Complementi di metodi matematici - Teoria dei Gruppi

Lunedì 17 novembre

Dato un certo spazio, esistono delle trasformazioni che possiamo fare su di esso. Per le trasformazioni che ci interessano richiederemo caratteristiche semplici, ad esempio deve esistere una trasformazione particolare che lascia tutto invariato, detta identità, inoltre si vuole che le trasformazioni siano invertibili e che valga la proprietà associativa. In fisica di solito queste proprietà sono garantite, e quando un sistema risulta invariante sotto un certo tipo di trasformazioni la sua descrizione è semplificata. Ad esempio possiamo considerare un filo carico (infinito) percorso da corrente: ci aspetteremo che data l'invarianza per traslazioni lungo il filo, e l'invarianza per rotazioni attorno all'asse del filo stesso, il campo elettrico generato non possa essere che radiale.

Le tre richieste che abbiamo fatto alle trasformazioni sono state codificate nella definizione di gruppo:

Definizione 0.1. Un gruppo $(G, \cdot)$ è un insieme G con una legge di composizione binaria:

$$\cdot : G \times G \to g$$

$$(g_1, g_2) \mapsto g = g_1 g_2$$

tale che

1. É associativa:
$$(g_1 g_2) g_3 = g_1 (g_2 g_3) \quad \forall g_1, g_2, g_3 \in G$$

2. Esiste un elemento neutro e tale che
$$ge = eg = g \quad \forall g \in G$$

3. Per ogni $g \in G$, esiste l'inverso g^{-1} tale che
$$g^{-1} g = g g^{-1} = e$$

In generale non richiediamo che $g_1 g_2 = g_2 g_1$. Se questo accade $\forall g_1, g_2 \in G$, G si dice commutativo o abeliano.

Esistono gruppi di trasformazioni con un numero finito di elementi oppure infinito, o ancora il numero di elementi può essere infinito discreto o continuo.

Tra i gruppi finiti possiamo considerare i gruppi di simmetria delle figure piane, ovvero tutte le trasformazioni che mandano una figura in sè. Per un poligono regolare di n lati il gruppo di simmetria contiene $2n$ elementi, n rotazioni di un angolo pari o multiplo di $\frac{2\pi}{n}$, e n riflessioni rispetto agli assi di simmetria. Questi gruppi trovano applicazione in fisica molecolare, nello studio delle molecole simmetriche. Un esempio aritmetico di gruppi finiti può essere $(\mathbb{Z}, +)$, ovvero l'insieme dei numeri razionali con la somma, oppure le classi di resto: se prendiamo due numeri interi n e m, la loro divisione in generale darà origine a un quoziente e a un resto

$$\frac{m}{n} = q + r$$

Per ogni n, abbiamo n resti possibili, $0, 1, ..., n-1$, e tutti i numeri che divisi per n danno uno di questi resti formano una classe di equivalenza $''$modulo n''.

Se consideriamo uno spazio vettoriale V, possiamo pensare ad un cambio di base. Se la dimensione di V è n, avremo una base iniziale $\{e_i\}_{i=1,...,n}$, e una finale $\{\tilde{e}_k\} = A_{ki}e_k$ dove A_{ki} sono elementi di una matrice $n \times n$ non degenere, quindi con $\det A \neq 0$. Se prendiamo l'insieme di tutte le trasformazioni di base, questo prende il nome di $GL(n)$, e corrisponde all'insieme di tutte le matrici $n \times n$ non degeneri. Si verifica subito che $GL(n)$ col prodotto tra matrici è un gruppo, infatti l'identità $diag(1, ..., 1)$ sta in $GL(n)$, il prodotto tra matrici è associativo, e se il determinante è diverso da zero le matrici sono invertibili e l'inversa sta ancora in $GL(n)$. $GL(n)$ è detto *gruppo generale lineare di ordine n*.

Se vogliamo restringerci, possiamo considerare soltanto le basi ortonormali rispetto al prodotto euclideo standarn. Le matrici che fanno passare da una base ortonormale ad un'altra sono matrici tali che se $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, allora per $\tilde{e}_i = O_{ki}e_k$ si continua ad avere

$$\langle \tilde{e}_i, \tilde{e}_j \rangle = \delta_{ij}$$

ma allora

$$\langle \tilde{e}_i, \tilde{e}_j \rangle = \langle O_{ki}e_k, O_{lj}e_l \rangle = O_{ki}O_{lj}\langle e_k, e_l \rangle = O_{mi}O_{mj}$$
$$\Rightarrow (O^TO)_{ij} = \delta_{ij}$$

cioè O è una matrice ortogonale. Se P, Q sono due matrici ortogonali, si ha che anche il prodotto (PQ) è ortogonale, infatti

$$(PQ)^T(PQ) = Q^TP^TPQ = Q^TQ = I$$

sfruttando l'associatività del prodotto tra matrici. Poichè $\det(O^TO) = \det I = 1$, e $\det O^T = \det O$, si ha che le matrici ortogonali hanno determinante ± 1. Anche le matrici ortogonali formano un gruppo, il **gruppo ortogonale** $O(n)$. Il sottoinsieme di $O(n)$ formato dalle matrici con determinante 1 è ancora un gruppo, e viene indicato con $SO(n)$, il **gruppo speciale ortogonale**.

Le matrici del gruppo ortogonale conservano il prodotto scalare dato dalla forma quadratica $g_{ij} = \delta_{ij}$, infatti

$$\langle Ox, Oy \rangle = \langle O^TOx, y \rangle = \langle x, y \rangle$$

In caso la geometria sia complessa, e non abbiamo più un prodotto scalare ma un prodotto hermitiano

$$\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$$

possiamo chiederci quali siano le trasformazioni che mantengono tale prodotto. Se u, v sono vettori complessi si ha che

$$\langle Uu, Uv\rangle = \langle U^\dagger Uu, v\rangle$$

Allora $\langle Uu, Uv\rangle = \langle u, v\rangle$ se e solo se $U^\dagger U = I$, cioè la matrice U è unitaria. Ancora, $\det(U^\dagger U) = 1$, da cui $|\det U|^2 = 1$ quindi $\det U = e^{i\theta}$, con $\theta \in \mathbb{R}$. Le matrici con questa proprietà formano il **gruppo unitario** $U(n)$. Se ci restringiamo a quelle per cui $\det U = 1$, abbiamo il gruppo $SU(n)$.
Esercizio:trovare la forma generale di una matrice di $SU(2)$.
Risposta:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C} : |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

La caratterizzazione delle matrici di $SU(2)$ ci dice qualcosa dal punto di vista geometrico? Se $\alpha = x + iy$ e $\beta = z + iw$, la condizione $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ diventa

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$$

che è l'equazione per una sfera S^3 immersa in $\mathbb{R}^4$. Dunque il gruppo $SU(2)$ visto come spazio geometrico è una sfera S^3; questo significa che ogni punto della sfera S^3 corrisponde ad una trasformazione, e presi due punti, abbiamo una trasformazione che li porta in un terzo punto della sfera. Dunque la struttura algebrica definisce una struttura geometrica, e le proprietà dei punti vengono definite dall'algebra.

Giovedì 20 novembre

La geometrizzazione dei gruppi continui significa riconoscere che un gruppo continuo è anche una varietà differenziabile, le cui coppie di punti possono essere composti. Ad esempio $SU(2)$, l'insieme delle matrici della forma

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$
$$|\alpha|^2|\beta|^2 = 1$$

geometricamente corrisponde ad una sfera S^3. Si parla di dimensione di un gruppo in relazione alla sua dimensione come varietà, ovvero al numero di parametri che servono per descrivere i suoi punti. Se prendiamo $SU(2)$ questa ha bisogno di tre coordinate, dunque $dim(SU(2)) = 3$.

Per il gruppo generale si ha che una generica matrice di $GL(n, \mathbb{K})$ ha la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & . & . & a_{nn} \end{pmatrix} \quad a_{ij} \in \mathbb{K} \quad , \quad \det A \neq 0$$

Quando abbiamo una condizione $f(x_1, ..., x_n) = 0$, questa rappresenta una varietà di codimensione 1 nello spazio dei parametri su cui è definita. Ogni vincolo di questo genere toglie una dimensione a tale spazio, ad esempio se consideriamo il piano $\mathbb{R}^2$ e il sistema

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ dx + ey + f = 0 \end{cases}$$

Questo sistema, se ha soluzioni, rappresenta l'intersezione tra due rette, ovvero un punto.

Viceversa, avere una condizione $f(x_1, ..., x_n) \neq 0$ non riduce la dimensione, proprio perchè stiamo escludendo un oggetto di dimensionalità inferiore a quella dello spazio totale. Dunque, il vincolo di determinante non nulla non riduce la dimensione del gruppo $GL(n, \mathbb{K})$, che è

$$dim_{\mathbb{K}} GL(n, \mathbb{K}) = n^2$$

Viceversa, il gruppo $SL(n\mathbb{K})$ delle matrici con determinante uguale a 1 ha dimensioni

$$dim_{\mathbb{C}} SL(n, \mathbb{C}) = n^2 - 1$$

$$dim_{\mathbb{R}} SL(n, \mathbb{C}) = 2n^2 - 2$$

perchè la condizione di $\det A = 1$ si traduce in un vincolo reale $(= 1)$ e uno immaginario $(= 0)$.

Se consideriamo in particolare $SO(2)$, il gruppo delle matrici 2×2 ortogonali, abbiamo:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SO(2) \Rightarrow ad - bc = 1$$

$$M^T M = M M^T = I$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = 1, & \Rightarrow a = \cos\theta \ , \ c = \sin\theta; \\ b^2 + d^2 = 1, & \Rightarrow b = \sin\phi \ , \ d = \cos\phi; \\ ab + cd = 0, & \Rightarrow \sin\phi\cos\theta + \sin\theta\cos\phi = 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sin(\theta + \phi) = 0 \Rightarrow \phi = -\theta + k\pi$$

É possibile avere k pari o dispari, la scelta dà luogo a matrici della forma:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{(k pari)}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{(k dispari)}$$

Le matrici di $O(2)$, e più in generale quelle di $O(n)$, possono avere determinante 1 o -1. Possiamo considerare un angolo speciale, $\theta = 0$, allora abbiamo le matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La prima delle due appartiene a $S = (2)$ ed è l'identità.

Per i gruppi continui, abbiamo detto che si possono vedere come varietà differenziabili, e hanno un elemento privilegiato, l'identità. L'identità di $O(2)$ sta in $SO(2)$, mentre le matrici dell'altro sottoinsieme non dipendono da una variabile continua (θ) ma da una variabile iscreta (k). Si dice che geometricamente la condizione di determinante +1 o -1 disconnette $O(2)$, oppure il gruppo $O(2)$ è topologicamente disconnesso, mentre $SO(2)$ è connesso. Sempre geometricamente, $SO(2)$ è una circonferenza, mentre le matrici ortogonali con determinante -1 sono sempre una circonferenza ma non sono più un gruppo. Se ci limitiamo a studiare la parte connessa all'identità di un gruppo, possiamo determinare il numero di parametri continui che ci servono.

Consideriamo

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

L'identità I corrisponde alla scelta del parametro $\theta = 0$. Ma θ è un parametro continuo, possiamo pensare di spostarci poco e sviluppare al primo ordine:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = I + \theta A_2$$

Scopriamo così che la matrice A_2 è costante e antisimmetrica; anche le matrici antisimmetriche 2×2 dipendono da un solo parametro, e il numero di parametri che ci vogliono per descrivere una trasformazione finita è lo stesso del numero di parametri che serve per le matrici ″infinitesime″: in altre parole, la trasformazione finita può essere ottenuta mediante uno sviluppo in serie, iterando tante moltiplicazioni successive di $I + \theta A_2$.

Sia A uan matrice di $O(n\mathbb{R})$. Per matrici infinitesime

$$A \simeq I + \epsilon T$$

dove T non la conosciamo; possiamo però conoscere le sue proprietà in base a quelle di A imponendo che al prim'ordine

$$A^T A = I$$

$$(I + \epsilon T)^T (I + \epsilon T) = I$$

$$I + \epsilon T^T + \epsilon T = I$$

$$\Rightarrow T^T + T = 0$$

dunque T è una matrice antisimmetrica. Se T è una matrice $n \times n$, il numero di parametri che sono sufficienti per descriverla è $\frac{1}{2}n(n-1) \equiv \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix}$. L'idea adesso è di iterare una trasformazione infinitesima, sperando che questo porti ad un risultato finito:

$$A = (I + \epsilon T)^n$$

supponiamo $\epsilon = \frac{1}{n}$. Essendo T antisimmetrica, ci aspettiamo che al limite, A sia una matrice ortogonale.

Sappiamo che per l'esponenziale di un numero reale o complesso vale lo sviluppo

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Quando abbiamo una sola matrice, questa commuta con se stessa, dunque per operazioni di tipo polinomiale possiamo considerarla come un numero; ha senso quindi definire

$$e^T = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{n!}$$

una volta che abbiamo verificato che essa converge; infatti si ha

$$\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{n!} \| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|T^n\|}{n!} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|z\|^n}{n!} = e^{\|T\|} < \infty$$

Verifichiamo anche che e^T è ortogonale:

$$e^T (e^T)^T = I$$

Se due matrici A e B commutano, si ha che

$$e^A e^B = e^{A+B}$$

In questo caso

$$(e^T)^T = e^{T^T}$$

ma $T^T = -T$

$$e^T (e^T)^T = e^T e^{-T} = e^{T-T} = I$$

Dalla trattazione seguirebbe che l'esponenziazione è in qualche modo l'analogo di un integrale, visto che siamo passati da uno sviluppo in serie (e quindi una derivata prima) alla matrice iniziale mediante un esponenziale. In effetti possiamo vedere che è proprio così, sia

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\frac{dA}{d\theta} = \begin{pmatrix} -\sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\frac{dA}{d\theta} A^{-1} = \begin{pmatrix} -\sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{dA}{d\theta} A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{dA}{d\theta} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A$$

e questa è un'equazione differenziale in θ con coefficiente costante $K = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. La soluzione è

$$A = A(0)e^{K\theta}$$

Ma $A(0) = I$, quindi

$$A = e^{K\theta}$$

dove K è antisimmetrica. Sviluppando al prim'ordine si riottiene il risultato di prima.

Allo stesso modo si può sviluppare le matrici di $U(n)$:

$$U \simeq I + \epsilon T$$

$$(I + \epsilon T)^\dagger (I + \epsilon T) = I + \epsilon(T^\dagger + T) = I$$

$$T^\dagger + T = 0$$

$$U(n) \ni U = e^{T\theta}$$

con T antihermitiana. Se richiediamo anche che il determinante sia 1, questo si traduce in una condizione sulla traccia della matrice esponenziata, quindi $SU(n)$ è dato dall'esponenziazione delle matrici antihermitiane a traccia nulla. Il numero di parametri necessario per descrivere $U(n)$ è dato come per le matrici ortogonali da $\frac{n^2-n}{2}$, stavolta moltiplicato due perchè le matrici sono ad elementi complessi, inoltre stavolta la diagonale può essere composta da n elementi immaginari pure, quindi in definitiva servono n^2 parametri. Per $SU(n)$ la traccia nulla elimina un grado di libertà e si ha $n^2 - 1$.

Una classe generale di trasformazioni che si hanno in fisica sono quelle che mantengono una forma quadratica. Ad esempio se consideriamo uno spazio vettoriale $\mathbb{K}^n$, e prendiamo due vettori x e y in questo spazio, possiamo definire una trasformazione

$$f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$$

a cui richiediamo di conservare le lunghezze (e di essere continua):

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

Vogliamo sapere di più su f; possiamo pensare che in general epossa essere una trasformazione orrenda, in realtà dimostreremo che se deve conservare le distanze non può essere che lineare. Se è lineare, esiste una matrice che le corrisponde, quindi torniamo a parlare di gruppi di matrici. Possiamo dire che

$$|x - y|^2 = (x - y)^T Q(x - y) = \langle x - y, x - y \rangle$$

dove Q è una forma quadratica che senza perdere in generalità possiamo scegliere simmetrica.

Proposizione 0.0.1. *Se la funzione f conserva le lunghezze, f è **lineare** (o meglio **affine**).*

Dimostrazione. Possiamo sempre richiedere che $f(0) = 0$, altrimenti prendiamo

$$F(x) = f(x) - f(0)$$

Se $F(x)$ è lineare, $f(x)$ è una trasformazione affine, ovvero lineare a meno di traslazioni. Risulta

$$|F(x) - F(y)| = |f(x) - f(0) - f(y) + f(0)| = |f(x) - f(y)|$$

In particolare abbiamo che

$$|f(x) = |x|$$

allora risulta

$$\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$$

infatti:

$$\langle f(x) - f(y), f(x) - f(y)\rangle = \langle x - y, x - y\rangle$$
$$\langle f(x), f(x)\rangle + \langle f(y), f(y)\rangle - 2\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle - 2\langle x, y\rangle$$
$$\Rightarrow \langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$$

Come passo finale dimostriamo la linearità:

$$|f(x + y) - f(x) - f(y)|^2 = 0$$

$$|f(x + y)|^2 + |f(x)|^2 + |f(y)|^2 - 2\langle f(x + y), f(x)\rangle - 2\langle f(x + y), f(y)\rangle + 2\langle f(x), f(y)\rangle =$$
$$= |x + y|^2 + x^2 + y^2 - 2\langle x + y, x\rangle - 2\langle x + y, y\rangle + 2\langle x, y\rangle = 0$$

□

La condizione di conservazione di una forma quadratica è dunque

$$(Ax)^\dagger Q(Ax) = x^\dagger Qx$$

L'insieme di tutte le matrici A che conservano Q forma un gruppo. Ci occuperemo di forme quadratiche non degeneri, dunque invertibili, e potremo riscrivere la condizione in generale come

$$A^\dagger QA = Q$$
$$A^\dagger Q = QA^{-1}$$
$$\Rightarrow A^{-1} = Q^{-1}A^\dagger Q$$

Vediamo che se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $Q = I$, ovvero le matrici A conservano il prodotto scalare euclideo, si trova che

$$A^{-1} = A^T$$

Se Q è la matrice $diag(\underbrace{1, ..., 1}_{p}, \underbrace{-1, ..., -1}_{q})$, le matrici che la conservano formano un gruppo detto $O(p, q)$. Un particolare gruppo di questo tipo è il gruppo proprio di Lorentz $SO(1, 3)$. Se $Q \in M^{2n\times 2n}$ è

$$\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

le matrici che la conservano formano il cosiddetto gruppo simplettico $Sp(n)$.

Per il gruppo di Lorentz in due dimensioni abbiamo

$$Q_L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^T Q_L A = Q_L$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 - c^2 = 1, & \Rightarrow a = \cosh u \ , \ c = \sinh u; \\ b^2 - d^2 = 1, & \Rightarrow d = \cosh v \ , \ b = \sinh v; \\ ab - cd = 0, & \Rightarrow \sinh(u - v) = 0 \Rightarrow u = v. \end{cases}$$

dunque le trasformazioni di Lorentz in due dimensioni sono della forma

$$A = \begin{pmatrix} \cosh u & \sinh u \\ \sinh u & \cosh u \end{pmatrix}$$

Possiamo definire anche stavolta dei parametri $\beta = \tanh u$ e $\gamma = \cosh u$ in modo tale che

$$A = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}$$

Confronti tra gruppi e spazi vettoriali

Identifichiamo una struttura come un insieme con delle operazioni definite su di esso. Se dobbiamo confrontare due strutture dello stesso tipo siamo interessati ad operazioni che ne conservino la struttura; ad esempio, per confrontare gli spazi vettoriali si usano le applicazioni lineari. In generale, dobbiamo definire le operazioni tra strutture algebriche dello stesso tipo, **gli omomorfismi**.

Definizione 0.2. Siano G e H gruppi. L'applicazione

$$\phi : G \to H$$

si dice omomorfismo di gruppi se $\forall g_1, g_2 \in G$, $e \in G$, risulta

$$\phi(g_1 g_2) = \phi(g_1)\phi(g_2)$$

e

$$\phi(e_G) = e_H$$

In particolare,

$$\phi(e_G) = \phi(gg^{-1}) = \phi(g)\phi(g^{-1}) = e_H$$

$$\Rightarrow \phi(g^{-1}) = \phi(g)^{-1}$$

Definizione 0.3. $S \subseteq G$ si dice sottogruppo di G se $(S, \cdot_G)$ è un gruppo, e si indica con $S \prec G$.

Esempio: consideriamo $(\mathbb{Z}, +) = G$ e $(2\mathbb{Z}, +) = S$.

Definizione 0.4. Sia $\phi : G \to H$ un omomorfismo. Definiamo il nucleo di ϕ come

$$\ker \phi = \{g \in G | \phi(g) = e_H\}$$

e l'immagine di ϕ come

$$Im\phi = \{h \in H | \exists g \in G \ , \ \phi(g) = h\}$$

Proposizione 0.0.2. *Sia $\phi : G \to H$ un omomorfismo. Allora $\ker \phi \prec G$ e $Im\phi \prec H$.*

Dimostrazione.

Lemma 0.0.3 (Critero per dimostrare che un sottoinsieme di un gruppo è un sottogruppo)**.** *Sia $S \subseteq G$. $S \prec G$ se e solo se $e \in S$, e $\forall a, b \in S$, $ab^{-1} \in S$.*

Dimostrazione del lemma. Per ipotesi, preso $g \in S$, $gg^{-1} \in s$, ma $gg^{-1} = e$ dunque l'identità sta in S.

Dobbiamo dimostrare adesso che il prodotto di due elementi e l'inverso di ogni elemento di S stanno in S. Siccome $e \in S$, allora se $g \in S$, sempre per ipotesi che $eg^{-1} \in s$, ma $eg^{-1} = g^{-1}$ dunque $g^{-1} \in S$. Adesso, preso $a \in S$ e $b^{-1} \in S$, abbiamo che $a(b^{-1})^{-1}$ sta in S, ma $a(b^{-1})^{-1} = ab$ dunque $ab \in S$ □

Dimostriamo che il nucleo di ϕ è un sottogruppo di G. Siano $a, b \in \ker \phi$; allora $\phi(a) = \phi(b) = e$. Dobbiamo provare che $ab^{-1} \in \ker \phi$:

$$\phi(ab^{-1}) = \phi(a)\phi(b^{-1}) = \phi(a)\phi(b)^{-1} = ee^{-1} = 0 \Rightarrow ab^{-1} \in \ker \phi$$

Per l'immagine, siano $h_1, h_2 \in Im\phi$. Allora esistono $g_1, g_2 \in G$ tali che $\phi(g_1) = h_1$ e $\phi(g_2) = h_2$. Vogliamo provare che esiste un elemento di G tale che $h_1 h_2^{-1} \in Im\phi$:

$$\phi(g_1 g_2^{-1}) = \phi(g_1)\phi(g_2^{-1}) = \phi(g_1)\phi(g_2)^{-1} = h_1 h_2^{-1}$$

dunque $h_1 h_2^{-1} \in Im\phi$. □

Definizione 0.5. Siano G, H gruppi. Definiamo il prodotto cartesiano $G \times H$ come

$$G \times H = \{(g, h) | g \in G \ , \ h \in H\}$$

Su $G \times H$ possiamo definire una struttura di gruppo, esattamente come nel caso del prodotto cartesiano di spazi vettoriali, in questo modo:

$$e_{G \times H} = (e_G, e_H)$$

Se (g_1, h_1) e (g_2, h_2) appartengono a $G \times H$, definiamo la moltiplicazione tra elementi del gruppo come

$$(g_1, h_1)(g_2, h_2) = (g_1 g_2, h_1 h_2)$$

In particolare, risulta che

$$(g, h)^{-1} = (g^{-1}, h^{-1})$$

Definizione 0.6. Sia G un gruppo, e $H \prec G$. Introduciamo la seguente notazione: indicheremo con gH l'insieme di tutti i gh, con $g \in G$ e $h \in H$.

Definiamo adesso la seguente relazione di equivalenza: diremo che $g_1 \sim g_2$ modulo H se $g_1 g_2^{-1} \in H$. L'analogo per spazi vettoriali si ha se prendiamo il piano $\mathbb{R}^2$, e un sottospazio $W \simeq \mathbb{R}^1$, e preso un vettore $u \in \mathbb{R}^2$, consideriamo tutti i vettori v tali che $u - v \in W$.

Per i gruppi l'analogia però si ferma molto prima: mentre per lo spazio vettoriale la classe di equivalenza ha ancora struttura di spazio vettoriale, le classi di equivalenza di un gruppo non conservano in generale la struttura di gruppo.

Dimostrazione. La relazione $\sim$ sopra definita è una relazione di equivalenza:

$$g \sim g \ \ , \ \ gg^{-1} = e \in H$$

$$g_1 \sim g_2 \Rightarrow g_2 \sim g_1$$

Infatti se $g_1 g_2^{-1} \in H$, poichè $H \prec G$, anche $(g_1 g_2^{-1})^{-1} = g_2 g_1^{-1} \in H$.

$$g_1 \sim g_2, \ g_2 \sim g_3 \Rightarrow g_1 \sim g_3$$

Infatti se $g_1 g_2^{-1}$ e $g_2 g_3^{-1}$ stanno in H, ci sta anche il loro prodotto $g_1 g_2^{-1} g_2 g_3^{-1} = g_1 g_3^{-1}$. □

Se abbiamo una classe di equivalenza abbiamo una partizione dell'insieme di partenza.

Definizione 0.7. Sia $H \prec G$. Chiameremo **classe laterale sinistra** (*destra*) di H in G ogni sottoinsieme di G dato da

$$gH \ (Hg) \ \ , \ \ g \in G$$

Osservazione: le classi laterali o sono coincidenti o sono disgiunte.

Dimostrazione. Siano $g_1 H$ e $g_2 H$ classi laterali, e sia $g_1 H \cap g_2 H \neq \emptyset$. Allora esiste g che sta sia in $g_1 H$ che in $g_2 H$, dunque esistono h_1, h_2 tali che $g = g_1 h_1 = g_2 h_2$. Ma poichè H è sottogruppo esiste $h_2^{-1} \in H$, e possiamo scrivere

$$g_1 h_1 = g_2 h_2 \Rightarrow g_1 h_1 h_2^{-1} = g_2$$

cioè $g_2 \in g_1 H$, oppure $g_2 g_1^{-1} \in H$, o ancora $g_2 \simeq g_1$ e dunque $g_2 H = g_1 H$. □

Le classi laterali in generale non sono sottogruppo, ma se abbiamo gH, e $a \in G$, l'operazione $a(gH)$ ci manda in agH. Dunque possiamo operare col gruppo sullo spazio delle classi laterali passando da una all'altra. Questo rende le classi laterali uno spazio omogeneo.

Consideriamo come esempio le matrici di $SU(2)$:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \ \ , \ \ |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

Se $\alpha \in \mathbb{C}$, si può scrivere come $ae^{i\phi}$, dunque le matrici di $SU(2)$ si riscrivono come

$$\begin{pmatrix} ae^{i\phi} & \beta \\ -\bar{\beta} & ae^{-i\phi} \end{pmatrix} \ \ , \ \ a^2 + |\beta|^2 = 1$$

Consideriamo il sottoinsieme $U(1) \subseteq SU(2)$:

$$\left\{ \begin{array}{cc} e^{i\phi} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi} \end{array} \right\} \quad , \quad \phi \in \mathbb{R}$$

Tale sottoinsieme è anche un sottogruppo, infatti per $\phi = 0$ si riottiene l'identità, e $e^{i\phi}e^{i\theta} = e^{i(\phi+\theta)}$. Vogliamo vedere le classi laterali di $U(1)$ in $SU(2)$:

$$\begin{pmatrix} ae^{i\phi} & \beta \\ -\bar{\beta} & ae^{-i\phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\phi} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae^{i(\phi+\psi)} & \beta e^{-i\psi} \\ -\bar{\beta}e^{i\psi} & ae^{-i(\phi+\psi)} \end{pmatrix}$$

Se scegliamo come rappresentante per $SU(2)$ l'elemento con $\phi = 0$, per ogni elemento della classe laterale si avrà:

$$\begin{pmatrix} ae^{i\psi} & \beta e^{-i\psi} \\ -\bar{\beta}e^{i\psi} & ae^{-i\psi} \end{pmatrix} \quad , \quad a^2 + \beta_x^2 + \beta_y^2$$

dunque questa è la forma degli elementi della classe laterale che abbiamo ottenuto. Come abbiamo visto $SU(2) \simeq S^3$, mentre $U(1) \simeq S^1$. Lo spazio delle classi laterali si indica con $G \backslash H$, e in generale non sarà un gruppo. In questo caso $SU(2) \backslash U(1) = S^2$.

