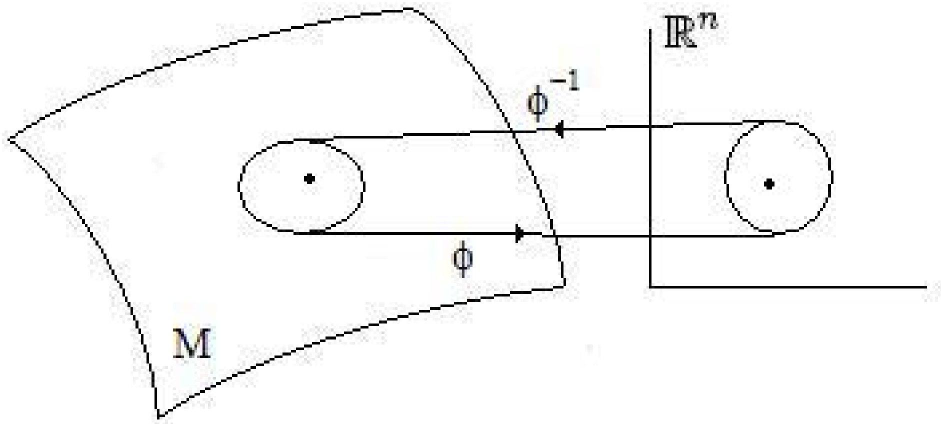
Complementi di metodi matematici - Geometria differenziale (agg. 26/11/08)

Lunedì 6 ottobre

Consideriamo un insieme M sul quale diamo la nozione di topologia, ovvero diciamo chi sono gli intorni di un punto, gli aperti, e le funzioni continue. Alternativamente, se possibile, possiamo immergere M in uno spazio euclideo e prendere la topologia indotta; in ogni caso M risulta essere uno **spazio topologico**.

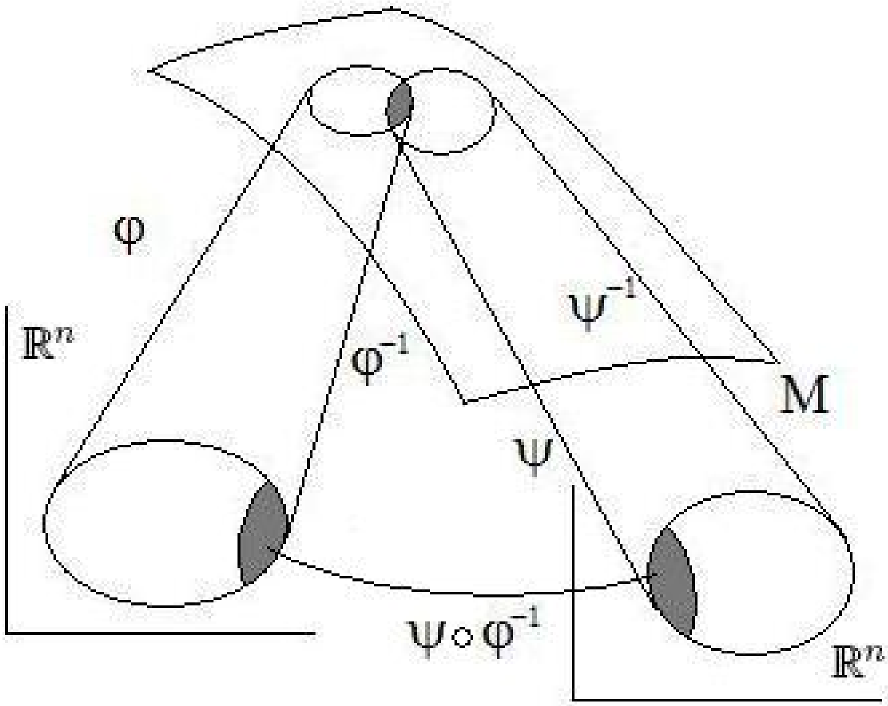
Prendiamo un punto p e un suo intorno aperto. Ci limiteremo a studiare oggetti per i quali esista una funzione, detta *carta locale*, dall'intorno in $\mathbb{R}^n$, invertibile. Se ogni punto dello spazio topologico ha un intorno aperto omeomorfo mediante una carta a un aperto di $\mathbb{R}^n$, si parla di **varietà topologica**.



Questo non basta, poichè c'è l'eventualità che più carte si intersechino, e dobbiamo dire come vengono trattati i punti di intersezione.

Assumeremo che i punti sullo spazio abbiano tutti una stessa ″dimensione″ n, ovvero sullo spazio non sono presenti singolarità che possano far variare il numero di parametri con cui è possibile descrivere i punti dello spazio. In relatività generale questa proprietà può venire meno, e le singolarità in questione sono i buchi neri.

