}_{mat}}{\delta g^{\mu\nu}}}_{T^{\mu\nu}} \nabla^\mu \xi^\nu \right) = \epsilon \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\mu (T^{\mu\nu} \xi_\nu) - (\nabla_\mu T^{\mu\nu}) \xi_\nu$$

Ancora una volta il primo termine è una divergenza totale di un vettore e non dà contributo, dunque dobbiamo richiedere soltanto l'annullarsi del secondo termine:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

ovvero dobbiamo richiedere la conservazione covariante del tensore energia-impulso della materia.

3.3.5 L'accoppiamento minimale

Una volta stabilite tutte le proprietà che deve possedere la lagrangiana della materia, dobbiamo solo fornire delle regole per scriverla in forma esplicita: questo set di prescrizioni vanno sotto il nome di *accoppiamento minimale* alla gravità. Partiamo dalla lagrangiana della relatività speciale: una volta scelti i campi fondamentali si ha

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\eta^{\mu\nu}, \Phi^i, \partial_\mu \Phi^i)$$

La promozione ad una lagrangiana in relatività generale procede in questo modo:

$$\begin{aligned}d^4x &\rightarrow \sqrt{-g} d^4x \\ \eta^{\mu\nu} &\rightarrow g^{\mu\nu} \\ \partial_\mu \Phi^i &\rightarrow \nabla_\mu \Phi^i\end{aligned}$$

Applicazione: il campo elettromagnetico

L'azione del campo elettromagnetico è

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

Prenderemo A_μ come campo fondamentale, in questo modo l'azione si riscrive come

$$S = -\frac{1}{16\pi} \int d^4x \eta^{\alpha\mu} \eta^{\beta\nu} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}$$

dove

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

dovrebbe in linea di principio venire mandato in

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$$

Poichè siamo a torsione nulla il simbolo di Christoffel è simmetrico e tale procedimento è in realtà un'identità. In altre parole, se siamo a torsione nulla la derivata esterna di una p-forma:

$$dF = \partial_\lambda F_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^\lambda \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}$$

può essere equivalentemente scritta sostituendo ∇_λ a ∂_λ , grazie alla totale antisimmetria degli indici e della simmetria dei Christoffel. Si ha dunque

$$g^{\alpha\rho} g^{\beta\sigma} F_{\alpha\beta} F_{\rho\sigma} = F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \equiv F^2$$

e l'azione diventa

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

e rappresenta l'accoppiamento dell'elettromagnetismo alla gravità. Vediamo se questa azione dà luogo al tensore energia-impulso corretto:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} \\ &= -\frac{1}{16\pi} \frac{2}{\sqrt{-g}} \left[2\sqrt{-g} (F_{\mu\sigma} F_\nu^\sigma) + \frac{1}{2\sqrt{-g}} g g_{\mu\nu} F^2 \right] = \\ &= -\frac{1}{16\pi} \frac{4}{\sqrt{-g}} \left[\sqrt{-g} F_{\mu\sigma} F_\nu^\sigma - \frac{\sqrt{-g}}{4} g_{\mu\nu} F^2 \right] = -\frac{1}{4\pi} \left[F_{\mu\sigma} F_\nu^\sigma - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F^2 \right] \end{aligned}$$

che coincide con il tensore energia-impulso della relatività ristretta se $g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$: la relatività ci ha dunque fornito senza grossi sforzi un tensore energia-impulso simmetrico e gauge-invariante.

Applicazione: il campo scalare

L'azione per un campo scalare è

$$S = \int d^4x \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \Rightarrow S = \int d^4x \sqrt{-g} g^{\alpha\mu} \nabla_\mu \phi \nabla_\alpha \phi$$

Poichè il campo scalare ϕ non ha indici, la sua derivata covariante anche stavolta coincide con la derivata usuale. É possibile mostrare che variando rispetto a $g^{\mu\nu}$ si ottiene

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi$$

Applicazione: la particella libera

L'azione della particella libera è

$$S = -mc \int d\tau \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}$$

dove $\dot{x}^\nu = \frac{dx^\nu}{d\tau}$. È conveniente riscriverla come

$$S = -mc \int d^4y \sqrt{-g} \frac{1}{\sqrt{-g}} \sqrt{g_{\mu\nu}(y) \frac{dy^\mu}{d\tau} \frac{dy^\nu}{d\tau}} \delta^4(x - y)$$

Dopo questo trucco l'oggetto $\sqrt{g_{\mu\nu}(y) \frac{dy^\mu}{d\tau} \frac{dy^\nu}{d\tau}} \delta^4(x - y)$ rappresenta la densità di lagrangiana della particella libera, e il tensore energia-impulso si ottiene come

$$T_{\mu\nu} = -mc \frac{2}{\sqrt{-g}} \int d\tau \frac{\dot{x}_\mu \dot{x}_\nu}{2\sqrt{g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta}} \delta^4(x - y)$$

Se scegliamo come parametro il tempo proprio, la radice $\sqrt{g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta}$ è una costante che possiamo scegliere uguale ad 1, dunque

$$T_{\mu\nu}^{(\tau)} = -mc \frac{1}{\sqrt{-g}} \int d\tau \dot{x}_\mu \dot{x}_\nu \delta^4(x - y)$$

Cenni di idrodinamica relativistica

Tutti i casi che abbiamo considerato prevedono una lagrangiana fondamentale e l'accoppiamento con la gravità è immediato: questa procedura prende anche il nome di *covariantizzazione dell'azione*. Questa automaticamente rispetta il principio di equivalenza: poichè in ogni punto possiamo scegliere un set di coordinate normali, la metrica diventa piatta e la lagrangiana torna ad essere quella classica, ovvero la fisica è ben descritta localmente dalle leggi della relatività speciale. Esistono però dei casi in cui questa procedura va raffinata, ad esempio in problemi di astrofisica dove si studia l'evoluzione di sistemi complessi come le stelle: in tal caso non si considerano i tensori energia-impulso delle singole particella ma si usano dei tensori energia-impulso effettivi. Supponiamo infatti di voler scrivere il tensore energia-impulso di un fluido ideale, ovvero un fluido che si muove con un unico quadrivettore velocità u^α in ogni suo punto e che appare isotropo ad un osservatore che si muova in maniera solidale col fluido, cioè le sue proprietà non dipendono dalla direzione di osservazione. Se il sistema è isotropo, nel limite non relativistico le componenti T^{0i} del tensore energia-impulso si devono annullare identicamente, dato che corrispondono alla densità di quantità di moto o equivalentemente al flusso di energia. In questo limite la componente T^{00} è non nulla e come sappiamo vale ρc^2 , mentre le componenti T^{ij} saranno espresse in termini della δ^{ij} di Kronecker, l'unico tensore a due indici, simmetrico e invariante sotto rotazioni:

$$\begin{aligned} T^{00} &= \rho c^2 \\ T^{ij} &= \delta^{ij} P \end{aligned}$$

dove P è la pressione. Per generalizzare ad un qualsiasi sistema di riferimento inerziale e lorentziano, possiamo prendere il seguente tensore energia-impulso:

$$T^{\mu\nu} = (\rho + P) u^\mu u^\nu - \eta^{\mu\nu} P \quad (c = 1)$$

Infatti, a riposo abbiamo $u^\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dunque

$$\begin{aligned} T^{00} &= \rho + P - P = \rho \\ T^{0i} &= 0 \end{aligned}$$

$$T^{ij} = -\eta^{ij} P = \delta^{ij} P$$

Il $T^{\mu\nu}$ così costruito descrive un fluido in relatività speciale. In relatività generale dobbiamo considerare anche le altre equazioni necessarie alla descrizione di un fluido, ovvero:

1. $T^{\mu\nu} = (\rho + P) u^\mu u^\nu - g^{\mu\nu} P$;
2. $J^\nu = N u^\nu$ e $\nabla_\nu J^\nu = 0$, dove N è la densità di particelle e J^ν è la corrente che ne descrive il flusso. Queste equazioni descrivono la conservazione del numero di particelle in un fluido.
3. $\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$, che descrive la conservazione del tensore energia-impulso.
4. $T d\sigma = P d\left(\frac{1}{n}\right) + d\left(\frac{P}{n}\right)$, ovvero il primo principio della termodinamica, dove $d\sigma$ è la densità di entropia.
5. Infine, dobbiamo dare l'equazione di stato.

Per un fluido perfetto si trova che $u^\alpha \nabla_\alpha \sigma = 0$, ovvero la entropia non varia lungo la traiettoria. Per una stella, ovvero un corpo a simmetria sferica, ci serviranno le leggi 1) e 2). Se abbiamo un fluido non perfetto il suo tensore energia-impulso si scrive

$$T^{\mu\nu} = (\rho + P) u^\mu u^\nu - g^{\mu\nu} P + \Delta T^{\mu\nu}$$

dove $\Delta T^{\mu\nu}$ è una correzione, che invocando l'invarianza relativistica può essere parametrizzata in termini di alcune quantità come la viscosità.

3.4 Teoria linearizzata

Diversamente dall'elettromagnetismo, le equazioni della relatività generale sono non lineari: questo significa che una sorgente risentirà del suo stesso campo gravitazionale da essa creato. Il motivo di questa differenza è che mentre il fotone è scarico dal punto di vista della carica elettrica, l'analogo del fotone (il gravitone, o quanto di onda gravitazionale) porta esso stesso una "carica gravitazionale": nel caso del campo gravitazionale la carica è la massa, presente in qualsiasi oggetto in natura che trasporti energia.

Cercheremo allora di linearizzare le equazioni di Einstein, delineando le ipotesi sotto cui questa procedura ha senso: immagineremo di avere un background gravitazionale fissato $g_{\mu\nu}^B$ e di considerare le piccole fluttuazioni rispetto ad esso:

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^B + \epsilon h_{\mu\nu}$$

con la condizione

$$|h_{\mu\nu}| \ll 1$$

Quest'ultima condizione necessita della scelta di un particolare sistema di riferimento: anche se la metrica è adimensionale, infatti, non è detto che se le componenti di un tensore sono piccole in un sistema di riferimento lo siano anche in un altro. Il parametro ϵ che abbiamo inserito non ha alcuna utilità pratica se non quello di contare l'ordine di approssimazione: la nostra teoria linearizzata corrisponderà infatti all'ordine lineare in ϵ .

Vediamo qual'è l'espressione delle altre grandezze geometriche, ad esempio l'inverso della metrica:

$$g^{\mu\nu} = g_B^{\mu\nu} + \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon^k H_{(k)}^{\mu\nu}$$

dove $g_B^{\mu\nu}$ è l'inverso di $g_{\mu\nu}^B$. Per determinare i coefficienti $H_{(k)}^{\mu\nu}$ utilizziamo la relazione $g_{\alpha\beta} g^{\beta\nu} = \delta_\alpha^\nu$:

$$\delta_\nu^\alpha (g_{\mu\nu}^B + \epsilon h_{\mu\nu}) \left(g_B^{\mu\alpha} + \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon^k H_{(k)}^{\mu\alpha} \right) =$$

Quando i termini in gioco sono già del prim'ordine, per alzarne e abbassarne gli indici è sufficiente la metrica di background: si ha

$$= \delta_\nu^\alpha + \epsilon h_\nu^\alpha + \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon^k H_{\nu(k)}^\alpha + \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon^{k+1} h_{\mu\nu} H^{\mu\alpha}$$

Per il principio di identità dei polinomi, i singoli coefficienti delle potenze k -esime di ϵ si devono annullare: per $k = 1$ abbiamo

$$H_{\nu(1)}^\alpha + h_\nu^\alpha = 0 \Rightarrow H_{\nu(1)}^\alpha = -h_\nu^\alpha$$

Per $k = 2$:

$$H_{\nu(2)}^\alpha + h_{\mu\nu} H_{(1)}^{\mu\alpha} = 0 \Rightarrow H_{(2)}^{\alpha\nu} = -h_\mu^\nu H^{\mu\alpha} = h_\mu^\nu h^{\mu\alpha}$$

dunque

$$g^{\mu\nu} = g_B^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} \epsilon + \epsilon^2 h_\alpha^\mu h^{\alpha\nu} + O(\epsilon^3)$$

Adesso è il turno di $\sqrt{-g}$:

$$\det g_{\mu\nu} = \det (g_{\mu\nu}^B + h_{\mu\nu}) = \det (g_{\mu\nu}^B (\delta_\nu^\alpha + \epsilon h_\nu^\alpha)) = \det g_{\mu\alpha}^B \det (1 + \epsilon h) = \det g_{\mu\alpha}^B e^{Tr \log(1 + \epsilon h)} =$$

Per ϵ piccolo possiamo espandere il logaritmo, e in seguito l'esponenziale

$$\begin{aligned} &= \det g_{\mu\nu}^B \exp \left(\epsilon h_\mu^\mu - \frac{\epsilon^2}{2} h_\alpha^\mu h_\mu^\alpha + \dots \right) = \det g_{\mu\nu}^B \left(1 + \epsilon h_\mu^\mu - \frac{\epsilon^2}{2} h_\alpha^\mu h_\mu^\alpha + \frac{\epsilon^2}{2} (h_\mu^\mu)^2 + O(\epsilon^3) \right) = \\ &= \det g_{\mu\nu}^B \left(1 + \epsilon h_\mu^\mu + \frac{\epsilon^2}{2} \left((h_\mu^\mu)^2 - h_\alpha^\mu h_\mu^\alpha \right) + O(\epsilon^3) \right) \end{aligned}$$

É il turno dei simboli di Christoffel: consideriamo prima $\Gamma_{\alpha,\mu\nu} = g_{\alpha\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda$:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha,\mu\nu} &= \frac{1}{2} (\partial_\mu g_{\alpha\nu} + \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}) = \frac{1}{2} (\partial_\mu g_{\alpha\nu}^B + \partial_\nu g_{\alpha\mu}^B - \partial_\alpha g_{\mu\nu}^B) + \frac{1}{2} \epsilon (\partial_\mu h_{\alpha\nu} + \partial_\nu h_{\alpha\mu} - \partial_\alpha h_{\mu\nu}) = \\ &= \Gamma_{\alpha,\mu\nu}^B + \frac{1}{2} \epsilon (\partial_\mu h_{\alpha\nu} + \partial_\nu h_{\alpha\mu} - \partial_\alpha h_{\mu\nu}) \end{aligned}$$