Proposizione 0.0.4. *Sia G gruppo e $H \prec G$, allora:*
Esiste una iniezione di H in G.
Esiste una proiezione di G in $G \backslash H$.
Siccome $\backslash H$ in generale non è un gruppo, la proiezione non sarà un omomorfismo.

L'iniezione è

$$h \in H, h \mapsto h \in G$$

la proiezione invece

$$g \in G \mapsto gH \in G \backslash H$$

Lunedì 24 novembre

Le classi laterali formano una partizione del gruppo, e o coincidono oppure sono disgiunte. Per gruppi finiti abbiamo diverse conseguenze importanti, ad esempio il

Teorema 0.0.5 (Teorema di Cayley)**.** *Ogni gruppo finito è un sottogruppo di S_n, il gruppo delle permutazioni di n oggetti:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & . & . & n \\ \pi(1) & \pi(2) & . & . & \pi(n) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

L'identità è data da

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

S_n ha dei sottogruppi naturali, che sono le permutazioni che lasciano fermo uno o più oggetti permutando gli altri. Sia G un gruppo, e l'ordine di G sia

$$|G| = n$$

Definiamo $\phi_g : G \to G$ tale che

$$G \ni a \mapsto \phi_g(a) = ga$$

Osserviamo che ϕ_g non è un omomorfismo, infatti

$$\phi_g(ab) = gab \neq gagb$$

Mostreremo adesso che ϕ_g è una permutazione degli elementi di G. Se abbiamo $\phi_g(x) = \phi_g(y)$, necessariamente $x = y$ perchè

$$gx = gy$$

$$g^{-1}gx = g^{-1}gy \Rightarrow x = y$$

questo significa che la funzione ϕ è iniettiva, o anche che non lascia fermo nessun elemento. Mostriamo adesso che è anche surgettiva: prendiamo $x \in G$, sicuramente avremo un elemento $y \in G$ tale che $\forall g \in G$ si abbia

$$\phi_g(y) = x$$

infatti

$$gy = x \Rightarrow y = g^{-1}x$$

$$\Rightarrow \phi_g(g^{-1}x) = gg^{-1}x = x$$

Allora, essendo iniettiva e surgettiva, $\phi : G \to S_n$ è un isomorfismo di G nella sua immagine in S_n. Infatti

$$\phi_{gh}x = ghx = g\phi_h x = \phi_g(\phi_h(x)) = (\phi_g \circ \phi_h)(x) \quad \forall x$$

$$\Rightarrow \phi_{gh} = \phi_g \phi_h$$

Il fatto che G (finito) abbia una immagine in S_n si può vedere ordinando i suoi elementi:

$$g_1, ..., g_n$$

e osservando che se ϕ_g riordina gli elementi è equivalente ad una operazione del tipo

$$\begin{pmatrix} g_1 & g_2 & \cdot & \cdot & g_5 \\ g_{p_1} & g_{p_2} & \cdot & \cdot & g_{p_n} \end{pmatrix}$$

Teorema 0.0.6 (Teorema di Lagrange (o di struttura))**.** *Dato un gruppo G, abbiamo visto che se H è un sottogruppo, partiziona il gruppo in classi di equivalenza:*

$$G = \bigcup_{g \in G} (gH)$$

Ci accorgiamo che se prendiamo H e lo moltiplichiamo per g, otterremo sempre un numero di elementi pari all'ordine di H. Ogni classe di equivalenza ha quindi m elementi, e poichè sono disgiunte, si ha che se $|G| = n$,

$$n = Nm$$

dove N è il numero di classi laterali. Allora l'ordine di ogni sottogruppo H divide l'ordine di G. Se un gruppo G ha ordine primo non ha sottogruppi non banali.

Definiamo adesso l'operazione di coniugazione per un elemento di $g \in G$:

$$C_g : G \to G$$

con $g \in G$ fissato, tale che

$$a \in G : a \mapsto C_g a = g^{-1}ag$$

Contrariamente alla moltiplicazione, C_g è un omomorfismo:

$$C_g(ab) = g^{-1}abg = g^{-1}agg^{-1}bg = C_g(a)C_g(b)$$

C_g di nuovo dà luogo ad una relazione di equivalenza:

$$a \sim b$$

se esiste $g \in G$ tale che $g^{-1}ag = b$, o in altre parole se $ag = gb$. Le classi di equivalenza risultanti si dicono classi di coniugio. Verifichiamo che $\sim$ è una relazione di equivalenza:

$$a \sim a \ \rightarrow \exists e : e^{-1}ae = a$$

$$a \sim b \Rightarrow b \in a$$

infatti se $g^{-1}ag = b$, esiste $h = g^{-1}$ tale che $h^{-1}bh = a$.

$$a \sim b, \ b \sim c \ \Rightarrow a \sim c$$

Infatti se $g^{-1}ag = b$ e $h^{-1}bh = c$, scegliamo $z = gh$ e $z^{-1}az = c$.

In generale le classi di coniugio sono diverse da quelle laterali. Ci poniamo il problema di coniugare non soltanto un elemento ma un sottoinsieme: se $S \subseteq G$, consideriamo $g^{-1}Ag$. Il comportamento dei sottoinsiemi non è interessante, è più significativo vedere cosa succede se coniughiamo un sottogruppo H: sia H_g definito da

$$G_g = g^{-1}Hg$$

il coniugato del sottogruppo H. H_g è ancora un sottogruppo di G, infatti se prendiamo $\alpha, \beta \in H_g$, esisteranno $a, b \in H$ tali che $\alpha = g^{-1}ag$ e $\beta = g^{-1}bg$. Vogliamo dimostrare che $\alpha\beta^{-1}$ sta ancora in H_g:

$$\alpha\beta^{-1} = g^{-1}agg^{-1}b^{-1}g = g^{-1}ab^{-1}g$$

ma $c = ab^{-1} \in H$ perchè H è sottogruppo, allora $\alpha\beta^{-1} = g^{-1}cg \in H_g$.

Abbiamo dunque che H_g è isomorfo ad H, in altre parole in G abbiamo tante copie di H tutte isomorfe. Il caso più interessante è quando $H_g = H \ \forall g \in G$:

Definizione 0.8. Supponiamo che $\forall g \in G$ sia

$$g^{-1}Hg = H$$

cioè l'operazione di coniugio lascia fermo H. Allora si dice che H è un **sottogruppo normale**.

Tale relazione si può anche scrivere come

$$g^{-1}Hg = \{g^{-1}hg | h \in H\}$$

ma se $g^{-1}hg \in H$, esisterà $h' \in H$ tale che $h' = g^{-1}hg \in H$, da cui

$$hg = gh'$$

Il che equivale a dire che la classe laterale sinistra gH è uguale alla classe laterale destra Hg. Per un sottogruppo normale infatti si scrive anche

$$gH = Hg$$

e si dice che H è autoconiugato.

Possiamo considerare lo spazio delle classi laterali, o spazio quoziente di G rispetto ad H: $G\backslash H = \{gH | g \in G\}$. Se H è normale ci possiamo aspettare qualcosa di più:

Osservazioni: se H è normale in G (e si scrive $H \triangleleft G$), allora lo spazio quoziente $G\backslash H$ eredita una struttura di gruppo.

Se il gruppo è commutativo tutti i sottogruppi sono normali, è questo il motivo per cui negli spazi vettoriali tutte le classi laterali sono sottospazi vettoriali. Infatti se W è un sottospazio vettoriale di V, possiamo considerare ad esempio l'insieme

$$\{x + W | x \in V\}$$

Abbiamo in questo caso che presi due elementi $x + W$ e $y + W$

$$\Rightarrow (x + W) + (y + W) = (x + y) + W$$

perchè effettuando la somma

$$(x + w_1) + (y + w_2) = (x + y) + (w_1 + w_2)$$

abbiamo implicitamente ammesso che la somma vettoriale sia commutativa, in modo da poter scambiare i vettori. Per un gruppo invece, se gH e aH sono due classi laterali:

$$(gH)(aH)$$

vorremmo ottenere $(gH)(aH) = (ga)H$, ma questo accade soltanto quando il gruppo è normale oppure G è commutativo, a quel punto, presi due rappresentanti gh_1 e ah_2 della classe laterale:

$$h_1a = ah_3$$

$$gh_1ah_2 = gah_3h_2 \in (ga)H$$

allora non troviamo contraddizione nel definire

$$(gH)(aH) = (ga)H$$

se H è normale.

Possiamo adesso enunciare il seguente

Teorema 0.0.7 (Teorema di omomorfismo)**.** *Sia $\phi : G \to H$ un omomorfismo. Allora:*

1. *$K = \ker\phi$ è un sottogruppo normale, dunque $G\backslash K$ ha una struttura di gruppo.*
2. *Esiste una applicazione $\eta : \phi(H) \to G\backslash K$ data da*

$$\eta(\phi(g)) = gK$$

ed η è un isomorfismo.

Consideriamo ϕ surgettiva (se non lo fosse, restringeremmo il suo codominio alla sua immagine, che comunque è un sottogruppo). Allora possiamo dividere il gruppo G in tante classi gK, per cui

$$G\backslash K = \{gK|g \in G\}$$

Quello che vogliamo affermare è che ciascuno dei gK va in un elemento di H. Questo equivale ad una divisione a grana grossa del gruppo, mappata in H.

Dimostrazione. 1. K è sottogruppo perchè lo abbiamo già dimostrato. Dobbiamo dimostrare che è normale: $\forall k \in K$ abbiamo $\phi(k) = e$ e per definizione dobbiamo mostrare che

$$g^{-1}Kg \in K \;\; \forall g \in G$$

, cioè

$$g^{-1}Kg = K$$

ma

$$\phi(g^{-1}kg) = \phi(g^{-1})\phi(k)\phi(g) = (\phi(g))^{-1}\phi(k)\phi(g) = \phi^{-1}(g)\phi(g) = e$$

2. Dobbiamo mostrare che l'affermazione è ben posta (ovvero ben definita): l'applicazione esiste.

Supponiamo che $g_1 \neq g_2$ ma si abbia $\phi(g_1) = \phi(g_2)$, dobbiamo mostrare che g_1 e g_2 stanno nella stessa gK:

$$\phi(g_1) = \phi(g_2)$$
$$\phi(g_1)^{-1}\phi(g_2) = e$$
$$\phi(g_1^{-1})\phi(g_2) = e$$
$$\phi(g_1^{-1}g_2) = e$$

ma se $\phi(g_1^{-1}g_2) = e$ significa che $g_1^{-1}g_2 \in K$, dunque $g_2 \in g_1K$:

$$g_1(g_1^{-1}g_2) = g_2$$

dunque $g_1K = g_2K$.

Dimostriamo adesso che η è un omomorfismo:

$$\eta(\phi(g)) = gK$$

η va da $\phi(H)$ in $G\backslash K$; prendiamo $h_1, h_2 \in \phi(H)$, e facciamo vedere che $\eta(h_1 h_2) = \eta(h_1)\eta(h_2)$. Osserviamo che se $h_1, h_2 \in \phi(H)$, esisteranno $g_1, g_2 \in H$ tali che

$$h_1 = \phi(g_1)$$

$$h_2 = \phi(g_2)$$

$$\Rightarrow \eta(h_1 h_2) = \eta(\phi(g_1)\phi(g_2)) = \eta(\phi(g_1 g_2)) = g_1 g_2 K = g_1 K g_2 K = \eta(h_1)\eta(h_2)$$

perchè K è sottogruppo normale.

Infine, dimostriamo che η è un isomorfismo: ci basta per questo che sia 1-1. Consideriamo $\eta(h_1) = \eta(h_2)$, vogliamo provare che $h_1 = h_2$; ma se $\eta(h_1) = \eta(h_2)$ significa che ci sono $g_1, g_2 \in G$ tali che $h_i = \phi(g_i)$, allora

$$\eta(h_1) = \eta(h_2) \Rightarrow g_1 K = g_2 K$$

dunque $g_1 g_2^{-1} \in K$, allora

$$e = \phi(g_1 g_2^{-1}) = \phi(g_1)\phi(g_2)^{-1} \Rightarrow \phi(g_1) = \phi(g_2)$$

□

Azioni di gruppi

Nelle applicazioni siamo interessati alle simmetrie nelle trasformazioni di un sistema fisico; su tale sistema fisico, il gruppo agisce con delle trasformazioni.

Definizione 0.9. Sia G un gruppo, e S un insieme (ad esempio l'insieme delle configurazioni di un sistema). Definisco **azione** (*sinistra*) di G su S una corrispondenza

$$\phi : G \times X \to S$$

in maniera tale che

$$(g, s) \mapsto \phi(g, s) \equiv gs$$

e se prendiamo

$$\phi(a, \phi(g, s))$$

questa sia uguale ad $\phi(ag, s) \equiv ags$. Tale proprietà prende il nome di associatività generalizzata. Chiameremo S un $G-$spazio, se su di esso è definita una azione di G.

Esempi:

1. consideriamo $S = \mathbb{R}^n$, e $G = GL(n, \mathbb{R})$, abbiamo

$$(M, v) \mapsto Mv$$

dove M è una matrice di $GL(n, \mathbb{R})$ e $v \in \mathbb{R}^n$.

2. Possiamo considerare anche le azioni delle cosiddette trasformazioni di Moebius (o trasformazioni conformi). Sia $z \in \mathbb{C}$, e a, b, c, d costanti complesse, consideriamo la trasformazione

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

Dobbiamo verificare che l'insieme di trasformazioni forma un gruppo, ma mi fa fatica. In ogni caso si vede che il gruppo delle trasformazioni di Moebius, con la richiesta che $ad - bc = 1$, è isomorfo al gruppo delle matrici 2×2 complesse

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

detto anche $PSL(2, \mathbb{C})$. Abbiamo quindi descritto l'azione di $PSL(2, \mathbb{C})$ sui numeri complessi. Dalla condizione $ad - bc = 1$ deriva una certa arbitrarietà nella scelta dei quattro elementi della matrice, che possono essere moltiplicati contemporaneamente per una qualunque costante complessa non nulla. Le trasformazioni di Moebius sono le uniche trasformazioni della sfera di Riemann (ovvero il piano complesso chiuso col punto all'infinito) in sè. Con tre parametri liberi (uno è fissato da $ad - bc = 1$) possiamo pensare di costruire una trasformazione di Moebius che manda tre punti qualsiasi del piano complesso in altri 3 punti arbitrari, ad esempio $0, 1, \infty$. Questo può essere utile se si studiano i poli di funzioni meromorfe o di una equazione differenziale come le equazioni ipergeometriche o le equazioni di Bessel.

Definizione 0.10. Siano G_1, G_2 gruppi, definiamo il **prodotto diretto** $G_1 \times G_2$ come l'insieme delle coppie $\{(g_1, g_2) : g_1 \in G_1\ ,\ g_2 \in G_2\}$. Su di esso definiamo un'operazione di moltiplicazione

$$(g_1, g_2)(h_1, h_2) = (g_1 h_1, g_2 h_2) :$$

Se G e H sono gruppi (con H commutativo), e G ha un'azione ϕ su H, allora possiamo definire anche il **prodotto semidiretto di gruppi**:

$$G \ltimes H$$

il prodotto tra elementi ha questa forma

$$(g_1, h_1)(g_2, h_2) = (g_1 g_2, h_1 \phi(g_1, h_2))$$

Un esempio sono le trasformazioni euclidee di $\mathbb{R}^3$, ovvero le rotazioni insieme alle traslazioni dello spazio tridimensionale, oppure le trasformazioni di Poincarè. Possiamo scrivere infatti una trasformazione del grupo euclideo come

$$(A, v) \ \ , A \in SO(3)\,,\ v \in \mathbb{R}^3$$

e la composizione di due trasformazioni del gruppo (A, v) e (B, w) è data da

$$(A, v)(B, w) = (AB, v + Aw)$$

L'identità del gruppo è l'elemento $(I, 0)$. L'inverso di (A, v) si costruisce così:

$$(A, v)(B, w) = (AB, Aw + v) = (I, 0)$$

da cui

$$B = A^{-1}$$

e

$$w = -A^{-1}v$$

$$\Rightarrow (A, v)^{-1} = (A^{-1}, -A^{-1}v)$$

Il gruppo euclideo E_3

Se consideriamo il gruppo euclideo, le rotazioni sono un suo sottogruppo:

$$(A, 0)(B, 0) = (AB, 0)$$

Riconosciamo quindi che $\{(A, 0)|A \in SO(3)\} \subseteq E_3$ ed è un sottogruppo, dunque $SO(3) \prec E_3$.

Anche le traslazioni sono un sottogruppo:

$$T(3) = \{(I, v)|v \in \mathbb{R}^3\} \subseteq E_3$$

$$(I, v_1)(I, v_2) = (I, v_1 + v_2) \in T(3) \Rightarrow T(3) \prec E_3$$

Possiamo controllare se le rotazioni e le traslazioni sono sottogruppi normali, ad esempio per le rotazioni:

$$(A, v)^{-1}(B, 0)(A, v) = (A^{-1}, -A^{-1}v)^{-1}(BA, Bv) = (A^{-1}BA, A^{-1}Bv - A^{-1}v)$$

ma $A^{-1}Bv - A^{-1}v \neq 0$ in generale dunque le rotazioni non sono un sottogruppo normale, ovvero $SO(3) \not\triangleleft E_3$, e le classi laterali di $_3$ rispetto a $SO(3)$ non hanno una struttura di gruppo. Viceversa per le traslazioni

$$(A, v)^{-1}(I, w)(A, v) = (A^{-1}, -A^{-1}v)^{-1}(A, Iv + w) = (A^{-1}A, -A^{-1}v + A^{-1}(v + w)) = (I, A^{-1}w)$$

che è ancora una traslazione, dunque T_3 è normale in E_3, $T_3 \triangleleft E_3$, e si ha che le classi laterali di E_3 rispetto a $T(3)$ hanno struttura di gruppo

$$\frac{E_3}{T_3} \simeq SO(3)$$

Meccanica quantistica e invarianza di gauge

L'equazione di Schroedinger della meccanica quantistica di una particella libera si scrive

$$i\partial_t \phi = -\nabla^2 \psi$$

Tale equazione è invariante per la moltiplicazione della funzione d'onda ψ per una fase costante $e^{i\alpha}$. Tuttavia la $\psi(\vec{x}, t)$ è una funzione che si può pensare come sezione di un fibrato $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{C}$, che fibra per fibra è indeterminata in fase; possiamo quindi decidere di prendere una fase diversa per ogni fibra, da cui

$$\psi \mapsto e^{i\alpha(\vec{x},t)}\psi$$

In questo caso però si modifica l'equazione di Schroedinger:

$$i\partial_t(\psi e^{i\alpha(\vec{x},t)}) = -\nabla^2(\psi e^{i\alpha(\vec{x},t)})$$

$$e^{i\alpha}((-\partial_t\alpha)\psi + i\partial_t\psi) = -e^{i\alpha}(\nabla^2\psi + i\nabla^2\alpha\psi + 2i(\nabla\alpha)\cdot(\nabla\psi) - (\nabla\alpha)^2\psi)$$
$$\Rightarrow i\partial_t\psi = -\nabla^2\psi - 2i(\nabla\alpha)\cdot(\nabla\psi) + ((\partial_t\alpha) - i\nabla^2\alpha + (\nabla\alpha)^2)\psi$$

Ora la lasciamo in un cantuccio e andiamo a considerare una hamiltoniana della forma

$$H = \frac{\vec{p} - \vec{A}}{2m} + A_0$$

L'equazione di Schroedinger corrispondente sarà

$$i\partial_t\psi = H\psi$$

$$i\partial_t\psi = -(\nabla - i\vec{A})^2\psi + A_0\psi$$

che è molto simile al risultato ottenuto poco fa, anzi i due coincidono se prendiamo

$$\vec{A} = -\nabla\alpha$$

$$A_0 = \partial_t\alpha$$

Possiamo pensare alla equazione di Schroedinger iniziale come a una situazione in cui $\vec{A} = 0$ e $A_0 = 0$, mentre in generale la trasformazione di fase equivale alla seguente operazione

$$\vec{A} \to \vec{A} - \nabla\alpha(\vec{x}, t)$$

$$A_0 \to A_0 + \partial_t\alpha(\vec{x}, t)$$

ovvero a una trasformazione di gauge dei potenziali elettromagnetici. Nell'equazione di Schroedinger c'è una simmetria banale sotto il gruppo $U(1)$; se però decidiamo di prendere le trasformazioni di fase punto per punto, il gruppo che agisce sullo spazio delle funzioni diventa molto più esteso, e viene detto *gruppo di gauge*. In ogni caso, la fase non sarà osservabile punto per punto, mentre può essere osservabile la differenza di fase (effetto Aharonov-Bohm).

Sottoinsiemi invarianti

Consideriamo adesso una azione di un gruppo G su un insieme S:

$$(g, s) \mapsto gs$$

Se prendiamo l'insieme di tutti i gs:

$$\{gs | g \in G\}$$

questa si dice **orbita** dell'azione di G su S. Se $J \subseteq S$ ha la caratteristica che

$$\forall g \in G,\ \forall x \in J,\ gx \in J$$

allora J si dice sottoinsieme invariante.

Ad esempio, possiamo considerare le rotazioni del piano: presa una circonferenza qualunque di centro l'origine, ogni suo punto finirà per rotazione attorno all'origine (ovvero una trasformazione di $SO(2)$) in un altro punto della circonferenza, dunque ogni circonferenza $\subseteq \mathbb{R}^2$ è $SO(2)-$invariante.

Nella meccanica classica l'idea di azione è fondamentale, infatti necessita di nozioni di geometria differenziale che sono nate dopo quelle di algebra e spazi di Hilbert sviluppatesi insieme alla meccanica quantistica. La meccanica quantistica è lineare per definizione, il che significa che le azioni dei gruppi sono sempre lineari, essendo lo spazio di Hilbert uno spazio vettoriale di dimensione finita o infinita. In meccanica classica in generale questo non è vero, basti pensare alle equazioni di Hamilton, che in generale sono non lineari.

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n, e G un gruppo. Sullo spazio vettoriale V è definita in modo naturale un'azione del gruppo $GL(n)$ delle matrici $n \times n$ invertibili.

Definizione 0.11. Vogliamo far agire un gruppo G su V in modo lineare. Chiameremo **rappresentazione lineari** di G su V un omomorfismo di G in $GL(n)$:

$$\phi : G \to GL(n)$$

ovvero riconosciamo in ogni $g \in G$ in una matrice.

Ad esempio possiamo considerare il gruppo delle permutazioni di 3 oggetti. Se vogliamo trovare una rappresentazione di questo gruppo su $\mathbb{R}^3$, possiamo definire le seguenti matrici $\in GL(3)$ che permutano le componenti di un vettore $\in \mathbb{R}^3$:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e così via. Abbiamo dunque una rappresentazione lineare di S_3 in $GL(3)$.

Se ρ è una rappresentazione di G in $GL(n)$, allora $\forall g \in G$ esiste una matrice $\rho(g)$. Se vogliamo far agire tale matrice su un elemento $v \in V$, prendiamo semplicemente il prodotto righe per colonne

$$\rho(g)v$$

che sarà ancora un vettore $\in V$.

Definizione 0.12. Sia ρ una rappresentazione lineare di G su V. Sia W un sottospazio di V. Diremo che W è un **sottospazio ρ−invariante** se $\rho(g)w \in W \ \forall w \in W$.

Parlare di sottospazi invarianti è diverso che parlare di sottoinsiemi. Infatti nel piano abbiamo visto che le circonferenze sono sottoinsiemi invarianti sotto rotazioni, ma contemporaneamente il piano non ha sottospazi invarianti poichè l'unico sottospazio non banale, la retta, ha orbita densa in $\mathbb{R}^2$.

Cercheremo dunque di distinguere al meglio le matrici che rappresentano gruppi di trasformazioni. Il modo più comodo è cercare i sottospazi invarianti: un matrice in generale rimescolerà tutto lo spazio, ma se abbiamo un sottospazio invariante, sotto la rappresentazione i vettori di questo sottospazio rimangono in esso.

Definizione 0.13. Una rappresentazione ρ è **irriducibile** se non ammette sottospazi propri invarianti. ρ si dice riducibile se non è riducibile, cioè se ammette un sottospazio invariante.

Dato uno spazio vettoriale V e $W \subseteq V$ sottospazio proprio, diremo che W è invariante se $\rho(g)w \in W$ $\forall w \in W$. Esiste un teorema per gli spazi vettoriali: per ogni sottospazio proprio W di V esiste un sottospazio Z tale che

$$W \oplus Z = W$$

Affinchè la nozione di irriducibilità sia utile, bisognerebbe che per ogni sottospazio invariante, anche il complementare sia invariante, per questo

Definizione 0.14. ρ si dice **completamente riducibile** se ogni sottospazio invariante W ammette complementare invariante.

L'utilità sta nel fatto che se $W \subseteq V$ è invariante, e anche il suo complementare Z è invariante, allora $V = W \oplus Z$. Se una rappresentazione ρ è completamente riducibile, è possibile scriverla in forma diagonale a blocchi.

Vediamo come si comportano le rappresentazioni rispetto a cambi di base:

Definizione 0.15. Date due rappresentazioni ρ e σ di G su V, diremo che ρ è equivalente a σ se esiste una matrice $U \in GL(n)$ tale che $\forall g \in G$ sia

$$\rho(g) = U^{-1}\sigma(g)U$$

Da questo deriva che ρ e σ sono lo stesso oggetto letto su due basi diverse.

Giovedì 27 novembre

Si parla di rappresentazione fedele quando $\rho : G \to GL(n, V)$ è un isomorfismo. Una rappresentazione si dice ortogonale o unitaria rispettivamente se $\rho(g) \in O(n)$ oppure $\rho(g) \in U(n)$, $\forall g \in G$.

Per definizione un sottospazio W di uno spazio vettoriale V si dice invariante se $\rho(g)W \subseteq W$ $\forall g \in G$. Ci sono due casi: o questi sottospazi invarianti ci sono, oppure non ci sono. Se non ci sono, preso un qualunque $v \in V$, agendo su di esso con $\rho(g)$ al variare di g in G otteniamo tutto lo spazio.

Una rappresentazione si dice irriducibile (o *irrep*: irreducible representation) se non ammette sottospazi invarianti propri.

Viceversa, se esiste un sottospazio W invariante sotto ρ, prendiamo una sua base $\{e_k\}_{k=1,...,p}$. Sappiamo che per ogni $g \in G$, avremo

$$\rho(g)e_k = c_{kj}e_k \quad k, j = 1, ..., p$$

Allora la matrice che rappresenta $\rho(g)$ su V dovrà avere necessariamente questa forma:

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} (11) & . & (1p) \\ . & . & . \\ (p1) & . & (pp) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} (1(p+1)) & . & (1n) \\ . & . & . \\ (p(p+1)) & . & (pn) \end{pmatrix} \\ 0 & \begin{pmatrix} ((p+1)(p+1)) & . & ((p+1)n) \\ . & . & . \\ (n(p+1)) & . & (nn) \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

In modo che agendo su un vettore della forma $\begin{pmatrix} w_1 \\ . \\ w_p \\ \vec{0}_{n-p} \end{pmatrix}$ restituisca un vettore della stessa forma. Dunque il primo blocco $p \times p$ è una rappresentazione di dimensione più piccola di G su W.

Vogliamo trovare un complementare Z di W tale che sia anch'esso sottospazio invariante. Se esiste Z invariante e tale che $Z \oplus W = V$, allora possiamo completare $\{e_1, ..., e_p\}$ a base di V con $\{e_{p+1}, e_n\}$ base di Z. Ma poichè anche Z è invariante, tutti i vettori della forma $\begin{pmatrix} \vec{0}_p \\ z_{p+1} \\ . \\ z_n \end{pmatrix}$ devono andare in vettori della stessa forma, il che implica che la matrice $\rho(g)$ deve essere diagonale a blocchi, con un blocco $p \times p$ e un blocco $(n-p) \times (n-p)$. In generale non tutte le matrici $\rho(g)$ al variare di $g \in G$ potranno essere diagonalizzate a blocchi simultaneamente con la stessa matrice. Invece, questo accade per i gruppi commutativi, le cui rappresentazioni matriciali ammettono una base comune.