Tornando alle carte, queste possono avere scale diverse o modi diversi di essere rappresentate; tuttavia possono anche avere sovrapposizioni, e se vogliamo calcolare delle distanze tra punti dobbiamo poterle



mettere in relazione. Siano ϕ e ψ due carte dalla varietà M su $\mathbb{R}^n$, l'applicazione $\psi \circ \phi^{-1}$ si chiama *cambiamento di carta*, e richiediamo che per varietà topologiche tale funzione sia continua.
Domanda: Possiamo riuscire a dire qualcosa su M a partire da quello che osserviamo su $\mathbb{R}^n$? La risposta è affermativa, ma dobbiamo essere sicuri che i risultati che otteniamo non dipendano dalla particolare carta scelta. Supponiamo infatti di avere una funzione $F : M \to \mathbb{R}$, e di voler definire la continuità per questa funzione in questo modo:

Definizione 0.1. Data una carta locale ϕ su una varietà topologica M definita su un intorno U di un punto $p \in M$. Una funzione $F : M \to \mathbb{R}$ si dice continua nel punto p se è continua la funzione $F \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, detta **rappresentante locale** di F.

Osserviamo che tale definizione non dipende dalla scelta della carta, sia infatti ψ un altra carta definita in un intorno di p, allora si ha:

$$F \circ \psi^{-1} = F \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \psi^{-1}$$

Per ipotesi il cambiamento di carta $\phi \circ \psi^{-1}$ è una funzione continua, mentre $F \circ \phi^{-1}$ è continua per definizione, dunque comunque scelta ψ, $F \circ \psi^{-1}$ sarà anch'essa una funzione continua.

Una volta decise le carte ammissibili, definiamo le proprietà della varietà in maniera locale utilizzando le carte, fermo restando che i risultati varranno anche sullo spazio di partenza. Il passo successivo è definire una proprietà diversa dalla continuità, la *differenziabilità*. Prima di definire cosa siano le derivate su una varietà topologica, dovremo definire un ambiente dove abbia senso parlare di derivate. Su $\mathbb{R}^n$ la derivata si basa necessariamente su proprietà lineari, infatti data una funzione $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, scriveremo:

$$F(x+h) - F(x) = Lh + o(h^2)$$

dove Lh è la parte lineare della differenza. In coordinate locali $L = \frac{\partial y^i}{\partial x^k}$ ovvero è la matrice jacobiana della trasformazione indotta da F. In dimensione 1 si ha semplicemente

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = L$$

in dimensione maggiore di 1 viceversa non ha senso dividere per un vettore. La sfera non ha una struttura di spazio lineare, pertanto non è possibile effettuare direttamente l'operazione di Lh; recupereremo questa proprietà quando introdurremo la nozione di spazio tangente ad una varietà.

Abbiamo definito chi sono le funzioni continue su una varietà topologica M, il passo successivo è lavorare con funzioni che siano *derivabili.* Consideriamo una $F : M \to \mathbb{R}$, mediante due carte locali ϕ e ψ costruiamo le funzioni

$$F \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$F \circ \psi^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

Ha senso chiedersi se tali funzioni siano derivabili, e in generale prese due carte qualunque la risposta potrebbe essere affermativa in un caso e negativa nell'altro. Non vogliamo questa ambiguità, pertanto richiederemo che i cambi di carta siano funzioni derivabili, esattamente come nel caso delle funzioni continue; in tal modo, se F è derivabile nel senso che è derivabile il suo rappresentante locale costruito mediante una carta ϕ, lo sarà per qualunque altra carta ψ. Formalmente, sia M una varietà topologica, e ϕ una carta locale definita su un aperto $U \subset M$. Siano

$$\phi : U \subset M \to \mathbb{R}^n$$

$$\psi : V \subset M \to \mathbb{R}^n \quad (U \cap V \neq 0)$$

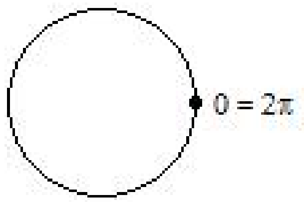
richiediamo dunque che la funzione $\psi \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sia differenziabile. Chiameremo *compatibile* ogni carta ψ tale che $\psi \circ \phi^{-1}$ sia differenziabile. La conseguenza come abbiamo detto è che se $F \circ \phi^{-1}$ è differenziabile, anche

$$F \circ \psi^{-1} = F \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \psi^{-1}$$

è differenziabile.

Consideriamo M, ed un ricoprimento (U_i, ϕ_i) tale che $\cup_{i \in I} U_i = M$ e con a proprietà che $\phi_i \circ \phi_j^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sia differenziabile. (U_i, ϕ_i) si dice *atlante differenziabile* e la coppia $(M, (U_i, \phi_i))$ è una **varietà differenziabile**.