Vogliamo sostituire le derivate ordinarie con derivate covarianti relative alla metrica di background, per far questo sommiamo e sottraiamo degli opportuni simboli di Christoffel di background:

$$\nabla_\mu^B = \partial_\mu + {}^B\Gamma_\mu$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha,\mu\nu} &= \Gamma_{\alpha,\mu\nu}^B + \frac{\epsilon}{2} (\nabla_\mu h_{\alpha\nu} + \nabla_\nu h_{\alpha\mu} - \nabla_\alpha h_{\mu\nu}) + \frac{\epsilon}{2} ({}^B\Gamma_{\mu\alpha}^\lambda h_{\lambda\nu} + 2{}^B\Gamma_{\mu\nu}^\lambda h_{\alpha\lambda} + {}^B\Gamma_{\nu\alpha}^\lambda h_{\lambda\mu} - {}^B\Gamma_{\alpha\mu}^\lambda h_{\lambda\nu} - {}^B\Gamma_{\alpha\nu}^\lambda h_{\lambda\mu}) = \\ &= \Gamma_{\alpha,\mu\nu}^B + \frac{\epsilon}{2} (\nabla_\mu h_{\alpha\nu} + \nabla_\nu h_{\alpha\mu} - \nabla_\alpha h_{\mu\nu}) + \frac{\epsilon}{2} (2{}^B\Gamma_{\mu\nu}^\lambda h_{\alpha\lambda}) \end{aligned}$$

Allora

$$\Gamma_{\alpha,\mu\nu} = \Gamma_{\alpha,\mu\nu}^B + \frac{\epsilon}{2} (\nabla_\mu^B h_{\alpha\nu} + \nabla_\nu^B h_{\alpha\mu} - \nabla_\alpha^B h_{\mu\nu}) + \epsilon h_{\alpha\lambda} {}^B\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$$

Poichè $\Gamma_{\alpha,\mu\nu}$ è il simbolo di Christoffel esatto, il suo indice è stato abbassato con la metrica esatta, dunque

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^\rho &= g^{\rho\alpha} \Gamma_{\alpha,\mu\nu} = (g_B^{\rho\alpha} - \epsilon h^{\rho\alpha}) \Gamma_{\alpha,\mu\nu} = {}^B\Gamma_{\mu\nu}^\rho - \epsilon h_\lambda^\rho {}^B\Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \epsilon h^{\rho\alpha} {}^B\Gamma_{\alpha,\mu\nu} + \frac{\epsilon}{2} (\nabla_\mu h_\nu^\rho + \nabla_\nu h_\mu^\rho - \nabla^\rho h_{\mu\nu}) = \\ &= {}^B\Gamma_{\mu\nu}^\rho + \frac{\epsilon}{2} (\nabla_\mu h_\nu^\rho + \nabla_\nu h_\mu^\rho - \nabla^\rho h_{\mu\nu}) \end{aligned}$$

ovvero la differenza

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho - {}^B\Gamma_{\mu\nu}^\rho$$

è espressa in termini di una quantità tensoriale:

$$\Lambda_{\mu\nu}^\rho = \nabla_\mu h_\nu^\rho + \nabla_\nu h_\mu^\rho - \nabla^\rho h_{\mu\nu}$$

come del resto ci aspettavamo sapendo che la differenza tra due simboli di Christoffel trasforma come un tensore.

Per quanto riguarda il tensore di Riemann:

$$R^\lambda{}_{\alpha,\mu\nu} = \partial_\mu \gamma_{\alpha\nu}^\lambda - \partial_\nu \gamma_{\alpha\mu}^\lambda + \Gamma_{\mu\beta}^\lambda \Gamma_{\alpha\nu}^\beta - \Gamma_{\nu\beta}^\lambda \Gamma_{\alpha\mu}^\beta$$

Poichè R è un tensore, tutto si deve riorganizzare in maniera da avere

$$R^\lambda{}_{\alpha,\mu\nu} = {}^B R^\lambda{}_{\alpha,\mu\nu} + \frac{\epsilon}{2} ({}^B \nabla_\mu \Lambda_{\alpha\nu}^\lambda - {}^B \nabla_\nu \Lambda_{\alpha\mu}^\lambda)$$

A questo punto, scrivere l'equazione di Einstein rispetto ad un background qualsiasi è immediato:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = k T_{\mu\nu}$$

$$\Rightarrow R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}^B - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}^B R^B + \frac{\epsilon}{2} (\nabla_\lambda \Lambda_{\mu\nu}^\lambda - \nabla_\nu \Lambda_{\lambda\mu}^\lambda) - \frac{\epsilon}{2} h_{\mu\nu} R^B - \frac{\epsilon}{2} g_{\mu\nu}^B g_B^{\alpha\beta} (\nabla_\rho \Lambda_{\alpha\beta}^\rho - \nabla_\alpha \Lambda_{\beta\rho}^\rho)$$

Il tensore energia-impulso a secondo membro va valutato fino all'ordine ϵ , perchè è proprio lui che provoca la fluttuazione rispetto al background; più precisamente, dovremo scrivere

$$k T_{\mu\nu} = k T_{\mu\nu}^B + \epsilon k \hat{T}_{\mu\nu}$$

Le equazioni di Einstein si spezzano quindi in due set, dove il set di ordine zero pone un vincolo sulla metrica di background, che soddisferà le equazioni del moto con il tensore energia-impulso di background. La versione linearizzata delle equazioni di Einstein può essere scritta sviluppando rispetto a un qualsiasi background, a patto che risolva le equazioni con un certo background; di solito come background si sceglie il vuoto, perciò $T^{\mu\nu} = 0$ e il sistema avrà energia ed impulso nulli.

Consideriamo il caso in cui la metrica di background è quella di Minkowski; poichè la metrica è piatta i Christoffel sono tutti nulli, e le derivate covarianti tornano ad essere derivate ordinarie:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (\partial_\rho (\partial_\mu h_\nu^\rho + \partial_\nu h_\mu^\rho - \partial^\rho h_{\mu\nu})) - \partial_\nu (\partial_\mu h_\rho^\rho + \partial_\rho h_\mu^\rho - \partial_\rho h_\mu^\rho) - \\ & - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} (\partial_\rho (\partial_\alpha h_\beta^\rho + \partial_\beta h_\alpha^\rho - \partial^\rho h_{\alpha\beta})) - \partial_\beta (\partial_\alpha h_\rho^\rho + \partial_\rho h_\alpha^\rho - \partial_\rho h_\alpha^\rho) = k T_{\mu\nu} \end{aligned}$$

Dei termini si semplificano e rimaniamo con

$$\frac{1}{2} (\partial_\rho \partial_\mu h_\nu^\rho + \partial_\nu \partial_\rho h_\mu^\rho) - \frac{1}{2} \square h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \partial_\mu \partial_\nu h - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} (\partial_\rho \partial_\sigma h^{\rho\sigma} - \square h) = k \hat{T}_{\mu\nu}$$

Queste equazioni sono chiaramente invarianti sotto trasformazioni di Lorentz:

$$x^\mu \mapsto x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$$

infatti, corrispondentemente $h_{\mu\nu}$ trasforma come

$$h_{\mu\nu}(x) \mapsto h'_{\mu\nu}(x') = h_{\alpha\beta}(x) \Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\beta{}_\nu$$

Ma in origine le equazioni di Einstein erano invarianti sotto diffeomorfismi:

$$g_{\mu\nu}(x \mapsto x') = g'_{\mu\nu}(x') = g_{\alpha\beta}(x) \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}$$

Poichè lavoriamo all'ordine lineare, ci limitiamo a considerare la variazione indotta su $g_{\mu\nu}$ da una trasformazione infinitesima di coordinate:

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \epsilon \xi^\mu$$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \epsilon h_{\mu\nu}$$

$$\delta g_{\mu\nu} \equiv \delta h_{\mu\nu} = -\epsilon (\xi^\alpha \partial_\alpha g_{\mu\nu} + g_{\mu\alpha} \partial_\nu \xi^\alpha + g_{\nu\alpha} \partial_\mu \xi^\alpha) = -\epsilon (\eta_{\mu\alpha} \partial_\nu \xi^\alpha + \eta_{\nu\alpha} \partial_\mu \xi^\alpha) = -\epsilon (\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu)$$

dove abbiamo considerato solo i contributi di ordine ϵ . Per capire se questa trasformazione è effettivamente una simmetria dell'equazione di Einstein controlliamo come trasformano i Christoffel linearizzati

$$\delta \Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2} \delta \Lambda_{\alpha\beta}^\mu = \frac{\delta}{2} (\partial_\alpha h_\beta^\mu + \partial_\beta h_\alpha^\mu - \partial^\mu h_{\alpha\beta}) = \frac{1}{2} (\partial_\alpha (\partial_\beta x^\mu + \partial^\mu \xi_\beta) + \partial_\beta (\partial_\alpha x^\mu + \partial^\mu \xi_\alpha) - \partial_\mu (\partial_\alpha \xi_\beta + \partial_\beta \xi_\alpha)) = \partial_\alpha \partial_\beta \xi^\mu$$

Il Riemann linearizzato trasformerà di conseguenza come

$$R^\lambda{}_{\mu,\alpha\beta} = \partial_\alpha \Lambda_{\mu\beta}^\lambda - \partial_\beta \Lambda_{\mu\alpha}^\lambda \\ \Rightarrow \delta R^\lambda{}_{\mu,\alpha\beta} = \partial_\alpha \partial_\mu \partial_\beta \xi^\lambda - \partial_\beta \partial_\mu \partial_\alpha \xi^\lambda = 0$$

Il Riemann linearizzato (e quindi le equazioni di Einstein) è quindi invariante sotto variazioni infinitesime delle coordinate. In realtà, più in generale il Riemann è invariante sotto trasformazioni del tipo

$$\delta h_{\mu\nu} = \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu$$

indipendentemente dal fatto che queste siano o meno generate da un cambio di coordinate: questa simmetria è dello stesso tipo della simmetria di gauge dell'elettromagnetismo, invariante sotto la trasformazione $\delta A_\mu = \partial_\mu f$. Da questo punto vista le equazioni di Einstein linearizzate possono essere viste come equazioni per una particella massless di spin 2: per consistenza queste equazioni dovranno presentare una certa simmetria di gauge dovuta al fatto che la massa della particella propagantesi è nulla.

3.4.1 La gauge armonica

Il fatto di avere una simmetria di gauge implica che data una soluzione delle equazioni del moto possiamo trovarne un'altra completamente equivalente effettuando la trasformazione

$$h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu$$

Sfrutteremo questa simmetria per risolvere le equazioni di Einstein: il primo passo è quello di prendere come campo fondamentale il nuovo campo

$$H_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h$$

Osserviamo che $H_\mu^\mu = -h_\mu^\mu$. La relazione tra i due campi è invertibile e si ha

$$h_{\mu\nu} = H_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} H$$

In questo modo le equazioni di Einstein si riscrivono come

$$\partial_\mu \partial_\alpha H_\nu^\alpha + \partial_\nu \partial_\alpha H_\mu^\alpha - \square H_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha \partial_\beta H^{\alpha\beta} = \frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Sotto trasformazioni di gauge la variazione di $H_{\mu\nu}$ è

$$\delta H_{\mu\nu} = \delta h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} 2 \partial_\alpha \xi^\alpha = \delta h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha \xi^\alpha$$

Supponiamo di voler trovare un $H_{\mu\nu}$ tale da soddisfare alla condizione $\partial^\mu H_{\mu\nu} = 0$, questo equivale a determinare un campo $\xi_\mu(x)$ tale che

$$\square\xi_\nu = -\partial^\mu H_{\mu\nu}$$

Infatti

$$H'_{\mu\nu} = H_{\mu\nu} + \delta H_{\mu\nu} = H_{\mu\nu} + \partial_\mu\xi_\nu + \partial_\nu\xi_\mu - \eta_{\mu\nu}\partial_\alpha\xi^\alpha$$

Prendendo la divergenza di questa espressione otteniamo

$$\partial^\mu H'_{\mu\nu} = \partial^\mu H_{\mu\nu} + \delta\partial^\mu H_{\mu\nu} = \partial^\mu H_{\mu\nu} + \square\xi_\nu + \partial_\nu\partial^\mu\xi_\mu - \partial_\nu\partial_\alpha\xi^\alpha = \partial^\mu H_{\mu\nu} + \square\xi_\nu$$

da cui $\square\xi_\nu = -\partial^\mu H_{\mu\nu}$: tale equazione ammette sempre soluzione e con questa scelta di gauge, detta *gauge armonica*, le equazioni di Einstein diventano

$$\square H_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

ovvero assumono la forma di una equazione delle onde. Il nome della gauge deriva da questo fatto: se prendiamo le funzioni coordinate x^μ e imponiamo che il loro d'alambertiano covariante sia nullo

$$\nabla_\mu\nabla^\mu x^\lambda = 0$$

$$\Rightarrow \nabla_\mu\nabla^\mu x^\lambda = g^{\mu\nu}\nabla_\mu(\partial_\nu x^\lambda) = g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu x^\lambda - g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}^\lambda x^\lambda = -g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}^\lambda x^\lambda = 0$$

ovvero le coordinate sono funzioni armoniche se i simboli di Christoffel sono identicamente nulli, il che è verificato se $\eta_{\mu\nu}$ è la nostra metrica di background.

Imporre la gauge armonica non esaurisce la nostra arbitrarietà di gauge, infatti è ancora possibile effettuare trasformazioni di gauge a patto che il vettore ξ_μ soddisfi

$$\square\xi_\mu = 0$$

Ne caso di assenza di sorgenti l'equazione si riduce all'equazione di D'Alembert:

$$\square H^{\mu\nu} = 0$$

e abbiamo soluzioni non banali come nel caso delle onde elettromagnetiche: in trasformata di Fourier

$$H_{\mu\nu}(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{ipx} \epsilon_{\mu\nu}(p)$$

l'equazione diventa

$$p^2\epsilon_{\mu\nu}(p) = 0$$

ed è soddisfatta se $\epsilon_{\mu\nu}(p) = \hat{\epsilon}_{\mu\nu}(p)\delta(p^2)$: questo ci informa che le onde hanno impulso light-like, ed è un primo indizio del fatto che abbiamo a che fare con la propagazione di una particella massless. Abbiamo anche un altro vincolo, derivante dalla condizione di gauge:

$$p^\mu\epsilon_{\mu\nu} = 0$$

Poichè $\epsilon_{\mu\nu}$ è simmetrico questa condizione ci dice semplicemente che esso è trasverso all'impulso, esattamente come il vettore di polarizzazione del fotone: la presenza di un indice in più rispetto al caso elettromagnetico rispecchierà il fatto che la particella che si propaga ha spin 2.