Un esempio in cui Z non è un sottospazio invariante: consideriamo il gruppo delle matrici 2×2 triangolari superiori non degeneri:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ac} \begin{pmatrix} c & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Se prendiamo il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, si ha

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ovvero il sottospazio W dei vettori multipli di $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è invariante. Qualsiasi altro complementare sarà di dimensione 1, e conterrà vettori della forma $\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, dove $y \neq 0$, e $\alpha \in \mathbb{R}$ è un parametro. Stavolta si ha

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cy \end{pmatrix}$$

Questo vettore deve essere uguale a $\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ per qualche α, allora

$$ax + by = \alpha x$$

$$cy = \alpha y$$

da cui segue che $\alpha = c$ ma la prima uguaglianza in generale non è verificata per a, b, c arbitrari.

Si parla di rappresentazioni equivalenti se esiste un cambio di base $T : V \to V$, e $\rho, \sigma : G \to GL(n, V)$ sono legate da

$$T^{-1}\rho(g)T = \sigma(g)$$

per ogni $g \in G$. Allora siamo liberi di scegliere la base come più ci fa comodo, ad esempio quella che ci rende la rappresentazione diagonale a blocchi. Se W_i con $i = 1, ..., k$ sono i sottospazi invarianti di ρ, allora abbiamo che

$$V = W_1 \oplus W_n \oplus ... \oplus W_k$$

e questo risultato è analogo al teorema spettrale per operatori lineari. Corrispondentemente, la rappresentazione ρ si potrà decomporre in

$$\rho(g) = \rho(g)|_{W_1} \oplus \rho(g)|_{W_2} \oplus ... \oplus \rho(g)|_{W_k}$$

$$\Rightarrow \rho = \rho_1 \oplus \rho_2 \oplus ... \oplus \rho_k \equiv \bigoplus_{i=1}^{k} \rho_k$$

ovvero abbiamo introdotto una nozione di somma diretta di rappresentazioni lineari.

Sia ρ una rappresentazione lineare su V. Consideriamo l'oggetto

$$\tilde{\rho}(g) = \rho(g^{-1})^\dagger$$

Osserviamo che anch'esso è una rappresentazione, infatti se $a, g \in G$:

$$\tilde{\rho}(ag) = \rho((ag)^{-1})^\dagger = (\rho(g^{-1}a^{-1}))^\dagger = (\rho(g^{-1})\rho(a^{-1}))^\dagger = (\rho(a^{-1}))^\dagger(\rho(g^{-1}))^\dagger = \tilde{\rho}(a)\tilde{\rho}(g)$$

Tale rappresentazione prende il nome di **rappresentazione aggiunta**. In generale la rappresentazione aggiunta non sarà equivalente a ρ, tranne il caso particolare in cui ρ sia unitaria, per cui

$$\tilde{\rho}(g) = (\rho(g^{-1}))^\dagger = (\rho^{-1}(g))^\dagger = (\rho^\dagger(g))^\dagger = \rho(g)$$

Queste rappresentazioni appaiono di frequente in fisica delle particelle.

É possibile introdurre anche altre operazioni, ad esempio siano (ρ_1, V_1) e (ρ_2, V_2) due rappresentazioni dello stesso gruppo G. Ad esempio possiamo considerare il gruppo delle rotazioni che agisce sullo spazio delle coordinate $\mathbb{R}^3$ e sullo spazio dello spin in due dimensioni. Avremo per ogni $g \in G$

$$\rho_1(g) \in GL(V_1)$$

$$\rho_2(g) \in GL(V_2)$$

Possiamo considerare il prodotto tensoriale $V_1 \otimes V_2$, ovvero lo spazio che contiene tutti i prodotti tensoriali dei vettori di V_1 e V_2. Un vettore di tale spazio si può scrivere come $|v_1\rangle|v_2\rangle$ oppure $v_1 \otimes v_2$.

Vogliamo definire una rappresentazione lineare di G su $V_1 \otimes V_2$, date ρ_1 e ρ_2: chiameremo tale rappresentazione $(\rho_\otimes V_1 \otimes V_2)$, e la definiamo nel seguente modo

$$\rho_\otimes(g)(v_1 \otimes v_2) = \rho_1(g)v_1 \otimes \rho_2(g)v_2$$

Con lo stesso criterio per cui
$$\rho_\oplus(g)(v_1 \oplus v_2) = \rho_1(g)v_1 \oplus \rho_2(g)v_2$$
Dobbiamo verificare che quello che abbiamo definito sia realmente una rappresentazione:

$$\rho_{\overset{\otimes}{\oplus}}(gh)(v_1 \overset{\otimes}{\oplus} v_2) = \rho_1(gh)v_1 \overset{\otimes}{\oplus} \rho_2(gh)v_2 = \rho_1(g)\rho_1(h)v_1 \overset{\otimes}{\oplus} \rho_2(g)\rho_2(h)v_2 = (\rho_1(g) \overset{\otimes}{\oplus} \rho_2(g))(\rho_1(h)v_1 \overset{\otimes}{\oplus} \rho_2(h)v_2) =$$

$$= (\rho_1(g) \overset{\otimes}{\oplus} \rho_2(g))(\rho_1(h) \overset{\otimes}{\oplus} \rho_2(h))(v_1 \overset{\otimes}{\oplus} v_2) = \rho_{\overset{\otimes}{\oplus}}(g)\rho_{\overset{\otimes}{\oplus}}(h)(v_1 \overset{\otimes}{\oplus} v_2)$$

Siano (ρ_1, V_1) e (ρ_2, V_2) due rappresentazioni irriducibili. Se costruiamo il prodotto tensoriale $\rho_1 \otimes \rho_2$, questo in generale non sarà più irriducibile; si presenta quindi il problema di trovare la base più adatta per studiare il prodotto tensoriale, ovvero per poter scrivere $\rho_1 \otimes \rho_2(g)$ in forma diagonale a blocchi. Avremo ancora

$$\rho_1 \otimes \rho_2 = \bigoplus_{i=1}^{k} (\rho_1 \otimes \rho_2)_i$$

dove $(\rho_1 \otimes \rho_2)_i$ è la restrizione irriducibile di $\rho_1 \otimes \rho_2$ al sottospazio invariante W_i. Un esempio di questo procedimento è la ricerca dei coefficienti di Clebsh-Gordan, anche se in realtà in meccanica quantistica non si considera il gruppo bensì l'algebra di Lie del momento angolare.

A questo punto, vorremmo trovare un criterio per riconoscere l'irriducibilità. Dato un sottospazio ci sono infiniti complementari, ma se sullo spazio di partenza è definito un prodotto scalare, possiamo considerare il complementare ortogonale. Le rappresentazioni unitarie sono più belle da questo punto di vista perchè conservano il prodotto scalare (o hermitiano) dello spazio su cui agiscono.

Consideriamo allora una rappresentazione unitaria su V:

$$\rho : G \to U(n)$$

questo significa che il prodotto interno $\langle v, w \rangle$ è conservato:

$$\langle \rho(g)v, \rho(g)w \rangle = \langle v, w \rangle$$

per ogni $g \in G$.

Teorema 0.0.8. *Una rappresentazione unitaria è completamente riducibile.*

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che se W è invariante, anche il suo complementare è invariante, allora:

Lemma 0.0.9. *Se W è invariante, $W^\perp$ è invariante.*

Dimostrazione. Sia $z \in W^\perp$, e $w \in W$, avremo

$$\langle z, w \rangle = 0$$

Poichè W è invariante, $\rho(g)w \in W$, allora
$$\langle z, \rho(g)w \rangle = 0$$

ma per definizione
$$\langle z, \rho(g)w \rangle = \langle \rho^\dagger(g)z, w \rangle$$

e poichè ρ è unitaria, $\rho^\dagger(g) = \rho^{-1}(g) = \rho(g^{-1})$, allora

$$\langle \rho(h)z, w\rangle = 0$$

per ogni $h = g^{-1} \in G$, dunque essendo z arbitrario, si ha che $\rho(g)W^\perp \in W^\perp$, cioè $W^\perp$ è invariante.

□

Allora, se W è invariante, per il lemma precedente anche $W^\perp$ è invariante e $(\rho, V) = (\rho_W \oplus \rho_{W^\perp}, W \oplus W^\perp)$. □

Ci possiamo chiedere se oltre alle rappresentazioni unitarie esistano altri tipi di rappresentazioni che ci assicurino la completa riduciblità. Per i gruppi finiti esiste un teorema:

Teorema 0.0.10 (Teorema di Maschke)**.** *Ogni rappresentazione di un gruppo finito è completamente riducibile*

L'idea della dimostrazione si basa su questo fatto: consideriamo una rappresentazione unitaria ρ, e una rappresentazione ad essa equivalente σ, collegata a ρ mediante una matrice di cambio di base T:

$$T^{-1}\rho(g)T = \sigma(g)$$

σ in generale non sarà unitaria, se T non è unitaria, ma ha le stesse proprietà di ρ, nel senso che se ρ è completamente riducibile, anche σ lo sarà. Per questo fatto, una rappresentazione equivalente ad una rappresentazione unitaria sarà completamente riducibile.

Dimostrazione. Troveremo un prodotto scalare per cui la rappresentazione scelta del gruppo sarà equivalente ad una rappresentazione unitaria. Sia (ρ, V) una rappresentazione qualsiasi di G (finito). Su V possiamo definire un prodotto interno qualunque, $(\ ,\ )$, e in generale ρ non sarà unitaria rispetto a tale prodotto scalare. Presi $v, v' \in V$, definiamo allora un secondo prodotto interno $\langle\ ,\ \rangle$ in questo modo:

$$\langle v, v'\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(\rho(g)v, \rho(g)v')$$

Il prodotto scalare $(\ ,\ )$ è non degenere è definito positivo, di conseguenza anche $\langle\ ,\ \rangle$ ha queste caratteristiche, infatti è somma di prodotti scalari definiti positivi, inoltre

$$\langle v, v'\rangle = \frac{1}{|G|}(v, v') + \frac{1}{|G|}\sum_{g\neq e}(\rho(g)v, \rho(g)v')$$

dove il primo addendo è certamente non nullo, se v, v' sono diversi dal vettore nullo. Se facciamo agire $\rho(h)$ sui vettori:

$$\langle \rho(h)v, \rho(h)v'\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(\rho(h)\rho(g)v, \rho(h)\rho(g)v') = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(\rho(hg)v, \rho(hg)v') =$$

ma poichè come abbiamo detto l'azione di un elemento h di G sugli altri elementi del gruppo equivale ad una permutazione degli stessi, sommare su $g \in G$ equivale a sommare su $hg \in G$:

$$= \frac{1}{|G|}\sum_{hg\in G}(\rho(hg)v, \rho(hg)v') = \frac{1}{|G|}\sum_{s\in G}(\rho(s)v, \rho(s)v') = \langle v, v'\rangle$$

□

Questa dimostrazione non si può applicare a gruppi infiniti, perchè l'operazione di media sul gruppo non è in generale ben definita essendo il volume del gruppo infinito. Tuttavia esiste una classe di gruppi infiniti, i **gruppi compatti**, per cui è possibile estendere i ragionamenti fatti finora. Se abbiamo un gruppo compatto G, è possibile definire una misura invariante, o *misura di Haar*, tale che

$$Vol(G) = \int_G dg = 1$$

con la seguente proprietà:

$$\int_G dgf(gh) = \int_G dgf(hg) = \int_G dgf(g^{-1}) = \int_G dgf(g)$$

In tal caso, se abbiamo un prodotto interno (,) fatto a capocchia, possiamo definire un prodotto scalare invariante rispetto a una rappresentazione ρ:

$$\langle v, v' \rangle = \int_G dg(\rho(g)v, \rho(g)v')$$

Proprietà della rappresentazioni irriducibili

Lemma 0.0.11 (Lemma di Schur). *Sia G un gruppo, e siano (ρ_1, V_1), (ρ_2, V_2) due rappresentazioni irriducibili. Sia poi $\gamma : V_2 \to V_1$ con la proprietà di essere $G-$equivariante, ovvero:*

$$\gamma \circ \rho_2(g) = \rho_1(g) \circ \gamma \quad \forall g \in G$$

Allora, si hanno i seguenti due casi

1. *$\gamma = 0$, oppure*
2. *γ è un isomorfismo, ovvero ρ_1 è equivalente a ρ_2.*

Quindi, se prendiamo due rappresentazioni irriducibili e le connettiamo mediante una γ equivariante, o sono la stessa rappresentazione, oppure non si parlano.

Dimostrazione. Dimostriamo che:

1. $Im\gamma \subseteq V_1$ è un sottospazio invariante. Sia $v_1 \in Im\gamma$, allora esiste $v_2 \in V_2$ tale che $\gamma(v_2) = v_1$. Ma poichè γ è equivariante, si ha che

$$\rho_1(g)v_1 = \rho_1\gamma(v_2) = \gamma(\rho_2 v_2) \in Im\gamma$$

   dunque $Im\gamma$ è invariante. Ma poichè ρ_1 è irriducibile, $Im\gamma$ deve essere un sottospazio banale, quindi $Im\gamma = 0$ oppure $Im\gamma = V_1$.

2. $K = \ker\gamma \subseteq V_2$ è un sottospazio invariante. Sia $k \in K$, allora $\gamma(k) = 0 \in V_1$. Applichiamo γ a $\rho_2 k$:

$$\gamma(\rho_2(g)k) = \rho_1(g)(\gamma(k) = \rho_1(g)0 = 0$$

   dunque $\rho_2(g)k$ sta ancora in K, e K è invariante. Ancora, poichè ρ_2 è irriducibile, $K = 0$ oppure $K = V_2$.

Se $\ker\gamma = 0$ e $Im\gamma = V_1$, allora γ è invertibile e abbiamo un isomorfismo, viceversa, se $\ker\gamma = V_2$ e $Im\gamma = 0$, allora $\gamma \equiv 0$. $\square$

Corollario 0.0.12. *Sia (ρ, V) irriducibile complessa. Le matrici che commutano con tutte le $\rho(g)$ sono necessariamente multiple dell'identità.*

Dimostrazione. Sia $\rho : G \times V \to V$ irriducibile complessa, e $M : V \to V$, con la proprietà che

$$\rho(g) \circ M = M \circ \rho(g)$$

Allora per il lemma di Schur $M = 0$ oppure è un isomorfismo, ma questo non ci dice altro. Sia invece λ un autovalore di M, in particolare abbiamo che $\rho(g)\lambda I = \lambda I \rho(g)$, allora abbiamo che

$$\rho(g)(M - \lambda I) = (M - \lambda I)\rho(g) \quad \forall g \in G$$

Siamo nella stessa situazione di prima, e $(M - \lambda I)$ o è identicamente nulla, oppure è un isomorfismo, in particolare è invertibile. Ma poichè λ è autovalore di M, $M - \lambda I$ non può essere invertibile pertanto $M - \lambda I = 0$, da cui $M = \lambda I$. $\square$

Corollario 0.0.13. *Sia G abeliano. Allora, ogni rappresentazione irriducibile complessa di G è 1-dimensionale*

Dimostrazione. La commutatività ci dice che $\rho(g)\rho(a) = \rho(a)\rho(g)$ $\forall g \in G$ (a è fissato). Allora $\rho(a) = \lambda_a I$ per ogni a, il che equivale a dire che ogni elemento della rappresentazione (ρ, V) agisce come un moltiplicatore sui vettori dello spazio V. $\square$

Relazioni di ortogonalità

Per i gruppi compatti, è possibile ottenere il seguente risultato:

Lemma 0.0.14. *Siano ρ e μ due rappresentazioni irriducibili di G di dimensioni m ed n, e sia M una applicazione lineare che connette V_2 con V_1. Consideriamo una composizione N di questo tipo:*

$$N = \int_G \rho(g) M \mu(g^{-1}) dg$$

Allora

$$\rho(h)N = N\mu(h) \quad \forall h \in G$$

ovvero N è G-equivariante.

Dimostrazione.

$$\rho(h)N = \int_G \rho(h)\rho(g)M\mu(g^{-1})dg = \int_G \rho(h)\rho(g)M\mu(g^{-1})\mu(h^{-1})\mu(h)dg = \int_G \rho(hg)M\mu((hg)^{-1})dg\mu(h) =$$

$$= \int_G \rho(s)M\mu(s^{-1})ds\mu(h) = N\mu(h)$$

$\square$

Per il lemma di Schur, $N : V_2 \to V_1$ è invertibile, oppure è identicamente nulla. Poichè nella definizione M è arbitraria, possiamo prenderne una ad hoc:

Teorema 0.0.15 (Relazioni di ortogonalità)**.** *Siano ρ, μ due rappresentazioni irriducibili **non equivalenti**. Allora N è necessariamente nulla, e si ha*

$$\int_G \rho^j{}_i(g)\mu^k{}_l(g^{-1})dg$$

Osservazione: se ρ e μ sono unitarie, allora

$$\mu(g^{-1}) = \mu^\dagger(g)$$

e la relazione di ortogonalità diventa una sorta di prodotto interno hermitiano:

$$\int_G \rho^j{}_i(g)(\mu^\dagger)^k{}_l(g)dg = \int_G \rho^j{}_i(g)\mu^l{}_k(g)$$

Dimostrazione. Scegliamo una M appropriata: prendiamo $M = E^n_m$, dove $(E^n_m)^i{}_k = \delta^i_m\delta^n_k$. Allora

$$0 = \int_G \rho^j{}_i(g)(E^n_m)^i{}_k\mu^k{}_l(g^{-1})dg = \int_G \rho^j{}_i(g)\delta^i_m\delta^n_k\mu^k{}_l(g^{-1})dg = \int_G \rho^j{}_m(g)\mu^n{}_l(g^{-1})dg = 0$$

Ovvero gli elementi di matrice di due rappresentazioni non equivalenti sono tutti ortogonali. □

Sia adesso $\rho = \mu$, abbiamo che N necessariamente è un multiplo dell'identità, quindi

$$\alpha I = \int_G \rho(g)M\rho(g^{-1})dg$$

Prendiamo la traccia:

$$Tr(\alpha I) = \int_G Tr(\rho(g)M\rho(g^{-1}))dg$$

ma se n è la dimensione della rappresentazione, per la proprietà ciclica della traccia:

$$\alpha n = \int_G Tr(M)dg = Tr(M)\int_G dg = Tr(M)$$

perchè abbiamo scelto la normalizzazione $\int_G dg = 1$. Allora

$$\alpha = \frac{Tr(M)}{n}$$

Se $\alpha = 0$, allora $Tr(M) = 0$, e questo significa che gli elementi fuori diagonale della rappresentazione sono ortogonali, infatti:

$$\int_G \rho^m{}_a(g)(E^k_i)^a{}_b\rho^b{}_l(g^{-1})dg = \int_G \rho^m{}_i(g)\rho^k{}_l(g^{-1})dg = \frac{Tr(E^k_i)}{n}\delta^m_l = \frac{\delta^k_i\delta^m_l}{n}$$

In particolare, se ρ è unitaria:

$$\int_G \rho^i{}_j(g)\overline{\rho^k{}_l(g^{-1})}dg = \frac{\delta_{ik}\delta^{jl}}{n}$$

Definizione 0.16. Sia $\rho : G \to GL(n, V)$ una rappresentazione. Il **carattere** di ρ è la funzione su G definita da

$$\chi_\rho(g) = Tr\rho(g)$$

Due proprietà evidenti sono

1. se $\sigma \sim \rho$, ovvero $\sigma = T^{-1}\rho T$, allora $\chi_\sigma = \chi_\rho$;
2. $\chi_\rho(a^{-1}ga) = \chi_\rho(g)$, per ogni $a, g \in G$.

Il carattere è un esempio di *funzione centrale*, ovvero una funzione che assume lo stesso valore sulle classi di coniugazione.

Lunedì 1 dicembre

Definizione 0.17. Una funzione "di classe" o centrale su G è una funzione

$$f : G \to \mathbb{K}$$

tale che

$$f(a^{-1}ga) = f(g)$$

Il carattere ha altre due proprietà importanti: se consideriamo due rappresentazioni (ρ, V) e (μ, W) di un gruppo G, possiamo pensare alla rappresentazione $\rho \oplus \mu$ che agisce sulla somma diretta $V \oplus W$:

$$(\rho \oplus \mu)(g) = \rho(g) \oplus \mu(g)$$

Come abbiamo visto la matrice $\rho \oplus \mu$ sarà costituita da due blocchi:

$$\begin{pmatrix} \rho(g) & 0 \\ 0 & \mu(g) \end{pmatrix}$$

per questo avremo che

$$\chi_{\rho\oplus\mu} = \chi_\rho + \chi_\mu$$

Analogamente, per il prodotto tensoriale:

$$(\rho \otimes \mu)(g) = \rho(g) \otimes \mu(g) = \begin{pmatrix} \rho_{11}(g)\mu(g) & . & . \\ . & . & . \\ . & . & \rho_{nn}(g)\mu(g) \end{pmatrix} \in M^{[dim(V)\cdot dim(W)]^2}$$

dunque

$$\chi_{\rho\otimes\mu} = \rho_{11}(g)Tr(\mu(g)) + ... + \rho_{nn}(g)Tr(\mu(g)) = Tr(\rho(g))Tr(\mu(g)) = \chi_\rho(g) \cdot \chi_\mu(g)$$

ovvero il carattere si comporta bene sia con la somma diretta di rappresentazioni che con il prodotto tensoriale.

Adesso, date le relazioni di ortogonalità, possiamo sommare sugli indici:

$$\sum_{i,k} \int_G \rho^i{}_i(g)\mu^k{}_k(g^{-1})dg = \int_G \chi_\rho(g)\chi_\mu(g^{-1})dg$$

Per ogni rappresentazione di un gruppo finito o compatto possiamo sempre pensare di trovare una rappresentazione unitaria equivalente, quindi, poichè il carattere non dipende dalla rappresentazione scelta, a meno di un cambio di indici possiamo scrivere

$$\chi_\mu(g^{-1}) = \overline{\chi_\mu(g)}$$

allora possiamo vedere la relazione di ortogonalità

$$\int_G \chi_\rho(g)\chi_\mu(g^{-1})dg = \int_G \chi_\rho(g)\overline{\chi_\mu(g)}dg$$

come un prodotto scalare per le funzioni sulle classi di coniugio. L'integrale si annulla se $\rho \not\cong \mu$, quindi possiamo dire

$$\int_G \chi_\rho(g)\overline{\chi_\mu(g)}dg = \begin{cases} 0, & \text{se } \rho \not\cong \mu; \\ 1, & \text{se le due rappresentazioni sono equivalenti.} \end{cases}$$

Infatti se le due rappresentazioni sono equivalenti non si ha identicamente zero nel secondo membro della relazione di ortogonalità, bensì:

$$\sum_{i,j} \frac{1}{n}\delta^i_k\delta^i_k = \sum_i \frac{1}{n}\delta^i_i = 1$$

Allora per sapere se due rappresentazioni (irriducibili) sono equivalenti o meno è sufficiente prendere il prodotto scalare di due caratteri. Risulta inoltre che i caratteri sono un sistema ortonormale nell'insieme delle funzioni di classe sul gruppo. Abbiamo quindi dimostrato che

Proposizione 0.0.16. *I caratteri sono un sistema ortonormale per le funzioni di classe su G.*

Proposizione 0.0.17. *I caratteri sono anche un sistema completo, ovvero ogni funzione di classe si può scrivere come combinazione lineare dei caratteri.*

Lemma 0.0.18. *Sia (ρ, V) una rappresentazione irriducibile di G. Sia poi f una funzione centrale continua, e ρ_f definita da:*

$$\rho_f = \int_G f(g)\rho(g)dg$$

ρ_f è una matrice.

Allora ρ_f è una omotetia (ovvero una moltiplicazione), di rapporto

$$\frac{1}{n}\int_G f(g)\chi_\rho(g)dg$$

Come arma segreta per dimostrare il lemma usiamo il lemma di Schur:

Dimostrazione. Facciamo vedere che ρ_f commuta con $\rho(g)$ per ogni $g \in G$:

$$\rho^{-1}(h)\rho_f\rho(h) = \rho^{-1}(h)\int_G f(g)\rho(g)dg\rho(h) = \int_G f(g)\rho(h^{-1}gh)dg$$

ma poichè la misura è invariante, e f è centrale, possiamo scrivere

$$= \int_G f(h^{-1}gh)\rho(h^{-1}gh)d(h^{-1}gh) = \int_G f(s)\rho(s)ds = \rho_f$$

dunque ρ_f è un multiplo dell'identità. Per calcolare il multiplo prendiamo la traccia della definizione:

$$\rho_f = \lambda I$$

$$n\lambda = \int_G f(g)Tr\rho(g)dg = \int_G f(g)\chi_\rho(g)dg$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{n}\int_G f(g)\chi_\rho(g)dg$$

□

Facciamo vedere adesso che il sistema è completo:

della proposizione. La dimostrazione si riferisce soltanto ai gruppi finiti; per i gruppi compatti si può estendere il discorso.

Siano $\chi_{\rho_1} \cdots \chi_{\rho_n}$ i caratteri delle rappresentazioni irriducibili, e sia $\bar{f}$ un elemento ortogonale a tutti i caratteri, cioè

$$\int_G \bar{f}(g)\chi_{\rho_k}(g)dg = 0 \ \ \forall k$$

Proveremo che $\bar{f} = 0$. Costruiamo infatti la matrice $\rho_{\bar{f}}$:

$$\rho_{\bar{f}} = \int_G \bar{f}(g)\rho(g)dg$$

Abbiamo dimostrato nel lemma che $\bar{f} = \lambda I$ con

$$\lambda = \frac{1}{n}\int_G \bar{f}(g)\chi_{\rho_k}(g)dg \ \ \forall \rho_k$$

ma siccome abbiamo chiesto che $\bar{f}$ sia ortogonale a tutti i caratteri, l'integrale fa zero, e così $\lambda = 0$ per ogni rappresentazione. □

Definizione 0.18. Definiamo la rappresentazione regolare di un gruppo finito G. Sia $|G|$ il numero di elementi di G. Consideriamo uno spazio vettoriale V di dimensione $|G|$, e indichiamo una base di V come $\{e_g\}_{g\in G}$. La rappresentazione regolare $R(g)$ è definita su V come segue:

$$h, g \in G$$

$$R(h)e_g = e_{hg}$$

É evidentemente una rappresentazione:

$$R_{kh}e_g = e_{khg} = R_k e_{hg} = R_k R_h e_g$$

Se v è un vettore di V, possiamo scrivere

$$v = \sum_{g \in G} v^g e_g$$

$$R_h v = \sum_{g \in G} v^g e_{hg}$$

Veniamo adesso a considerare il carattere della rappresentazione regolare:

$$\chi_R(g) = Tr(R_g)$$

Se abbiamo come elemento $g = e$, avremo l'identità:

$$R_e e_g = e_g$$

$$\Rightarrow \chi_R(e) = tr(I) = n$$

Mentre per qualsiasi altro elemento $h \neq e$, poichè nessun elemento del gruppo viene lasciato fisso dalla permutazione indotta da h, avremo che la matrice corrispondente a R_h sarà composta da tutti elementi fuori diagonale, dunque la traccia sarà nulla:

$$R_h e_k = e_{hk}$$

$$\chi_R(h \neq e) = 0$$

L'ortogonalità dei caratteri ci dice che l'integrale

$$\int_G \overline{\chi_\rho(g)} \chi_\mu(g)$$

si annulla se le due rappresentazioni ρ e μ non sono equivalenti, e fa 1 altrimenti. Sia allora σ una rappresentazione di G finito. Per il teorema di Maschke, σ è completamente riducibile, allora si può scrivere

$$\sigma = \bigoplus_{i=1}^{p} \rho_i$$

dove ρ_i è una rappresentazione irriducibile. La somma è ben definita a meno di permutazioni, ovvero i blocchi della matrice sono determinati a meno di scambi; può succedere che un blocco sia ripetuto, in tal caso scriveremo:

$$\sigma = \bigoplus_{i=1}^{k} n_i \rho_i$$

dove

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = p$$

e n_i è il numero di volte che la rappresentazione ρ_i compare in σ. Le ρ_i adesso, oltre che irriducibili sono anche non equivalenti. Osserviamo comunque che avendo più rappresentazioni equivalenti, queste siano riferite a basi diverse, pertanto prima di scrivere la somma con gli n_i immaginiamo di aver portato tutto nella stessa base.