Esempio: ***(Brickell Clark)***Consideriamo una circonferenza S^1. Tale insieme è uno spazio topologico compatto, quindi non può essere descritto da un aperto come la retta $\mathbb{R}$, ma è sufficiente una sola coordinata per identificare i suoi punti.



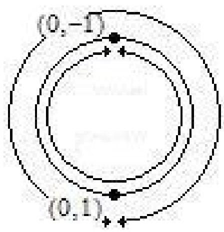
Tale insieme presenta un punto di discontinuità nell'angolo $2\pi \equiv 0$, e in tal punto non si possono fare le derivate. Questo ci impone di scegliere più di un sistema di coordinate per descrivere la varietà, quindi almeno due carte. Consideriamo due aperti:

$$U_1 = S^1 \backslash \{0, 1\}$$

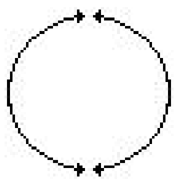
$$\forall x \in U_1 \ \ x = (\sin(2\pi s), \cos(2\pi s)) \quad 0 < s < 1$$

$$U_2 = S^1 \backslash \{0, -1\}$$

$$\forall x \in U_2 \ \ x = (\sin(2\pi t), \cos(2\pi t)) \quad -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2}$$



L'intersezione $U_1 \cap U_2$ è formata da due aperti:



Dobbiamo trovare $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$:

$$\begin{cases} t = s, & 0 < s < \frac{1}{2}; \\ t = s - 1, & \frac{1}{2} < s < 1. \end{cases}$$

Entrambe le funzioni sono derivabili a piacere, dunque il cambiamento di carta è differenziabile. Si definisce **atlante massimale** l'insieme di tutte le carte compatibili. Consideriamo un altro atlante e verifichiamone la compatibilità: sia

$$\{(V_b, \psi_b\}_{b=1,2,3,4}$$

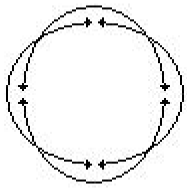
Scriviamo S^1 come l'insieme dei punti (x_1, x_2) tali che $x_1^2 + x_2^2 = 1$, e prendiamo

$$V_1 = \{(x_1, x_2) \in S^1 | x_1 > 0\}$$

$$V_2 = \{(x_1, x_2) \in S^1 | x_2 > 0\}$$

$$V_3 = \{(x_1, x_2) \in S^1 | x_1 < 0\}$$

$$V_4 = \{(x_1, x_2) \in S^1 | x_2 < 0\}$$



Poichè ogni coordinata è legata all'altra dalla condizione $x_1^2 + x_2^2 = 1$, le carte sono rappresentate da:

$$\psi_1 = x_2$$

$$\psi_2 = x_1$$

$$\psi_3 = x_2$$

$$\psi_4 = x_1$$

Verifichiamo che $\psi_1 \circ \psi_1^{-1}$ è differenziabile:

$$x_2 = \psi_1 \circ \psi_2^{-1} = \sqrt{1 - x_1^2}$$

Tale funzione non è differenziabile per $x_1 = 1$ ma tale punto è escluso dal dominio degli aperti V_i in quanto si avrebbe $x_2 = 0$. Per quanto riguarda la compatibilità con le vecchie carte, si ha:

$$x_2 = \cos(2\pi s)$$

e questa funzione è chiaramente differenziabile, come tutte le altre, dunque i due sistemi di carte sono compatibili.

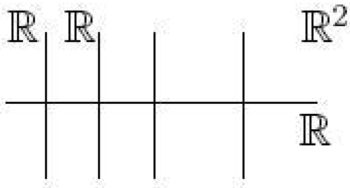
Se anzichè differenziabili, assumiamo i cambi di carta analitici otteniamo le cosiddette **varietà analitiche**, esempi delle quali sono le superfici di Riemann. Se i cambi di carta sono funzioni olomorfe si hanno invece le **varietà complesse**. Questa richiesta in termini di funzioni è molto forte in quanto le funzioni olomorfe sono molto regolari; inoltre se una varietà ha dimensione complessa pari a 1, questa corrisponde ad una dimensione reale 2.