3.4.2 Conteggio dei gradi di libertà

Con un primo conto brutale possiamo determinare quanti sono i gradi di libertà del nostro campo $H_{\mu\nu}$: una matrice 4×4 simmetrica ha $\frac{4 \cdot 5}{2} = 10$ gradi di libertà, 4 dei quali vengono eliminati dal vincolo di gauge $p^\mu \epsilon_{\mu\nu} = 0$. La gauge residua permette una trasformazione del tipo

$$\epsilon_{\mu\nu}(p) \rightarrow \epsilon_{\mu\nu}(p) + p_\mu \xi_\nu(p) + p_\nu \xi_\mu(p)$$

Una trasformazione di gauge residua è in grado di eliminare altri 4 gradi di libertà lasciandone soltanto 2. Questo non ci stupisce perchè una particella massless ammette soltanto 2 possibili valori dell'elicità, corrispondenti alle massime proiezioni dello spin in direzione parallela o antiparallela all'impulso. Per esplicitare il tensore di polarizzazione, costruiamo per prima cosa una base di vettori nello spazio di Minkowski in cui vive il quadrimpulso p^μ : possiamo sempre scegliere k^μ tale che

$$p \cdot k = 1 \quad ; \quad k^2 = 0$$

Ad esempio se $p^\mu = (1, 1, 0, 0)$, avremo $k^\mu = \frac{1}{2}(1, -1, 0, 0)$. Una volta che abbiamo questi due vettori, possiamo sempre scegliere altri due vettori di tipo spazio e di norma -1, tali che

$$k \cdot e_1 = k \cdot e_2 = p \cdot e_1 = p \cdot e_2 = e_1 \cdot e_2 = 0$$

$$e_1^2 = e_2^2 = -1$$

Ad esempio possiamo scegliere

$$e_1^\mu = (0, 0, 1, 0)$$

$$e_2^\mu = (0, 0, 0, 1)$$

Questi quattro vettori sono linearmente indipendenti e costituiscono una base $\{e_i^\mu\}$ per lo spazio di Minkowski: una base per le matrici 4×4 si ottiene allora come $\{e_i^\mu \otimes e_j^\nu\} \equiv e_i^\mu e_j^\nu$, e possiamo espandere su di essa $\epsilon_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\mu\nu} = & \rho_1 k_\mu k_\nu + \rho_2 p_\mu p_\nu + \rho_3 e_{1\mu} e_{1\nu} + \rho_4 e_{2\mu} e_{2\nu} + \rho_5 (p_\mu k_\nu + k_\mu p_\nu) + \rho_6 (k_\mu e_{1\nu} + k_\nu e_{1\mu}) + \rho_7 (k_\mu e_{2\nu} + k_\nu e_{2\mu}) + \\ & + \rho_8 (p_\mu e_{1\nu} + p_\nu e_{1\mu}) + \rho_9 (p_\mu e_{2\nu} + p_\nu e_{2\mu}) + \rho_{10} (e_{1\mu} e_{2\nu} + e_{1\nu} e_{2\mu}) \end{aligned}$$

Iniziamo con l'imporre la condizione di gauge $p^\mu \epsilon_{\mu\nu} = 0$: restano i termini

$$\rho_1 k_\nu + \rho_5 p_\nu + \rho_6 e_{1\nu} + \rho_7 e_{2\nu} = 0$$

Ma per costruzione, k , p , e_1 ed e_2 sono linearmente indipendenti, dunque l'unica possibilità affinché una loro combinazione lineare sia nulla è che siano nulli $\rho_1, \rho_5, \rho_6, \rho_7$. Allora

$$\epsilon_{\mu\nu} = \rho_2 p_\mu p_\nu + \rho_3 e_{1\mu} e_{1\nu} + \rho_4 e_{2\mu} e_{2\nu} + \rho_8 (p_\mu e_{1\nu} + p_\nu e_{1\mu}) + \rho_9 (p_\mu e_{2\nu} + p_\nu e_{2\mu}) + \rho_{10} (e_{1\mu} e_{2\nu} + e_{1\nu} e_{2\mu})$$

Riorganizziamo i termini:

$$\epsilon_{\mu\nu} = \rho_{10} (e_{1\mu} e_{2\nu} + e_{1\nu} e_{2\mu}) + \rho_3 e_{1\mu} e_{1\nu} + \rho_4 e_{2\mu} e_{2\nu} + p_\mu \left(\rho_8 e_{1\nu} + \frac{1}{2} \rho_2 p_\nu \right) + \rho_9 e_{2\nu} + p_\nu \left(\rho_8 e_{1\mu} + \rho_9 e_{2\mu} + \frac{1}{2} \rho_2 p_\mu \right)$$

Gli ultimi due termini possono essere eliminati mediante una trasformazione di gauge di questa forma:

$$\xi^\mu(x) = \xi^\mu(p) e^{ipx}$$

con $p^2 = 0$. Se scegliamo

$$\xi_\mu = i \left(\rho_8 e_{1\mu} + \rho_9 e_{2\mu} + \frac{1}{2} \rho_2 p_\mu \right)$$

i due termini in p_μ e p_ν si cancellano identicamente e rimaniamo con

$$\rho_{10} (e_{1\mu}e_{2\nu} + e_{2\mu}e_{1\nu}) + \rho_3 e_{1\mu}e_{1\nu} + \rho_4 e_{2\mu}e_{2\nu}$$

In linea di principio la variazione del campo $H_{\mu\nu}$ conterrebbe anche un termine $-\frac{1}{2}p^\lambda \xi_\lambda \eta_{\mu\nu}$, ma poichè ξ^μ ha prodotto scalare nullo con p^μ il termine aggiuntivo non dà contributo. Infine, se consideriamo la trasformazione

$$\xi_\mu = is k_\mu e^{ipx}$$

dove s è un parametro arbitrario, $H_{\mu\nu}$ subisce questa variazione:

$$\delta_\xi H_{\mu\nu} = is (k_\mu p_\nu + k_\nu p_\mu - \eta_{\mu\nu})$$

Ma

$$k_\mu p_\nu + k_\nu p_\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dunque

$$k_\mu p_\nu + k_\nu p_\mu - \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (e_{1\mu}e_{1\nu} + e_{2\mu}e_{2\nu})$$

Oppure, formalmente, si ha

$$\begin{aligned} p^\mu (k_\mu p_\nu + k_\nu p_\mu - \eta_{\mu\nu}) &= 0 \\ k^\mu (k_\mu p_\nu + k_\nu p_\mu - \eta_{\mu\nu}) &= 0 \\ e_1^\mu (k_\mu p_\nu + k_\nu p_\mu - \eta_{\mu\nu}) &= -e_{1\mu} = e_1^\mu \\ e_2^\mu (k_\mu p_\nu + k_\nu p_\mu - \eta_{\mu\nu}) &= -e_{2\mu} = e_2^\mu \end{aligned}$$

dunque k , p , e_1 e e_2 sono autovettori della matrice $k_\mu p_\nu + k_\nu p_\mu - \eta_{\mu\nu}$ con autovalori rispettivamente 0, 0, 1 e 1, e per il teorema di decomposizione spettrale possiamo scrivere

$$\delta_\xi H_{\mu\nu} = 1 \cdot (is (e_{1\mu}e_{1\nu} + e_{2\mu}e_{2\nu})) + 0 \cdot (is (k_\mu k_\nu + p_\mu p_\nu)) = is (e_{1\mu}e_{1\nu} + e_{2\mu}e_{2\nu})$$

Dunque con la trasformazione che abbiamo scritto possiamo alterare i due termini proporzionali a ρ_3 e ρ_4 : ad esempio possiamo scegliere s in modo che $\rho_4 = -\rho_3$, in questo modo

$$H_{\mu\nu} = A (e_{1\mu}e_{1\nu} - e_{2\mu}e_{2\nu}) + B (e_{1\mu}e_{2\nu} + e_{2\mu}e_{1\nu})$$

cioè, a meno di trasformazioni di gauge, l'onda gravitazionale può sempre essere portata in una forma dove è esplicita la dipendenza da soli due parametri. Osserviamo inoltre che in questa gauge la traccia di $H_{\mu\nu}$ è nulla, dunque $H_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$ e la gauge viene detta *gauge traceless transverse* (TT).

3.4.3 Emissione di onde gravitazionali e momento di quadrupolo

In presenza di sorgenti l'equazione di Einstein si scrive

$$\square H_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Una possibile funzione di Green per il d'alambertiano è la funzione di Green ritardata:

$$G(x - y) = -\frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{y}|} \delta(|\vec{x} - \vec{y}| - c(x^0 - y^0)) \theta(x^0 - y^0)$$

La struttura di questa funzione è la seguente: la funzione $\theta(x^0 - y^0)$ fa sì che soltanto gli istanti precedenti al tempo x^0 contribuiscano al campo nel punto \vec{x} , mentre la $\delta(|\vec{x} - \vec{y}| - c(x^0 - y^0))$ indica che una sorgente in \vec{y} si propaga con una velocità pari a c . La combinazione $|\vec{x} - \vec{y}| - ct$ si dice *tempo ritardato*, e la funzione G così definita genera i *potenziali di Lienard-Wiechert* dell'elettromagnetismo. Si ha

$$H_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} \int d^4y G(x - y) T_{\mu\nu}(y) = 4G \int \frac{T_{\mu\nu}(t - \frac{1}{c}|\vec{x} - \vec{y}|, \vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3y$$

dove abbiamo utilizzato la δ temporale per fissare il tempo ritardato, e posto $c = 1$. Introduciamo la trasformata di Fourier temporale:

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(\omega, \vec{x}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dt e^{i\omega t} \phi(t, \vec{x}) \\ \phi(t, \vec{x}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega e^{-i\omega t} \tilde{\phi}(\omega, \vec{x}) \end{aligned}$$

In questo modo

$$\tilde{H}_{\mu\nu}(\omega, \vec{x}) = \frac{4G}{\sqrt{2\pi}} \int dt \int d^3y e^{i\omega t} \frac{T_{\mu\nu}(t - \frac{1}{c}|\vec{x} - \vec{y}|, \vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3y$$

Come primo passo, fissiamo una traslazione temporale:

$$\begin{aligned} t &= t' + |\vec{x} - \vec{y}| \\ \Rightarrow \frac{4G}{\sqrt{2\pi}} \int dt' \int d^3y e^{i\omega|\vec{x} - \vec{y}|} e^{i\omega t'} \frac{T_{\mu\nu}(t', \vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} &= \frac{4G}{\sqrt{2\pi}} \int d^3y \frac{e^{i\omega|\vec{x} - \vec{y}|}}{|\vec{x} - \vec{y}|} \tilde{T}_{\mu\nu}(\omega, \vec{y}) \end{aligned}$$

Questo risultato è esatto. Se D è la scala dimensionale della sorgente, per $|\vec{x} - \vec{y}| \gg D$ si ha $\vec{x} - \vec{y} \sim \vec{R}$ e possiamo confondere $|\vec{x} - \vec{y}|$ con R nell'integrale

$$\tilde{H}_{\mu\nu}(\omega, \vec{x}) \sim \frac{4Ge^{i\omega R}}{R} \int d^3y \tilde{T}_{\mu\nu}(\omega, \vec{y})$$

Il problema si è ridotto al calcolo di 10 integrali, ma questo numero può essere ridotto sfruttando la condizione di gauge $\partial_\mu H^{\mu\nu} = 0$, garantita dal fatto che $T_{\mu\nu}$ è conservato: in trasformata di Fourier si ha

$$-i\omega \tilde{H}^{0\nu} + \partial_i \tilde{H}^{i\nu} = 0$$

Utilizzando la condizione di gauge anche sull'indice ν :

$$\begin{aligned} \partial_\nu \tilde{H}^{0\nu} = 0 &\Rightarrow -i\omega \tilde{H}^{00} + \partial_i \tilde{H}^{0i} \\ \partial_\nu \tilde{H}^{i\nu} = 0 &\Rightarrow -i\omega \tilde{H}^{i0} + \partial_j \tilde{H}^{ij} = 0 \end{aligned}$$

Poichè le componenti $\tilde{H}^{0\nu}$ possono essere determinate in funzione delle derivate delle componenti H^{ij} , ci concentreremo su queste ultime:

$$\begin{aligned} \tilde{H}^{ij} &= \frac{4Ge^{i\omega R}}{R} \int_{\mathbb{R}^3} d^3y \tilde{T}^{ij}(\omega, \vec{y}) = \\ &= \frac{4Ge^{i\omega R}}{R} \frac{1}{2} \left[\left(\int_{\mathbb{R}^3} d^3y \partial_k (y^i \tilde{T}^{ij}) - \int_{\mathbb{R}^3} d^3y y^i \partial_k \tilde{T}^{kj} \right) + \left(\int_{\mathbb{R}^3} d^3y \partial_k (y^j \tilde{T}^{ki}) - \int_{\mathbb{R}^3} d^3y y^j \partial_k \tilde{T}^{ki} \right) \right] = \end{aligned}$$

Se la sorgente occupa una regione limitata di spazio, per il teorema di Gauss-Green possiamo scambiare il primo integrale di volume con un integrale di superficie sul bordo del volume: all'infinito la sorgente è assente dunque rimaniamo con

$$= -\frac{4Ge^{i\omega R}}{R} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3y \left(y^i \partial_k \tilde{T}^{kj} + y^j \partial_k \tilde{T}^{ki} \right) =$$

Usando ancora la legge di conservazione del tensore energia-impulso abbiamo

$$-i\omega T^{0\nu} + \partial_i T^{i\nu} = 0$$

dunque

$$= -i\omega \frac{4Ge^{i\omega R}}{R} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3y \left(y^i \tilde{T}^{0j} + y^j \tilde{T}^{0i} \right)$$

Riapplicando lo stesso trucco:

$$\begin{aligned} & -i\omega \frac{2Ge^{i\omega R}}{R} \int_{\mathbb{R}^3} d^3y \partial_l \left(y^i y^j \tilde{T}^{0l} \right) - y^i y^j \partial_l \tilde{T}^{0l} = \\ & = i\omega \frac{2Ge^{i\omega R}}{R} \int_{\mathbb{R}^3} d^3y y^i y^j \partial_l \tilde{T}^{0l} = \end{aligned}$$

Riapplicando la legge di conservazione:

$$= -\omega^2 \frac{2Ge^{i\omega R}}{R} \int d^3y y^i y^j \tilde{T}^{00}$$

Per definizione

$$\tilde{Q}^{ij} = 3 \int d^3y y^i y^j \tilde{T}^{00}$$

è il quadrupolo del sistema, per cui

$$\begin{aligned} \tilde{H}^{ij}(\omega, \vec{x}) &= -\frac{2Ge^{i\omega R}}{3R} \omega^2 \tilde{Q}^{ij}(\omega) \\ \Rightarrow \tilde{H}^{ij}(\omega, \vec{x}) &= -\frac{2}{3} \omega^2 G \frac{e^{i\omega R}}{R} \tilde{Q}^{ij}(\omega) \end{aligned}$$

Le componenti H^{0j} si ottengono da

$$\tilde{H}^{0j} = \frac{1}{i\omega} \partial_i \tilde{H}^{ij}$$

Ancora, la componente H^{00} si ottiene come

$$\tilde{H}^{00} = \frac{1}{i\omega} \partial_i \tilde{H}^{0j} = -\frac{1}{\omega^2} \partial_i \partial_j \tilde{H}^{ij}$$

Per ottenere $H^{\mu\nu}$ basta antitrasformare:

$$\begin{aligned} \omega^2 &\rightarrow -\partial_t^2 \\ e^{i\omega R} : t &\rightarrow t - \frac{R}{c} \\ \Rightarrow H^{ij} &= \frac{2}{3} \frac{G}{R} \ddot{Q}^{ij} \left(t - \frac{R}{c} \right) \end{aligned}$$

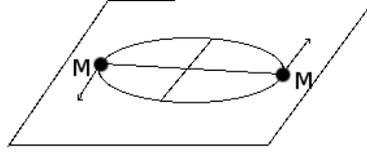


Figura 3.8: Sistema binario

Applicazione: il sistema binario

Applichiamo questi risultati al sistema gravitazionale con la più semplice dinamica interna: un sistema di due stelle di massa M che ruotano una intorno all'altra seguendo un'orbita ellittica, ovvero un *sistema binario*.