Teorema 0.0.19. *La rappresentazione regolare R di G contiene tutte le rappresentazioni irriducibili di G. Ciascuna di esse è contenuta in R un numero di volte pari alla sua dimensione.*

Dimostrazione. Sia R la rappresentazione regolare e (ρ_i, V_i) una rappresentazione irriducibile. Dobbiamo calcolare il prodotto

$$\int_G \chi_R(g)\overline{\chi_{\rho_i}(g)}dg = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_R(g)\overline{\chi_{\rho_i}(g)} = \frac{1}{|G|}\chi_R(e)\overline{\chi_{\rho_i}(e)} + \frac{1}{|G|}\sum_{g\neq e}\chi_R(g)\overline{\chi_{\rho_i}(g)}$$

ma il carattere di R è nullo per ogni $g \neq e$, mentre $\chi_R(e) = |G|$ quindi

$$\int_G \chi_R(g)\overline{\chi_{\rho_i}(g)}dg = \frac{1}{|G|}\chi_R(e)\overline{\chi_{\rho_i}(e)} = \overline{\chi_{\rho_i}(e)} = n_i$$

dove n_i è proprio la dimensione della rappresentazione ρ_i. Osserviamo che n_i è anche il numero di volte che ρ_i è contenuta in R, infatti, in generale se una rappresentazione σ si può scrivere come

$$\sigma = \rho_1 \oplus \rho_2 \oplus ... \oplus \rho_k$$

e prendiamo

$$\int_G \chi_\sigma(g)\overline{\chi_{\rho_j}(g)} = \int_G \chi_{\rho_1}(g)\overline{\chi_{\rho_j}(g)} + \int_G \chi_{\rho_2}(g)\overline{\chi_{\rho_j}(g)} + ... + \int_G \chi_{\rho_k}(g)\overline{\chi_{\rho_j}(g)}$$

L'integrale si annullerà per ogni $\rho_m \nsim \rho_j$ e farà 1 ogni volta che in σ è contenuta una qualche $\rho_m \sim \rho_k$. □

Corollario 0.0.20. *I gradi (cioè le dimensioni) di tutte le rappresentazioni irriducibili di G soddisfano alla relazione*

$$\sum_{\rho\, irrep} n_i^2 = |G|$$

Dimostrazione. Prendiamo $R = n_1\rho_1 \oplus ... \oplus n_k\rho_k$, con ρ_i tutte irriducibili e non equivalenti. Sappiamo che $dim(R) = |G|$, dunque

$$dim(R) = n_1 dim\rho_1 + ... + n_k dim\rho_k = \sum_{i=1}^{k} n_i^2$$

Questo ci dice che abbiamo un certo numero di vincoli sulle dimensioni di una rappresentazione. □

Facciamo adesso un riassunto di quanto ottenuto finora:

1. Lemma di Schur;
2. relazioni di ortogonalità;
3. definizione di carattere e proprietà;

4. numero di volte che una rappresentazione $\rho = \rho_1 \oplus ... \oplus \rho_k$ contiene una rappresentazione ρ_j:

$$\int_G \chi_\rho(g)\overline{\chi_{\rho_j}(g)}dg = n_j$$

In particolar,e ρ è irriducibile se e solo se il vettore dei suoi caratteri è normalizzato a 1:

$$\int_G |\chi_\rho|^2 dg = 1$$

Dimostrazione. $\rho = \bigoplus_{l=1}^s n_l \rho_l$, con ρ_l irriducibili e non equivalenti. Allora

$$\int_G |\chi_\rho|^2 dg = \int_G (\sum_l n_l \chi_{\rho_l}(g))\overline{(\sum_r n_r \chi_{\rho_r}(g))}dg = \int_G \sum_{l,r} n_l n_r \chi_{\rho_l}(g)\overline{\chi_{\rho_r}(g)}dg = \sum_{l,r} n_l n_r \int_G \chi_{\rho_l}(g)\overline{\chi_{\rho_r}(g)}dg$$

ma l'integrale sopra dà semplicemente una $\delta_{l,r}$:

$$= \sum_l n_l^2$$

Se ρ è irriducibile, però, deve contenere una sola rappresentazione, quindi $n_i = 1$ per un certo i, $n_k \neq 0$ per $k \neq i$. □

Rappresentazione regolare;

la rappresentazione regolare contiene tutte le rappresentazioni irriducibili, ciascuna un numero di volte pari alla sua dimensione;

abbiamo definito la funzione

$$\rho_f = \int_G f(g)\rho(g)dg$$

con f funzione centrale;

i caratteri delle rappresentazioni irriducibili formano una base ortonormale nello spazio delle funzioni centrali;

possiamo concludere che il numero delle rappresentazioni irriducibili di G è uguale al numero di classi di coniugazione di G; dimostreremo adesso la completezza dei caratteri χ:

completezza dei caratteri.

$$\rho_f = \int_G f(g)\rho(g)dg$$

con $\rho_f = \lambda I$, e

$$\lambda = \frac{1}{n}\int_G f(g)\chi_\rho(g)dg$$

In particolare questo vale anche per $\bar{f}$ ovvero la complessa coniugata di f. Dimostriamo che se f è ortogonale a tutti i χ_{ρ_i} per pgni ρ_i irriducibile, allora $f = 0$. Assumiamo per assurdo $f \neq 0$ e

$$\int_G \bar{f}(g)\chi_{\rho_i}(g)dg = 0$$

Se ρ è una qualsiasi rappresentazione di G, eventualmente riducibile, si ha

$$\rho = \bigoplus_{i=1}^{k} n_i \rho_i$$

e

$$\rho_{\bar{f}} = \lambda I$$

$$\lambda = \int_G \bar{f}(g)\chi_\rho(g)dg = \int_G \bar{f}(g)\sum_{i=1}^{k}\chi_{\rho_i}(g)dg$$

Ma siccome f è ortogonale a tutti i caratteri, l'integrale fa zero. Questo vale per qualsiasi rappresentazione, in particolare possiamo scegliere $\rho = R$, la rappresentazione regolare, per cui

$$R_{\bar{f}} = 0$$

$$\Rightarrow 0 = R_{\bar{f}}(e_h) = \int \bar{f}(g)R(g)e_h dg = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\bar{f}(g)e_{gh}$$

ma siccome stiamo sommando su $g \in G$, l'ultimo termine è uno sviluppo sulla base dei vettori e_g. Siccome è 0, e siccome i vettori e_g sono linearmente indipendenti, l'unica possibilità è che siano nulli i coefficienti, ovvero $\bar{f}(g) = 0 \ \forall g \in G$. □

Siccome i caratteri χ sono una base dello spazio delle funzioni centrali, il numero di caratteri è pari al numero delle classi di coniugazione del gruppo.
Esempio: consideriamo il gruppo ciclico C_3. Esso è un gruppo abeliano, ed è il gruppo delle simmetrie del triangolo equilatero. Ha tre elementi:

$$C_3 = \{e, c, c^2\}$$

tali che

$$c^3 = e$$

Ci interessa costruire la tabella dei caratteri. Essendo il gruppo abeliano, le sue rappresentazioni irriducibili saranno tutte 1-dimensionali, e potremo in qualche modo confondere ogni rappresentazione irriducibile con la sua traccia, e quindi col suo carattere.

Le rappresentazioni irriducibili, come abbiamo visto, sono tante quante le classi di coniugazione. Per l'abelianità, si ha

$$a^{-1}ga = g \ \ \forall a, g \in G$$

quindi il numero di classi di coniugazione è pari al numero di elementi di G, quindi 3. Abbiamo tre rappresentazioni irriducibili, che chiameremo $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \equiv \chi_1, \chi_2, \chi_3$. La tabella dei caratteri ha questo aspetto:

$$\begin{pmatrix} & e & c & c^2 \\ \chi_1 & 1 & 1 & 1 \\ \chi_2 & 1 & w & w^2 \\ \chi_3 & 1 & w^2 & w \end{pmatrix}$$

Infatti, per ogni rappresentazione ci ricordiamo che

$$\rho(ab) = \rho(a)\rho(b)$$

in particolare:

$$\rho_i(c^2) = \rho_i(c)\rho_i(c) = \rho_i(c)^2$$

In caso la rappresentazione non fosse stata unidimensionale, al posto del quadrato avremmo avuto un prodotto di matrici righe per colonne. Poichè le rappresentazioni sono unidimensionali, $\rho_i(e) = \chi_i(e) = 1$. Poichè $c^2 = e$, si ha che

$$1 = \rho_i(e)\rho_i(c^3) = \rho(c)^3$$

quindi $\rho_i(c)$ è uguale alle radici cubiche dell'unità. Scegliamo un ordine per le rappresentazioni, ad esempio $\rho_1(c) = 1$, $\rho_2(c) = w = e^{i\frac{2}{3}\pi}$ e $\rho_3(c) = w^2 = e^{i\frac{4}{3}\pi}$, e la tabella dei caratteri segue.

Esercizio: verificare l'ortonormalità dei caratteri. É immediato osservando che la somma delle radici n-esime dell'unità fa zero.

Esempio: (come funziona una riduzione)

Consideriamo, su $\mathbb{R}^3$, la rappresentazione di una rotazione attorno a z:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In particolare, le rotazioni di C_3 si ottengono per $\theta = 0, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$. Possiamo definire la rappresentazione "vettoriale" di C_3 la seguente:

$$\rho^V(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rho^V(c) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rho^V(c^2) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dalla teoria sappiamo che il carattere della rappresentazione vettoriale sarà una combinazione lineare dei caratteri delle tre rappresentazioni irriducibili $\rho_1^V, \rho_2^V, \rho_3^V$:

$$\chi^V = a_1\chi_1 + a_2\chi_2 + a_3\chi_3$$

dove

$$a_i = \langle \chi_i, \chi^V \rangle = \frac{1}{3}\left(\overline{\chi_i(e)}\chi^V(e) + \overline{\chi_i(c)}\chi^V(c) + \overline{\chi_i(c^2)}\chi^V(c^2)\right)$$

Ma ρ^V si comporta in modo simile alla rappresentazione regolare, infatti

$$\chi_{\rho^V}(e) = 3$$

$$\chi_{\rho^V}(c) = 0$$
$$\chi_{\rho^V}(c^2) = 0$$

da cui

$$a_i = \frac{1}{3}(1 \cdot 3 + 0 + 0) = 1$$

Allora

$$\rho^V = \rho_1 \oplus \rho_2 \oplus \rho_3$$
$$\Rightarrow \chi^V = \chi_1 + \chi_2 + \chi_3$$

Facciamo la riduzione in maniera esplicita:

$$\rho^V = \begin{pmatrix} \rho_2 \sim \chi_2 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_3 \sim \chi_3 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_1 \sim \chi_1 \end{pmatrix}$$

dove l'ordine delle rappresentazioni è arbitrario. Ricordando la tabella dei caratteri, abbiamo che

$$\rho^V(e) = \rho^V(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rho^V(e) = \rho^V(e) = \begin{pmatrix} w & 0 & 0 \\ 0 & w^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rho^V(e) = \rho^V(e) = \begin{pmatrix} w^2 & 0 & 0 \\ 0 & w & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dove $w = e^{i\frac{2}{3}\pi}$. Per passare dalla rappresentazione ρ^V a quella ridotta è necessario trovare la matrice che la diagonalizza, ma questa è semplicemente la matrice degli autovettori.
Esempio: guardare il gruppo D_3 sul Jones.

Gruppi di Lie

Definizione 0.19. Un gruppo di Lie è un gruppo che è anche una varietà analitica per la quale le operazioni del gruppo sono analitiche.

Quasi tutti i gruppi di Lie, a parte alcuni appositamente costruiti, sono gruppi di matrici. Quindi per noi i gruppi di Lie saranno gruppi di matrici. La moltiplicazione righe per colonne è analitica per costruzione, così come l'operazione di inversione, dunque le proprietà di gruppo di Lie sono verificate. Inoltre, nei gruppi di Lie le relazioni di tipo polinomiale hanno sempre risultati analitici, il che significa che gli sviluppi in serie sono sempre definiti, e convergono sempre. Nel caso di $SU(2)$, abbiamo visto che delle relazioni polinomiali definivano delle superfici algebriche, come S^3.

I gruppi di Lie hanno un elemento privilegiato, l'identità, e considerando (G, e) come varietà differenziabile, possiamo studiare lo spazio tangente alla varietà nell'identità, T_eG. Applicheremo le usuali nozioni di connessione e compattezza degli spazi topologici, ovvero un insieme connesso è un insieme non scrivibile come unione di due aperti non vuoti disgiunti, e un insieme compatto è un insieme per cui da ogni ricoprimento aperto è possibile estrarre un sottoricoprimento finito.

Al solito, T_eG sarà un insieme di classi di equivalenza di curve. Abbiamo però un bonus in più dato dal fatto di essere su un gruppo di matrici: le curve infatti in questo caso sono delle matrici $n \times n$, ed è immediato capire cosa si intende per derivata rispetto a un parametro.

Definizione 0.20. Definiamo una curva ″buona″ una funzione

$$I \subset \mathbb{R} \to G$$

tale che

$$c(0) = e$$

e c è liscia (cioè differenziabile).

Se abbiamo quindi $t \mapsto c(t)$, un vettore dello spazio tangente all'identità sarà

$$v = c'(0)$$

Siccome le carte naturali sono matrici $n \times n$ (a volte eventualmente sovrastimate, poichè come abbiamo visto la dimensione del gruppo in generale sarà minore del numero di elementi di matrice), l'analiticità di questa rappresentazione ci garantisce che $c'(t)$ è una operazione lecita.

Ad esempio consideriamo ancora una matrice di rotazione attorno all'asse z:

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se vogliamo una curva buona che passi per l'identità possiamo scrivere

$$R(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = c_z(t)$$

Infatti $c_z(0) = I$, e

$$c_z'(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dove osserviamo che $c_z'(0)$ è una matrice antisimmetrica. Un discorso analogo vale se definiamo le matrici $c_x(t)$ e $c_y(t)$, rotazioni attorno all'asse x e all'asse y, ma anche curve buone, e con derivata antisimmetrica nell'origine. c_x', c_y' e c_z' sono linearmente indipendenti, e poichè lo spazio tangente all'identità ha dimensione 3 (la stessa del gruppo delle rotazioni $SO(3)$), esse formano una base.

Sappiamo già che lo spazio tangente a una varietà ha una struttura di spazio vettoriale, ma possiamo vedere come per un gruppo di Lie esso abbia delle ulteriori proprietà, dovute alla possibilità di moltiplicare gli elementi del gruppo stesso.

Sia infatti $e \in G$. Siano $c(t)$ e $b(t)$ due curve buone, allora $c'(0)$ e $b'(0)$ stanno in T_eG. Consideriamo la curva prodotto $\sigma(t) = c(t)b(t)$, questa è ancora buona:

$$\sigma(0) = c(0)b(0) = ee = e$$

inoltre è differenziabile, essendo prodotto di funzioni differenziabili. Allora $\sigma'(0) \in T_eG$, ma

$$\sigma'(0) = c'(0)b(0) + c(0)b'(0) = c'(0) + b'(0)$$

dunque la somma di vettori di T_eG sta ancora in T_eG. Se consideriamo adesso $c(\alpha t)$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, questa è ancora buona, e si ha $\alpha c'(0) \in T_eG$, allora T_eG è chiuso anche rispetto al prodotto per scalare. Le due proprietà di chiusura rispetto all'addizione e al prodotto per scalare rendono T_eG uno spazio vettoriale.

La rappresentazione aggiunta

Poichè T_eG è uno spazio vettoriale, vi possiamo rappresentare sopra G: sia $c(t)$ una curva buona, osserviamo che

$$gc(t)g^{-1}$$

è ancora una curva buona, infatti è differenziabile perchè le operazioni del gruppo sono differenziabili per ipotesi, e

$$gc(0)g^{-1} = gg^{-1} = e$$

quindi abbiamo che

$$\frac{d}{dt}(gc(t)g^{-1})\bigg|_{t=0} \in T_eG$$

$$\Rightarrow gc'(0)g^{-1} \in T_eG$$

Poichè i termini sono tutte matrici, il risultato sarà ancora una matrice.

Sia adesso $X = c'(0)$, allora definiamo

$$ad_g X = gXg^{-1}$$

Poichè come abbiamo visto $gCg^{-1} \in T_eG$, l'operazione di aggiunto va

$$ad_g : T_eG \to T_eG$$

oppure

$$ad : G \times T_eG \to T_eG$$

Osserviamo che ad è una rappresentazione. Inoltre, $\forall g \in G$, ad_g è lineare:

$$\frac{d}{dt}(gc(t)b(t)g^{-1})\bigg|_{t=0} = g(c'(0) + b'(0))g^{-1} = gc'(0)g^{-1} + gb'(0)g^{-1}$$

$$\frac{d}{dt}(gc(\alpha t)g^{-1})\bigg|_{t=0} = \alpha g c'(0) g^{-1}$$

dunque ad_g è lineare da T_eG in T_eG. Inoltre, ad è una rappresentazione lineare:

$$ad_{g_1g_2}X = g_1g_2X(g_1g_2)^{-1} = g_1(g_2Xg_2^{-1})g_1^{-1} = ad_{g_1}ad_{g_2}X$$

La chiameremo **rappresentazione aggiunta**.

Adesso, invece di considerare un elemento $g \in G$, consideriamo un'altra curva buona $b(t)$, tale che $b'(0) = Y$, e una curva buona $c(t)$ tale che $c'(0) = X$. A t fissato, $b(t) \in G$, e possiamo considerare la rappresentazione aggiunta

$$ad_{b(t)}X \in T_eG$$

Si avrà

$$ad_{b(t)}X = b(t)Xb^{-1}(t)$$

Ma poichè T_eG è uno spazio lineare, possiamo considerare la derivata

$$\frac{d}{dt}(b(t)Xb^{-1}(t))\bigg|_{t=0} =\in T_eG$$

$$\frac{d}{dt}(b(t)Xb^{-1}(t))\bigg|_{t=0} = b'(0)Xb^{-1}(0) + b(0)X(b^{-1}(0))'$$

Vediamo come calcolare $(b^{-1}(t))'$:

$$b(t)b^{-1}(t) = I$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}b(t)b^{-1}(t) = b'(t)b^{-1}(t) + b(t)(b^{-1}(t))' = 0$$

$$\Rightarrow (b^{-1}(t))' = -b^{-1}(t)b'(t)b^{-1}(t)$$

allora

$$\frac{d}{dt}(b(t)Xb^{-1}(t))\bigg|_{t=0} = b'(0)X - Xb'(0) = YX - XY \in T_eG$$

dunque abbiamo scoperto che l'operazione binaria tra due elementi dello spazio tangente, $[Y, X] = YX - XY$, è ancora un elemento dello spazio tangente. Inoltre la ″moltiplicazione″ $[\,,\,]$ soddisfa alle seguenti proprietà

$$[X, Y] = -[Y, X] \Rightarrow [X, X] = 0$$

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0 \quad \text{(identità di Jacobi)}$$

Uno spazio lineare, su cui sia definito un prodotto bilineare $[\,,\,]$ che soddisfa l'identità di Jacobi, si dice **algebra di Lie**. Abbiamo quindi dimostrato che lo spazio tangente all'identità di un gruppo di Lie non è un semplice spazio vettoriale ma ha della struttura in più.

Giovedì 4 dicembre

Consideriamo adesso alcune proprietà algebriche delle algebre di Lie, e le relazioni tra un gruppo di matrici e la sua algebra di Lie. Poichè si vuole studiare le cose dal punto di vista della simmetria, essendo l'algebra di Lie uno spazio vettoriale, è più facile da trattare rispetto a un gruppo; cercheremo dunque di capire se dallo studio dell'algebra di Lie è possibile avere informazioni sul gruppo.

Il gruppo ha una famiglia di diffeomorfismi definiti su di esso, che rende ogni intorno della varietà diffeomorfo ad ogni altro intorno. In particolare, possiamo usare la moltiplicazione del gruppo per passare dall'identità a tutti gli altri elementi, e poichè la moltiplicazione è una applicazione analitica per ipotesi, è un diffeomorfismo da un intorno dell'identità all'intorno di un altro punto. Su una varietà differenziabile che non sia anche un gruppo di Lie, non è detto che questa famiglia di diffeomorfismi esista, in altre parole una varietà differenziabile non è in generale uno spazio omogeneo per i diffeomorfismi.

Sia A una algebra di Lie. A è uno spazio lineare, ed esiste un prodotto (di Lie) **non** associativo, bilineare:

$$[\,,\,] : A \times A \to A$$

$$(\eta, \xi) \mapsto [\eta, \xi]$$

tale che

$$[\eta, \xi] = -[\xi, \eta]$$

$$[\xi, \xi] = 0$$

e che soddisfi l'identità di Jacobi:

$$\sum_{ciclica} [[\xi, \eta], \theta] = 0$$

Poichè A è uno spazio vettoriale, possiamo scegliere una base $\{\alpha_i\}$, allora il generico elemento si potrà scrivere come

$$\xi = \xi^i \alpha_i$$

$$\eta = \eta^j \alpha_j$$

$$\Rightarrow [\xi, \eta] = \xi^i \eta^j [\alpha_i, \alpha_j]$$

Dunque il prodotto di Lie è definito se lo conosciamo su una base.
Osservazione: il prodotto di Lie in generale non è un commutatore; ad esempio le parentesi di Poisson sono un prodotto di Lie ma non sono un commutatore.

Dobbiamo conoscere quindi $[\alpha_i, \alpha_j]$, e sappiamo che sarà ancora un elemento di A. Possiamo scrivere quindi

$$[\alpha_i, \alpha_j] = c_{ij}^k \alpha_k$$

dove le c_{ij}^k si dicono costanti di struttura. Poichè $[\alpha_i, \alpha_j] = -[\alpha_j, \alpha_i]$, le c_{ij}^k sono antisimmetriche negli indici inferiori.
Esercizio: trovare la relazione tra le c_{ij}^k derivante dall'identità di Jacobi:

$$0 = \sum_{ciclica} [[\alpha_i, \alpha_j], \alpha_k] = \sum_{ciclica} c_{ij}^l [\alpha_l, \alpha_k] = \sum_{ciclica} c_{ij}^l c_{lk}^m \alpha_m = 0$$

$$\Rightarrow c_{ij}^{l}c_{lk}^{m} + c_{ki}^{l}c_{lj}^{m} + c_{jk}^{l}c_{li}^{m} = 0$$

Così come dopo il gruppo abbiamo studiato il sottogruppo, stavolta dopo l'algebra studieremo la sottoalgebra.

Definizione 0.21. Sia A un'algebra di Lie, e sia $B \subseteq A$. Diremo che B è una sottoalgebra di A se B è un'algebra di Lie per le operazioni ereditate da A, cioè:

1. B è sottospazio lineare di A
2. $\forall \xi, \eta \in B$, allora $[\xi, \eta]_B \equiv [\xi, \eta]_A \in B$

Per i gruppi esistevano le classi laterali: dato un gruppo G e un sottogruppo S, se $a, b \in G$, dicevamo che $a \sim b$ se ab^{-1} stava nel sottogruppo, oppure se a e b appartenevano alla stesa classe laterale. Nel caso delle algebre di Lie possiamo fare un discorso simile:

Definizione 0.22. Sia A un'algebra di Lie e B una sua sottoalgebra, allora se $\xi, \eta \in A$, diremo che $\xi \sim \eta$ se $\xi - \eta \in B$. Questa è una relazione di equivalenza, infatti

$$\xi - \xi = 0 \in B$$

$$\xi - \eta \in B \Rightarrow \eta - \xi = -(\xi - \eta) \in B$$

$$\xi - \eta \in B,\ \eta - \theta \in B \Rightarrow \xi - \eta + \eta - \theta = \xi - \theta \in B$$

L'algebra di Lie A viene allora partizionata in classi di equivalenza, e potremo prendere lo spazio quoziente A/B:

$$A/B = \{\xi + B | \xi \in A\}$$

L'insieme delle classi di equivalenza di un gruppo in generale non aveva a sua volta struttura di gruppo, ma soltanto di spazio omogeneo per la moltiplicazione del gruppo. Stavolta però, siccome abbiamo a che fare con spazi lineari, abbiamo che A/B è ancora uno spazio lineare dove la somma e il prodotto per uno scalare sono definiti da:

$$(\xi + B) + (\eta + B) = (\xi + \eta) + B$$

$$a(\xi + B) = a\xi + B)$$

Come per i gruppi era possibile che G/S fosse un sottogruppo, possiamo chiederci se sia possibile che A/B sia a sua volta un'algebra di Lie. Per i gruppi era necessario che il sottogruppo fosse autoconiugato o normale, ovvero

$$b^{-1}Sb = S \quad b \in G$$

allora G/S poteva essere dotato della struttura di gruppo in questo modo:

$$(aS)(bS) = a(Sb)S = ab(SS) = abS$$

Adesso, se B è una sottoalgebra di A ($B \prec A$), B è sottospazio vettoriale e $[B, B] \subseteq B$. Come esempio possiamo considerare il gruppo delle matrici invertibili $GL(n, \mathbb{K})$: tale gruppo ha dimensione su $\mathbb{K}$ pari a n^2, e se prendiamo una matrice invertibile in forma infinitesima:

$$A \in GL(n, \mathbb{K})$$

$$A = I + \epsilon M$$

abbiamo che l'inversa dovrà avere la forma

$$A^{-1} = I - \epsilon M$$

ma non c'è nessuna richiesta aggiuntiva su M, pertanto l'algebra di Lie di $GL(n, \mathbb{K})$, $LieGL(n, \mathbb{K}) \equiv gl(n, \mathbb{K})$, ha anch'essa dimensione su $\mathbb{K}$ pari a n^2. $gl(n, \mathbb{K})$ sono allora le matrici a elementi in $\mathbb{K}$ di dimensione $n \times n$: infatti, le matrici costituiscono uno spazio vettoriale, e il commutatore di due matrici A e B, $[A, B]$ è ancora una matrice. Se prendiamo una qualsiasi algebra di matrici $n \times n$, ad esempio quella associata al gruppo $U(n)$:

$$LieU(n) = u(n) = \{\text{insieme delle matrici antihermitiane}\}$$

abbiamo che se $\xi, \eta \in u(n)$:

$$\xi = -\xi^\dagger$$

$$\eta = -\eta^\dagger$$

$$[\xi, \eta]^\dagger = (\xi\eta - \eta\xi)^\dagger = \eta^\dagger\xi^\dagger - \xi^\dagger\eta^\dagger = \eta\xi - \xi\eta = -[\xi, \eta]$$

dunque il commutatore di matrici antihermitiane è anch'esso antihermitiano. In generale questo vale per tutti i gruppi lineari chiusi, ovvero gruppi definiti da relazioni polinomiali del tipo $F(x_1, ..., x_n) = 0$; questo accade perchè le condizioni imposte mediante vincoli del genere rappresentano la sottrazione di un sottoinsieme chiuso dell'insieme di partenza, e siccome $GL(n, \mathbb{K})$ è aperto, togliere un chiuso da un aperto lo lascia aperto. Si può verificare a mano che tutte le algebre di Lie dei gruppi lineari chiusi sono sottoalgebre di $gl(n, \mathbb{K})$.

Siano $\xi, \eta \in A$, consideriamo

$$\xi + B, \eta + B \in A/B$$

$$\xi + B + \eta + B = \xi + \eta + B$$

dunque A/B è lineare. Dobbiamo considerare il commutatore

$$[\xi + B, \eta + B]$$

e nel caso questo sia ancora un elemento di A/B, avremmo trovato una proprietà analoga a quella che caratterizzava il quoziente di un gruppo G con un suo sottogruppo normale S; si ha

$$[\xi + B, \eta + B] = [\xi, \eta] + [\xi, B] + [B, \eta] + [B, B]$$

sappiamo che $[\xi, \eta] \in LieG$, e $[B, B] \in B$; se $[\xi, B]$ e $[B, \eta]$ fossero ancora elementi di B, potremmo scrivere

$$[\xi + B, \eta + B] = [\xi, \eta] + B$$

allora definiamo

Definizione 0.23. Un sottoinsieme $B \subseteq A$ tale che B è sottospazio di A e $[\xi, B] \in B \forall \xi \in A$ si dice **ideale** di A.

In particolare, $[B, B] \subseteq B$ dunque un ideale è anche una sottoalgebra.

Allora, se B è un ideale di A, A/B ha una struttura naturale di algebra di Lie.