Prodotto cartesiano

Esiste una costruzione che è possibile fare a tutti i livelli di insieme, il prodotto cartesiano. Dati due insiemi A e B, il prodotto cartesiano dei due è l'insieme delle coppie:

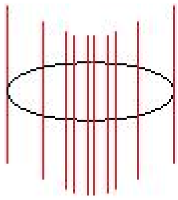
$$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$$

Avendo a disposizione un modo per rappresentare i due insiemi, si considera per ogni punto di B un insieme uguale ad A. **Esempi:**

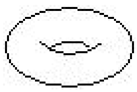


- $\mathbb{R}^2$ può essere corrisponde al prodotto cartesiano di $\mathbb{R}$ con un altro $\mathbb{R}$;

- prendendo il prodotto cartesiano della circonferenza S^1 con la retta reale si ottiene il cilindro;



- il prodotto cartesiano di due S^1 dà invece il toro;



Se i singoli spazi A e B hanno una struttura di varietà differenziabile, abbiamo automaticamente una struttura indotta anche sul loro prodotto cartesiano:

$$\{M, (U_i, \phi_i)_{i \in I}\} \quad \{N, (V_j, \psi_j)_{j \in J}\} \to \{M \times N, (U_i \times V_j, \phi_i \times \psi_j)_{i \in I, j \in J}\}$$

Ad esempio siano $M = S^1$ e $N = \mathbb{R}$, e consideriamo per S^1 le carte (U_1, ϕ_1) e (U_2, ϕ_2) definite in precedenza:

$$\{M, (U_1, \phi_1, U_2, \phi_2)\} \ \ \{N, (\mathbb{R}, Id)\}$$

dove Id è l'identità su $\mathbb{R}$, che ad ogni x fa corrispondere x stesso. Possiamo trovare una struttura di varietà differenziabile sul cilindro in questo modo:

$$\{S^1 \times \mathbb{R}, (U_1 \times \mathbb{R}, \phi_1 \times Id)(U_2 \times \mathbb{R}, \phi_2 \times Id)\}$$

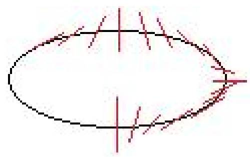
La generalizzazione del prodotto cartesiano è fondamentale perchè permette di ottenere estensioni come i tensori.

Una volta che si ha un prodotto cartesiano tra due spazi B ed F (che nel seguito indicheranno rispettivamente ″base″ e ″fibra″), si ha naturalmente una applicazione, la *proiezione*:

$$P_B : B \times F \to B \quad P_b(b, f) = b$$

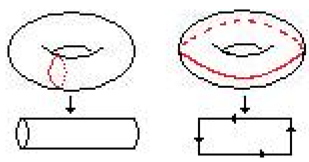
$$P_F : B \times F \to F \quad P_f(b, f) = f$$

Pensiamo adesso ad una situazione non più ″statica″ come nel caso di $S^1 \times \mathbb{R}$ in cui avevamo ottenuto il cilindro, ad una più ″dinamica″, nella quale l'attaccamento dei vari $\mathbb{R}$ ad ogni punto della circonferenza avviene in maniera diversa:



In questo caso non si ottiene più un cilindro ma un nastro di Moebius. Cilindro e nastro di Moebius sono due cose diverse non solo dal punto di vista differenziale ma anche da quello topologico: infatti il cilindro ha due componenti di bordo, il nastro soltanto una. La costruzione dei due oggetti differisce soltanto per il fatto che abbiamo incollato i vari $\mathbb{R}$ in maniera diversa, e questo rende cilindro e nastro globalmente dissimili, tuttavia localmente essi non sono distinguibili.

Consideriamo come ulteriore esempio di diversità topologica un toro ed una sfera, e chiediamoci perchè non esiste nessuna applicazione continua che faccia corrispondere l'uno all'altra. Se considero la sfera, qualunque taglio possiamo pensare di effettuare la dividerà in due regioni sconnesse, mentre per quanto riguarda il toro esistono due tipi di taglio che lo lasciano connesso:



Possiamo considerare spazi con la particolare proprietà di essere localmente prodotto di spazi diversi, è la nozione di **spazio fibrato**. Consideriamo uno spazio E, che sarà lo spazio totale del nostro spazio fibrato, e una proiezione $\pi : E \to B$ (dove B è la base dello spazio fibrato) con queste proprietà: deve esistere uno spazio (varietà) F, detta fibra tipo, tale che per ogni intorno aperto U_x di $x \in B$, l'immagine inversa di U_x, $\pi^{-1}(U_x)$, è isomorfa (bicontinua o omeomorfa) a $U_x \times F$.

Questo è importante perchè permette di globalizzare uno spazio F, facendo una costruzione per cui ad ogni punto di una varietà di base viene associato qualcosa che abbia le stesse proprietà. Possiamo pensare ad una circonferenza con l'insieme delle rette tangenti in ogni punto, che altro non è che un cilindro, oppure una calotta di sfera S^2 con i piani tangenti ad ogni punto. Tuttavia, si può dimostrare che l'insieme costituito dalla sfera S^2 e tutti i piani tangenti **non** è esprimibile mediante un prodotto di spazi.