Nel caso semplice di un'orbita circolare di raggio R , è sufficiente uguagliare la forza centrifuga $M\frac{v^2}{R}$ e la forza di attrazione reciproca $\frac{GM^2}{(2R)^2}$, ottenendo una velocità

$$v = \sqrt{\frac{GM}{4r}}$$

e un periodo

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

da cui la velocità angolare

$$\Omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{GM}{4r^3}}$$

Le traiettorie delle due stelle sono parametrizzate allora da

$$\begin{cases} x_a^1 = r \cos \Omega t \\ x_a^2 = r \sin \Omega t \end{cases} \quad \begin{cases} x_b^1 = -r \cos \Omega t \\ x_b^2 = -r \sin \Omega t \end{cases}$$

Per determinare le componenti del campo gravitazionale $H^{\mu\nu}$ è sufficiente determinare la componente T^{00} del tensore energia-impulso. Nel limite non relativistico (ragionevole dato che le velocità in gioco sono basse) il contributo all'energia sarà dovuto principalmente alla massa, e la distribuzione sarà dunque

$$T^{00} = M\delta(x^3) (\delta(x_a^1 - r \cos \Omega t) \delta(x_a^2 - r \sin \Omega t) + \delta(x_b^1 + r \cos \Omega t) \delta(x_b^2 + r \sin \Omega t))$$

Questa componente è sufficiente per calcolare il momento di quadrupolo:

$$Q_{11} = 3Mr^2 (1 + \cos 2\Omega t_r)$$

$$Q_{22} = 3Mr^2 (1 - \cos 2\Omega t_r)$$

$$Q_{12} = Q_{21} = 3Mr^2 \sin 2\Omega t_r$$

dove t_r è il tempo ritardato. Il campo H^{ij} si scrive allora come:

$$H^{ij} = \frac{8GM}{R} \Omega^2 r^2 \begin{pmatrix} -\cos 2\omega t_r & -\sin 2\Omega t_r & 0 \\ -\sin 2\omega t_r & \cos 2\Omega t_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e in questo caso coincide con h^{ij} dato che la sua traccia è nulla.

3.4.4 Energia e impulso di un sistema gravitazionale

Abbiamo detto che nell'azione di Hilbert il termine di bordo non poteva essere eliminato imponendo opportune condizioni al contorno sulla metrica all'infinito, perchè questo avrebbe dato luogo a risultati non fisici, ad esempio avrebbe escluso dalle soluzioni possibili la metrica di Schwarzschild. Abbiamo quindi optato per l'introduzione di un termine aggiuntivo, la curvatura estrinseca, che ha il pregio di permetterci di definire l'energia di un sistema gravitazionale. Infatti, l'azione di Hilbert è invariante sotto diffeomorfismi, il che significa che un qualunque tentativo di costruire una hamiltoniana per il sistema darebbe luogo, esattamente come nel caso della particella libera, ad un risultato nullo. Il termine aggiuntivo di bordo distrugge parzialmente questa invarianza, e questo ci permette di costruire l'hamiltoniana del sistema.

Così come l'emissione di radiazione elettromagnetica provoca una perdita di energia in un sistema, anche l'emissione di onde gravitazionali dovrà avere un effetto analogo: ad esempio l'orbita del sistema binario deve contrarsi a un punto, esattamente come accade nel modello dell'atomo di Rutherford. Per sapere in che modo diminuisce il periodo dell'orbita dovremmo conoscere il tensore energia-impulso della gravità, le cui componenti sono legate alla variazione nel tempo della densità di energia gravitazionale e al suo flusso attraverso una superficie. Se consideriamo le equazioni di Einstein

$$G_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}$$

a secondo membro non c'è traccia del tensore energia-impulso della gravità. In relatività generale $T^{\mu\nu}$ è covariantemente conservato, condizione che in generale non coincide con la conservazione ordinaria. In particolare, dalla condizione di conservazione covariante *non* discende il fatto che le quantità

$$\int_{\Sigma} T^{0\mu} d\Sigma$$

sono conservate. Fisicamente la sua non conservazione è ovvia, dato che la materia può scambiare energia con il campo gravitazionale, in altre parole il sistema non è isolato a meno che non si includa anche un eventuale tensore energia-impulso della gravità. Tuttavia il principio di equivalenza nega automaticamente l'esistenza di un oggetto del genere: $T^{\mu\nu}$ è una sorta di densità locale di energia, ma sappiamo che localmente possiamo sempre scegliere un sistema di riferimento in cui il campo gravitazionale sparisce: le uniche cose che ha senso definire in questo caso sono una energia e un impulso totali del sistema gravitazionale, e di conseguenza del sistema totale materia+gravità.

Lo pseudotensore della gravità

I vincoli imposti dal principio di equivalenza ci costringono a rinunciare all'idea di un tensore energia-impulso per la gravità, ma siamo comunque liberi di cercare un oggetto che una volta integrato dia origine ad una energia e un impulso conservati e organizzati in forma quadrivettoriale. Innanzitutto spezziamo la metrica in un background e una fluttuazione intorno ad esso:

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^B + h_{\mu\nu}$$

In questa separazione, $g_{\mu\nu}^B$ dovrà essere invariante sotto traslazioni spazio-temporali, in modo che le quantità conservate usuali, energia, impulso e momento angolare siano assicurate. Si può mostrare che l'unica metrica che soddisfa queste richieste è la metrica piatta minkowskiana:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

Questa scomposizione è sempre possibile, ma $h_{\mu\nu}$ non è arbitrario: in particolare, la procedura che svilupperemo ha senso unicamente se $h_{\mu\nu}$ può essere considerato una piccola perturbazione rispetto a $\eta_{\mu\nu}$ nel limite in cui $r \rightarrow \infty$. Si può mostrare che per ottenere risultati sensati è sufficiente imporre i seguenti andamenti

$$h_{00} \sim \frac{1}{r}$$

$$h_{0i} \sim \frac{1}{r^2}$$

$$h_{ij} \sim \frac{1}{r}$$

La procedura prevede di separare il tensore di Einstein in una parte lineare ed in una non lineare in $h_{\mu\nu}$:

$$G_{\mu\nu}(\eta + h) = G_{\mu\nu}^L(h) + G_{\mu\nu}^{NL}(h)$$

In generale i due termini G^L e G^{NL} non trasformano come tensori, in ogni caso l'equazione di Einstein si può riscrivere come

$$G_{\mu\nu}^L(h) = kT_{\mu\nu} - G_{\mu\nu}^{NL}(h)$$

É possibile mostrare che G^L è conservato, ovvero

$$\partial^\mu G_{\mu\nu}^L(h) = 0$$

Per dimostrarlo ricordiamo che $G_{\mu\nu}$ è covariantemente conservato:

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu}(h) = \nabla_\mu G_L^{\mu\nu}(h) + \nabla_\mu G_{NL}^{\mu\nu}(h) = 0$$

Espandendo questa equazione in serie in potenze di h , i coefficienti di ogni ordine dovranno essere nulli: il termine lineare in h riceve contributi soltanto da $\partial^\mu G_{\mu\nu}^L$, perchè Γ è già lineare in h dunque il termine ΓG^L è sicuramente di ordine superiore. Questo significa semplicemente che l'annullarsi del primo coefficiente corrisponde alla relazione $\partial^\mu G_{\mu\nu}^L = 0$. Ma se $G_{\mu\nu}^L$ è conservato, lo sarà anche $kT_{\mu\nu} - G_{\mu\nu}^{NL}$.

Poichè $h_{\mu\nu}$ è arbitrario, le sue proprietà di trasformazione non sono ben definite, ma sicuramente esso continua a mantenere la proprietà di invarianza sotto trasformazioni di Lorentz:

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g'_{\mu\nu} = \Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\beta{}_\nu g_{\alpha\beta}$$

$$\eta_{\mu\nu} \rightarrow \eta'_{\mu\nu} = \Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\beta{}_\nu \eta_{\alpha\beta} (= \eta_{\mu\nu})$$

$$\Rightarrow h_{\mu\nu} \rightarrow h'_{\mu\nu} = (g' - \eta')_{\mu\nu} = \Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\beta{}_\nu (g - \eta)_{\alpha\beta} = \Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\beta{}_\nu h_{\alpha\beta}$$

Per r sufficientemente grande il termine G^L è dominante rispetto a G^{NL} , il che equivale a dire che G^L torna ad essere un tensore sotto Lorentz:

$$G^{\mu\nu}(\eta + h) = G_L^{\mu\nu}(h) + G_{NL}^{\mu\nu}(h) \stackrel{r \rightarrow \infty}{\sim} G_L^{\mu\nu}(h)$$

Come nel caso del simbolo di Levi-Civita, un oggetto si comporta come un tensore soltanto sotto un sottogruppo del gruppo di invarianza globale del sistema prende il nome di *pseudotensore*: $G_L^{\mu\nu} = kT^{\mu\nu} - G_{NL}^{\mu\nu}$ prende quindi il nome di *pseudotensore energia-impulso* della gravità.

Se lo pseudotensore che abbiamo definito è conservato, dal teorema di Noether possiamo ottenere quattro 4 quantità conservate integrandone le componenti $T^{0\mu}$:

$$P^\mu = \int_{\Sigma_t} d^3x \left(T^{0\mu} - \frac{1}{k} G_{NL}^{0\mu}(h) \right)$$

La superficie spaziale Σ è scelta a $t = \text{costante}$, nel sistema di coordinate in cui è valido il corretto comportamento asintotico per le componenti di $h_{\mu\nu}$, in modo che la metrica tenda a quella di Minkowski, per cui ha senso parlare di energia e impulso conservati.

Usando l'equazione di Einstein possiamo riscrivere

$$P^\mu = \int_{\Sigma_t} d^3x \frac{1}{k} G_L^{0\mu}(h)$$

É possibile mostrare che $G_{\mu\nu}^L$ è esso stesso una divergenza totale: per vederlo ricordiamo l'espressione del tensore di Ricci e dello scalare di curvatura nella loro versione linearizzata:

$$\begin{aligned} {}^L R_{\mu\nu} &= {}^L R^\lambda{}_{\mu,\lambda\nu} = \partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\lambda\mu}^\lambda = \frac{1}{2} \partial_\lambda (\partial_\mu h_\nu^\lambda + \partial_\nu h_\mu^\lambda - \partial^\lambda h_{\mu\nu}) - \partial_\nu \partial_\mu h \\ {}^L R &= \partial_\lambda \partial_\mu h^{\lambda\mu} - \frac{1}{2} \square h - \frac{1}{2} \square h = \partial_\lambda \partial_\mu h^{\lambda\mu} - \square h \\ \Rightarrow G_{\mu\nu}^L &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \partial_\lambda h_\nu^\lambda + \partial_\nu \partial_\lambda h_\mu^\lambda) - \frac{1}{2} \square h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \partial_\mu \partial_\lambda h - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} (\partial_\alpha \partial_\beta h^{\alpha\beta} - \square h) \end{aligned}$$

Se reintroduciamo il campo

$$\begin{aligned} H^{\alpha\beta} &= h^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} h \\ G_{\mu\nu}^L &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \partial_\lambda H_\nu^\lambda + \partial_\nu \partial_\lambda H_\mu^\lambda) - \frac{1}{2} \square H_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} (\partial_\alpha \partial_\beta H^{\alpha\beta}) \end{aligned}$$

Consideriamo la stessa espressione con gli indici alzati:

$$G_L^{\mu\nu} = \partial_\alpha \partial_\beta \frac{1}{2} (\eta^{\mu\alpha} H^{\beta\nu} + \eta^{\nu\beta} H^{\alpha\mu} - \eta^{\alpha\beta} H^{\mu\nu} - \eta^{\mu\nu} H^{\alpha\beta})$$

L'espressione tra parentesi è antisimmetrica negli scambi $\mu \leftrightarrow \beta$, $\nu \leftrightarrow \alpha$:

$$G_L^{\mu\nu} = \partial_\alpha \partial_\beta P^{\mu\beta,\nu\alpha}$$

dove

$$P^{\mu\beta,\nu\alpha} = \frac{1}{2} (\eta^{\mu\alpha} H^{\beta\nu} + \eta^{\nu\beta} H^{\alpha\mu} - \eta^{\alpha\beta} H^{\mu\nu} - \eta^{\mu\nu} H^{\alpha\beta})$$

Le quattro cariche conservate si scrivono allora

$$P^\mu = \frac{1}{2} \int d^3 x \partial_\alpha \partial_\beta P^{\mu\beta,0\alpha}$$

Poichè $P^{\mu\beta,\nu\alpha}$ è antisimmetrico, se $\nu = 0$ potrà assumere solo indici spaziali:

$$P^\mu = \frac{1}{2} \int d^3 x \partial_i (\partial_\beta P^{\mu\beta,0i})$$

ovvero abbiamo ricostruito l'integrale di una divergenza totale:

$$P^\mu = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_2(r)} \partial_\beta P^{\mu\beta,0i} n_i r^2 d\Omega$$

Le condizioni che abbiamo imposto sulle componenti di $h_{\mu\nu}$ garantiscono un risultato finito per l'integrale.

Osserviamo i seguenti fatti:

1. l'energia e l'impulso di un sistema gravitazionale sono determinati soltanto dalla metrica asintotica;
2. l'espressione che li determina non ha la forma di un integrale di volume ma di un integrale su una superficie bidimensionale: in altre parole, in presenza di gravità l'informazione sull'energia racchiusa in un volume non è contenuta nel volume stesso bensì nella superficie che lo contiene. L'ipotesi sotto cui le proprietà di un volume sono contenute nella superficie che lo contiene viene detta principio olografico: un'altra evidenza di tale principio è l'entropia di un sistema gravitazionale, che in relatività generale scala con l'area, diversamente da quanto avviene in termodinamica.

Sottolineiamo che tutta questa procedura definisce le quantità conservate di un sistema gravitazionale sfruttando non una invarianza esatta della metrica sotto certe simmetrie, bensì una invarianza *asintotica*: per ogni r finito la metrica può infatti dipendere sia dal tempo che dalle coordinate, a patto che tenda alla metrica di Minkowski con sufficiente rapidità.