Esiste un teorema (teorema di Ado) che afferma che qualsiasi algebra di Lie è isomorfa ad una algebra di matrici. Non ci resta che definire l'idea di omomorfismo anche per algebre di Lie: siano A, B algebre di Lie, si chiede ad un omomorfismo ϕ di mantenere le operazioni tra algebre:

$$\phi : A \to B$$

tale che ϕ è lineare (A, B sono spazi vettoriali):

$$\phi(a\xi + \eta) = a\phi(\xi) + \phi(\eta)$$

Inoltre

$$\phi([\xi, \eta]) = [\phi(\xi), \phi(\eta)]$$

Possiamo enunciare per algebre di Lie un teorema di omomorfismo analogo a quello per gruppi:

Teorema 0.0.21 (Teorema di omomorfismo)**.** *Sia* $\phi : A \to B$ *un omomorfismo. Definiamo* $\ker \phi = \{\xi \in A | \phi(\xi) = 0\}$*; Allora* $\ker \phi$ *è un ideale, ed esiste un isomorfismo* $\psi : A/\ker \phi \to B$*.*

Dimostrazione.

1. è sottospazio lineare

$$\xi, \eta \in \ker \phi$$

$$\phi(a\xi + \eta) = a\phi(\xi) + \phi(\eta) = 0 + 0 = 0$$

2. sia $\xi \in \ker \phi$, e $\eta \in A$; vogliamo provare che $[\xi, \eta] \in \ker \phi$:

$$\phi([\xi, \eta])$$

ma ϕ è un omomorfismo, quindi

$$= [\phi(\xi), \phi(\eta)] = [0, \phi(\eta)] = 0$$

allora abbiamo dimostrato che $\ker \phi$ è un ideale, dunque $G/\ker \phi$ è un'algebra di Lie.

Definizione 0.24. Definiamo l'algebra quoziente $A/\ker \phi$ come

$$A/\ker \phi = \{\xi + \ker \phi | \xi \in A\}$$

e la proiezione

$$\pi : A \to A/\ker \phi$$

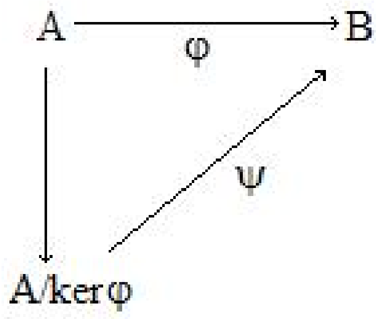
che associa

$$\pi(\xi) = \xi + \ker \phi$$

Allora possiamo definire l'isomorfismo ψ come

$$\psi(\xi + \ker \phi) = \phi(\xi)$$

$\square$



In realtà si scopre che ci sono delle ben precise corrispondenze:

1. gruppi di Lie e algebre di Lie;
2. sottogruppi di Lie e sottoalgebre di Lie;
3. sottogruppi normali e ideali;
4. gruppi quoziente e algebre quoziente;
5. omomorfismi di gruppi e omomorfismi di algebre;
6. teorema di omomorfismo per gruppi e teorema di omomorfismo per algebre.

Ritorniamo adesso sull'aspetto geometrico:

$$LieG = T_eG$$

$$X \in LieG$$

L'idea è questa: se prendiamo $g \in G$ qualsiasi, fissato, questo definisce dei diffeomorfismi di G in sè:

$$r_g : G \to G$$

$$a \mapsto r_g a = ag$$

$$l_g : G \to G$$

$$a \mapsto l_g a = ga$$

le due applicazioni r_g e l_g sono dette rispettivamente traslazione destra e traslazione sinistra. Esse sono diffeomorfismi:

1. sono lisce perchè le operazioni del gruppo sono lisce per ipotesi;
2. sono iniettive: se $r_g a = r_g b$, allora $a = b$, infatti

$$r_g a = r_g b \Rightarrow ag = bg \Rightarrow agg^{-1} = bgg^{-1} \Rightarrow a = b$$

3. sono surgettive, cioè per ogni $b \in G$ esiste $a \in G$ tale che $b = r_g a$ oppure $b = l_g a$. Se $b = ag$, basta prendere $a = bg^{-1}$, in modo che
$$r_g a = ag = bg^{-1}g = b$$

4. sono invertibili, basta prendere $r_{g^{-1}}$ e $l_{g^{-1}}$:
$$r_{g^{-1}} r_g a = (ag)g^{-1} = a$$

Osservazione: (generale) se abbiamo una applicazione $F : V \to V$, con V spazio vettoriale, la derivata di F è data da
$$F(a + \epsilon h) - F(a) = \epsilon h D(F)(a) + o(\epsilon^2)$$
Supponiamo F sia lineare, allora
$$F(a + \epsilon h) - F(a) = F(a) + \epsilon F(h) - F(a) = \epsilon D(F)(a)(h)$$
Dunque la derivata di F nel punto a è F stessa.

Abbiamo visto che un'applicazione differenziabile Φ da una varietà M in un'altra varietà differenziabile N porta vettori tangenti in vettori tangenti, ovvero se prendiamo un vettore $v \in T_x M$, questo viene portato in $w = d\phi_x V$. Viceversa, se $X \in \mathfrak{X}(M)$, sebbene sia vero che $d\Phi_x X_x = T_{\Phi(x)} \in T_{\Phi(x)}N$, non è vero in generale che $d\Phi X$ è un campo su $\mathfrak{X}(N)$. Tuttavia questo p vero se l'applicazione Φ è un diffeomorfismo, allora possiamo utilizzare le traslazioni destre e sinistre per trasportare sulla varietà i campi vettoriali. Possiamo mettere in corrispondenza un elemento di $T_e G$ con un campo vettoriale, grazie al diffeomorfismo (surgettivo e iniettivo). Sia $X_e \equiv X \in T_e G$; dato che abbiamo $r_g : G \to G$, possiamo definire un campo vettoriale su tutto G come segue:
$$r_g : e \mapsto g$$
$$dr_g(e) : T_e G \to T_g G$$
Se lo facciamo per tutti gli elementi del gruppo, possiamo definire un vettore tangente in tutti gli spazi tangenti al gruppo; poichè r_g è analitica, anche il risultato dell'applicazione di dr_g sarà analitico, dunque un campo vettoriale.

Sia G un gruppo di matrici, e $T_e G$ un'algebra di Lie di matrici. Siano $a = M_a$ e $g = M_g$ matrici del gruppo; abbiamo che
$$r_g a = ag = M_a M_g$$
N.B.: la derivata di una applicazione lineare coincide con l'applicazione stessa; dunque la struttura lineare dello spazio delle matrici non conta nulla ai fini del gruppo, ma la moltiplicazione a destra per una matrice è comunque una operazione lineare sullo spazio (lineare) delle matrici. Infatti:
$$r_g(\alpha M_a + M_b) = (\alpha M_a + M_b)M_g = \alpha M_a M_g + M_b M_g = \alpha r_g a + r_g b$$
dunque, $dr_g = r_g$. Possiamo costruire il campo vettoriale semplicemente così: se $X \in T_e G$ è una matrice di $LieG = T_e G$, allora $X_g = dr_g(e) X_e = X_e M_g \in T_g G$.

Definizione 0.25. I campi $X_g = X_e M_g$ si dicono campi vettoriali su g ottenuti da una traslazione destra; analogamente potevamo ottenere i campi $\tilde{X}_g = M_g X_e$ dalle traslazioni sinistre.

Tornando ai diffeomorfismi, le traslazioni sono diffeomorfismi, allora dr_g e dl_g portano campi vettoriali in campi vettoriali. In particolare, sia $X = \{X_g\}_{g\in G}$ il campo vettoriale generato dalle traslazioni destre, quindi

$$X_g = X_e M_g$$

Tale campo può essere traslato con una matrice del gruppo M_p ($p \in G$):

$$M_p X_g = M_p(X_e M_g) = (M_p X_e) M_g$$

osserviamo quindi che

$$dr_g dl_g X_e = dl_g dr_g X_e$$

e si parla di invarianza a sinistra (destra) per campi generati a destra (sinistra). Se abbiamo un campo invariante a sinistra, la prima cosa che ci può venire in mente di fare è calcolare le sue curve integrali:

$$\dot{c}(t) = X_{c(t)}$$

dove $c(t)$ è una curva sul gruppo. Dobbiamo risolvere allora l'equazione differenziale

$$\begin{cases} \frac{dc}{dt} = X_e c(t) \\ c(0) = I \end{cases}$$

da cui la soluzione come sappiamo è

$$c(t) = e^{tX}$$

Questa curva ha una caratteristica notevole:

$$c(s+t) = e^{(s+t)X} = e^{sX} e^{tX} = c(s)c(t)$$

e si dice che le curve di questo genere sono sottogruppi a un parametro di G.

Proposizione 0.0.22. *Ogni elemento $X \in LieG$ genera un sottogruppo a un parametro, cioè di dimensione 1, dato da e^{tX}.*

Osservazione: siamo sicuri che e^{tX} appartenga al gruppo per ogni t. Se prendiamo $GL(n)$, abbiamo che presa una qualunque matrice $X \in gl(n, \mathbb{K})$:

$$e^{tX} \in GL(n, \mathbb{K})$$

inoltre

$$(e^{tX})^{-1} = e^{-tX}$$

In altre parole, l'operazione di esponenziazione va dall'algebra di Lie al gruppo di Lie.
Punto cruciale: se invece di $GL(n, \mathbb{K})$ prendiamo un suo sottogruppo lineare chiuso, è sempre vero che $e^{LieG} \in G$? Ma come abbiamo detto, è possibile dimostrare in generale per tutti i gruppi di Lie (e verificare a mano per i sottogruppi lineari chiusi) che l'esponenziale porta le matrici dell'algebra di Lie in matrici del gruppo.

Quanto lontano possiamo andare con l'esponenziale?

Lemma 0.0.23. *Esiste un intorno aperto $U \ni 0$ in $gl(n,\mathbb{C})$ e un intorno aperto $V \ni e$ in $GL(n,\mathbb{C})$ tale che:*

1. *l'esponenziale va da U in V;*
2. *è liscio, iniettivo, surgettivo con inversa liscia, cioè è un diffeomorfismo di U con V.*

Dimostrazione. Dal teorema della funzione inversa, basta provare che $X \mapsto e^X$ è non singolare in 0. Ma $gl(n\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^{n^2} \simeq \mathbb{R}^{2n^2}$ (e lo stesso, escludendo le matrici a determinante 0, vale per $GL(n,\mathbb{C})$), e se $Y = e^X$, chiamiamo y_i le coordinate di $X \mapsto e^X$:

$$Y_i = y_i(X \mapsto e^X)$$

calcoliamo allora

$$J_{ij}(0) = \left.\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right|_0$$

Ci ricordiamo che la derivata parziale nella direzione $j-$esima è definita su $\mathbb{R}^{2n^2}$ prendendo una base $\{E_i\}_{i=1,\dots,2n^2}$ delle matrici, la quale sarà costituita da matrici con soltanto un elemento, reale o immaginario. Allora

$$J_{ij}(0) = \left.\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right|_{X=0} = J_{ij}(0) = \left.\frac{d}{dt} y_i(e^{tE_j})\right|_{t=0}$$

ma poichè l'applicazione che al vettore $Y = e^X$ associa le sue coordinate è una applicazione lineare, possiamo scambiarla con la derivata:

$$J_{ij}(0) = y_i(\left.\frac{d}{dt} e^{tE_j}\right|_{t=0}) = y_i(E_j) = \delta_{ij}$$

allora $J_{ij}(0) = \delta_{ij}$ e $\det(J_{ij}(0)) = 1$ □

Fatto:(già dimostrato) Sia G un gruppo lineare chiuso; allora $LieG = \{X \in gl(n,\mathbb{C}) | e^{tX} \in G, t \in \mathbb{R}\}$

Proposizione 0.0.24. *Sia G un gruppo lineare chiuso. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *Ogni coppia di elementi di G può essere connessa con un acurva continua su G;*
2. *G non è unione disgiunta di due aperti non vuoti (cioè G è connesso);*
3. *G è generato da un intorno di I;*
4. *G è generato da $\exp(LieG)$.*

Dimostrazione. $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$.
Supponiamo 1: se $G = O \cup P$, con O, P aperti e $O \cap P = 0$, prendiamo $g_2 \in O$ e $g_2 \in P$, ogni curva c da g_1 a g_2 non può essere continua, infatti basta osservare che $c \cap P$ e $c \cap O$ sono disgiunti. Quindi a implica b.
Supponiamo 2: sia G_0 il sottogruppo generato da un intorno dell'identità (ovvero il sottogruppo generato dalla moltiplicazione di tutti gli elementi dell'intorno con tutti gli altri dell'intorno stesso). Allora si ha che:

1. G_0 è aperto: infatti l'intorno dell'identità considerato contiene degli aperti, ed ogni aperto viene mandato in un altro aperto.

2. Se G_0 è aperto, allora tutte le classi laterali di G_0 sono aperte.

3. Ma $G = \bigcup_{g\in G} gG_0$; poichè le classi laterali sono aperte o disgiunte, allora affinchè valga il punto b dobbiamo avere soltanto una classe laterale, quella dell'identità: allora $G = G_0$, e chiamiamo G_0 **componente connessa all'identità**.

Supponiamo 3: è banale, sappiamo che esiste un diffeomorfismo tra un intorno dell'identità sul gruppo e un intorno dello zero su $LieG$, mediante la funzione esponenziale. Pertanto, dire che un intorno dell'identità genera G equivale a dire che l'esponenziale di un aperto di $LieG$ genera G, e quindi che $\exp(LieG)$ genera G.
Supponiamo 4: ogni $g \in G$ è esprimibile come

$$g = e^{X_1} ... e^{X_k}$$

$$X_1, ..., X_k \in LieG$$

Prendiamo a_0 e a_1 e dimostriamo che esiste una curva continua da a_0 ad a_1, ovvero esiste

$$t \mapsto a(t)$$

con $a(0) = a_0$ e $a(1) = a_1$. Consideriamo $g = a_1 a_0^{-1}$, allora $g = a_0 g$, ma

$$g = e^{X_1} ... e^{X_k}$$

$$\Rightarrow a_1 = a_0 e^{X_1} ... e^{X_k}$$

Allora possiamo definire

$$a(t) = a_0 e^{tX_1} ... e^{tX_k}$$

infatti $a(0) = a_0$ e $a(1) = a_1$. □

Giovedì 11 dicembre

Dobbiamo far vedere che esiste una corrispondenza tra gli omomorfismi di gruppi di Lie e omomorfismi delle rispettive algebre di Lie. SIano G e H gruppi e $\pi : G \to H$ un omomorfismo. Sappiamo dalla geometria differenziale che π è anche una applicazione differenziabile tra due varietà, dunque possiamo considerare la sua derivata:

$$d\pi(e) : T_{e_G}G \to T_{e_H}H$$

A questo livello, abbiamo sfruttato soltanto il fatto che π è una applicazione differenziabile tra varietà, non che è un omomorfismo. Dimostreremo adesso che se π è un omomorfismo di gruppi, $d\pi(e)$ è un omomorfismo di algebre.

$$X \in T_{e_G}G$$

prendiamo $c(t) \in G$ tale che $c(0) = e_G$, e che

$$X = c'(0) \in T_{e_G}G$$

Sappiamo che X non dipende dalla curva scelta, a patto che abbia le caratteristiche sopra elencate. Così come π portà l'identità di G nella identità di H, allo stesso modo la derivata di π porta vettori tangenti nell'identità di G in vettori tangenti nell'identità di H, ovvero $d\pi(e_G) \equiv d\pi : LieG \to LieH$.

Proposizione 0.0.25. *$d\pi$ è un omomorfismo di algebre di Lie.*

Dimostrazione. Per prima cosa verifichiama la linearità:

$$\left.\begin{array}{r} X = c'(0) \\ Y = b'(0) \end{array}\right\} \in LieG$$

$$d\pi(kX) = \frac{d}{dt}c(kT)\bigg|_{t=0} = \frac{d}{ds}\pi \circ c(s)\bigg|_{s=0} \frac{d(kt)}{dt} = kd\pi X$$

$$d\pi(X+Y) = d\pi\left(\frac{d}{dt}c(t)\bigg|_{t=0} + \frac{d}{dt}b(t)\bigg|_{t=0}\right) = d\pi\left(\frac{d}{dt}c(t)b(t)\bigg|_{t=0}\right) = \frac{d}{dt}(\pi \circ (c(t)b(t)))\bigg|_{t=0}$$

ma π è un omomorfismo per cui

$$= \frac{d}{dt}\pi \circ c(t)\bigg|_{t=0} b(0) + c(0)\,\frac{d}{dt}\pi \circ b(t)\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt}\pi \circ c(t)\bigg|_{t=0} + \frac{d}{dt}\pi \circ b(t)\bigg|_{t=0} = d\pi(X) + d\pi(Y)$$

Dimostriamo adesso che

$$d\pi([X,Y]_{LieG}) = [d\pi X, d\pi Y]_{LieH}$$

Ricordiamo la rappresentazione aggiunta di G su $LieG$:

$$Ad : G \to Hom(LieG)$$

$$Ad_g X = gXg^{-1}$$

$$X = \frac{d}{dt}c(t)\bigg|_{t=0}$$

$$Y = gXg^{-1} = \frac{d}{dt}gc(t)g^{-1}\bigg|_{t=0}$$

Per definizione si ha che

$$d\pi(Ad_g X) = \frac{d}{dt}\pi \circ (gc(t)g^{-1})\bigg|_{t=0}$$

Usiamo il fatto che π è un omomorfismo:

$$= \pi(g)\,\frac{d}{dt}\pi(c(t))\bigg|_{t=0} \pi(g)^{-1} = \pi(g)d\pi(X)\pi(g)^{-1}$$

Adesso, invece di considerare g fissato prendiamo una curva:

$$t \mapsto c(t) : \mathbb{R} \to G$$

$$c'(0) = X$$

e consideriamo

$$Ad_{c(t)}Y = c(t)Tc(t)^{-1}$$

$$\frac{d}{dt}d\pi(Ad_{c(t)}Y)\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt}\,\frac{d}{ds}\pi(c(t))\pi(b(s))\pi(c^{-1}(t))\bigg|_{t=0}\bigg|_{s=0} = \frac{d}{dt}\pi(c(t))d\pi(Y)\pi(c^{-1}(t))\bigg|_{t=0} =$$

$$= \frac{d}{dt}\pi(c(t))d\pi(Y)\bigg|_{t=0} \pi(c^{-1}(0)) - \pi(c(0)) \frac{d}{dt}d\pi(Y)\pi(c(t))\bigg|_{t=0} = d\pi(X)d\pi(Y) - d\pi(Y)d\pi(X) = [d\pi(X), d\pi(Y)]$$

Ma siccome $d\pi$ è lineare per il punto precedente, si ha anche:

$$\frac{d}{dt}d\pi(Ad_{c(t)}Y)\bigg|_{t=0} = d\pi \frac{d}{dt}(Ad_{c(t)}Y)\bigg|_{t=0} = d\pi([X,Y])$$

quindi

$$d\pi([X,Y]) = [d\pi(X), d\pi(Y)]$$

dunque $d\pi$ è un omomorfismo di algebre. $\square$

Siano G e H gruppi connessi, in modo tale che

$$\exp \begin{array}{c} LieG \\ LieH \end{array} = \begin{array}{c} G \\ H \end{array}$$

Allora

Teorema 0.0.26. *Siano G e H due gruppi connessi. Risulta*

$$\pi \circ \exp = \exp \circ d\pi$$

Dimostrazione. Consideriamo le due seguenti curve su H:

$$X \in LieG$$

$$c_1(t) = \exp(td\pi(X)) : \mathbb{R} \to H$$

$$c_2(t) = \pi(\exp(tX)) : \mathbb{R} \to H$$

Osserviamo che

$$c_1(0) = \exp(0 \cdot d\pi(X)) = e_H$$

$$c_2(0) = \pi(\exp(0 \cdot X)) = \pi(e_G) = e_H$$

Inoltre

$$\frac{d}{dt}c_1(t) = \frac{d}{dt}\exp(td\pi(X)) = d\pi(X)\exp(td\pi(X)) = d\pi(X)c_1(t)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}c_1(t) = d\pi(X)c_1(t)$$

$$\frac{d}{dt}c_2(t) = \frac{d}{dt}\pi(\exp(tX)) = \frac{d}{dt}\pi(\exp((t+h)X))\bigg|_{h=0} \equiv \frac{d}{dh}\pi(\exp((h+t)X))\bigg|_{h=0} = \frac{d}{dh}\pi(\exp(hX)\exp(tX))\bigg|_{h=0} =$$

$$= \frac{d}{dh}\pi(\exp(hX))\bigg|_{h=0} \pi(\exp(tX)) = d\pi(X)\pi(\exp(tX)) = d\pi(X)c_2(t)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}c_2(t) = d\pi(X)c_2(t)$$

Allora, abbiamo due equazioni differenziali con stesse condizioni iniziali: le soluzioni saranno coincidnti del dominio comune. $\square$

Il teorema appena dimostrato ci permette di studiare le relazioni tra gruppi di Lie a partire dalle relazioni tra le corrispondenti algebre di Lie.
Osservazioni:

1. il gruppo $SO(n)$ è la componente connessa di $O(n)$, il gruppo delle matrici ortogonali:
$$O^T O = OO^T = I$$
$$\det O = \pm 1$$
Il gruppo $O(n)$ non è connesso mentre $SO(n)$ lo è, in generale si indica con G_0 la componente connessa di un gruppo G, e si scrive
$$G_0 \lhd G$$
Nel caso di $O(n)$, il quoziente con $SO(n)$ è
$$O(n)/SO(n) = \{1, -1\}$$
Si può provare a ricostruire un gruppo G a partire dalla sua componente connessa G_0 e dall'insieme delle classi di equivalenza G/G_0, ma è un casino.

2. I gruppi con cui di solito si ha a che fare nelle applicazioni hanno la proprietà che se una matrice sta nel gruppo, anche l'aggiunta ci sta:
$$M \in G \Rightarrow M^\dagger \in G$$
Allora:

Definizione 0.26. Sia G un gruppo di Lie di matrici. G si dice **riduttivo** se ha la proprietà
$$M \in G \Rightarrow M^\dagger \in G$$

Definizione 0.27 (Involuzione di Cartan)**.** Sia
$$\Theta : G \to G$$
un automorfismo di G (ovvero un omomorfismo invertibile), e sia G riduttivo. Per definizione:
$$g \in G$$
$$\Theta(g) = (g^{-1})^\dagger$$
Si vede subito che
$$\Theta^2(g) = (((g^{-1})^\dagger)^{-1})^\dagger = (((g^{-1})^{-1})^\dagger)^\dagger = g$$
$$\Rightarrow \Theta^2 = I$$
in particolare Θ è anche invertibile, e si può verificare che è un omomorfismo:
$$\Theta(g_1 g_2) = ((g_1 g_2)^{-1})^\dagger = (g_2^{-1} g_1^{-1})^\dagger = (g_1^{-1})^\dagger (g_2^{-1})^\dagger = \Theta(g_1)\Theta(g_2)$$
Dunque Θ è un automorfismo involutivo e viene detta **involuzione di Cartan**.

Domanda: chi sono gli elementi fissi di Θ, ovvero i $g \in G$ tali che $\Theta(g) = g$? Gli elementi fissi sono tutti i g tali che

$$g = (g^{-1})^\dagger$$

oppure

$$g^{-1} = g^\dagger$$

cioè le matrici unitarie. L'insieme degli elementi fissi si indica con:

$$K = \{g \in G | \Theta(g) = g\}$$

$$\Rightarrow K = G \cap U(n)$$

Esercizio: dimostrare che se G, H sono gruppi, $G \cap H$ è ancora un gruppo.

Dimostrazione. Se G e H non sono disgiunti, $G \cap H$ è non vuoto quindi possiamo scegliere almeno un elemento $x_1 \in G \cap H$. Si ha che $x_1 \in G$ e $x_1 \in H$; ma G e H sono gruppi, quindi $x_1^{-1} \in G$ e $x_1^{-1} \in H$, cioè $x_1^{-1} \in G \cap H$. Se facciamo lo stesso discorso per un secondo elemento $x_2 \in G \cap H$, troviamo che $x_2^{-1} \in G \cap H$, inoltre $x_1 x_2^{-1} \in G$ e $x_1 x_2^{-1} \in H$, cioè $x_1 x_2^{-1} \in G \cap H$, ovvero $G \cap H$ è un sottogruppo di G (o H), in particolare è un gruppo. □

Data Θ, l'applicazione

$$\theta = d\Theta(e) : LieG \to LieG$$

è un automorfismo di algebre involutivo:

$$\theta^2 = Id(LieG)$$

Se consideriamo $\mathfrak{k} = LieK$, questa sarà una sottoalgebra di $LieG$ e di $u(n)$, in particolare gli elementi di k saranno matrici antihermitiane. Ma se $\theta^2 = Id$, θ ha due autovalori, ± 1, e due sottospazi propri:

$$(1) : \{X | \theta(X) = X\}$$

$$(-1) : \{X | \theta(X) = -X\}$$

Ci aspettiamo che il sottospazio proprio con autovalore $+1$ sia l'algebra di Lie di K. Guardando la forma infinitesima di Θ, si può trovare che

$$\theta(X) = -X^\dagger$$

Allora $\theta(X) = X$ se $X = -X^\dagger$ ovvero X è antihermitiano. Ma X è antihermitiano quando e^X è unitario, dunque il sottospazio proprio con $\lambda = 1$ è l'algebra di Lie di K.

Ma le matrici di $LieG$ si possono sempre scomporre in una parte hermitiana e una antihermitiana, si potrà allora scrivere:

$$LieG = \{\text{matrici antihermitiane}\} + \{\text{matrici hermitiane}\} = LieK + \{\text{matrici hermitiane}\} \equiv \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$$

La somma è da intendersi come somma di spazi vettoriali.

Osserviamo che $\mathfrak{p}$ non è una sottoalgebra di Lie, infatti poichè

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$$

possiamo calcolare i commutatori, sapendo che $\mathfrak{g}$ è chiusa per commutazione:

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subseteq \mathfrak{k}$$

infatti se X, Y sono antihermitiane, si ha

$$[X, Y]^\dagger = (XY - YX)^\dagger = Y^\dagger X^\dagger - X^\dagger Y^\dagger = YX - XY = -[X, Y]$$

ovvero anche il commutatore è antihermitiano. Viceversa,

$$[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{k}$$

Infatti se A, B sono hermitiane, con calcoli analoghi al caso antihermitiano si trova

$$[A, B]^\dagger = -[A, B]$$

Infine, per i commutatori misti si ha

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{p}$$

Poichè le algebre di Lie sono spazi lineari, uno strumento utile per studiarle è il prodotto interno; cercheremo allora di costruire un prodotto scalare sull'algebra di Lie.

Sull'algebra di Lie è definito il prodotto di Lie

$$[X, Y]$$

che è ancora un elemento dell'algebra. Può succedere che esista un particolare X tale che

$$[X, Y] = 0 \forall Y \in LieG$$

tale elemento si dice **centrale**. Anche nel caso dei gruppi poteva esistere un elemento h tale che $hg = gh \forall g \in G$.

In fisica si incontra spesso l'algebra fatta da 3 elementi:

$$A, A^\dagger, H$$

con le seguenti regole di commutazione

$$[A, A^\dagger] = H$$

$$H, A] = 0$$

$$[H, A^\dagger] = 0$$

$$[H, H] = 0$$

ovvero l'algebra di Heisenberg, che a meno di un opportuno cambio di base è anche l'algebra di P e X. In questo caso si ha che H è l'elemento centrale dell'algebra. Questo suggerisce la seguente

Definizione 0.28. Si definisce Z_{LieG} **centro dell'algebra** come:

$$Z_{LieG} = \{X \in LieG | [X, Y] = 0 \forall Y \in LieG\}$$

Esercizio: dimostrare che Z_{LieG} è un ideale, cioè che se $X \in Z_{LieG}$ e $Y \in LieG$, allora $[X, Y] \in Z_{LieG}$. Ma questo è banale perchè $[X, Y] = 0 \in Z_{LieG}$.

Essendo Z_{LieG} un ideale, possiamo considerare l'algebra quoziente

$$LieG/Z_{LieG}$$

Esercizio: dimostrare che $Z_{LieG/Z_{LieG}} = \emptyset$, ovvero se togliamo a $LieG$ il centro, otteniamo qualcosa senza centro.