La costruzione sopra mostrata si può effettuare in tanti casi, ma se vogliamo confrontare due oggetti abbiamo bisogno di applicazioni che non ne distruggano la struttura. Ad esempio per confrontare dei fibrati dovremo definire delle applicazioni tra fibrati: siano E_1 ed E_2 due spazi totali fibrati, B_1, B_2 le rispettive basi, e π_1, π_2 le proiezioni. L'applicazione $\Phi : E_1 \to E_2$ è un'applicazione tra fibrati se esiste una applicazione $\phi : B_1 \to B_2$ ed entrambe soddisfano alla condizione di *banalità locale*

$$\phi \circ \pi_1 = \pi_2 \circ \Phi$$

Giovedì 9 ottobre

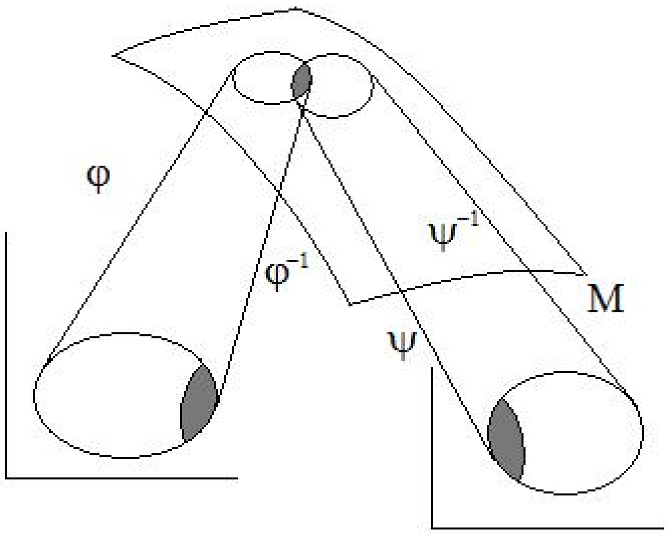
La definizione di varietà differenziabile è quindi il modo di giustificare i conti che si fanno, senza paura di star facendo operazioni in ambienti dove eventualmente queste non si potessero fare. É lo stesso tipo di salto concettuale che si fa passando dalla scrittura in componenti dei vettori alla scrittura compatta $\vec{v}$.

Consideriamo due carte ϕ e ψ , e un'applicazione F dalla varietà M in $\mathbb{R}$. Si dice che l'applicazione F è differenziabile se la sua rappresentativa locale $(F \circ \phi^{-1}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lo è. Questa definizione è indipendente dalla carta scelta, infatti

$$(F \circ \psi^{-1}) = F \circ \phi^{-1} \circ (\phi \circ \psi^{-1})$$

e poichè abbiamo richiesto che i cambiamenti di carta siano differenziabili, se $F \circ \phi^{-1}$ è differenziabile anche $F \circ \psi^{-1}$ lo è.

Consideriamo due varietà differenziabili M e N; definiremo adesso la famiglia di applicazioni differenziabili



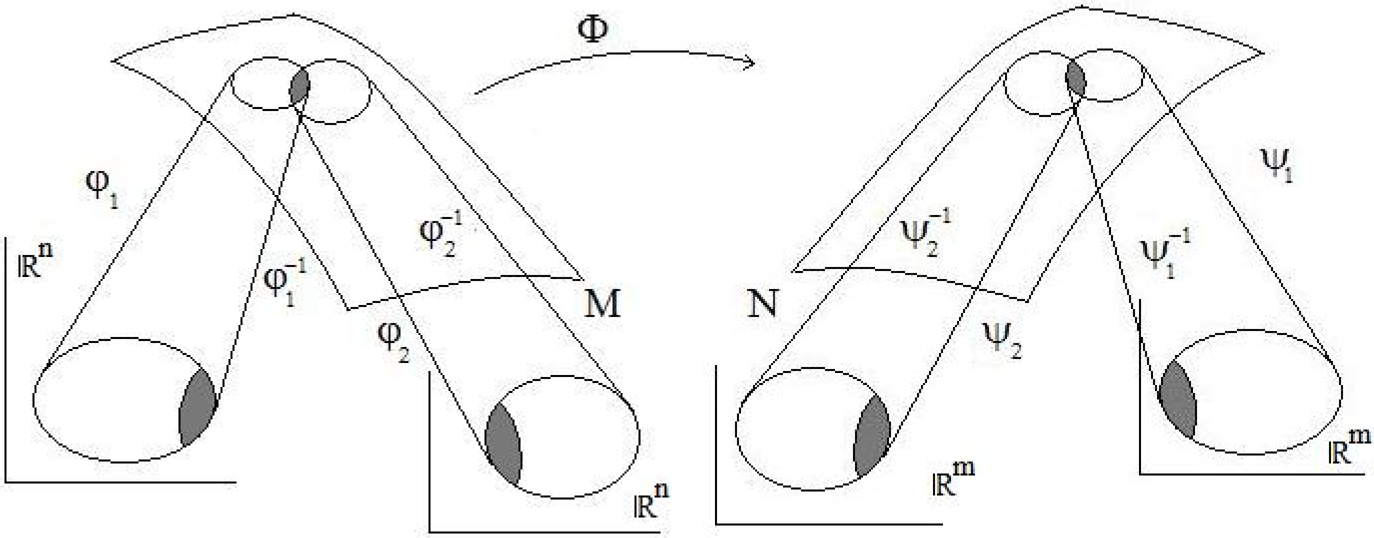
da M a N.