3.5 Simmetrie e soluzioni esatte

3.5.1 Simmetrie della metrica: i campi di Killing

A seconda della definizione che diamo di *simmetria* del nostro sistema gravitazionale, può capitare di avere anche simmetrie esatte: poichè è la metrica a definire le proprietà del nostro sistema gravitazionale, definiremo *simmetria della metrica* una trasformazione di coordinate che la lascia invariata in forma. Se consideriamo ad esempio una trasformazione infinitesima

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \epsilon \xi^\mu(x)$$

sappiamo che la variazione in forma della metrica è data da

$$\delta g_{\mu\nu} = \nabla_\mu \xi_\nu(x) + \nabla_\nu \xi_\mu(x)$$

Se la trasformazione generata da $\xi_\mu(x)$ è una simmetria della metrica avremo quindi $\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0$, e in questo caso $\xi^\mu(x)$ viene detto *campo di Killing*. Possiamo mostrare che ad ogni campo di Killing corrisponde una legge di conservazione: se definiamo la corrente

$$J^\mu = T_{mat}^{\mu\nu} \xi_\nu$$

dove $T_{mat}^{\mu\nu}$ è il tensore energia-impulso della materia, questa è covariantemente conservata:

$$\nabla_\mu (T_{mat}^{\mu\nu} \xi_\nu) = (\nabla_\mu T^{\mu\nu}) + T_{mat}^{\mu\nu} \nabla_\mu \xi_\nu = (\nabla_\mu T^{\mu\nu}) + \frac{1}{2} T^{\mu\nu} (\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu)$$

Il primo membro è nullo perchè il tensore energia-impulso della materia è covariantemente conservato, mentre il secondo è nullo perchè definizione di vettore di Killing. Ma sappiamo che $\nabla_\mu J^\mu = 0$ corrisponde a $\partial_\mu (\sqrt{-g} J^\mu) = 0$, dunque l'integrazione in $d^4x \sqrt{-g}$ di J^0 dà luogo ad una carica conservata.

Se consideriamo una geodetica $x^\mu(t)$ e un vettore di Killing ξ^ν , è possibile mostrare che il loro prodotto scalare $k \cdot \dot{x} = g^{\mu\nu} k_\mu \cdot \xi^\nu$ è una costante del moto:

$$\nabla_{\dot{x}} k \cdot \dot{x} = (\nabla_{\dot{x}} k) \cdot \dot{x} + k \cdot \nabla_{\dot{x}} \dot{x}$$

Infatti, il secondo termine si annulla per definizione di geodetica, mentre

$$(\nabla_{\dot{x}} k) \cdot \dot{x} = \dot{x}^\mu \cdot x^\nu (\nabla_\mu k^\nu) = \frac{1}{2} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu (\nabla_\mu k^\nu + \nabla_\nu k^\mu) = 0$$

per definizione di vettore di Killing. Questo ci insegna che dato un vettore di Killing, il moto geodetico di una particella test ammette una legge di conservazione.

3.5.2 Flusso di un campo vettoriale

É possibile riformulare dal punto di vista della geometria la definizione di simmetria per un sistema gravitazionale. Cominciamo enunciando il seguente teorema:

Teorema 2. *Se M è una varietà differenziabile, per ogni $x_0 \in M$ e per qualsiasi campo vettoriale $\xi(x)$ esiste una mappa σ :*

$$\sigma : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$$

tale che

1. $\sigma(0, x) = x$;
2. $\sigma(t, x)$ è soluzione dell'equazione $\dot{\sigma}(t, x) = \xi(x)$

$$3. \sigma(t, \sigma(s, x)) = \sigma(t + s, x).$$

In base a questo teorema, dato un campo $\xi^\mu(x)$ la mappa $\sigma(t, x)$ definisce la famiglia di diffeomorfismi ad esso associati. La dimostrazione del teorema si basa sull'impostare il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d\sigma^\mu(t)}{dt} = \xi^\mu(\sigma(t, x_0))\sigma^\mu(0, x_0) = x_0^\mu \end{cases}$$

e nell'osservare che dal teorema di esistenza e unicità delle equazioni differenziali la funzione σ esiste ed è unica in un certo intorno $]a, b[\times U_x$, dove U_x è un intorno del punto x . Scegliendo un nuovo punto $y \in U_x$ si può impostare un nuovo problema di Cauchy e determinare una nuova funzione σ' su $]c, d[\times U_y$, che coincide con σ nel dominio comune per l'unicità della soluzione, e la estende al di fuori. Ripetendo la procedura è possibile ricoprire pressochè l'intera varietà.

La funzione σ gode anche della seguente proprietà: consideriamo

$$\sigma^\mu(t, \sigma^\mu(s, x_0))$$

Ovviamente, questa soddisfa l'equazione con la condizione al contorno $\sigma^\mu(0, \sigma^\mu(s, x_0)) = \sigma^\mu(s, x_0)$. Consideriamo adesso un'altra soluzione dell'equazione differenziale, $\sigma^\mu(t + s, x_0)$, che si ottiene prendendo $\sigma^\mu(t, x_0)$ e calcolandola nel parametro shiftato $t + s$; questa nuova funzione è banalmente ancora una soluzione dell'equazione differenziale, ma per $t = 0$ soddisfa

$$\sigma^\mu(0 + s, x_0) = \sigma^\mu(s, x_0)$$

ovvero $\sigma^\mu(t + s, x_0)$ e $\sigma^\mu(t, \sigma^\mu(s, x_0))$ soddisfano la stessa equazione differenziale con la stessa condizione al contorno, e di nuovo coincidono per il teorema di esistenza e unicità. Abbiamo quindi costruito una trasformazione che ha tutte le proprietà di un sottogruppo abeliano:

1. $\sigma^\mu(0, x_0) = x_0^\mu$ è la trasformazione identica;
2. la composizione di due trasformazioni è ancora una trasformazione; fisicamente questa proprietà è ovvia, perchè corrisponde alla possibilità di percorrere un certo cammino $(0, t + s)$ in una volta sola o suddiviso in due tratti $(0, t)$ e $(t, t + s)$.
3. per ogni $\sigma^\mu(t, x_0)$ esiste l'inversa $\sigma^\mu(-t, x_0)$, in modo che $\sigma^\mu(t, \sigma^\mu(-t, x_0)) = \sigma^\mu(0, x_0) = x_0^\mu$;
4. calcolare $\sigma^\mu(t, \sigma^\mu(s, x_0))$ è equivalente a calcolare $\sigma^\mu(s, \sigma^\mu(t, x_0))$ poichè $t + s = s + t$;

3.5.3 Trasporto di Lie

Dato un intorno $U \subset M$ e fissato il parametro t , la funzione $\sigma(t, \cdot) \equiv \sigma_t(\cdot)$ è una applicazione da M in M , che mappa ogni punto x nel punto $\sigma_t(x)$ in maniera invertibile e differenziabile, dunque è un diffeomorfismo di M .

Dato un diffeomorfismo $F : M \rightarrow M$ possiamo definire le due applicazioni

$$F^* : T_p M \rightarrow T_{F(p)} M \quad (\text{push-forward})$$

$$F_* : T_{F(p)}^* M \rightarrow T_p^* M \quad (\text{pull-back})$$

che ci consentono di spostare forme e vettori sulla varietà:

Dato un campo vettoriale v e una sua curva integrale $\gamma(t)$ tale che $\gamma(0) = P \in M$, l'applicazione F mappa γ nella curva $F(\gamma)$, che a sua volta definisce un nuovo vettore $(F^*v)_{F(p)}$ applicato in $F(P)$ in questo modo:

$$g : M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$((F^*v)_{F(p)})g = v_p(g \circ F)$$

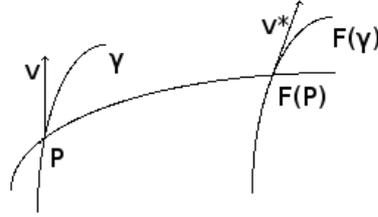


Figura 3.9: Mappa indotta da σ

Se x^μ sono le coordinate di P e y^μ sono le coordinate di $F(P)$:

$$(F^*v)^\mu(y) = \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu} v^\nu(x)$$

In questo modo possiamo definire il seguente rapporto incrementale

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{v(x + \epsilon) - (F^*v)(x + \epsilon)}{\epsilon}$$

È sufficiente considerare il cambio di coordinate all'ordine lineare:

$$\begin{aligned} x'^\mu &= x^\mu + \epsilon \xi^\mu(x) + O(\epsilon^2) \\ \Rightarrow v^\nu(x) \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} &= v^\mu(x) + \epsilon v^\nu \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\nu} \\ v^\mu(x + \epsilon \xi) &= v^\mu(x) + \epsilon \xi^\alpha \partial_\alpha v^\mu(x) \end{aligned}$$

da cui

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{v^\mu(x) + \epsilon \xi^\alpha \partial_\alpha v^\mu(x) - v^\mu(x) - \epsilon v^\nu \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\nu}}{\epsilon} = \xi^\nu \partial_\nu v^\mu(x) - v^\nu \partial_\nu \xi^\mu$$

Definiremo *derivata di Lie* del campo v rispetto al campo ξ il campo

$$\mathcal{L}_\xi v = (\xi^\nu \partial_\nu v^\mu(x) - v^\nu \partial_\nu \xi^\mu) \partial_\mu \equiv [\xi, v]^\nu$$

Diremo inoltre che il campo v è *invariante* sotto il diffeomorfismo generato dal campo $\xi(x)$ se il suo commutatore con ξ è nullo. Osserviamo che la derivata di Lie $\mathcal{L}_X Y$ è ancora un campo vettoriale, inoltre

$$\mathcal{L}_X Y = -\mathcal{L}_Y X$$

$$\mathcal{L}_Z(\mathcal{L}_X Y) + \mathcal{L}_X(\mathcal{L}_Y Z) + \mathcal{L}_Y(\mathcal{L}_Z X) = 0$$

In base a queste proprietà, il modulo $\mathfrak{X}^{(1,0)}(M)$ dei campi vettoriali sulla varietà M munito del prodotto $\mathcal{L} : \mathfrak{X}^{(1,0)}(M) \times \mathfrak{X}^{(1,0)}(M) \rightarrow \mathfrak{X}^{(1,0)}(M)$ forma l'*algebra di Lie* dei campi vettoriali, associata al gruppo dei diffeomorfismi di M .

Si può mostrare che la derivata di Lie soddisfa la regola di Leibniz:

$$\mathcal{L}_\xi (fv) = f \mathcal{L}_\xi v + \xi(f)v$$

La definizione di derivata di Lie può essere estesa a tensori di rango arbitrario, imponendo che sia soddisfatta la regola di Leibniz:

$$\mathcal{L}_\xi (v \otimes w) = \mathcal{L}_\xi(v) \otimes w + v \otimes \mathcal{L}_\xi(w)$$

Per estendere la definizione alle forme ricordiamo che se ω è una forma e v è un vettore, $\omega(v)$ è una funzione, dunque $\mathcal{L}_\xi(\omega(v)) = \xi(\omega(v))$; se consideriamo il prodotto tensoriale $\omega \otimes v$ abbiamo

$$\mathcal{L}_\xi(\omega \otimes v) = \mathcal{L}_\xi(\omega) \otimes v + \omega \otimes \mathcal{L}_\xi(v)$$

Se supponiamo che la derivata di Lie commuti con l'operazione di contrazione, possiamo contrarre $\mathcal{L}_\xi(\omega \otimes v) \rightarrow \mathcal{L}_\xi(\omega(v))$ e otteniamo

$$\mathcal{L}_\xi(\omega(v)) = \mathcal{L}_\xi(\omega)(v) + \omega(\mathcal{L}_\xi(v))$$

da cui

$$\mathcal{L}_\xi(\omega)(v) = \mathcal{L}_\xi(\omega(v)) - \omega(\mathcal{L}_\xi(v))$$

Una proprietà non banale che la $\mathcal{L}_\xi(\omega)$ deve rispettare è la $C^\infty(M)$ -linearità nell'argomento: in componenti si ha

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_\xi \omega)_\rho x^\rho &= \xi^\alpha (\omega_\mu x^\mu) - \omega_\alpha (\xi^\rho \partial_\rho x^\alpha - x^\rho \partial_\rho \xi^\alpha) = \xi^\alpha (\partial_\alpha \omega_\mu) x^\mu + \xi^\alpha \omega_\mu \partial_\alpha x^\mu - \omega_\mu \xi^\rho \partial_\rho x^\mu + \omega_\mu x^\rho \partial_\rho \xi^\mu = \\ &= x^\rho (\xi^\alpha \partial_\alpha \omega_\rho + \omega_\mu \partial_\rho \xi^\mu) \\ &\Rightarrow (\mathcal{L}_\xi \omega)_\rho = \xi^\alpha \partial_\alpha \omega_\rho + \omega_\mu \partial_\rho \xi^\mu \end{aligned}$$

Sottolineiamo la differenza di segno rispetto alla derivata di Lie di un campo, analogamente a quanto avveniva per il trasporto parallelo.

Per esercizio, applichiamo la derivata di Lie ad un tensore di tipo $(2, 1)$:

$$\mathcal{L}_\xi(T^{\mu\nu}{}_\alpha) = \xi^\rho \partial_\rho T^{\mu\nu}{}_\alpha - (\partial_\rho \xi^\mu) T^{\rho\nu}{}_\alpha - (\partial_\rho \xi^\nu) T^{\mu\rho}{}_\alpha + (\partial_\alpha \xi^\rho) T^{\mu\nu}{}_\rho$$

Infine, applichiamo la derivata di Lie alla metrica:

$$\mathcal{L}_\xi(g_{\mu\nu}) = \xi^\rho \partial_\rho g_{\mu\nu} + (\partial_\mu \xi^\rho) g_{\rho\nu} + (\partial_\nu \xi^\rho) g_{\mu\rho}$$

Poichè $\mathcal{L}_\xi(g_{\mu\nu})$ è un tensore perfettamente definito, deve essere possibile esprimerlo in funzione di quantità tensoriali. In particolare si può mostrare che se la torsione è nulla tutte le derivate ordinarie possono essere sostituite da derivate covarianti:

$$\mathcal{L}_\xi(g_{\mu\nu}) = \xi^\rho \nabla_\rho g_{\mu\nu} + (\nabla_\mu \xi^\rho) g_{\rho\nu} + (\nabla_\nu \xi^\rho) g_{\mu\rho} = \nabla_\mu \xi^\nu + \nabla_\nu \xi_\mu$$

A questo punto possiamo definire una simmetria della metrica in termini della derivata di Lie: $\xi(x)$ è un campo di Killing se la derivata di Lie della metrica rispetto ad esso si annulla:

$$\mathcal{L}_\xi g = 0$$

La derivata di Lie soddisfa la seguente proprietà: se ξ ed η sono due campi vettoriali

$$\mathcal{L}_{[\xi, \eta]} = [\mathcal{L}_\xi, \mathcal{L}_\eta]$$

ovvero la derivata di Lie è un omomorfismo dell'algebra di Lie dei campi in sè stessa. Per dimostrare questa proprietà consideriamo l'applicazione di $\mathcal{L}_{[\xi, \eta]}$ ad un vettore V :

$$\mathcal{L}_{[\xi, \eta]}V = [[\xi, \eta], V] =$$

Per Jacobi abbiamo

$$= -[[\eta, V], \xi] - [[V, \xi], \eta] = [\xi, [\eta, V]] - [\eta, [\xi, V]] = \mathcal{L}_\xi(\mathcal{L}_\eta V) - \mathcal{L}_\eta(\mathcal{L}_\xi V) = [\mathcal{L}_\xi, \mathcal{L}_\eta]V$$

In base a questo risultato, se abbiamo due campi di Killing anche il loro commutatore sarà un campo di Killing:

$$0 = [\mathcal{L}_\xi, \mathcal{L}_\eta]g = \mathcal{L}_{[\xi, \eta]}g$$

in altre parole anche i campi di Killing chiudono una sottalgebra dell'algebra di Lie e scriveremo in generale

$$[\xi_i(x), \xi_j(x)] = f_{ijk}(x)\xi_k(x)$$

dove le $f_{ijk}(x)$ sono le costanti di struttura dell'algebra. Un caso particolare è quando tali costanti di struttura sono indipendenti dal punto x : in tal caso si ha

$$[\xi_i(x), \xi_j(x)] = f_{ijk}\xi_k(x)$$

e si dice che i campi di Killing sono *in involuzione*.