Dimostrazione. Il centro di $LieG/Z_{LieG}$ è

$$\{X \in LieG/Z_{LieG} | [X, Y] = 0 \forall Y \in LieG/Z_{LieG}\}$$

Ma il generico elemento di $LieG/Z_{LieG}$ è della forma

$$x + Z_{LieG} \quad \eta \in LieG$$

dunque se $X = x + Z_{LieG}$ sta nel centro di $LieG/Z_{LieG}$ si ha, per ogni $Y = y + Z_{LieG}$, $y \in LieG$:

$$[x + Z_{LieG}, y + Z_{LieG}] = [x, y] + [Z_{LieG}, y] + [x, Z_{LieG}] + [Z_{LieG}, Z_{LieG}] = [x, y]$$

e questo si annulla per ogni y in $LieG$, il che significa che $x \in Z_{LieG}$. Allora $Z_{LieG/Z_{LieG}} \subset Z_{LieG}$, ma poichè $LieG = Z_{LieG} \oplus LieG/Z_{LieG}$, si ha che $Z_{LieG/Z_{LieG}} = \{\emptyset\}$. $\square$

Siano G e H gruppi di Lie, avevamo definito il prodotto diretto $G \times H$ come l'insieme delle coppia (g, h) con $g \in G$ e $h \in H$, con un prodotto definito naturalmente come

$$(g_1, h_1)(g_2, h_2) \equiv (g_1 g_2, h_1 h_2)$$

Possiamo definire una cosa analoga anche per algebre di Lie:

Definizione 0.29 (Somma diretta di algebre di Lie)**.** Siano $LieG$ e $LieH$ due algebre di Lie. Definiamo la loro **somma diretta** in questo modo:

$$LieG \oplus LieH = \{X \oplus Y | X \in LieG, Y \in LieH\}$$

L'operazione di prodotto di Lie si definisce in questo modo:

$$[X - 1 \oplus Y_1, X_2 \oplus Y_2] = [X_1, X_2] \oplus [Y_1, Y_2]$$

Proposizione 0.0.27. *Se $A = LieG \oplus LieH$, allora $LieG$ è un ideale di A, e $LieH$ è un ideale di A.*

Dimostrazione. Si ha che

$$LieG = LieG \oplus 0 = \{X \oplus 0 | X \in LieG, 0 \in LieH\}$$

$$LieH = 0 \oplus LieH = \{0 \oplus Y | Y \in LieH, 0 \in LieG\}$$

$$X_1 \oplus 0 \in LieG$$

$$[X_1 \oplus 0, X_2 \oplus Y_2] = [X_1, X_2] \oplus [0, Y_2] = [X - 1, X_2] \oplus 0 \in LieG$$

e analogamente per $LieH$. Risulta allora che

$$\frac{LieG \oplus LieH}{LieG} \simeq LieH$$

$$\frac{LieG \oplus LieH}{LieH} \simeq LieG$$

□

Osservazione: abbiamo definito l'aggiunta, un'applicazione

$$Ad : G \to Aut(LieG)$$

$$g \mapsto Ad_g X = gXg^{-1}$$

ovvero un'applicazione tra due varietà differenziabili. Pertanto, possiamo studiare la sua derivata

$$dAd_e : LieG \to Aut(LieG)$$

Esercizio: dimostrare che

$$d(Ad_e X)Y = [X, Y]$$

Dimostrazione. Si ha che

$$d(Ad_e X) = \frac{d}{dt} Ad \circ \chi(t)\Big|_{t=0}$$

dove $\chi(t)$ è tale che $\chi'(0) = X$ e $\chi(0) = e$. Allora

$$d(Ad_e X)Y = \frac{d}{dt} Ad_{\chi(t)}\Big|_{t=0} Y = \frac{d}{dt} Ad_{\chi(t)} Y\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\chi(t)Y\chi^{-1}(t)\Big|_{t=0} =$$

$$= \frac{d}{dt}\chi(t)\Big|_{t=0} Y\chi^{-1}(0) - \chi(0)\ \frac{Y}{d} dt\chi(t)\Big|_{t=0} = XY - YX = [X, Y]$$

□

Scriveremo per brevità $ad \equiv d(Ad_e)$.

Per quanto riguarda il prodotto interno, ad esso si richiede la bilinearità e la non degenerazione.

Definizione 0.30 (Forma di traccia)**.** Siano $X, Y \in LieG$. Definiamo la seguente forma:

$$\beta_0(X, Y) = Tr(X, Y)$$

Essa è bilineare, infatti

$$\beta_0(X_1 + \alpha X_2, Y) = Tr[(X_1 + \alpha X_2)Y] = Tr(X_1 Y) + \alpha Tr(X_2 Y)$$

Proposizione 0.0.28 (Condizione di inversione)**.** *Si ha che*

$$[\beta_0([X, Y], Z)] = \beta_0(X, [Y, Z])$$

Dimostrazione. Per la ciclicità della traccia, si ha:

$$\beta_0([X,Y],Z) = Tr(XYZ-YXZ) = Tr(XYZ-XZY+XZY-YXZ) = Tr(X[Y,Z])+Tr(XZY)-Tr(YXZ) =$$

$$= Tr(X[Y,Z]) = \beta_0(X,[Y,Z])$$

□

Definizione 0.31 (Forma di Killing)**.** Definiamo adesso una nuova forma:

$$\beta(XY) = Tr(ad_X ad_Y)$$

Risulta che $ad_X Y = [X,Y]$ e che ad_X è lineare:

$$ad_X(Y + \alpha Z) = ad_X Y + \alpha ad_X Z$$

Allora, scelta una base, ad_X si può rappresentare come una matrice che agisce sui vettori di *LieG*: tale matrice avrà dimensione $dim(LieG) \times dim(LieG)$. Di conseguenza, possiamo moltiplicare ad_X e ad_Y e prenderne la traccia; stavolta però la traccia non sarà più sulle matrici di *LieG* ma sulle matrici del gruppo degli automorfismi di *LieG*.

Definizione 0.32. Un'algebra di Lie si dice **semisemplice** se la sua forma di Killing è non degenere.

Proposizione 0.0.29 (Proprietà di β_0)**.** *1. $Re\beta_0$ è simmetrica su LieG.*
Dim:

$$\beta_0(X,Y) = Tr(XY)$$
$$\overline{\beta_0(X,Y)} = \overline{Tr(XY)} = Tr(\bar{X}\bar{Y}) \equiv Tr(X^\dagger Y^\dagger)$$
$$Re\beta_0(X,Y) = \beta_0(X,Y) = Tr(XY) + \overline{\beta_0(X,Y) = Tr(XY)} = \frac{1}{2}Tr(XY + X^\dagger Y^\dagger)$$

e tale scrittura è simmetrica.

2. *$\beta_0(X,\theta X) < 0$ se $X \neq 0$; ne segue che β_0 e $Re\beta_0$ sono non degeneri su LieG, allora possiamo prendere come prodotto interno*

$$\langle X,Y\rangle = -Re\beta_0(X,\theta Y)$$

Dim:

$$Tr(X(-X^\dagger)) = -Tr(XX^\dagger)$$

Ma $XX^\dagger$ è una matrice hermitiana, quindi diagonalizzabile, e i suoi autovalori saranno non negativi essendo della forma $\lambda_i\lambda_i^*$. O sono tutti nulli, allora in tal caso la matrice X è la matrice nulla, oppure c'è qualche autovalore $\lambda > 0$, in tal caso $\beta(X,\theta X) < 0$.

3. *$Re\beta_0$ è definita negativa su $\mathfrak{k}$ e positiva su $\mathfrak{p}$. Inoltre $\mathfrak{k}$ e $\mathfrak{p}$ sono ortogonali.*
Dim: Prendiamo $X \in \mathfrak{k}$, allora $x = -x^\dagger$.

$$Re\beta_0(X,X) = Re[Tr(XX)] = Re[Tr(X(-X^\dagger))] = -Re[Tr(XX^\dagger)] \leq 0$$

Se adesso $X \in \mathfrak{k}$ *(cioè* $X = -X^\dagger$*) e* $Y \in \mathfrak{p}$ *(cioè* $Y = Y^\dagger$*):*

$$\langle X, Y\rangle = -Re\beta_0(X, \theta Y) = -Re[Tr(X\theta Y)] = -Re[Tr(X(-Y^\dagger))] = \frac{1}{2}[Tr(XY^\dagger) + Tr(X^\dagger Y)] =$$

$$= \frac{1}{2}[Tr(XY) + Tr((-X)Y)] = 0$$

4. (a) $ad_{\theta X} = -ad_{X^\dagger}$.
   Dim:
   $$ad_{\theta X}Y = [\theta X, Y] = -[X^\dagger, Y] = -ad_{X^\dagger}Y$$

   (b)
   $$-\beta(X, \theta X) = -Tr(ad_X ad_{\theta X}) = Tr(ad_X ad_{X^\dagger}) = Tr(ad_X(ad_X)^\dagger) \geq 0$$
   dove l'uguaglianza vale se e solo e $ad_X \equiv 0$.

Osservazioni: Se $X \in LieG$ e $X \neq 0$ implica che $ad_X \neq 0$, allora l'algebra di Lie ha centro $Z_{LieG} = 0$. Per la proprietà 4, β è non degenere e quindi $LieG$ è semisemplice.

Viceversa, se $Z_{LieG} \neq 0$, poichè il centro è un ideale in $LieG$ possiamo applicare gli stessi ragionamenti a $LieG/Z_{LieG}$, che risulta semisemplice.

Vogliamo adesso provare il seguente

Teorema 0.0.30. *Sia G connesso e riduttivo. É possibile scomporre LieG come:*

$$LieG = Z_{LieG} \oplus [LieG, LieG]$$

Dimostrazione. Sappiamo che Z_{LieG} è un ideale. Consideriamo $Re\beta_0$ ed il prodotto interno $\langle\, ,\, \rangle$, e costruiamo $Z_{LieG}^\perp$. Mostreremo che anche $Z_{LieG}^\perp$ è un ideale; vogliamo provare che $[X, Y] \in Z_{LieG}^\perp$:

$$X \in LieG$$

$$Y \in Z_{LieG}^\perp$$

$$Z \in Z_{LieG}$$

$$\langle [X, Y], Z\rangle = \langle X, [Y, Z]\rangle$$

per la proprietà di inversione di β_0, ma $[Y, Z] = 0$ perchè $Z \in Z_{LieG}$, allora $[X, Y]$ è ortogonale a qualunque $Z \in Z_{LieG}$, dunque sta ancora in $Z_{LieG}^\perp$, e Z_{LieG} è un ideale.

Osserviamo che come spazi vettoriali, abbiamo sempre la scomposizione

$$LieG = Z_{LieG} \oplus Z_{LieG}^\perp$$

ma adesso abbiamo dimostrato che poichè Z_{LieG} e il suo ortogonale sono entrambi ideali, possiamo scomporre l'algebra di Lie in somma diretta di due sottoalgebre:

$$LieG = Z_{LieG} \oplus Z_{LieG}^\perp$$

Z_{LieG} è stabile sotto l'azione di θ, ovvero se $Y \in Z_{LieG}$ anche $\theta Y \in Z_{LieG}$, infatti se $Y \in Z_{LieG}$, $[Y, X] = 0 \, \forall X \in LieG$. Ma:

$$[\theta Y, X] = -[Y^\dagger, X] = [Y, X^\dagger] = 0 \text{ perchè } Y \in Z_{LieG}$$

Ma se Z_{LieG} è stabile, anche $Z_{LieG}^\perp$ deve esserlo, allora si ha che se $X, Y \in Z_{LieG}^\perp$:

$$-Re\beta_0(X, \theta Y) = \langle X, Y \rangle > 0 \text{ se } X, Y \neq 0$$

Poichè $LieG/Z_{LieG}$ è semisemplice, lo è anche $Z_{LieG}^\perp$. Abbiamo quindi dimostrato che $Z_{LieG}^\perp$ è un ideale, ed è anche semisemplice, quindi possiamo scrivere

$$LieG = Z_{LieG} \oplus Z_{LieG}^\perp \equiv Z_{LieG} \oplus [LieG, LieG]$$

ovvero abbiamo scomposto l'algebra di Lie nella somma di un centro e di un ideale semisemplice. □

Rappresentazioni di $sl(2, \mathbb{C})$

La dimensione complessa di $sl(2, \mathbb{C})$ è 3, ovvero servono 3 numeri complessi per specificare una matrice di $sl(2\mathbb{C})$.

Prendiamo allora una base di $sl(2, \mathbb{C})$ (dovranno essere matrici complesse a traccia nulla); possiamo scegliere

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ogni matrice su $sl(2, \mathbb{C})$ sarà combinazione lineare a coefficienti complessi di H, E, F. Sussistono le seguenti parentesi di Lie per H, E, F:

$$[H, E] = 2E$$

$$[H, F] = -2F$$

$$[E, F] = H$$

Teorema 0.0.31 (Rappresentazioni irriducibili di $sl(2\mathbb{C})$). *1. Per ogni intero $m \geq 1$ esiste una rappresentazione irriducibile di $sl(2, \mathbb{C})$ su uno spazio vettoriale V di dimensione m.*

2. La rappresentazione è unica a meno di un'equivalenza.

3. Su V esiste una base $\{v_0, ..., v_{m-1}\}$ tale che la rappresentazione di H, E, F siano

$$\pi(H)v_i = ((m-1) - 2i)v_i \ \ (v_i \text{ autovettori di } H)$$

$$\pi(E)v_i = i(m-i)v_{i-1}$$

$$\pi(F)v_i = v_{i+1}$$

Dimostrazione. Se abbiamo un autovettore di H:

$$\pi(H)v = \lambda v$$

allora anche $\pi(E)$ sarà autovettore di H, infatti

$$\pi(H)\pi(E)v = \pi(E)\pi(H)v + \pi([H,E])v = \lambda\pi(E)v + 2\pi(E)v$$

□

Lunedì 15 dicembre

Abbiamo scelto di considerare i gruppi riduttivi, ovvero gruppi chiusi rispetto all'operazione di coniugazione hermitiana, e di conseguenza anche le algebre riduttive. Avevamo definito l'involuzione di Cartan $\Theta : G \to G$, e il suo differenziale sull'algebra di Lie $d\theta LieG \to LieG$. Avevamo poi osservato che un'algebra di Lie può sempre essere scomposta in una componente antihermitiana e in una hermitiana:

$$LieG = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$$

dopodichè il teorema di struttura per le algebre riduttive ci assicurava che

$$LieG = Z_{LieG} \oplus [LieG, LieG]$$

dove $[LieG, LieG]$ è semisemplice, ovvero la sua forma di Killing è non degenere.

Vediamo adesso che succede per $sl(2\mathbb{C})$, e per le sue rappresentazioni finito-dimensionali. $sl(2\mathbb{C})$ è generata da tre matrici H, E, F, che nella rappresentazione 2-dimensionale possono essere scelte della forma

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

che presentano le seguenti regole di commutazione, caratteristiche dell'algebre:

$$[H,E] = 2E \quad ; \quad [H,F] = -2F \quad ; \quad [E,F] = H$$

Teorema 0.0.32. *Per ogni numero intero $m \geq 1$ esiste un'unica rappresentazione irriducibile π di $sl(2\mathbb{C})$ su uno spazio V di dimensione m, a meno di un'equivalenza. Inoltre, esiste una base $\{v_0, .., v_{m-1}\}$ di V che soddisfa:*

1. *v_i è autostato di H, e si ha:*
$$\pi(H)v_i = (m - 1 - 2i)v_i$$
2. $\pi(E)v_i = i(m - i)v_{i-1}$
3. $\pi(F)v_i = v_{i+1}$

da quanto affermato risulta $v_{-1} = v_m = 0$.

Dimostrazione. Sia λ un autovalore di $\pi(H)$, e v l'autovettore associato, allora

$$\pi(H)v = \tilde{\lambda}v$$

Consideriamo $\pi(E)v$:

$$\pi(H)(\pi(E)v) = (\tilde{\lambda} + 2)\pi(E)v$$

Dunque $\pi(E)v$ è ancora autovettore di $\pi(H)$ con autovalore $\tilde{\lambda} + 2$, si ha quindi una serie di autovalori

$$\tilde{\lambda} \;\; \tilde{\lambda} + 2 \;\; \tilde{\lambda} + 4 \;\; ...$$

ma la rappresentazione è finito-dimensionale, quindi esisterà un v_0 che arresti la catena, ovvero

$$\pi(E)v_0 = 0$$

Infatti, essendo V finito-dimensionale, l'unico modo per fermare la catena è che l'applicaziondi $\pi(E)$ a un vettore $v_0 \neq 0$ restituisca 0. v_0 dunque è autovettore di $\pi(H)$, cioè $\pi(H)v_0 = \lambda v_0$ per qualche λ, e $\pi(E)v_0 = 0$. Definiamo adesso:

$$v_1 = \pi(F)v_0$$

$$v_2 = \pi(F)v_1$$

$$.$$

$$.$$

$$.$$

$$v_{i+1} = \pi(F)v_i$$

e questi oggetti sono tutti autovettori di $\pi(H)$:

$$\pi(H)v_i = (\lambda - 2i)v_i$$

DI nuovo, per la finitezza della rappresentazione esisterà un n tale che

$$\pi(F)v_n = v_{n+1} = 0$$

Con un calcolo diretto si trova che

$$\pi(E)v_i = i(\lambda + 1 - i)v_{i-1}$$

Infatti

$$\pi(E)v_i = C_i v_{i-1}$$

$$\pi(F)\pi(E)v_i = C_i v_i$$

$$\pi(E)\pi(F)v_i + [\pi(F), \pi(E)]v_i = C_i v_i$$

$$\pi(E)v_{i+1} - \pi(H)v_i = C_i v_i$$

$$\Rightarrow \pi(E)v_{i+1} = C_{i+1}v_i = (\lambda - 2i + C_i)v_i$$

$$\Rightarrow C_{i+1} = \lambda - 2i + C_i$$

Dunque

$$C_{i+1} - C_i = \lambda - 2i$$

$$C_i = \sum_{k=0}^{i-1} (\lambda - 2k) = i\lambda - 2(\frac{i(i-1)}{2}) = i(\lambda + 1 - i)$$

Adesso, se abbiamo due matrici A, B, risulta che $Tr[A, B] = Tr(AB - BA) = 0$, dunque poichè $H = [E, F]$, e di conseguenza $\pi(H) = [\pi(E), \pi(F)]$, si ha che

$$Tr\pi(H) = 0$$

La traccia di $\pi(H)$ però è la somma dei suoi autovalori:

$$Tr\pi(H) = \sum_{i=0}^{n} (\lambda - 2i) = 0$$

$$\Rightarrow (n+1)\lambda - 2\frac{n(n+1)}{2} = 0 \Rightarrow n = \lambda$$

Nelle vecchie notazioni, si ha che $n = m - 1$, in entrambi i casi la dimensione dello spazio vettoriale su cui agisce la rappresentazione ne determina completamente i suoi autovalori. In questo modo abbiamo dimostrato l'esistenza di una rappresentazione di $sl(2\mathbb{C})$. Essa è irriducibile, infatti agendo con gli elementi dell'algebra sui vettori di V è possibile coprire tutto lo spazio, dunque non esistono sottospazi invarianti. Inoltre, la rappresentazione è anche unica, infatti se ne abbiamo un'altra, equivalente a quella iniziale, avrà per costruzione gli stessi autovalori; se invece pensiamo di considerare una rappresentazione irriducibile non equivalente, i suoi autovalori saranno comunque completamente determinati dalla dimensione dello spazio, pertanto coincideranno con quelli della rappresentazione iniziale, il che rende la rappresentazione equivalente a quella iniziale, contro l'ipotesi iniziale. $\square$

Azione di un gruppo

Un G-spazio X è uno spazio su cui è definita un'azione di un gruppo G:

$$azione : G \times X \to X$$

$$(g, x) \mapsto gx$$

in modo che

$$g_1(g_2 x) = (g_1 g_2)x$$

Il concetto di azione è più generale di quello di rappresentazione, infatti per la rappresentazione abbiamo bisogno che X sia uno spazio lineare. Sia allora V uno spazio lineare, e ρ una rappresentazione di G. Per ogni $g \in G$ avremo

$$\rho(g) \in Aut(V)$$

tale che se $v \in V$

$$\rho(g_1)(\rho(g_2)v) = (\rho(g_1)\rho(g_2))v = \rho(g_1 g_2)v$$

Per le azioni avevamo considerato inoltre gli insiemi invarianti (ad esempio le circonferenze del piano con centro nell'origine, invarianti per rotazioni attorno all'origine stessa); mediante una azione, si hanno delle rappresentazioni su uno spazio vettoriale associato ad X: lo spazio delle funzioni. In fisica si ha spesso una azione su uno spazio, ad esempio $SO(3)$ che agisce su $\mathbb{R}^3$, e contemporaneamente possiamo avere ad esempio le funzioni d'onda $\psi(\vec{x})$ definite su $\mathbb{R}^3$. É possibile trovare una rappresentazione di un gruppo sulle funzioni definite su uno spazio, in questo modo: se X è un G-spazio, prendiamo le funzioni $C^\infty(X)$, e consideriamo $f \in C^\infty(X)$. Definiamo la rappresentazione

$$\rho : G \times C^\infty(X) \to C^\infty(X)$$

dove per ogni $g \in G$

$$\rho(g) : C^\infty(X) \to C^\infty(X)$$

in questo modo:

$$(\rho(g)f)(x) = f(g^{-1}x)$$

Facciamo vedere adesso che ρ è effettivamente una rappresentazione rispetto all'argomento di G:

$$(\rho(g_1g_2)f)(x) = f((g_1g_2)^{-1}x) = f(g_2^{-1}g_1^{-1}x) = (\rho(g_2)f)(g_1^{-1}x) = (\rho(g_1)\rho(g_2)f)(x)$$

Ci possiamo chiedere se è possibile avere sottospazi stabili. Consideriamo ad esempio $SL(2,\mathbb{C})$, ovvero le matrici 2×2 ad elementi complessi e a determinante unitario; inoltre, consideriamo lo spazio vettoriale dei polinomi omogenei di grado m in due variabili:

$$z_1^m, z_1^{m-1}z_2, ..., z_2^{m-1}z_1, z_2$$

Tali polinomi saranno combinazioni lineari di questi oggetti, che sono in tutto $m+1$, ovvero lo spazio vettoriale è $m+1$-dimensionale. Prendiamo un polinomio $P_m(\begin{array}{c} z_1 \\ z_2 \end{array})$, se abbiamo una matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{C})$, possiamo definire una sua rappresentazione $\Phi \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ così definita:

$$\Phi \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} P_m(\begin{array}{c} z_1 \\ z_2 \end{array}) = P_m(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix})$$

La rappresentazione corrispondente dell'algebra $sl(2,\mathbb{C})$ sarà data dalla derivata dell'applicazione Φ, e poichè Φ è una rappresentazione manifestamente irriducibile, anche $d\Phi$ lo sarà, e sarà anche unica per il teorema precedente. Poichè

$$\Phi : SL(2\mathbb{C}) \to Aut(P_m(z_1, z_2))$$

per la derivata si avrà

$$d\Phi : sl(2\mathbb{C}) \to End(P_m(z_1, z_2))$$

Nella rappresentazione fondamentale, la matrice H di $sl(2,\mathbb{C})$ si può prendere come

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Prendiamo una curva sul gruppo così definita:

$$e^{tH} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

Abbiamo che $d\Phi(H)$ agisce ancora sullo spazio dei polinomi omogenei di grado m; consideriamo il polinomio $P(\begin{matrix} z_1 \\ z_2 \end{matrix}) = z_2^m$, e verifichiamo che è autovettore di $d\Phi(H)$: secondo la definizione

$$d\Phi(H)z_2^n = \frac{d}{dt}P(\begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ z_2 \end{pmatrix})\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}e^{mt}z_2^m\Big|_{t=0} = mz_2^m$$

ovvero z_2^m è autovettore di H con autovalore m, che coincide con il grado dei polinomi considerati, e con la dimensione di P_m meno 1. Si vede facilmente che m è il massimo autovalore che H può avere, allora abbiamo verificato che la dimensione dello spazio su cui agisce la rappresentazione ne determina completamente gli autovalori, che vanno da $-m$ ad m.

Complessificazione

É possibile fare una costruzione analoga a quella di $SL(2,\mathbb{C})$ e $sl(2,\mathbb{C})$ anche per $SU(2)$ ed $su(2)$, e per $SL(2,\mathbb{R})$ e $sl(2,\mathbb{R})$. Questo non è un caso, infatti esiste un legame tra questi tre gruppi e le rispettive algebre. Infatti, $SU(2)$ è il gruppo delle matrici unitarie a determinante 1, ha dimensione reale 3 e la sua algebra è costituita da matrici antihermitiane; $SL(2,\mathbb{R})$ ha anch'esso dimensione reale 3, e la sua algebra è costituita da matrici reali a traccia nulla; infine, $SL(2,\mathbb{C})$ ha dimensione complessa 3 (quindi dimensione reale 6) e la sua algebra è costituita da matrici complesse a traccia nulla. $SU(2)$ è un gruppo compatto, e questa caratteristica è conseguenza della richiesta di unitarietà, infatti i suoi autovalori sono vincolati a stare sulla circonferenza unitaria nel piano complesso. Per $SL(2,\mathbb{R})$ invece non c'è questa limitazione, e i suoi elementi di matrice possono essere arbitrariamente grandi, e questo rende il gruppo non compatto. Ci accorgiamo poi che se prendiamo $su(2) + isu(2)$ abbiamo tutte le matrici a traccia nulla (ovvero $sl(2,\mathbb{C})$, e lo stesso avviene se consideriamo $sl(2,\mathbb{R}) + isl(2,\mathbb{R})$. Questo procedimento prende il nome di **complessificazione** dell'algebra, mentre il procedimento inverso, quando da $sl(2,\mathbb{C})$ si sceglie una sottoalgebra, si parla di scelta della forma reale.

Esistono dei risultati che ci assicurano che le rappresentazioni finito-dimensionali di una qualsiasi di queste tre algebre forniscono rappresentazioni anche per le altre due, e per i gruppi corrispondenti, dunque qualsiasi risultato otteniamo per una delle tre algebre sarà valido anche per le altre.

Nel caso di $sl(2,\mathbb{C})$, questa algebra ha una base fatta da certi elementi E, F, H, con le regole di commutazione

$$[H, E] = 2E$$

$$[H, F] = -2F$$

$$[E, F] = H$$

Definizione 0.33. Un'algebra di Lie si dice **semplice** quando non ha ideali propri non banali.

Ad esempio, i multipli di 2 sono ideali dell'anello non commutativo dei numeri interi.

Proposizione 0.0.33. *$sl(2,\mathbb{C})$ è semplice.*

Dimostrazione. Sia I un ideale di $sl(2,\mathbb{C})$, e sia X un elemento di I qualunque. Sarà necessariamente

$$X = aE + bF + cH$$

Allora se $X \in I$, allora $[E, X] \in I$, dunque l'elemento

$$[E, X] = a[E, E] + b[E, F] + c[E, H] = bH - 2cE \in I$$

per ipotesi. Ma se $[E, X] \in I$, anche

$$[[E, X], E] \in I$$

quindi

$$[bH - 2cE, E] = b[H, E] - 2c[E, E] = 2bE$$

ma se $b \neq 0$, allora $E \in I$, dunque stanno in I tutti i commutatori di E con gli altri elementi dell'algebra, in particolare $[E, F] = H \in I$, e $[H, F] = -2F \in I$ dunque l'ideale coincide con l'algebra. Se invece $b = 0$, l'X di partenza sarà combinazione solo di E e H, e con ragionamenti analoghi si dimostra che sono nulli anche a e c, ovvero $X = 0$, cioè l'ideale contiene soltanto l'elemento nullo. Dunque $sl(2,\mathbb{C})$ non ha ideali propri, cioè è semplice. □

Definizione 0.34. Sia L un'algebra di Lie. Chiameremo primo ideale derivato l'ideale $[L, L] \equiv L_1$.

Esercizio: dimostrare che L_1 è un ideale. Se L_1 è un ideale, preso un qualunque suo elemento, il suo commutatore con $X \in L$ starà ancora in L_1, cioè

$$X \in L, \eta \in L_1$$

Se $\eta \in L_1$, in particolare si ha anche che $\eta \in L$, allora per ogni elemento $X \in L$, $[\eta, X]$ è il commutatore di due elementi di L, quindi sta in L_1.