Scelti due atlanti differenziabili, partiamo da $\mathbb{R}^n$ e andiamo in $\mathbb{R}^m$ con l'applicazione:

$$(\psi_1 \circ \Phi \circ \phi_1^{-1}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

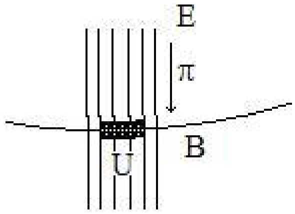
Definiremo quindi Φ differenziabile se la sua rappresentativa locale lo è. Si verifica agilmente che questa definizione è indipendente dalla carta scelta, infatti scegliendo due nuove carte ϕ_2 e ψ_2 si ha:

$$\psi_2 \circ \Phi \circ \phi_2^{-1} = (\psi_2 \circ \psi_1^{-1}) \circ (\psi_1 \circ \Phi \circ \phi_1^{-1}) \circ (\phi_1 \circ \phi_2^{-1})$$



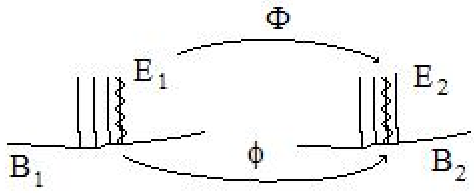
che per la differenziabilità dei cambi di carta è ancora una funzione differenziabile se $(\psi_1 \circ \Phi \circ \phi_1^{-1})$ lo è.

Parliamo adesso di fibrati. Abbiamo definito il fibrato come varietà fibrata a cui aggiungiamo la nozione di banalità locale: se $\pi : E \to B$ è una proiezione, la nozione di banalità locale si esprime dicendo che per ogni ricoprimento $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ della base B, $\pi^{-1}(U_\alpha) \simeq U \times F$. Dunque, localmente ad un fibrato si richiede di essere un prodotto di spazi, mentre globalmente questo può non essere verificato, come abbiamo visto ad esempio nel caso del nastro di Moebius. La Topologia algebrica si occupa proprio di capire in quanti modi si possano incollare le fibre su una base.



Vediamo cosa si intende per applicazioni tra fibrati. Siano $\pi_1 : E_1 \to B_1$ e $\pi_2 : E_2 \to B_2$ due fibrati, e sia $\Phi : E_1 \to E_2$. Φ è una applicazione tra fibrati se esiste $\phi : B_1 \to B_2$ che rispetta la struttura di fibrato, cioè manda fibre del primo fibrato in fibre del secondo; in altre parole, l'immagine di una fibra di E_1 attraverso ϕ è una fibra di E_2.

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{\Phi} & E_2 \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_2} \\ B_1 & \xrightarrow{\phi} & B_2 \end{array}$$



Derivate e vettori tangenti

Quando si studia la geometria di $\mathbb{R}^3$ o delle superfici di $\mathbb{R}^3$, si studiano delle curve, ovvero applicazioni $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$. La generalizzazione a $\mathbb{R}^n$ è immediata, e per ogni $t \in \mathbb{R}$ avremo quindi che $\sigma : t \longmapsto \sigma(t) = \{\sigma^1(t), ..., \sigma^n(t)\}$. Il vettore tangente a una curva per $t = t_0$ si calcola come:

$$\frac{d}{dt}\sigma(t)\bigg|_{t=t_0} = \{\dot{\sigma}^1(t_0), ..., \dot{\sigma}^n(t_0)\}$$

Un vettore tangente ad una curva in un punto $\sigma(t_0)$ in $\mathbb{R}^n$ si rappresenta come un vettore che esce dalla curva stessa, applicato nel punto. Per ogni vettore di $\mathbb{R}^n$, possiamo sempre trovare una curva che ha tale vettore come vettore tangente; pertanto l'idea per trasportare il concetto di vettore tangente da $\mathbb{R}^n$ in ambito intrinseco è la seguente: consideriamo una curva sulla varietà M, ovvero una applicazione $\sigma : \mathbb{R} \to M$, e un punto p della varietà tale che per un qualche $t_0 \in \mathbb{R}$ risulti $\sigma(t_0) = p$. Se consideriamo una carta locale ϕ definita su un intorno U di p, l'applicazione $\phi \circ \sigma$ va da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^n$.