Il problema stazionario

Mostriamo adesso che se la metrica ammette un vettore di Killing di tipo tempo (ovvero tale che $k^\mu k_\mu > 0$) è possibile costruire un sistema di coordinate tale che la geometria non dipenda dal tempo, ovvero $\frac{\partial g}{\partial t} = 0$ dove t è la coordinata temporale nel nuovo sistema. Siano dunque $k^\mu(y)$ un campo di Killing tale che per ogni y si ha $k^\mu(y)k_\mu(y) > 0$, e Σ una ipersuperficie spaziale descritta da un set di coordinate x^i , $i = 1, 2, 3$. Preso un qualsiasi punto $\{x_0^i\} \in \Sigma$, considereremo la curva integrale di k^μ che lo contiene e ridefiniremo il parametro t in modo che lo raggiunga per $t = 0$: in questo modo possiamo contrassegnare i punti di Σ con le coordinate $(0, x_0^i)$, mentre qualsiasi altro punto P della varietà sarà univocamente determinato dalle coordinate (t, x_0^i) , dove t è tale che $\sigma(\{0, x_0^i\}, t) = P$. Le curve integrali di k^μ sono definite dall'equazione

$$\frac{d\sigma^\mu(\lambda, \{t, x_0^i\})}{d\lambda} = k^\mu(\{t, x_0^i\})$$

ma in questo sistema di coordinate

$$\sigma^\mu(\lambda, \{t, x_0^i\}) = \begin{cases} \lambda + t \\ x_0^i \end{cases} \Rightarrow k^\mu(\{t, x_0^i\}) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

La derivata di Lie della metrica in queste coordinate assume la forma:

$$0 = \mathcal{L}_k g_{\mu\nu} = k^\alpha \partial_\alpha g_{\mu\nu} + \partial_\mu k^\alpha g_{\alpha\nu} + \partial_\nu k^\alpha g_{\alpha\mu} = \partial_t g_{\mu\nu} = 0$$

ovvero in queste coordinate la metrica risulta indipendente dal tempo. Un problema che gode di questa proprietà si dice *problema stazionario*: la metrica si scrive come

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & & & \\ g_{20} & & g_{ij} & \\ g_{30} & & & \end{pmatrix}$$

dove gli elementi sono indipendenti dal tempo, ma sono tutti diversi da zero in generale.

Il problema statico

Consideriamo il prodotto scalare $k^\mu g_{\mu\nu} v^\nu$ dove v^μ è un qualsiasi vettore che sta sulla ipersuperficie: in questo sistema di coordinate k^μ ha soltanto la componente 0, dunque

$$k^\mu g_{\mu\nu} v^\nu = g_{0\nu} v^\nu =$$

D'altra parte v^ν avrà soltanto le componenti spaziali non nulle, dato che tutti i punti sulla ipersuperficie sono caratterizzati dalla stessa coordinata temporale, dunque

$$k^\mu g_{\mu\nu} v^\nu = g_{0i} v^i$$

In altre parole, se v sta sulla ipersuperficie il prodotto scalare è funzione solo dei g_{0i} : l'annullarsi di tali componenti è equivalente all'ortogonalità di k^μ con un vettore qualsiasi sulla ipersuperficie. In tre dimensioni una superficie è definita da un vincolo della forma $f(x_1, x_2, x_3) = 0$, ed una base per lo spazio normale alla superficie è costituita dal gradiente $\vec{n} = \nabla f$. In dimensione arbitraria, la generalizzazione del gradiente è fornita dalla derivata esterna, che però agisce su forme differenziali: la prima cosa da fare è definire la forma $k_\mu \equiv g_{\mu\nu} k^\nu$, dopodichè imporre una condizione del tipo

$$k = \omega df$$

dove ω è una funzione arbitraria, oppure equivalentemente

$$k \wedge dk = 0$$

Osserviamo che queste due proprietà sono molto stringenti, ad esempio in tre dimensioni corrisponderebbero all'annullarsi del rotore del campo vettoriale $\vec{k}(\vec{x})$, in ogni caso se il vettore di Killing soddisfa $k \wedge dk = 0$, il problema si dice *statico* e le componenti della metrica g_{0i} sono identicamente nulle.

3.5.4 Simmetria sferica: la metrica di Schwartzschild

Nel caso ci trovassimo ad avere più di un campo di Killing, vale il seguente teorema:

Teorema 3 (di Frobenius). *Siano ξ_1, \dots, ξ_m campi di Killing. La condizione sotto cui possiamo scegliere un sistema di riferimento tale che la geometria non dipenda da ciascuna delle coordinate associate ad ognuno dei vettore di Killing è la seguente:*

$$[\xi_i, \xi_j] = 0$$

In caso i campi di Killing non commutino ma siano in involuzione, ovvero

$$[\xi_i(x), \xi_j(x)] = f_{ijk}\xi_k(x)$$

le loro curve integrali si dispongono in modo da formare delle sottovarietà di M , di cui chiaramente i Killing saranno campi tangenti. In questo caso si dice che i campi di Killing sono surface-forming.

Supponiamo ad esempio che la metrica dello spazio-tempo ammetta dei vettori di Killing che chiudono l'algebra di $SO(3)$: avremo quindi tre campi $\xi_1(x)$, $\xi_2(x)$ e $\xi_3(x)$ tali che

$$[\xi_i(x), \xi_j(x)] = i\epsilon_{ijk}\xi_k(x)$$

Si può dimostrare, ma è intuitivo, che le curve integrali dei tre campi $\xi_i(x)$ si disporranno in modo da chiudere delle sfere S_2 , ovvero delle sottovarietà 2-dimensionali che ci permettono di foliare la nostra varietà 4-dimensionale M . Inoltre la metrica della sfera

$$ds_{S_2}^2 = r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

sarà invariante sotto i diffeomorfismi indotti dai campi di Killing.

Esiste un altro utile teorema:

Teorema 4. *Se una varietà n -dimensionale M possiede una sottovarietà m -dimensionale descritta da un set di campi di Killing, e questa è massimamente simmetrica, la metrica su M può essere sempre scelta come*

$$g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = g_{ij}dv^i dv^j + f(v)h_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta$$

dove u^α sono le m coordinate sulla sottovarietà, v^i sono le restanti $n - m$ coordinate, e $h_{\alpha\beta}$ è la metrica della sottovarietà. In particolare non sono ammessi termini misti della forma $dv^i du^\alpha$.

La sfera S_2 è massimamente simmetrica dunque possiamo scrivere la metrica dello spazio-tempo in questa forma

$$ds^2 = A(a, b)da^2 + 2B(a, b)dadb + C(a, b)db^2 + D(a, b)ds_{S_2}^2$$

dove r e t sono due ulteriori coordinate arbitrarie che contrassegnano le varie sfere, e insieme a θ e ϕ ci consentono di identificare un punto qualunque sulla varietà. Se r è la coordinata radiale possiamo sempre scrivere $r^2 \equiv D(a, b)$ cambiare variabile da (a, b) ad (a, r) o (b, r) , in questo modo:

$$ds^2 = A(r, a)da^2 + 2B(r, a)dadr + C(r, a)dr^2 + r^2 ds_{S_2}^2$$

Raccogliendo dei termini

$$ds^2 = A(r, a) \left(da + \frac{2B(r, a)}{A(r, a)} dr \right)^2 + \left(C(r, a) - \frac{B^2(r, a)}{A^2(r, a)} \right) dr^2 + r^2 ds_{S_2}^2$$

Se adesso ridefiniamo il parametro a come

$$t \rightarrow t = a + f(r, a)$$

si ha

$$dt = da + f_r dr + f_a da = (1 + f_a) \left(da + \frac{f_r}{1 + f_a} dr \right) \Rightarrow \frac{dt}{1 + f_a} = \left(da + \frac{f_r}{1 + f_a} dr \right)$$

Allora, se scegliamo

$$\frac{f_r}{1 + f_a} = \frac{B(r, t)}{A(r, t)}$$

possiamo riassorbire il termine misto e scrivere

$$ds^2 = \tilde{A}(r, t) dt^2 + \tilde{B}(r, t) dr^2 + r^2 ds_{S_2}^2$$

La notazione standard è

$$ds^2 = e^{2a(r, t)} dt^2 - e^{2b(r, t)} dr^2 - r^2 ds_{S_2}^2$$

dove è esplicita la dipendenza della metrica da due sole funzioni arbitrarie $a(r, t)$ e $b(r, t)$, che verranno determinate in base alle equazioni di Einstein.

Per calcolare i Christoffel, che in linea di principio sono 40, possiamo sfruttare le quattro componenti dell'equazione delle geodetiche:

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = 0$$

Tale equazione deriva da un principio di azione, con una lagrangiana di questa forma

$$\mathcal{L} = \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} = \sqrt{e^{2a(r, t)} \dot{t}^2 - e^{2b(r, t)} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\theta}^2 - r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2}$$

Dobbiamo ricavare equazioni per \ddot{t} , \ddot{r} , $\ddot{\phi}$, $\ddot{\theta}$, dunque deriveremo rispetto a \dot{t} , \dot{r} , $\dot{\phi}$, $\dot{\theta}$. Cominciamo con la coordinata ϕ :

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{2r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}}{2\sqrt{e^{2a(r, t)} \dot{t}^2 - e^{2b(r, t)} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\theta}^2 - r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2}} \right) = 0$$

Se il parametro è il tempo proprio o una sua trasformazione affine la radice può essere sempre posta uguale a costante, dunque questa equazione ci informa semplicemente che l'oggetto $r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}$ è conservato: riconosciamo infatti nella sua espressione la componente del momento angolare ortogonale al piano che contiene il moto. Sviluppando abbiamo

$$\frac{d}{d\tau} (r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}) = r^2 \sin^2 \theta \ddot{\phi} + 2r\dot{r} \sin^2 \theta \dot{\phi} + 2r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\theta} \dot{\phi} = 0$$

Dividendo per $r^2 \sin^2 \theta$:

$$\ddot{\phi} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\phi} + 2 \cot \theta \dot{\theta} \dot{\phi} = 0$$

In questo modo, i Christoffel non nulli sono immediatamente visibili da questa equazione, avendo l'accortezza di contare con un fattore 2 i simboli del tipo $\Gamma_{\phi\theta}^\phi = \Gamma_{\theta\phi}^\phi$, in questo modo si ha

$$\Gamma_{r\phi}^\phi = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma_{\theta\phi}^\phi = \cot \theta$$

Per la coordinata r :

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{2e^{2b(r, t)} \dot{r}}{2\sqrt{e^{2a(r, t)} \dot{t}^2 - e^{2b(r, t)} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\theta}^2 - r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2}} \right) - \frac{e^{2a(r, t)} (2a_r) \dot{t}^2 - e^{2b(r, t)} (2b_r) \dot{r}^2 - 2r\dot{\theta}^2 - 2r \sin^2 \theta \dot{\phi}^2}{\sqrt{e^{2a(r, t)} \dot{t}^2 - e^{2b(r, t)} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\theta}^2 - r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2}} = 0$$

Eliminando ancora una volta le radici:

$$e^{2b(r,t)}\ddot{r} + 2e^{2b(r,t)}\dot{r}b_t\dot{t} + 2e^{2b(r,t)}b_r\dot{r}^2 - e^{2a(r,t)}(a_r)\dot{t}^2 + e^{2b(r,t)}(b_r)\dot{r}^2 + r\dot{\theta}^2 + r\sin^2\theta\dot{\phi}^2$$

Infine, dividendo per $e^{2b(r,t)}$:

$$\ddot{r} + 2\dot{r}b_t\dot{t} + 2b_r\dot{r}^2 - e^{2(a(r,t)-b(r,t))}(a_r)\dot{t}^2 - (b_r)\dot{r}^2 + r\dot{\theta}^2 e^{-2b(r,t)} + e^{-2b(r,t)}r\sin^2\theta\dot{\phi}^2$$

In questo caso, i coefficienti dei termini del tipo $\dot{\phi}^2$ sono direttamente i Christoffel.