Definizione 0.35. Chiameremo secondo ideale derivato $L_2 = [L_1, L_1]$.

Esercizio: dimostrare che L_2 è ideale di L_1 e anche di L. Essendo L_1 un ideale di L, $[L_1, L_1] \subseteq L_1$, dunque automaticamente L_2 è un ideale di L_1 per la dimostrazione precedente. Ma poichè ogni elemento ξ di L_2 si può scrivere come commutatore di elementi di L_2, che a loro volta sono commutatori di elementi di L, si può sempre trovare due elementi $X_1, X_2 \in L$ tali che $[X_1, X_2] = \xi$, dunque L_2 è un ideale anche di L. Analogamente si può dimostrare che $L_n \equiv [L_{n-1}, L_{n-1}]$ è ideale di L_i con $0 \leq i \leq n-1$.

Definizione 0.36 (Catena degli ideali derivati)**.** Si ha

$$L \equiv L_0 \rhd L_1 \rhd L_2 \rhd \cdots \rhd L_n \rhd \cdots$$

Definizione 0.37. L algebra di Lie si dice **risolubile** se esiste N tale che $L_N = 0$, cioè la catena finisce.

Osservazione: se L è risolubile, e dunque $L_N = 0$ per qualche N, dalla definizione abbiamo che $[L_{N-1}, L_{N-1}] = L_N = 0$ dunque L_{N-1} che è un ideale di L, è un ideale **abeliano**.

Proposizione 0.0.34. *Un'algebra di Lie L è semisemplice se e solo se non contiene ideali abeliani.*

Dimostrazione. Se L è semisemplice, β non è degenere su L. Si può dimostrare che se β è non degenere su L, lo è anche su tutti i suoi ideali e sottoalgebre (proprietà ereditaria). Ma se L contiene un ideale abeliano A, allora β è degenere su A e viceversa, dunque non potrebbe essere non degenere su L e sugli ideali eventualmente non banali. □

Abbiamo visto che nelle algebre riduttive si può separare il centro (ideale abeliano) dalla parte semisemplice; sulla base di questo, si capisce l'importanza delle algebre semisemplici, in base al loro legame con le algebre semplici.

Sia L semisemplice (e quindi β non degenere); sia inoltre J un ideale di L (ovviamente non abeliano). Prendiamo $J^{\perp}$, che è l'ortogonale di J rispetto alla forma di Killing, che per quanto dimostrato adesso è non degenere. **Dimostro** che anche $J^{\perp}$ è un ideale di L. **Osservo** (fatto generale) che se A e B sono ideali di L, anche $A \cap B$ è un ideale di L. Come conseguenza, $J \cap J^{\perp}$ è un ideale di L formato dagli elementi isotropi (o autoortogonali). Allora, su $J \cap J^{\perp}$ β è necessariamente degenere, e questo implica che $J \cap J^{\perp} = 0$.

Segue un fatto importante:

$$L = J \oplus J^{\perp}$$

dove per $\oplus$ si intende la somma diretta tra algebre di Lie. Come conclusione, possiamo ripetere su J e $J^{\perp}$ lo stesso ragionamento, e se hanno ideali continuiamo a spezzettarle finchè non avremo

$$L = \bigoplus_{i=1}^{N} J_i$$

con J_i semplice. Dunque, possiamo enunciare il seguente teorema

Teorema 0.0.35. *Ogni algebra semisemplice è somma diretta di algebre semplici.*

Allora, una volta classificate le algebre semplici, abbiamo anche quelle semisemplici. Aggiungendo un centro otteniamo anche le algebre riduttive, dunque abbiamo tutto quello che serve per le applicazioni.

Ci proponiamo ora di classificare le algebre semplici. Se abbiamo $LieG \oplus iLieG$, all'interno di questa algebra possiamo prendere le matrici antihermitiane o quelle hermitiane.

Definizione 0.38. Definiamo sottoalgebra di Cartan h come la sottoalgebra abeliana massimale, cioè un insieme massimale di elementi di LieG che commutano tra loro.

Ad esempio, data l'algebra di $sl(2, \mathbb{C})$, la sottoalgebra di Cartan può essere costituita dai multipli dell'elemento H:

$$h(sl(2, \mathbb{C})) = \mathbb{C}H$$

La sottoalgebra di Cartan non può contenere altri elementi perchè ogni altro elemento non commuterebbe con H.

Se prendiamo adesso $gl(n, \mathbb{C})$, ovvero l'insieme di tutte le matrici $n \times n$, la sottoalgebra massimale sarà stavolta costituita da tutte le matrice della forma $diag(a_1, a_2, ..., a_n)$. Esse, infatti, commutano tra loro ma in generale non commutano con altri elementi non diagonali. Per questo tale insieme di matrici è una sottoalgebra, (la somma di due matrici diagonali è ancora diagonale, così come il prodotto per uno scalare), ma non è un ideale.

L'idea adesso è di diagonalizzare la sottoalgebra di Cartan. Se il gruppo di partenza G è unitario, allora possiamo prendere la forma reale della sottoalgebra di Cartan:

$$h_{\mathbb{R}} = ih$$

In questa maniera ci restringiamo alle sole matrici hermitiane, sulle quali la forma di traccia β_0 è definita positiva e non degenere.

Sia allora $LieG$ un'algebra di Lie, e h la sottoalgebra di Cartan, di cui possiamo scegliere una base:

$$h = Span\{H_1, ..., H_n\}$$

Si avrà $[H_i, H_j] = 0$. Consideriamo una rappresentazione

$$\phi : LieG \to End(V)$$

Essendo un omomorfismo di algebre, ϕ conserva il commutatore:

$$0 = \phi([H_i, H_j]) = [\phi(H_i), \phi(H_j)] = 0$$

dunque anche in una rappresentazione le $\phi(H_j)$ si possono diagonalizzare simultaneamente. Possiamo considerare allora un autovettore v comune a tutte le $\phi(H_j)$:

$$\phi(H_1)v = \lambda_1 v$$

$$\phi(H_2)v = \lambda_2 v$$

$$.$$

$$\phi(H_p)v = \lambda_p v$$

In generale, preso un qualunque $H \in h$, esso sarà combinazione lineare degli H_i:

$$H = \sum_i \alpha_i H_i$$

Risulterà che

$$\phi(H) = \sum_i \alpha_i \phi(H_i)$$

e che

$$\phi(H)v = \sum_i \alpha_i \phi(H_i)v = \sum_i \alpha_i \lambda_i v$$

ovvero v è ancora autovettore di $\phi(H)$ con autovalore $\lambda = \sum_i \alpha_i \lambda_i$. Allora osserviamo una cosa interessante:

$$\phi(H)v = \lambda(H)v = \sum_i \alpha_i \lambda(H_i)v$$

ovvero l'applicazione che ad ogni $H \in h$ associa l'autovalore corrispondente è una applicazione lineare, ovvero un funzionale lineare su h, ovvero un elemento del duale di h, h^*. Definiamo allora i sottospazi prori invarianti di h:

$$V_\lambda = \{v \in V | \phi(H)v = \lambda(H)v, \forall H \in H_{\mathbb{C}}\}$$

Ad esempio, quando diagonalizziamo il momento angolare, gli stati possono essere contrassegnati dagli autovalori l, m, e gli stati $|l, l_z\rangle$ sono autovettori di L^2 ed L_z. In questo caso $\lambda(H)$ è quella funzione che ad L^2 associa $l(l+1)$, e a L_z associa m. Il funzionale λ si dice peso della rappresentazione, e V_λ è lo spazio proprio del peso λ- Il teorema spettrale ci dice che

$$V = \oplus_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$$

Tra tutte le rappresentazioni ce n'è una canonica, la rappresentazione aggiunta.

Rappresentazione aggiunta di $LieG$ su $LieG$

Definiamo

$$ad : LieG \to End(LieG)$$

che ad ogni $X \in LieG$ associa $ad_X \in End(LieG)$ tale che se $Y \in LieG$, si ha $ad_X Y = [X, Y]$. Dobbiamo mostrare che ad è un omomorfismo di algebre, ovvero:

$$ad_{[X,Y]} Z = [ad_X, ad_Y] Z$$

infatti

$$[ad_X, ad_Y] Z = [X, [Y, Z]] - [Y, [X, Z]] =$$

ma per l'identità di Jacobi questo è uguale a

$$= -[Z, [X, Y]] = [[X, Y], Z] = ad_{[X,Y]} Z$$

Se h è una sottoalgebra di Cartan di $LieG$, e ad è la sua rappresentazione aggiunta, risulta che

$$[ad_{H_i}, ad_{H_j}] = ad_{H_i, H_j} = ad_0 = 0$$

Dunque possiamo diagonalizzare simultaneamente tutti gli ad_H con $H \in h$. Possiamo quindi considerare tutti gli spazi propri

$$g_\alpha = \{X \in LieG | ad_H X = \alpha(H) X, H \in h\}$$

dove anche stavolta $\alpha(H) \in h^*$: gli α sono i pesi della rappresentazione aggiunta, e vengono detti **radici**, mentre i V_α si dicono spazi delle radici, e sono sottospazi di $LieG$. Per loro costruzione, le radici non assumono mai l'autovalore nullo, in quanto questo avviene soltanto quando il vettore X è a sua volta un elemento di h. É interessante adesso il teorema spettrale:

$$LieG = h + \oplus_{\alpha \in A} g_\alpha$$

Osservazione: questa scomposizione è canonica; la struttura di algebra di Lie è dotata dell'operazione di parentesi di Lie che permette di definire una rappresentazione canonica di $LieG$ su $LieG$. Allora, se abbiamo la sottoalgebra di Cartan e troviamo i g_α, abbiamo trovato un modo per scomporre l'algebra di Lie. Infine, per classificare le algebre di Lie ci serve soltanto conoscere i commutatori tra elementi di sottospazi diversi:

$$[g_\alpha, g_\beta]$$

Sappiamo che se un elemento E_α appartiene al sottospazio g_α si ha:

$$ad_H E_\alpha = ([H, E_\alpha] =)\alpha(H)E_\alpha$$

dunque ci restano da determinare i commutatori della forma $[E_\alpha, E_\beta]$.
Osservazione: per il teorema di Riesz, se abbiamo uno spazio vettoriale e un prodotto interno $\langle\ ,\ \rangle$, abbiamo una corrispondenza tra V e V^*, in modo che ad ogni funzionale lineare $\lambda \in V^*$ corrisponde un vettore $H_\lambda \in V$ tale che

$$\lambda(X) = \langle V_\lambda, X\rangle \ \ \forall X \in V$$

Su *LieG semplice* la forma di traccia β_0 è non degenere; in particolare β_0 sarà non degenere su h. Allora, ad ogni $\lambda \in h^*$ peso di una rappresentazione ϕ corrisponde un $H_\lambda \in V$:

$$\lambda(X) = \langle H_\lambda, X\rangle \forall X \in V$$

e si ha

$$\beta_0(H, H_\lambda) = \beta_0(H_\lambda, H)$$

Proposizione 0.0.36. *Pesi e radici hanno le seguenti proprietà:*

1. *Sono reali su $h_{\mathbb{R}}$. É diretta conseguenza del fatto che sono definite mediante un prodotto scalare reale.*

2. *Se λ è un peso di una rappresentazione ϕ, con spazio proprio V_λ, e α è una radice (ovvero un funzionale su h che riguarda la rappresentazione aggiunta ad), allora*

$$g_\alpha \subseteq LieG$$

e $\phi(g_\alpha)$ applicato a un elemento di V_λ può avere due risultati:

$$\phi(g_\alpha)V_\lambda \begin{cases} \subseteq V_{\lambda+\alpha}, & \textit{se } \lambda+\alpha \textit{ è un peso di } \phi; \\ = 0, & \textit{altrimenti.} \end{cases}$$

Dimostrazione. Sia $E_\alpha \in g_\alpha$, $H \in h$, e $X \in V_\lambda$. Per definizione si ha che

$$\phi(H)X = \lambda(H)X$$

Se consideriamo il vettore $\phi(E_\alpha)X$, abbiamo

$$\phi(H)(\phi(E_\alpha)X) = (\phi(H)\phi(E_\alpha))X = \phi(E_\alpha)\phi(H)X + \phi([H, E_\alpha])X = \lambda(H)\phi(E_\alpha)X + \phi(\alpha(H)E_\alpha)X = (\lambda(H)+\alpha($$

dunque o $\lambda(H) + \alpha(H) = 0$, oppure è un peso di ϕ. □

Se α è una radice, anche $-\alpha$ lo è.

Dimostrazione. Sia $H \in h_{\mathbb{R}}$, allora H è hermitiana. Consideriamo E_α, si ha:

$$ad_H E_\alpha = \alpha(H)E_\alpha$$

Applichiamo ora l'involuzione di Cartan:

$$ad_H(\theta E_\alpha) = [H, \theta E_\alpha]$$

ma θ è un omomorfismo di algebre di Lie, e $\theta^2 = I$, dunque:

$$[H, \theta E_\alpha] = [\theta^2 H, \theta E_\alpha] = \theta([\theta H, E_\alpha]) = \theta([-H, E_\alpha]) = -\theta(\alpha(H)E_\alpha) = -\alpha(H)\theta E_\alpha$$

allora θE_α è autovettore di ad_H con radice $-\alpha$. □

Se α è una radice e g_α il suo spazio proprio, e dunque $-\alpha$ è ancora un radice e $g_{-\alpha}$ è lo spazio proprio corrispondente, allora

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = \beta_0(E_\alpha, E_{-\alpha})H_\alpha$$

dove H_α è definito da

$$\alpha(H) = \langle H_\alpha, H\rangle \equiv \beta_0(H_\alpha, H)$$

Dimostrazione. Ricordiamo che β_0 è non degenere. Consideriamo

$$\beta_0(H, [E_\alpha, E_{-\alpha}])$$

per la proprietà di inversione si ha

$$\beta_0(H, [E_\alpha, E_{-\alpha}]) = \beta_0([H, E_\alpha], E_{-\alpha}) = \beta_0(\alpha(H)E_\alpha, E_{-\alpha}) =$$

$$= \alpha(H)\beta_0(E_\alpha, E_{-\alpha}) = \beta_0(H, H_\alpha)\beta_0(E_\alpha, E_{-\alpha}) = \beta(H, \beta_0(E_\alpha, E_{-\alpha})H_\alpha) \quad \forall H \in h$$

Poichè β_0 è non degenere, concludiamo che

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = \beta_0(E_\alpha, E_{-\alpha})H_\alpha$$

□

Questo è coerente con quanto abbiamo detto in precedenza per una rappresentazione generica, infatti $[E_\alpha, E_{-\alpha}] = ad_{E_\alpha}E_{-\alpha}$ che sta nello spazio dell'autovalore $\alpha - \alpha = 0$, ovvero è un elemento della sottoalgebra di Cartan.

Ogni radice è nulla sul centro.

Dimostrazione. Il centro dell'algebra è fatto da tutti quegli elementi dell'algebra che commutano con tutti gli altri, quindi $0 = [H, X] = ad_H X = \alpha(H)X = 0$ con $X \in Z$. □

La dimensione degli spazi propri delle radici è 1.

Dimostrazione. Consideriamo

$$\hat{g} = \mathbb{C}H\alpha + \mathbb{C}E_\alpha + \sum_{k=1}^{\infty} g_{-k\alpha}$$

con $g_0 = \mathbb{C}H_\alpha$. Si verifica facilmente che $\hat{g}$ è una sottoalgebra di $LieG$, infatti

$$[H_\alpha, E_\alpha] \in \mathbb{C}E_\alpha$$

$$[H_\alpha, g_{-k\alpha}] \subseteq g_{-k\alpha}$$

$$[E_\alpha, g_{-k\alpha}] \subseteq g_{(-k+1)\alpha}$$

Scegliamo una normalizzazione tale che $\beta_0(E_\alpha, E_{-\alpha}) = 1$, dunque

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = H_\alpha$$

La sottoalgebra $\hat{g}$ è invariante sotto ad_{H_α}, consideriamo allora la traccia

$$Tr(ad_{H_\alpha})|_{\hat{g}} = Tr(0 + \alpha(H_\alpha)E_\alpha + \sum_{k=1} \infty(k\alpha(H_\alpha)) \cdot dim(g_{k\alpha}))$$

Tale traccia però è nulla perchè $H_\alpha = [E_\alpha, E_{-\alpha}]$ dunque $ad_{H_\alpha} = 0$, allora

$$0 = \alpha(H_\alpha)(1 - \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot dim(g_{-k\alpha}))$$

Poichè questa equazione è tra numeri interi, esiste un'unica soluzione, ovvero che per $k = 1$ $dim(g_{-\alpha}) = 1$ e $dim(g_{-n\alpha}) = 0$ per $n \geq 2$. Dunque abbiamo dimostrato che $dim(g_{-\alpha}) = 1$, e con lo stesso ragionamento applicato a

$$\bar{g} = \mathbb{C}H_\alpha + \mathbb{C}E_{-\alpha} + \sum_{k=1}^{\infty} g_{k\alpha}$$

si ottiene che anche $dim(g_\alpha) = 1$ e $dim(g_{n\alpha}) = 0$ per $n \geq 2$. □

Giovedì 18 dicembre

Possiamo fare adesso un riassunto di tutti i risultati ottenuti finora:

1. Le algebre riduttive si possono scomporre in un centro più una componente semisemplice.
2. Le algebre semisemplici possono essere scomposte come somma diretta di algebre semplici. Ad esempio $sl(2, \mathbb{C})$ è semplice.
3. Lo scopo adesso è classificare le algebre semplici e dare una regola per costruirle.
4. Utilizziamo metodi canonici, ovvero che si basano soltanto sulle definizioni date, e algebra lineare.

5. L'oggetto fondamentale in questo contesto è la rappresentazione aggiunta; essa rappresenta l'algebra di Lie su se stessa mediante il commutatore:

$$ad_X Y = [X, Y]$$

Consideriamo una base $\{E_i\}$ di $LieG$. Siccome la rappresentazione aggiunta è bilineare, per determinarla completamente è sufficiente definirla su una base:

$$[E_i, E_j] = C_{ij}^k E_k$$

dove le C_{ij}^k come abbiamo detto sono le costanti di struttura dell'algebra. Per l'identità di Jacobi abbiamo

$$\sum_{cicl.} [[E_i, E_j], E_k] = 0$$
$$\Rightarrow \sum_{cicl.} C_{ij}^l C_{lk}^m E_m = 0$$
$$\Rightarrow \sum_{cicl.} C_{ij}^l C_{lk}^m = 0$$

Possiamo immaginare l'elemento ad_{E_i} come una matrice su $LieG$ che ha come elementi di matrice

$$(ad_{E_i})_{jk} = C_{ijk}$$

Grazie alla rappresentazione aggiunta, possiamo osservare il duplice carattere di $LieG$, come spazio vettoriale, e come insieme di matrici.

6. É fondamentale il ruolo del commutatore:

$$[ad_X, ad_Y] = ad_{[X,Y]}$$

perchè ad è una rappresentazione di algebre di Lie.

7. Abbiamo un insieme di matrici da studiare. Si cerca di diagonalizzarne il massimo numero possibile contemporaneamente, ovvero sulla stessa base.

   Ad esempio: in meccanica quantistica gli autovalori dell'energia possono essere in generale degeneri, allora cercheremo altri operatori che commutino con l'hamiltoniana, li diagonalizziamo insieme ad essa e vediamo che la degenerazione diminuisce. Nel caso del momento angolare si ha:

$$|E\rangle \to |E, l, l_z\rangle$$

   Continuiamo questo discorso finchè possiamo, ovvero finchè non abbiamo un set massimo di osservabili commutanti, in questo caso l'autospazio relativo ad ogni autovalore ha dimensione 1.

8. L'insieme massimale di elementi di $LieG$ che commutano tra loro si dice sottoalgebra di Cartan.
   N.B.: $[X, Y] = 0 \Leftrightarrow [ad_X, ad_Y] = 0$ se $LieG$ è semisemplice, perchè $X \mapsto ad_X$ è un isomorfismo di $LieG$ con la sua immagine in $End(LieG)$, ovvero ad è una rappresentazione fedele.

Torniamo ora alla classificazione delle algebre di Lie semplici. Dobbiamo innanzitutto trovare una sottoalgebra di Cartan (sono tutte isomorfe, a meno di cambiamenti di base). Una sottoalgebra di Cartan h è caratterizzata dalla sua dimensione: dobbiamo determinare la dimensione di $h \prec LieG$, che è anche la dimensione di e^h, il gruppo abeliano massimale contenuto nel gruppo G. Il primo passo sarà quindi classificare le algebre (e quindi i gruppi) a seconda del loro rango, dopodichè scriveremo il teorema spettrale:

$$LieG = h \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta} g_\alpha$$

dove Δ è l'insieme delle radici. Per caratterizzare spazi vettoriali generici è sufficiente conoscerne la dimensione, ma le algebre di Lie come abbiamo visto hanno una struttura più complessa: possono esistere due algebre di Lie con stessa dimensione ma non isomorfe, dunque per classificarle dobbiamo conoscere tutti i possibili commutatori. Per la classificazione abbiamo bisogno di conoscere:

1. La dimensione della sottoalgebra di Cartan;
2. le radici;
3. i commutatori: dobbiamo commutare tutto con tutto.

Scegliamo una base suggerita dal teorema spettrale:

$$H_1, ..., H_r \text{ base di } H$$

$$E_{\alpha_1} E_{-\alpha_1} \cdots E_{\alpha_k} E_{-\alpha_k} \text{ base dello spazio delle radici}$$

Allora

$$H_1, ..., H_r, E_{\alpha_1} E_{-\alpha_1} \cdots E_{\alpha_k} E_{-\alpha_k}$$

è una base per $LieG$. Il commutatore è completamente definito quando conosciamo

$$[H_l, E_\alpha]$$

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}]$$

$$[E_\alpha, E_\beta] \quad (\beta \neq -\alpha)$$

Sappiamo già molte cose:

$$[H_l, E_\alpha] = \alpha(H_l) E_\alpha$$

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = \beta_0(E_\alpha, E_{-\alpha}) H_\alpha$$

dove H_α è definito da

$$\alpha(H) = \langle H\alpha, H \rangle$$

per il teorema di Riesz. Inoltre, abbiamo dimostrato in generale la seguente proprietà:

$$[g_\alpha, g_\beta] \begin{cases} \subseteq g_{\alpha+\beta}, & \text{se } \alpha + \beta \text{ è una radice non nulla;} \\ 0 & \end{cases}$$

Per finire la classificazione, quindi, non ci resta che trovare un modo per capire quando $\alpha + \beta$ è una radice.

Possiamo limitarci allo studio delle sole algebre semplici. Rinormalizziamo gli elementi:

$$[H_\alpha, E_\alpha] = \alpha(H_\alpha)E_\alpha$$

$$[H_\alpha, E_{-\alpha}] = \alpha(H_\alpha)E_{-\alpha}$$

Se prendiamo

$$H'_\alpha = \frac{2H_\alpha}{\alpha(H_\alpha)}$$

$$E'_\alpha = \frac{2E_\alpha}{\alpha(H_\alpha)}$$

$$E'_{-\alpha} = \beta_0(E_\alpha, E_{-\alpha})E_{-\alpha}$$

allora le regole di commutazione diventano

$$[H'_\alpha, E'_\alpha] = 2E_\alpha$$

$$[H'_\alpha, E'_{-\alpha}] = -2E_{-\alpha}$$

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = H_\alpha$$

Cioè dentro l'algebra di Lie troviamo un'algebra $sl(2, \mathbb{C})$. Dal teorema spettrale quindi abbiamo che la somma diretta sui g_α si può vedere anche come una somma (non più diretta) di tante algebre $sl(2, \mathbb{C})$, che però non sono ideali perchè per ipotesi l'algebra di partenza è semplice:

$$LieG = \sum_\alpha sl(2, \mathbb{C})_\alpha$$

Le radici di $sl(2, \mathbb{C})$ sono 2 e -2:

$$[H, E] = ad_H E = 2E$$

$$[H, F] = ad_H F = -2F$$

e l'algebra può essere rappresentata schematicamente come segue:

$$-2 \longleftarrow \cdot \longrightarrow 2$$

Se aumentiamo la dimensione della sottoalgebra di Cartan possiamo trovare tanti $sl(2, \mathbb{C})$ quante sono le radici non opposte diverse tra loro.

Definizione 0.39. Sia $LieG$ un'algebra di Lie, e β una radice, ovvero $\beta \in h^*$. Sia anche $\alpha \in h^*$ con $\alpha \neq 0$. Definiamo una $\alpha-$stringa contenente β come l'insieme degli elementi di $\Delta \cup \{0\}$ della forma

$$\beta + n\alpha \quad (n \in \mathbb{Z})$$

Le $\alpha-$ stringhe sono oggetti tecnici che servono per dimostrare la seguente proposizione:

Proposizione 0.0.37. *Siano $\alpha \in \Delta$, e sia $\beta \in \Delta \cup \{0\}$. Allora esistono due interi p e q non negativi tali che la $\alpha-$stringa per β è della forma*

$$\beta + n\alpha$$

con $-p \leq n \leq q$, dove ***non ci sono lacune****. Inoltre, (fondamentale), si ha*

$$p - q = 2\frac{\langle \beta, \alpha \rangle}{|\alpha|^2} \in \mathbb{Z}$$

dove se $\beta_0(X, Y)$ è il prodotto su LieG determinato dalla forma di traccia, si definisce $\langle \alpha, \beta \rangle = \beta_0(H_\alpha, H_\beta) \equiv \alpha(H_\beta) \equiv \beta(H_\alpha)$, ovvero il prodotto scalare (non degenere) su LieG induce un prodotto scalare anche sul duale della sottoalgebra di Cartan.

Dimostrazione. Supponiamo $\beta + n\alpha \neq 0$ per ogni n. Consideriamo al solito

$$\hat{g} = \sum_n g_{\beta+n\alpha}$$

Possiamo considerare H'_α, E'_α e $E'_{-\alpha}$ dentro g_α e normalizzati come indicato poco fa, tali che

$$[H'_\alpha, E'_{\pm\alpha}] = \pm 2E'_{\pm\alpha}$$

$$[E'_\alpha, E'_{-\alpha}] = H'\alpha$$

ovvero tali da generare un'algebra isomorfa a quella di $sl(2, \mathbb{C})$. Mostriamo che $\hat{g}$ è uno spazio di una rappresentazione di $sl(2, \mathbb{C})$ data da $\{H'_\alpha, E'_\alpha, E'_{-\alpha}\}$ ottenuta mediante la rappresentazione aggiunta. Affinchè $\hat{g}$ possa essere lo spazio di una rappresentazione deve essere stabile sotto di essa, ovvero

$$ad_{H'_\alpha}\hat{g} = [H'_\alpha, \hat{g}] \subseteq \hat{g}$$

$$ad_{E'_{\pm\alpha}}\hat{g} = [E'_{\pm\alpha}, \hat{g}] \subseteq \hat{g}$$

Ma è facile verificare che questo accade:

$$ad_{H'_\alpha}\hat{g} = [H'_\alpha, \hat{g}] = \sum_n [H'_\alpha, g_{\beta+n\alpha}] = \sum (\beta + n\alpha)(H'_\alpha) g_{\beta+n\alpha} \subseteq \sum_n g_{\beta+n\alpha}$$

$$ad_{E'_{\pm\alpha}}\hat{g} = [E'_{\pm\alpha}, \hat{g}] = \sum_n [E'_{\pm\alpha}, g_{\beta+n\alpha}] = \sum_n g_{\beta+(n\pm1)\alpha} \subseteq \hat{g}$$

H'_α è l'elemento della sottoalgebra di Cartan, dunque possiamo diagonalizzarlo e trovare i suoi autovalori; ma nella rappresentazione di $sl(2\mathbb{C})$ gli autovalori di H'_α sono proprio

$$(\beta + n\alpha)(H'_\alpha) = 2\frac{1}{\alpha(H_\alpha)}(\beta(H_\alpha) + n\alpha(H_\alpha)) = 2\frac{\langle \beta, \alpha \rangle}{|\alpha|^2} + 2n$$

Poichè $\hat{g}$ è sta in $LieG$, che è finito-dimensionale, sarà essa stessa finito-dimensionale, ma sappiamo che su ogni spazio vettoriale di dimensione m esiste una rappresentazione irriducibile di $sl(2, \mathbb{C})$ con autovalori della forma $(m-1) + 2i$, il che implica che la quantità

$$2\frac{\langle \beta, \alpha \rangle}{|\alpha|^2}$$

deve necessariamente essere un numero intero. Non solo: siccome questa rappresentazione di $sl(2, \mathbb{C})$ è irriducibile, l'applicazione successiva di E ed F fa scorrere la variabile n e porta su tutti i possibili sottospazi $\beta + n\alpha$; essendo la rappresentazione finito-dimensionale, esisteranno n_{max} ed n_{min} tali da bloccarne la corsa, in altre parole esisteranno p e q non negativi tali che

$$2\frac{\langle \beta, \alpha \rangle}{|\alpha|^2} + 2q = -(2\frac{\langle \beta, \alpha \rangle}{|\alpha|^2} - 2p)$$

ricordando che gli autovalori di $sl(2, \mathbb{C})$ sono simmetrici:

$$m = -(-m)$$

$$\Rightarrow 2\frac{\langle \beta, \alpha \rangle}{|\alpha|^2} + 2\frac{\langle \beta, \alpha \rangle}{|\alpha|^2} = 2p - 2q$$

$$p - q = 2\frac{\langle \beta, \alpha \rangle}{|\alpha|^2}$$

□

Riflessioni

Il prodotto interno $\langle\, , \rangle$ definito su h e h^* permette di definire la riflessione di vettori rispetto a piani perpendicolari ad altri. Se α e β sono due radici, definiamo infatti la trasformazione

$$S_\alpha(\beta) = \beta - 2\frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{|\alpha|^2}\alpha$$

che corrisponde alla riflessione di β rispetto al piano perpendicolare ad α. Per costruzione si osserva che S_α è lineare e poichè $S^2 = 1$ i suoi autovalori sono ± 1.