Consideriamo adesso due curve σ_1 e σ_2 sulla varietà M, tali che per t_0 $\sigma_1(t_0) = \sigma_2(t_0) = p \in M$. Sia ϕ la solita carta locale, consideriamo allora le applicazioni $\phi \circ \sigma_1$ e $\phi \circ \sigma_2$.

Definizione 0.2. Le due curve σ_1 e σ_2 hanno un contatto del prim'ordine se risulta:

$$\lim_{t \to t_0} \frac{(\phi \circ \sigma_1)(t) - (\phi \circ \sigma_2)(t)}{t - t_0}$$

Quando questo avviene, per $t \to t_0$ le due curve si avvicinano in modo più che lineare. Per via della differenziabilità dei cambi di carta, questa definizione è indipendente dalla carta scelta, infatti se ψ è una nuova carta locale:

$$\psi \circ \sigma = (\psi \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \sigma)$$

Noi sappiamo che

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\phi \circ \sigma_1(t) - \phi \circ \sigma_2(t_0)}{t - t_0}$$

cioè per $t \to t_0$ le componenti di $x_1(t) \equiv \phi \circ \sigma_1(t)$ differiscono da quelle di $x_2(t_0) \equiv \phi \circ \sigma_1(t)$ per roba di ordine $(t - t_0)^{1+\epsilon}$, $\epsilon > 0$.

Allora studiamo

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\phi \circ \sigma_1(t) - \phi \circ \sigma_2(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{\phi \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ \sigma_1(t) - \phi \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ \sigma_2(t_0)}{t - t_0} =$$

$$= \lim_{t \to t_0} \frac{\phi \circ \psi^{-1}(x_1(t)) - \phi \circ \psi^{-1}(x_2(t_0))}{t - t_0} =$$

Ma $\phi \circ \psi^{-1} \equiv y$ è un diffeomorfismo C^∞, e poichè per $t \to t_0$ $x_1(t) \to x_2(t_0)$ possiamo scrivere

$$\lim_{t \to t_0} \frac{y(x_1(t)) - y(x_2(t_0))}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{y(x_2(t_0) + (x_1(t) - x_2(t_0))) - y(x_2(t_0))}{t - t_0} \simeq$$

$$\simeq \lim_{t\to t_0} \frac{y(x_2(t_0)) + \frac{\partial y}{\partial x^k}\Big|_{x_1(t)=x_2(t_0)} (x_1(t) - x_2(t_0))^k - y(x_2(t_0))}{t - t_0} =$$

$$= \lim_{t\to t_0} \frac{\frac{\partial y}{\partial x^k}\Big|_{x_1(t)=x_2(t_0)} (x_1(t) - x_2(t_0))^k}{t - t_0} = \frac{\partial y}{\partial x^k}\Bigg|_{x_1(t)=x_2(t_0)} \lim_{t\to t_0} \frac{(x_1(t) - x_2(t_0))^k}{t - t_0} = 0$$

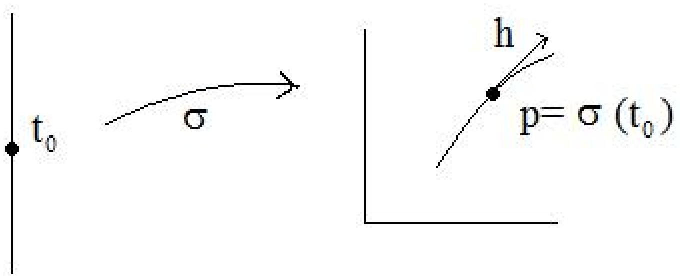
Perchè la jacobiana è continua.

Definiamo dunque un **vettore tangente a** M **in** p come la classe di equivalenza delle curve che hanno un contatto del prim'ordine nel punto p.

Se consideriamo $\mathbb{R}^n$, su di esso abbiamo l'idea della derivata come estrazione della parte lineare dell'incremento di una funzione. Sia F una funzione da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$, siano $p, h \in \mathbb{R}^n$, con $\|h\| \to 0$, allora risulterà

$$F(p+h) - F(p) = Lh + o(\|h\|^2)$$

dove $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è una applicazione lineare. L è la derivata di F calcolata nel punto p, e in componenti la matrice che la rappresenta è la matrice jacobiana valutata in p. In questo modo h diventa una direzione, ed L applicato ad h è una derivata direzionale. In $\mathbb{R}^n$ possiamo procedere in questo modo: prendiamo h ed una curva che per $t_0 \in \mathbb{R}$ passa per p e abbia per vettore tangente h.