Il tensore di Einstein relativo a questa metrica è:

$$\begin{aligned} G_0^0 &= \frac{1}{r^2} - e^{-2b(r,t)} \left(\frac{1}{r^2} - 2\frac{b'}{r} \right) \\ G_1^1 &= \frac{1}{r^2} - e^{-2b(r,t)} \left(\frac{1}{r^2} + 2\frac{a'}{r} \right) \\ G_2^2 = G_3^3 &= -e^{-2b(r,t)} \left(a'^2 - a'b' + a'' + \frac{a' - b'}{r} \right) - e^{-2a(r,t)} \left(-\dot{b} + a\dot{b} - \ddot{b} \right) \\ G_0^1 &= -\frac{2\dot{b}}{r} e^{-a(r,t)-b(r,t)} \end{aligned}$$

dove con a' e \dot{a} si indicano rispettivamente le derivate rispetto a r e a t . Queste sono le uniche componenti del tensore di Einstein diverse da zero. Al di fuori delle sorgenti si ha $T^{\mu\nu} = 0$ dunque l'equazione da risolvere è $G_{\mu\nu} = 0$: per semplicità considereremo l'equazione con un indice alzato, e scriveremo

$$0 = G_0^0 - G_1^1 = \frac{2}{r} (b' + a') e^{-2b(r,t)} = 0$$

allora $b(r, t) + a(r, t)$ può soltanto essere una funzione del tempo:

$$b(r, t) + a(r, t) = f(t)$$

Dall'elemento G_0^1 scopriamo inoltre che $\dot{b} = 0$, dunque b è funzione soltanto di r :

$$a(r, t) = -b(r) + f(t)$$

Se ricordiamo l'espressione della metrica:

$$ds^2 = e^{-2b(r)+2f(t)} dt^2 + \dots$$

ma se ridefiniamo un nuovo tempo t' tale che

$$dt' = e^{2f(t)} dt$$

ovvero risolviamo l'equazione $\frac{dt'}{dt} = e^{2f(t)}$, possiamo riassorbire la funzione $f(t)$ in modo da avere

$$a(r, t) = -b(r)$$

dunque anche a dipende soltanto da r : scegliendo opportunamente il tempo sia a che b ne diventano indipendenti, il che ci permette di semplificare notevolmente gli elementi G_2^2 e G_3^3

$$G_2^2 = G_3^3 = -e^{-2b(r,t)} \left(a'^2 - a'b' + a'' + \frac{a' - b'}{r} \right)$$

Osserviamo che l'indipendenza dal tempo non è stata imposta, bensì è una conseguenza delle equazioni del moto: ci aspettavamo questo risultato perchè per il teorema di Gauss il flusso attraverso una sfera di raggio R che racchiude una

sorgente di massa M sarà sempre $\frac{M}{R}$, indipendentemente dalla sua forma. A questo punto è sufficiente determinare $b(r)$, usando G_0^0 :

$$\frac{1}{r^2} - e^{-2b(r)} \left(-\frac{2b'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) = 0$$

Moltiplichiamo tutto per r^2 :

$$1 - e^{-2b(r)} (-r2b' + 1) = 0$$

Riconosciamo nel secondo addendo la derivata rispetto a r di $re^{-2b(r)}$:

$$1 - \frac{d}{dr} \left(re^{-2b(r)} \right) = 0 \Rightarrow e^{-2b(r)} = \left(1 - \frac{A}{r} \right) \equiv e^{2a(r)}$$

Per determinare la costante A consideriamo il limite newtoniano, in cui la componente g_{00} della metrica deve ridursi a $1 + \frac{2GM}{c^2 r}$:

$$A = \frac{2GM}{c^2}$$

La metrica così ottenuta

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

è la cosiddetta *metrica di Schwarzschild* ed è la più generale soluzione a simmetria sferica al di fuori della sorgente: tale soluzione ci permette quindi di determinare la dinamica dei pianeti in funzione della curvatura nello spazio generata dalla sorgente. Viceversa, la soluzione delle equazioni di Einstein all'interno della sorgente, dove il tensore energia-impulso non è più identicamente nullo, ci consente di determinare la dinamica interna della sorgente.

Osserviamo che la metrica di Schwarzschild presenta due singolarità, una per $r = 0$ e una per $r_G = \frac{2GM}{c^2}$. Trascuriamo per il momento la singolarità in $r = 0$ e consideriamo l'altra: per tale valore del raggio, detto raggio gravitazionale o di Schwarzschild, g_{tt} si annulla e g_{rr} diverge. Questo problema può essere affrontato in due modi, uno più pragmatico e uno concettuale: l'approccio pragmatica suggerisce che per gli oggetti celesti come la terra e il sole il raggio di Schwarzschild cade sempre all'interno della stella, ovvero in una zona dove la soluzione di Schwarzschild non vale più, pertanto la singolarità è soltanto apparente. L'approccio concettuale invece prende sul serio la singolarità: si studiano i casi in cui r_G può effettivamente cadere all'esterno della stella, come accade nel collasso gravitazionale, e si cerca di capire se questo comporti veramente una singolarità della metrica o se questa sia soltanto un artefatto della scelta di coordinate; si può mostrare in effetti che esiste un sistema di coordinate (dette *coordinate di Kruskal*) in cui la singolarità per $r = r_G$ scompare e resta soltanto quella per $r = 0$.

Tuttavia la singolarità per $r = r_G$ ha una caratterizzazione geometrica non banale: la metrica di Schwarzschild infatti è indipendente dal tempo, ovvero esiste un campo di Killing $k = \frac{\partial}{\partial t}$ con norma positiva. Ma la norma è banalmente fornita da $g_{00} = 1 - \frac{2GM}{c^2 r}$, e questo implica che sulla superficie $r = r_g$ il campo di Killing passa da time-like a light-like, mentre all'interno di questa superficie diventa addirittura space-like. La conseguenza principale è che la metrica perde la sua indipendenza dal tempo, perdendo il suo campo di Killing time-like: la superficie su cui il campo di Killing diventa light-like si dice *orizzonte di Killing*.

Moto di una particella test

In assenza di altre interazioni oltre a quella gravitazionale il moto di un pianeta test avverrà lungo geodetiche. Esplicitamente i campi di Killing relativi alla simmetria $SO(3)$ della metrica di Schwarzschild si possono esprimere come

$$\xi_i = L_i \quad i = 1, 2, 3$$

dove con L_i si intende l'espressione delle componenti del momento angolare in termini di operatori differenziali: ad esempio per la terza componente

$$\xi_3 = -\frac{\partial}{\partial \phi}$$

Sappiamo che in caso di moto geodetico ad ognuno dei tre vettori di Killing è associata una legge di conservazione:

$$\dot{x} \cdot \xi_i = C_i$$

dove ognuna delle tre leggi rappresenta la conservazione delle tre componenti del momento angolare. Dalla conservazione del momento angolare deduciamo due cose: la conservazione della direzione ci informa che il moto è planare e ci consente di scegliere un piano comodo per i calcoli, mentre la conservazione del modulo impone che

$$r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} = cost \equiv L$$

Osserviamo che la costante L ha dimensioni di un momento angolare diviso una massa. Avevamo già ricavato questa condizione cercando i Christoffel per la metrica di Schwarzschild. Osserviamo che fuori dalla superficie di Schwarzschild abbiamo anche un quarto campo di Killing, dovuto all'indipendenza dal tempo:

$$\xi_t = \frac{\partial}{\partial t}$$

Tale campo fornirà una ulteriore legge di conservazione, che assoceremo alla conservazione dell'energia

$$\xi_t \cdot \dot{x} = cost \equiv E$$

L'equazione di conservazione dell'energia della meccanica classica viene sostituita in relatività generale viene sostituita dall'equazione di conservazione dell'espressione $\sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}$, legata al ds^2 del pianeta test: nel caso il pianeta test abbia una massa M è sempre possibile porre $\sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} = 1$ (se \dot{x}^μ indica la derivata rispetto al tempo proprio), mentre se l'oggetto test è una particella massless come il fotone dovremo imporre $\sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} = 0$.

Considerando per primo il caso massivo avremo:

$$1 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \dot{t}^2 - \frac{1}{1 - \frac{2GM}{r}} \dot{r}^2 - r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 - r^2 \dot{\theta}^2$$

Nel piano $\theta = \frac{\pi}{2}$ si ha $\dot{\theta}^2 = 0$ e $\sin^2 \theta = 1$, dunque

$$r^2 \dot{\phi} = L \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{L}{r^2}$$

Se ricordiamo che $\xi_t \cdot \dot{x} = E$ possiamo scrivere

$$\begin{aligned} g_{0\mu} \dot{x}^\mu &\equiv g_{00} \dot{t} = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \dot{t} = E \\ \Rightarrow \dot{t} &= \frac{E}{1 - \frac{2GM}{r}} \end{aligned}$$

da cui

$$1 = \frac{E^2}{1 - \frac{2GM}{r}} - \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{2GM}{r}} - L^2 r^2$$

Portando alcuni termini a primo membro

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right) + \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{2GM}{r}} &= \frac{E}{1 - \frac{2GM}{r}} \\ \Rightarrow \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right) + \dot{r}^2 &= E \end{aligned}$$

Il termine $\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right)$ rappresenta un termine di potenziale effettivo: abbiamo quindi ridotto il problema a un moto unidimensionale nella variabile r . Svolgendo il prodotto:

$$\dot{r}^2 - \frac{2GM}{r} + \frac{L^2}{r^2} - \frac{2GML^2}{r^3} = E - 1$$

Un calcolo analogo in meccanica classica avrebbe prodotto gli stessi termini, escluso il termine cubico $\frac{2GML^2}{r^3}$, che costituisce la predizione originale della relatività generale. Un termine del genere non era sconosciuto agli astronomi: infatti, nello sviluppo in multipoli del potenziale newtoniano di una sorgente non perfettamente sferica (come il sole), la prima correzione utile è il termine di quadrupolo che ha esattamente un andamento del tipo $\frac{1}{r^3}$.

L'effetto del nuovo termine è il seguente: in meccanica classica inoltre il moto kepleriano è uno dei pochi esempi in cui le orbite sono chiuse grazie alla presenza del vettore di Runge-Lenz, una ulteriore costante del moto che permette di estendere la simmetria $SO(3)$ di un potenziale radiale generico a $SO(4)$. Il termine cubico distrugge questa simmetria e impedisce la chiusura delle orbite. Cercheremo adesso un'equazione per l'orbita $r(\phi)$:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\phi} &= \frac{dr}{d\tau} \frac{d\tau}{d\phi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\phi}} \\ r^2 \dot{\phi} &= L \\ \Rightarrow \left(\frac{L^2}{r^2} - \frac{2GM}{r} - \frac{2L^2GM}{r^3} \right) + \left(\frac{dr}{d\phi} \right)^2 \frac{L^2}{r^4} &= (E - 1) \end{aligned}$$

I termini generici sono potenze negative di r , questo ci suggerisce di introdurre la variabile

$$\begin{aligned} u = \frac{1}{r} &\Rightarrow \frac{du}{d\phi} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\phi} \\ \Rightarrow L^2 u^2 - 2GMu - 2GML^2 u^3 + L^2 \left(\frac{du}{d\phi} \right)^2 &= (E - 1) \end{aligned}$$

Deriviamo rispetto a ϕ :

$$\begin{aligned} 2L^2 u \frac{du}{d\phi} - 2GM \frac{du}{d\phi} - 6GML^2 u^2 \frac{du}{d\phi} + 2L^2 \left(\frac{du}{d\phi} \right) \left(\frac{d^2 u}{d\phi^2} \right) &= 0 \\ \Rightarrow \frac{d^2 u}{d\phi^2} + u - \frac{GM}{L^2} - \frac{3GM}{c^2} u^2 &= 0 \end{aligned}$$

Se trascuriamo il termine $\frac{3GM}{c^2} u^2$, l'equazione appena scritta descrive il moto di un oscillatore armonico immerso in campo gravitazionale costante: la soluzione di questa equazione è della forma

$$u = A \cos(\phi - \phi_0) + B$$

ovvero un moto armonico dove $B = \frac{GM}{L^2}$ rappresenta lo spostamento del punto di equilibrio (altrimenti in $u = 0$) dovuto al campo gravitazionale. Poichè $u = \frac{1}{r}$ otteniamo la traiettoria in coordinate polari

$$\frac{1}{r} = A \cos(\phi - \phi_0) + \frac{GM}{L^2}$$

che corrisponde all'equazione di un'ellisse, parametrizzabile in termini di oggetti noti in astronomia:

$$u = \frac{1}{p} (1 + e \cos \phi)$$

dove $e = \frac{AL^2}{GM}$ è l'eccentricità e $p = a(1 - e^2) = \frac{L^2}{GM}$. Se consideriamo anche il termine correttivo $\frac{3GM}{c^2}u^2$ non è più possibile trovare una soluzione esatta ed è necessario un approccio perturbativo: partiamo con il considerare il rapporto

$$\frac{\frac{3GM}{c^2}u^2}{\frac{GM}{L^2}} = 3\frac{u^2L^2}{c^2} = \frac{3}{c^2r^2} \left(r^2\dot{\phi} \right)^2 = 3\frac{r^2\dot{\phi}^2}{c^2} \equiv \frac{3v_\phi^2}{c^2}$$

dove v_ϕ è la velocità tangenziale del pianeta: per un pianeta come mercurio il rapporto vale $7.7 \cdot 10^{-8}$, e l'approccio perturbativo è ben giustificato. Scriveremo allora la soluzione completa u come un termine di ordine 0 e un termine di ordine 1:

$$u = u_0 + u_1$$

dove u_0 è la soluzione in assenza di perturbazione. In questo modo l'equazione del moto completa si scrive

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u - \frac{GM}{L^2} - \frac{3GMu^2}{c^2} = 0$$

$$\frac{d^2u_0}{d\phi^2} + \frac{d^2u_1}{d\phi^2} + u_0 + u_1 - \frac{GM}{L^2} - \frac{3GM}{c^2}(u_0 + u_1)^2 = 0$$

Il coefficiente del termine quadratico è già del prim'ordine, per cui possiamo approssimare $(u_0 + u_1)^2 \sim u_0^2$, inoltre poichè u_0 soddisfa le equazioni del moto i termini corrispondenti scompaiono e rimaniamo con:

$$\frac{d^2u_1}{d\phi^2} + u_1 = \frac{3GM}{c^2}u_0^2$$

Introducendo la forma esplicita di u_0 abbiamo

$$u_1'' + u_1 = \frac{3GM}{c^2}u_0^2 = \frac{3GM}{c^2}p^{-2}(1 + e \cos \phi)^2 = \frac{3GM}{c^2}p^{-2} + \frac{3GM}{c^2}p^{-2}e^2 \cos^2 \phi + 2\frac{3GM}{c^2}p^{-2}e \cos \phi$$

Fortunatamente l'equazione per u_1 è lineare, dunque possiamo utilizzare il principio di sovrapposizione per risolvere separatamente i tre contributi, sommandoli alla fine. Con il metodo della variazione delle costanti si trova

$$\begin{cases} A \\ \frac{1}{2}A \cos \phi \\ A \cos^2 \phi \end{cases} \rightarrow u_1 = \begin{cases} u_1^{(1)} = C \\ u_1^{(2)} = \frac{C}{2}\phi \sin \phi \\ u_1^{(3)} = \frac{1}{2}C - \frac{C}{6} \cos 2\theta \end{cases}$$

Verifichiamo ad esempio la seconda:

$$u_1'' + u_1 = \frac{6GM}{c^2}p^{-2}e \cos \phi$$

$$u_1 = \frac{C}{2}\phi \sin \phi$$

$$u_1' = \frac{C}{2}(\sin \phi + \phi \cos \phi)$$

$$u_1'' = \frac{C}{2}(\cos \phi + \cos \phi - \phi \sin \phi)$$

$$\Rightarrow u_1'' + u_1 = \frac{C}{2} \cos \phi$$

É sufficiente quindi prendere $C = \frac{3GM}{c^2}p^{-2} = \frac{3GM^3}{c^2L^4}$.