Proposizione 0.0.38. *Sia $\alpha \in \Delta$. Allora S_α porta Δ in sè, cioè Δ è invariante sotto S_α. Δ è un sistema finito, dunque S_α manda un sistema finito in sè stesso: questo implica che gli angoli tra i vettori di Δ non possono essere arbitrari.*

Dimostrazione.

$$S_\alpha(\beta) = \beta - 2\frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{|\alpha|^2}\alpha = \beta - (p - q\alpha) = \beta + (q - p)\alpha$$

ma risulta $-p \leq q - p \leq q$, da cui

$$\beta + (q - p)\alpha = \beta + n\alpha$$

con $-p \leq n \leq q$, dunque $S_\alpha(\beta)$ appartiene all'$\alpha-$stringa per β dunque $S_\alpha(\beta) \in \Delta$ perchè l'$\alpha-$stringa si costruisce con le radici. Inoltre, siccome $S_\alpha^2 = I$, S_α è invertibile e dunque è surgettiva, da cui

$$S_\alpha(\Delta) = \Delta$$

cioè S_α lascia invariato Δ.

□

Lunedì 22 dicembre

Riassumiamo le tre proprietà principali delle radici:

1. Le radici generano h^* (ci sono tante radici quanto è la dimensione di h, e sono tutte linearmente indipendenti).
2. Il sistema di radici è invariante per riflessione su pareti perpendicolari alle radici, cioè per
$$S_\alpha(\beta) = \beta - 2\frac{\langle \beta, \alpha \rangle}{|\alpha|^2}\alpha$$
3. $2\frac{\langle \beta, \alpha \rangle}{|\alpha|^2}$ è un numero intero per ogni $\alpha, \beta \in \Delta$.

Assumeremo ora in astratto queste proprietà:

Definizione 0.40. Un **sistema astratto di radici** è un insieme finito $\Delta \subset V$ spazio vettoriale, tale che valgono le 3 proprietà sopra elencate. Il numero di radici nel sistema deve essere almeno uguale al doppio della dimensione dello spazio Δ.

Definizione 0.41. Un sistema di radici irriducibile è un sistema astratto di radici tale che non esiste una divisione delle radici $\Delta = \Delta' \cup \Delta''$ con $\Delta' \cap \Delta'' = 0$ e $\Delta' \perp \Delta''$ (rispetto al prodotto scalare definito su V.

Proposizione 0.0.39. *Sia G semisemplice, e $LieG$ la sua algebra di Lie. Allora*

1. *Il sistema di radici di $LieG$ Δ è un sistema astratto di radici.*
2. *Δ è irriducibile se e solo se $LieG$ è semisemplice.*

Dimostrazione. (1): già visto.
(2): ($\Leftarrow$) per assurdo, sia Δ irriducibile, ma sia $LieG = g^{(1)} \oplus g^{(2)}$ con $g^{(1)}$ e $g^{(2)}$ ideali. Sia α una radice, e g_α il suo spazio proprio corrispondente (1-dimensionale), ed $E_\alpha \in g_\alpha$ base di g_α. Supponiamo allora che si possa scrivere
$$E_\alpha = E_\alpha^{(1)} + E_\alpha^{(2)}$$
Per definizione sappiamo che
$$0 = [H, E_\alpha] - \alpha(H)E_\alpha = [H, E_\alpha^{(1)} + E_\alpha^{(2)}] - \alpha(H)(E_\alpha^{(1)} + E_\alpha^{(2)}) = \Big[[H, E_\alpha^{(1)}] - \alpha(H)E_\alpha^{(1)}\Big] + \Big[[H, E_\alpha^{(2)}] - \alpha(H)E_\alpha^{(2)}\Big] =$$
$E_\alpha^{(1)} \in g_\alpha^{(1)}$, ma $g_\alpha^{(1)}$ è un ideale dunque $[H, E_\alpha^{(1)}] \in g_\alpha^{(1)}$, e analogamente $[H, E_\alpha^{(2)}] \in g_\alpha^{(2)}$, ovvero i due addendi dell'equazione sopra si annullano separatamente, cioè
$$[H, E_\alpha^{(1)}] - \alpha(H)E_\alpha^{(1)} = 0$$
$$[H, E_\alpha^{(2)}] - \alpha(H)E_\alpha^{(2)} = 0$$
Ma la dimensione di g_α deve essere 1, mentre $E_\alpha^{(1)}$ ed $E_\alpha^{(2)}$ appartengono a sottospazi differenti, dunque si hanno due possibilità:
$$\begin{array}{c} E_\alpha^{(1)} \neq 0 \\ E_\alpha^{(2)} = 0 \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{c} E_\alpha^{(1)} = 0 \\ E_\alpha^{(2)} \neq 0 \end{array}$$

Possiamo allora spezzare l'insieme delle radici in due sottoinsiemi:

$$\Delta^{(1)} = \{\alpha \in \Delta : g_\alpha \subseteq g_\alpha^{(1)}\}$$

$$\Delta^{(2)} = \{\alpha \in \Delta : g_\alpha \subseteq g_\alpha^{(2)}\}$$

Abbiamo che

$$\Delta = \Delta^{(1)} \cup \Delta^{(2)}$$

e

$$\Delta^{(1)} \cap \Delta^{(2)} = 0$$

Prendiamo $\alpha^{(1)} \in \Delta^{(1)}$, dopodichè prendiamo

$$[E_{\alpha^{(1)}}, E_{-\alpha^{(1)}}] = H_{\alpha^{(1)}}$$

Consideriamo adesso

$$\alpha^{(1)}(H_{\alpha^{(2)}})E_{\alpha^{(1)}} = [H_{\alpha^{(2)}}, E_{\alpha^{(1)}}] \subseteq [H_{\alpha^{(2)}}, g^{(1)}] \subseteq [g^{(2)}, g^{(1)}]$$

ma poichè $g^{(1)}, g^{(2)}$ sono ideali, il loro commutatore deve stare in entrambi, quindi in $g^{(1)} \cap g^{(2)}$, che però è l'insieme vuoto, quindi

$$\alpha^{(1)}(H_{\alpha^{(2)}})E_{\alpha^{(1)}} = 0$$

Se $E_{\alpha^{(1)}}$ non è identicamente nullo, sarà nullo il coefficiente, ovvero

$$\alpha^{(1)}(H_{\alpha^{(2)}}) = \langle \alpha^{(1)}, \alpha^{(2)} \rangle = 0$$

□

Ci dimenticheremo adesso delle algebre di Lie, per occuparci solo dei sistemi astratti di radici.

Proposizione 0.0.40. *Un sistema astratto di radici Δ ha le seguenti proprietà:*

1. *Se $\alpha \in \Delta$, anche $-\alpha \in \Delta$.*
   Dim: Banalmente, se $\alpha \in \Delta$, anche $S_\alpha(\alpha) \in \Delta$, ma

   $$S_\alpha(\alpha) = \alpha - 2\alpha = -\alpha$$

2. *Se $\alpha \in \Delta$, e $\beta = c\alpha$, allora $c = \pm 1, \pm 2$, oppure $c = \pm 1, \pm \frac{1}{2}$, a seconda che $|\beta| \gtrless |\alpha|$.*
   Dim: Se $\beta = \pm\alpha$ non c'è nulla da dimostrare. Altrimenti, sia $|\beta| < |\alpha|$ (se è il contrario scambieremo α con β). Se $\beta = c\alpha$ risulta che

   $$2\frac{\langle \beta, \alpha \rangle}{|\alpha|^2} = 2c \in \mathbb{Z}$$

   ma $|c| < 1$, dunque l'unica possibilità è che $c = \pm\frac{1}{2}$, quindi $\beta = \pm\frac{1}{2}\alpha$.

3. *Sia* $\alpha \in \Delta$, *e* $\beta \in \Delta \cup \{0\}$. *Allora l'intero* $\frac{\langle\beta,\alpha\rangle}{|\alpha|^2}$ *può assumere i seguenti valori:*

$$\frac{\langle\beta,\alpha\rangle}{|\alpha|^2} = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm4$$

dove ±4 *si ha soltanto quando* $\beta = \pm2\alpha$.
Dim: Dalla disuguaglianza di Schwarz:

$$2\frac{\langle\beta,\alpha\rangle}{|\alpha|^2} \leq 2\frac{|\beta||\alpha|}{|\alpha|^2}$$

ma nello stesso tempo si ha

$$2\frac{\langle\beta,\alpha\rangle}{|\beta|^2} \leq 2\frac{|\beta||\alpha|}{|\beta|^2} \quad (\beta \neq 0)$$

Consideriamo adesso il prodotto

$$2\frac{\langle\beta,\alpha\rangle}{|\alpha|^2}2\frac{\langle\beta,\alpha\rangle}{|\beta|^2} \leq \left|2\frac{\langle\beta,\alpha\rangle}{|\alpha|^2}2\frac{\langle\beta,\alpha\rangle}{|\beta|^2}\right| \leq 2\frac{|\beta||\alpha|}{|\alpha|^2}2\frac{|\beta||\alpha|}{|\beta|^2}$$

Ma $2\frac{\langle\beta,\alpha\rangle}{|\alpha|^2}$ *e* $2\frac{\langle\beta,\alpha\rangle}{|\beta|^2}$ *sono due interi, che chiameremo* m *ed* n, *dunque*

$$|m||n| \leq 4$$

Abbiamo allora le seguenti possibilità:

m	n
1	$1, 2, 3, 4$
2	$1, 2$
3	1
4	1

4. *Siano* α, β *non proporzionali, e* $|\alpha| \leq |\beta|$, *allora*

$$2\frac{\langle\beta,\alpha\rangle}{|\beta|^2} = 0, \pm1$$

Dim:

$$2\frac{\langle\beta,\alpha\rangle}{|\alpha|^2} \geq 2\frac{\langle\beta,\alpha\rangle}{|\beta|^2}$$

e dobbiamo avere

$$\left|2\frac{\langle\beta,\alpha\rangle}{|\alpha|^2}2\frac{\langle\beta,\alpha\rangle}{|\beta|^2}\right| \leq 4$$

sappiamo che $2\frac{\langle\beta,\alpha\rangle}{|\beta|^2}$ *può essere solo* $0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm4$, *ma* $\pm3, \pm4$ *sono da scartare perchè non permetterebbero di verificare la disuguaglianza;* ±2 *andrebbe bene, ma abbiamo escluso che* α *e* β *possano essere proporzionali, allora resta solo* $2\frac{\langle\beta,\alpha\rangle}{|\beta|^2} = 0, \pm1$.

5. *(importante) Se α e β sono radici, e il prodotto*

$$\langle \alpha, \beta \rangle > 0$$

allora $\alpha - \beta \in \Delta$. Se invece

$$\langle \alpha, \beta \rangle < 0$$

allora $\alpha + \beta \in \Delta$.
Dim: Siano α e β non proporzionali, e $\langle \alpha, \beta \rangle < 0$. Supponiamo $|\alpha| \leq |\beta|$, allora necessariamente dovrà essere

$$2\frac{\langle \beta, \alpha \rangle}{|\beta|^2} = 1$$

Ma sappiamo che

$$S_\beta(\alpha) \in \Delta$$

$$S_\beta(\alpha) = \alpha - 2\frac{\langle \beta, \alpha \rangle}{|\beta|^2}\beta = \alpha - \beta \in \Delta$$

Se invece $\langle \alpha, \beta \rangle > 0$, abbiamo che $\langle \alpha, -\beta \rangle > 0$, dunque $\alpha - (-\beta) = \alpha + \beta \in \Delta$.

6. *Se α e β sono radici, e $\alpha \pm \beta \ni \Delta \cup \{0\}$, allora*

$$\langle \alpha \, \beta \rangle = 0$$

7. *Se $\alpha \in \Delta$, $\beta \in \Delta \cup \{0\}$, allora la $\alpha-$stringa per β ha la forma $\beta + n\alpha$ con $-p \leq n \leq q$, con $p, q \geq 0$, inoltre*

$$p - q = 2\frac{\langle \beta, \alpha \rangle}{|\alpha|^2}$$

cioè la $\alpha-$stringa per β ha al massimo 4 elementi. Infine, non ci sono lacune.
Dim: [non ci sono lacune]
Vogliamo dimostrare che la seguente situazione non è possibile:

$$\bullet \longrightarrow \bullet_r \longrightarrow \circ_{r+1} \dashrightarrow_{s-1} \circ \dashrightarrow \bullet_s \longrightarrow \bullet$$

Supponiamo che sia

$$\beta + r\alpha \in \Delta$$

$$\beta + (r+1)\alpha \ni \Delta$$

$$\beta + (s-1)\alpha \ni \Delta$$

$$\beta + s\alpha \in \Delta$$

e che $r + 1 \leq s - 1$. Dal punto 5, deve essere $\langle \beta + r\alpha, \alpha \rangle \geq 0$ e $\langle \beta + s\alpha, \alpha \rangle \leq 0$ altrimenti somma e differenza sarebbero radici. Allora

$$\langle \beta + r\alpha, \alpha \rangle - \langle \beta + s\alpha, \alpha \rangle \geq 0$$

$$\Rightarrow (r - s)\langle \alpha, \alpha \rangle \geq 0 \Rightarrow r > s$$

e questo contraddice l'ipotesi.

8. *Se Δ è ridotto, le uniche radici proporzionali ad α sono $\pm\alpha$.*

Definizione 0.42. Un sistema ridotto di radici è un sistema di radici Δ tale che $\alpha \in \Delta$ se e solo se $2\alpha \ni \Delta$.

La dimostrazione della precedente proprietà segue direttamente dalla definizione.

Definiamo adesso

$$n(\beta\alpha) = 2\frac{\langle\beta,\alpha\rangle}{|\alpha|^2} \in \mathbb{Z}$$

$$n(\alpha,\beta) = 2\frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{|\beta|^2} \in \mathbb{Z}$$

Abbiamo che $\langle\alpha,\beta\rangle = |\alpha||\beta|\cos\phi$ e anche

$$|n(\alpha,\beta)n(\beta,\alpha)| \leq 4$$

dove il 4 si ha soltanto quando $\beta = \pm 2\alpha$. Ma

$$n(\alpha,\beta) = 2\frac{|\alpha||\beta|}{|\beta|^2} = 2\frac{|\alpha|}{|\beta|}\cos\phi$$

$$n(\beta,\alpha) = 2\frac{|\beta||\alpha|}{|\alpha|^2} = 2\frac{|\beta|}{|\alpha|}\cos\phi$$

$$\Rightarrow n(\beta,\alpha)n(\alpha,\beta) = 4\cos^2\phi \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow 4\cos^2\phi = 0,1,2,3,4$$

Allora possiamo costruire la seguente tabella:

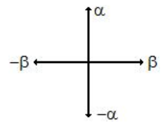
$n(\alpha,\beta)$	$n(\beta,\alpha)$	ϕ	$\frac{\lvert\beta\rvert}{\lvert\alpha\rvert}$
0	0	$\frac{\pi}{2}$	*indet.*
1	1	$\frac{\pi}{3}$	1
-1	-1	$\frac{2}{3}\pi$	1
1	2	$\frac{\pi}{4}$	$\sqrt{2}$
-1	-2	$\frac{3}{4}\pi$	$\sqrt{2}$
1	3	$\frac{\pi}{6}$	$\sqrt{3}$
-1	-3	$\frac{5}{6}\pi$	$\sqrt{3}$

In caso il rango dell'algebra sia 1, ovvero la dimensione della sottoalgebra di Cartan sia 1 (ad esempio per $sl(2,\mathbb{C})$), abbiamo una sola radice e la sua opposta:

$$E_{-\alpha} \longleftarrow \bullet \longrightarrow E_\alpha$$

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = H_\alpha$$

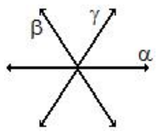
Nel caso di rango 2, a seconda degli angoli abbiamo situazioni differenti:



1. $\phi = \frac{\pi}{2}$:

   Questa algebra corrisponde alla somma diretta $sl(2,\mathbb{C}) \oplus sl(2,\mathbb{C})$, ed è riducibile, infatti si può separare lo spazio delle radici come $\Delta = \{\alpha, -\alpha\} \cup \{\beta, -\beta\}$ e $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$

2. $\phi = \frac{\pi}{3}$:

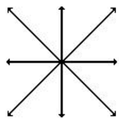
   

   Questo diagramma rappresenta l'algebra di $SU(3)$:

   $$[E_\alpha, E_\beta] = E_\gamma$$

   $$[E_\alpha, E_\gamma] = 0$$

3. $\phi = \frac{\pi}{4}$:

4. $\phi = \frac{\pi}{6}$:

Definizione 0.43. Un sistema semlice di radici è un insieme finito di radici tale che:

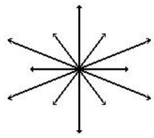
1. É un insieme di radici che generano lo spazio vettoriale V (dunque di dimensione pari al rango di $LieG$).

2. Ogni altra radice è combinazione delle radici della base:

   $$\beta = \sum_\alpha m_\alpha s_\alpha$$

   dove gli m_α sono tutti dello stesso segno.

Ad esempio, in per $su(3)$ un sistema semplice di radici è costituito dalle radici α e β.



Definizione 0.44. Sia $\Delta \subseteq V$, e sia $t \in V^*$. Un elemento del duale lo possiamo sempre vedere come una retta (o un iperpiano) che divide lo spazio in due semispazi, dove la retta è individuata dall'equazione

$$t(x) = 0 \;\; x \in V$$

Allora

$$V = V_1 \cup V_2 \cup \{t(x) = 0\}$$

Risulterà allora

$$\begin{cases} t(x) > 0, & \text{se e solo se } x \in V_1; \\ t(x) < 0, & \text{se e solo se } x \in V_2; \\ t(x) = 0, & \text{se e solo se } x \text{ appartiene all'iperpiano.} \end{cases}$$

Poichè Δ è finito, possiamo sempre scegliere t in modo che non si annulli per nessuna radice, ovvero $t(\alpha) \neq 0$ per ogni $\alpha \in \Delta$. La scelta di t divide Δ in due sottoinsiemi:

$$\Delta_t^+ = \{\alpha \in \Delta | t(\alpha) > 0\}$$

$$\Delta_t^- = \{\alpha \in \Delta | t(\alpha) < 0\}$$

Poichè se $\alpha \in \Delta$, anche $-\alpha \in \Delta$, risulta

$$t(\alpha)t(-\alpha) < 0$$

di conseguenza il numero di radici di Δ_t^+ è uguale a quello di Δ_t^- e

$$\Delta = \Delta_t^+ \cup \Delta_t^-$$

con

$$\Delta_t^+ \cap \Delta_t^- = 0$$

Una volta definito Δ_t^+, osserviamo che possiamo limitarci a cercare una base al suo interno, infatti le radici negative sono comunque combinazioni lineari a coefficienti negativi delle radici di Δ_t^+.

Definizione 0.45. Sia $\alpha \in \Delta_t^+$. Diremo che α è **scomponibile** se esistono $\beta, \gamma \in \Delta_t^+$ tali che $\alpha = \beta + \gamma$, altrimenti diremo α non scomponibile. Denoteremo con S_t l'insieme degli elementi di Δ_t^+ non scomponibili.

Lemma 0.0.41. *Ogni elemento di Δ_t^+ è combinazione di altri elementi non scomponibili di Δ_t^+ con coefficienti positivi.*

Dimostrazione. Sia $I \subseteq \Delta_t^+$ costituito da elementi di Δ_t^+ che non sono combinazioni a coefficienti positivi di S_t. Dimostreremo che $I = \emptyset$.

Supponiamo per assurdo che $I \neq \emptyset$, e sia $\alpha \in I$ tale che $t(\alpha)$ assuma il valore minimo (in ogni caso $t(\alpha) > 0$). Allora, poichè α non appartiene a S_t per ipotesi, deve essere necessariamente $\alpha = \beta + \gamma$ con $\beta, \gamma \in \Delta_t^+$ ma $\beta, \gamma \ni S_t$. Si avrà

$$t(\alpha) = t(\gamma + \beta) = t(\gamma) + t(\beta)$$

Ma $t(\gamma), t(\beta) > 0$, dunque $t(\alpha) > t(\gamma), t(\beta)$. Poichè avevamo scelto α minimo su I, deve essere $\beta, \gamma \ni I$, quindi β, γ sono scomponibili come somma a coefficienti positivi di elementi di S_t, e di conseguenza anche α lo è, da cui l'assurdo. $\square$

Si tratta di vedere ora se le radici di S_t formano una base.

Lemma 0.0.42. *Siano $\alpha, \beta \in S_t$. Allora $\langle \alpha, \beta \rangle \leq 0$.*

Dimostrazione. Siccome $\alpha, \beta \in S_t$, sono indecomponibili in Δ_t^+ per definizione. Se fosse $\langle \alpha, \beta \rangle > 0$, allora $\alpha - \beta = \gamma \in \Delta$, e dunque $\alpha = \beta + \gamma$. Allora, se γ stesse in Δ_t^+, allora α risulterebbe scomponibile e dunque $\alpha \ni S_t$, contro l'ipotesi. Viceversa, se γ stesse in Δ_t^-, avremmo $-\gamma \in \Delta_t^+$ e $\beta - \alpha = -\gamma$, dunque $\beta = \alpha - \gamma$, cioè β sarebbe scomponibile contro l'ipotesi. $\square$

Dunque, le radici positive non scomponibili formano angoli maggiori di $\frac{\pi}{2}$. Non ci resta che da dimostrare che vettori che formano angoli ottusi sono linearmente indipendenti.

Lemma 0.0.43. *Sia $t \in V^*$, e $A \subset V$ un sottoinsieme finito di vettori tale che $t(\alpha) > 0$ per ogni $\alpha \in A$ e $\langle, \alpha, \beta \rangle \leq 0$ per ogni $\alpha, \beta \in A$. Allora A è un insieme di vettori linearmente indipendenti.*

Dimostrazione. Una generica relazione di dipendenza lineare si scrive come:

$$\sum_{\alpha \in A} c_\alpha \alpha = 0$$

Dividiamola in due parti:

$$\sum_{\beta \in B} m_\beta \beta = \sum_{\gamma \in \Gamma} n_\gamma \gamma$$

dove $m_\beta, n_\gamma \geq 0$, ovvero abbiamo diviso i coefficienti positivi da quelli negativi nella sommatoria iniziale. Si ha allora che

$$\{c_\alpha\}_{\alpha \in A} = \{m_\beta\}_{\beta \in B} \cup \{-n_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$$

Definiamo allora

$$\lambda = \sum_{\beta \in B} m_\beta \beta = \sum_{\gamma \in \Gamma} n_\gamma \gamma$$

e risulterà ovviamente $\langle \lambda, \lambda \rangle \geq 0$, ma:

$$\langle \lambda, \lambda \rangle = \langle \sum_{\beta \in B} m_\beta \beta, \sum_{\gamma \in \Gamma} n_\gamma \gamma \rangle = \sum_{\beta \in B} \sum_{\gamma \in \Gamma} m_\beta \beta n_\gamma \gamma \langle \beta, \gamma \rangle$$

Ma $\langle \beta, \gamma \rangle$ è negativo o al più nullo per ipotesi, e poichè $m_\beta, n_\gamma \geq 0$, si ha che

$$\langle \lambda, \lambda \rangle \leq 0$$

$$\Rightarrow \langle \lambda, \lambda \rangle = 0$$

Allora

$$\lambda = \sum_{\beta \in B} m_\beta \beta = \sum_{\gamma \in \Gamma} n_\gamma \gamma = 0$$

$$t(\lambda) = \sum_{\beta \in B} m_\beta t(\beta) = \sum_{\gamma \in \Gamma} n_\gamma t(\gamma) = 0$$

Ma poichè $t(\beta), t(\gamma) > 0$ per ipotesi, l'unica possibilità è che $m_\beta, n_\gamma = 0$, quindi $c_\alpha = 0$ cioè i vettori di A sono linearmente indipendenti. $\square$

Corollario 0.0.44. *S_t è un sistema di radici semplici.*

Il problema del J^2

Sappiamo dalla teoria del momento angolare che l'operatore

$$J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$$

commuta con tutti i J_i, che a loro volta soddisfano le regole di commutazione

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k$$

Sull'algebra di Lie dei J_i è definito il prodotto di Lie $[\,,\,]$ ma non il prodotto ordinario, mentre il J^2 è costruito mediante i quadrati degli elementi, che però non stanno nell'algebra. Se consideriamo una algebra di Lie di matrici, ad esempio le matrici antisimmetriche, date A e B tali che

$$A = -A^T$$

$$B = -B^T$$

$$[A, B]^T = -[A, B]$$

dunque le matrici antisimmetriche chiudono un'algebra di Lie con l'operazione di commutatore. Però, per definire il commutatore facciamo un'operazione non contemplata dall'algebra di Lie, infatti:

$$[A, B] = AB - BA$$

ma AB e BA non sono elementi dell'algebra.
N.B.: le matrici $n \times n$ sono uno spazio vettoriale ma anche un'algebra associativa (esiste la moltiplicazione tra matrici), il prodotto di Lie su un'algebra di Lie viceversa non è associativo. Tuttavia, il prodotto di Lie inteso come commutatore lo otteniamo facendo il commutatore tra gli elementi dell'algebra associativa con il prodotto associativo.
Osservazione: data una qualsiasi algebra associativa, questa definisce un'algebra di Lie, con il commutatore che è sempre antisimmetrico e soddisfa l'identità di Jacobi.
Domanda: data un'algebra di Lie, esiste un'algebra associativa tale che l'algebra di Lie si ottiene dal commutatore dell'algebra associativa? La risposta è sì, tale algebra si dice **algebra inviluppo universale** ed è così costruita:
LieG è uno spazio vettoriale, dunque $X, Y, Z \in LieG$ siano dei suoi elementi. Costruiamo l'algebra tensoriale di *LieG*, considerandone la struttura lineare:

$$\sum C_{XYZ\ldots} X \otimes Y \otimes X \otimes \cdots$$

L'algebra tensoriale ha la difficoltà che $X \otimes Y \neq Y \otimes X$ (ad esempio se volessimo costruire l'algebra dei polinomi dovremmo aggiungere la proprietà $xy = yx$). Adesso prendiamo tutti gli elementi della forma $X \otimes Y - Y \otimes X$, che formano un ideale, e facciamone il quoziente con l'algebra tensoriale:

$$\frac{\otimes V}{\{X \otimes Y - Y \otimes X\}}$$

Nel caso di un'algebra di Lie prendiamo

$$\frac{\otimes LieG}{\{X \otimes Y - Y \otimes X - [X, Y]\}} \otimes U(LieG)$$

Il J^2 sta nel centro dell'algebra inviluppo universale (e vabè).