3.6 I test della relatività generale

3.6.1 1° test: precessione del perielio di Mercurio

Sappiamo che il termine cubico nell'equazione del moto fa sì che l'orbita non sia chiusa, ma non sappiamo quale dei tre termini correttivi alla funzione u_0 sia il vero responsabile: per capirlo, osserviamo che finché la funzione $\frac{1}{r}$ è uguagliata ad una funzione periodica dell'angolo l'orbita rimarrà chiusa per definizione. La correzione costante al più correggerà il semiasse maggiore, così come la parte costante del termine $\frac{1}{2}A - \frac{A}{6} \cos 2\theta$, mentre il termine residuo contiene comunque una funzione periodica che non altera la chiusura dell'orbita. L'unico termine che agisce in tal senso è $\frac{A}{2}\phi \sin \phi$, per cui considereremo la correzione $u_0 + u_1^{(2)}$:

$$u = p^{-1} (1 + e \cos \phi) + e \frac{GM}{2c^2 L^2} \phi \sin \phi = \frac{GM}{L^2} \left(1 + e \left(\cos \phi + \frac{3M^2 G^2}{c^2 L^2} \phi \sin \phi \right) \right)$$

A questo livello di approssimazione, poichè per $\phi \in (0, 2\pi)$ la quantità $\frac{3M^2 G^2}{L^2 c^2} \phi$ è piccola e possiamo scrivere

$$u \simeq \frac{M}{L^2} \left(1 + e \cos \left(1 - \frac{3M^2 G^2}{L^2 c^2} \right) \phi \right)$$

Infatti sviluppando il coseno della differenza:

$$\cos \left(1 - \frac{3M^2 G^2}{L^2 c^2} \right) \phi = \cos \phi \cos \frac{3M^2 G^2}{L^2} \phi + \sin \phi \sin \frac{3M^2 G^2}{L^2} \phi \sim \cos \phi + \frac{3M^2 G^2}{L^2 c^2} \phi \sin \phi$$

In questo modo è banale capire l'effetto della modifica: la perturbazione gravitazionale altera il periodo del coseno, in modo che per $\phi \in (0, 2\pi)$ la funzione non torni in se stessa. Il nuovo periodo è dato da

$$T = \frac{2\pi}{1 - \frac{3G^2 M^2}{c^2 L^2}} > 2\pi$$

ovvero l'orbita non si chiude per un tratto

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{1 - \frac{3G^2 M^2}{c^2 L^2}} - 2\pi = \frac{6\pi G^2 M^2}{c^2 L^2} = \frac{6\pi m}{a(1 - e^2)}$$

Sostituendo i valori sperimentali per a ed e si ottiene come risultato

$$\frac{\Delta\phi}{\Delta T} = 42.98''/\text{secolo}$$

Poichè il contributo di quadrupolo del campo gravitazionale classico ha la stessa forma della correzione esatta dovuta alla relatività generale dobbiamo verificare se le due correzioni sono confrontabili: il campo gravitazionale classico del sole è dato da

$$\phi(x) = -G \int \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x'$$

Possiamo effettuare lo sviluppo in multipoli

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \left(\frac{r'}{r} \right)^l \frac{1}{r} Y_{lm}^*(\hat{x}') Y_{lm}(\hat{x})$$

Al prim'ordine avremo

$$\phi(x) = -\frac{GM_0}{r} \left(1 - \sum_{l=1}^{\infty} J_l \left(\frac{R_0}{r} \right)^l P_l(\cos \theta) \right)$$

dove

$$J_l = -\frac{1}{M_0 R_0^2} \int \rho(\vec{x}') r'^l P_l(\cos \theta') d^3 x'$$

Una ipotesi ragionevole è che il sole sia un ellissoide un pò bombato, con simmetria azimutale e per riflessione rispetto a un piano orizzontale che passa per il suo centro: in tal caso l'integrale relativo al momento di dipolo è necessariamente nullo (anche perchè la carica gravitazionale, la massa, è solo positiva). Il primo contributo non nullo è quello di quadrupolo:

$$\phi = -\frac{GM_0}{r} - \frac{1}{2} \frac{GM_0 J_2 R_0^2}{r^3}$$

La correzione dovuta al quadrupolo dunque è

$$\Delta\phi_{quad} = \frac{1}{2} \frac{J_2 R_0^2}{\frac{GM_0}{c^2} a (1-e^2)} \Delta\phi_{Einstein}$$

Se sommiamo i due contributi otteniamo

$$\Delta\phi_{tot} = 42.98'' + 0.013 \left(\frac{J_2}{10^{-7}} \right)''$$

Il peso relativo della correzione di quadrupolo è stabilito da J_2 : sperimentalmente abbiamo che

$$J_2 < 0.5 \cdot 10^{-5}$$

$$\Rightarrow \Delta\phi_{tot} \sim 42.98'' + 0.5'' \sim 43''$$

La correzione lascia il risultato intorno ai $43''$, dunque la previsione è insensibile alla non perfetta sfericità del sole.

3.6.2 2° test: deviazione dei raggi di luce

Poichè i raggi di luce trasportano energia, anch'essi risentiranno della metrica dovuta alla sorgente sferica curvando la loro traiettoria. Questa fu la prima verifica sperimentale della relatività generale, dovuta a Eddington, anche se c'è il forte sospetto che l'esperimento non sia stato effettuato con le dovute misure. Il punto di partenza è lo stesso del caso di un pianeta massivo, ma stavolta la costante $\sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}$ deve essere presa uguale a zero, inoltre poichè classicamente i raggi di luce non risentono dell'attrazione gravitazionale deve sparire anche il contributo di campo gravitazionale costante. L'equazione corrispondente è quindi

$$u'' + u = 3mu^2 \quad (G = c = 1)$$

dove l'apice ancora indica la derivata rispetto all'angolo ϕ . L'approccio perturbativo in questo caso è giustificato se possiamo considerare $3mu^2$ una piccola perturbazione rispetto ad u : con una stima grossolana possiamo considerare la massa del fotone pari a $\hbar\nu = mc^2$ e ottenere

$$3m \frac{u^2}{u} \sim 10^{-6}$$

Il risultato in realtà è sbagliato per un fattore 2, ma è comunque un risultato sufficiente: consideriamo quindi un raggio di luce che si muove verso un pianeta con parametro d'impatto b :

La soluzione imperturbata è data da

$$u_0'' + u_0 = 0 \Rightarrow u_0 = \frac{\sin \phi}{b}$$

che corrisponde a

$$\frac{1}{r} = \frac{\sin \phi}{b} \Rightarrow r \sin \theta = b = \text{costante}$$

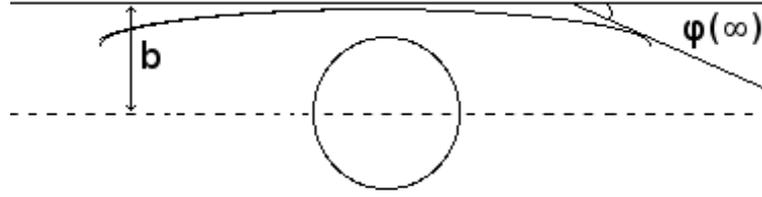


Figura 3.10: Deviazione di un raggio di luce

L'equazione per la perturbazione allora diventa

$$u_1'' + u_1 = \frac{3m}{b^2} (1 - \cos^2 \phi)$$

La correzione significativa per questo caso è la $u_1^{(3)}$:

$$C = \frac{3m}{b^2}$$

$$u_1^{(3)} = \frac{3m}{2b^2} \left(1 - \frac{1}{3} \cos 2\phi \right)$$

da cui

$$u = \frac{\sin \phi}{b} + \frac{3m}{2b^2} \left(1 - \frac{1}{3} \cos 2\phi \right)$$

Per determinare la deviazione asintotica dalla traiettoria libera, ovvero l'angolo ϕ_∞ , dobbiamo mandare $r \rightarrow \infty$ nell'espressione dell'orbita. Poichè ci aspettiamo che ϕ_∞ sia piccolo possiamo espandere seno e coseno:

$$0 = \frac{\phi_\infty}{b} + \frac{3m}{2b^2} \left(1 - \frac{1}{3} \right) \Rightarrow \phi_\infty = -\frac{2m}{b}$$

Siamo interessati all'angolo di scattering $\Delta\phi$, che è legato a ϕ_∞ dalla relazione

$$\Delta\phi = 2\phi_\infty = \frac{4m}{b} \equiv \frac{4Gm}{c^2 b}$$

Un altro modo per verificare questo effetto è collocare su due pianeti un emettitore e un ricevitore, e misurare la differenza di tempo nella propagazione dei segnali a seconda che il sole si trovi o meno tra i due pianeti. Per fare questo conto, si riscrive l'equazione di conservazione dell'energia ma stavolta in termini del tempo:

$$\dot{r}^2 = E^2 - \left(1 - \frac{2m}{r} \right) \frac{L^2}{r^2}$$

Quindi si usa il fatto che $\frac{L}{E}$ è legato al raggio di massimo avvicinamento al sole r_0 :

$$\begin{aligned} \left(\frac{L}{E} \right)^2 &= \frac{r_0^2}{1 - \frac{2m}{r_0}} \\ \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{-3} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 &= \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1} - \left(\frac{L}{E} \right)^2 \frac{1}{r^2} \\ \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{-3} \dot{r}^2 + \left(\frac{r_0}{r} \right) \frac{1}{1 - \frac{2m}{r_0}} - \frac{1}{1 - \frac{2m}{r}} &= 0 \end{aligned}$$

Questa equazione si può risolvere per quadrature, e si ottiene che il tempo per arrivare da r partendo da r_0 è

$$t(r, r_0) = \int_{r_0}^r \frac{dr}{1 - \frac{2m}{r}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1 - \frac{2m}{r}}{1 - \frac{2m}{r_0}} \left(\frac{r_0}{r}\right)}}$$

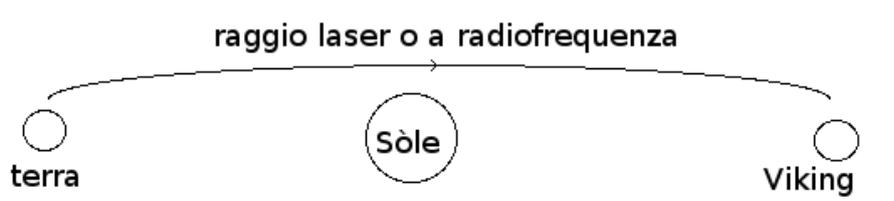


Figura 3.11: Esperimento della sonda Viking

Il tempo necessario al raggio per arrivare dalla terra alla sonda è:

$$t = t(r_1, r_0) + t(r_2, r_0) \equiv t_{12}$$

Ci ricordiamo che $\frac{2mG}{rc^2}$ è piccolo, dunque possiamo approssimare l'integrale

$$t(r, r_0) \simeq \int_{r_0}^r \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{2m}{r} + \frac{mr_0}{r(r+r_0)}\right) \simeq \frac{1}{c} \left[\sqrt{r^2 - r_0^2} + 2m \log \left(\frac{r + \sqrt{r^2 - r_0^2}}{r_0} \right) + m \left(\frac{r - r_0}{r + r_0} \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

Restaurando la costante c , osserviamo che $\frac{1}{c} \sqrt{r^2 - r_0^2}$ è esattamente il tempo che impiegherebbe il raggio se si muovesse in linea retta. Per migliorare la precisione possiamo considerare oltre all'andata anche il ritorno del raggio, per cui

$$\Delta t = 2t_{12} - 2\sqrt{r_1^2 - r_0^2} - 2\sqrt{r_2^2 - r_0^2} = 4m \log \left(\frac{(r_1 + \sqrt{r_1^2 - r_0^2})(r_2 + \sqrt{r_2^2 - r_0^2})}{r_0^2} \right) + 2m \left(\sqrt{\frac{r_1 - r_0}{r_1 + r_0}} + \sqrt{\frac{r_2 - r_0}{r_2 + r_0}} \right)$$

Nell'approssimazione in cui $r_0 \ll r_1, r_2$, otteniamo infine

$$\Delta t = 4m \left(\log \left(\frac{4r_1 r_2}{r_0^2} \right) + 1 \right)$$

Sostituendo i valori otteniamo $\Delta t = 72Km \equiv 240\mu s$, in accordo con i dati della sonda Viking.

3.6.3 3° test: emissione di quadrupolo

Avevamo visto che un sistema binario in teoria emette energia sotto forma di onde gravitazionali, e conseguentemente il suo periodo di rotazione diminuisce: questa diminuzione è misurabile sperimentalmente, e può portare ad una misura indiretta dell'energia delle onde gravitazionali emesse. L'esperimento fu effettuato e trovò accordo con la relatività generale nell'ordine di $\frac{1}{1000}$, fruttando all'autore il premio Nobel.

3.7 Esercizi

1. Mostrare che variando rispetto a $g^{\mu\nu}$ l'azione del campo scalare

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} g^{\alpha\mu} \nabla_\mu \phi \nabla_\alpha \phi$$

si ottiene il tensore energia-impulso

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi$$

2. Determinare le equazioni del moto della particella libera e del fluido perfetto imponendo che i rispettivi tensori energia-impulso siano covariantemente conservati.
3. Calcolare il potenziale del sole nel sistema solare e controllare l'entità della deviazione di g^{00} dall'unità.
4. Verificare che nella teoria linearizzata il tensore di Riemann trasforma come

$$R^\lambda{}_{\alpha,\mu\nu} = {}^B R^\lambda{}_{\alpha,\mu\nu} + \epsilon ({}^B \nabla_\mu \Lambda^\lambda_{\alpha\nu} - \nabla_\nu \Lambda^\lambda_{\alpha\mu})$$

Hint: alcuni termini utili si cancellano dunque vanno sommati e sottratti a mano.

5. Calcolare il momento di quadrupolo del sistema binario, data la componente

$$T^{00} = M \delta(x^3) (\delta(x_a^1 - r \cos \Omega t) \delta(x_a^2 - r \sin \Omega t) + \delta(x_b^1 + r \cos \Omega t) \delta(x_b^2 + r \sin \Omega t))$$

e la relazione

$$\tilde{Q}^{ij} = 3 \int d^3y y^i y^j \tilde{T}^{00}$$

6. Calcolare il flusso di energia gravitazionale di un sistema binario usando il $G_{\mu\nu}$ linearizzato, e verificare che esso scala col modulo quadro del momento di quadrupolo Q_{ij} .
7. trovare i vettori di Killing della metrica piatta, e mostrare che ad essi corrisponde la conservazione dell'impulso e del momento angolare.
8. Considerare un gruppo, e il campo vettoriale che definisce le traslazioni destre: trovare le linee integrali e scoprire che sono definite dall'esponenziale $e^{\lambda T}$.
9. Determinare i simboli di Christoffel relativi alla metrica con simmetria sferica, usando l'equazione delle geodetiche.
10. Scrivere l'espressione del vettore di Runge-Lenz.