Risulterà allora $\dot{\sigma}(t_0) = h$, e la derivata lungo σ valutata in p sarà equivalente alla derivata nella direzione di h:

$$\left(\dot{\sigma}^1(t_0)\frac{\partial}{\partial x^1} + ... + \dot{\sigma}^n(t_0)\frac{\partial}{\partial x^n}\right) F\Bigg|_p = \left(h^1\frac{\partial}{\partial x^1} + ... + h^n\frac{\partial}{\partial x^n}\right) F\Bigg|_p$$

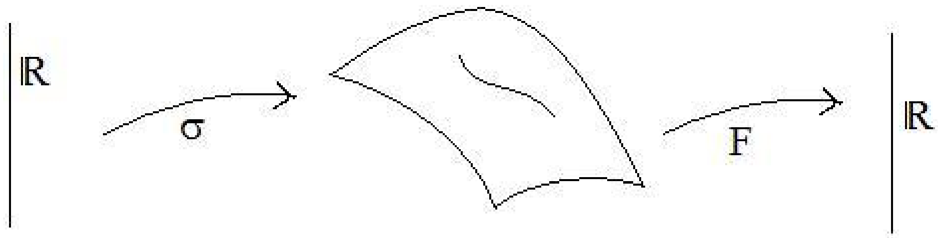
É questa l'idea che porteremo sulla varietà differenziabile, perchè non dipende dallo spazio d'immersione. Abbiamo definito un vettore tangente ad una varietà come una classe di equivalenza di curve su M, dunque scegliamone una, σ:

Considero una funzione F dalla curva in $\mathbb{R}$, risulterà quindi:

$$F \circ \sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Le applicazioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ si possono derivare, dunque calcoliamo

$$\frac{d}{dt}(F \circ \sigma)\Bigg|_{t_0}$$



e la chiameremo **derivata lungo la curva** σ. Il nostro intento è identificarla con la derivata lungo la direzione tangente alla curva, ma non possiamo scrivere $\sigma^1\frac{\partial}{\partial x^1}+...+\sigma^n\frac{\partial}{\partial x^n}$ perchè non abbiamo ancora scelto un sistema di coordinate. Dobbiamo assicurarci che la derivata mantenga la classe di equivalenza, e poichè questa condizione è verificata dai cambi di carta possiamo vedere cosa succede in coordinate locali.

Concettualmente siamo passati da una situazione in cui i vettori sono visti come coppie di punti in $\mathbb{R}^n$, ad una in cui il vettori sono diventati degli operatori differenziali. Siano ϕ e ψ due carte coordinate definite su due intorni U e V del punto p. A questo punto possiamo scrivere:

$$\frac{d}{dt}(F\circ\sigma)\Big|_{t_0}=\frac{d}{dt}(F\circ\phi^{-1}\circ\phi\circ\sigma)\Big|_{t_0}=\frac{\partial}{\partial x^i}(F\circ\phi^{-1})\,\frac{d\sigma^i}{dt}\Big|_{t_0}$$

A questo punto tutto si riduce a verificare se due curve con un contatto del prim'ordine hanno stessa derivata, ma la risposta come vedremo adesso è affermativa. Siano σ_1 e σ_2 due curve con un contatto del prim'ordine in $p=\sigma_1(t_0)=\sigma_2(t_0)$; risulta:

$$\frac{d}{dt}\left(F\circ\sigma_1(t)-F\circ\sigma_2(t)\right)\Big|=\lim_{t\to t_0}\frac{F\circ\sigma_1(t)-F\circ\sigma_2(t)-F\circ\sigma_1(t_0)+F\circ\sigma_2(t_0)}{t-t_0}=\lim_{t\to t_0}\frac{F\circ\sigma_1(t)-F\circ\sigma_2(t)}{t-t_0}=$$

$$=(F\circ\phi^{-1})\circ\underbrace{\lim_{t\to t_0}\frac{\phi\circ\sigma_1(t)-\phi\circ\sigma_2(t)}{t-t_0}}_{\to 0}=0$$

Allora il vettore tangente è una derivata lungo una direzione.

Avendo infiniti vettori tangenti alla varietà in un punto, possiamo pernsare di organizzarli in forma geometrica. Pensiamo ad esempio alla sfera immersa in $\mathbb{R}^3$ e ad un punto su di essa, possiamo associare al punto un piano tangente che contiene tutti i vettori tangenti alla sfera in quel punto. Se consideriamo adesso una calotta sferica, e pensiamo di effettuare l'operazione per ogni punto, avremo tanti $\mathbb{R}^2$ associato ad ogni $p\in S^2$ (2 è il numero di direzioni indipendenti che è possibile individuare sulla superficie della sfera). Se U è un aperto di S^2, $x\in U$, e v è un vettore appartenente al piano tangente a S^2 in x, per identificare v sarà necessario dare due coordinate per il punto x, e altre due coordinate per identificare il vettore sul piano, per un totale di quattro coordinate.

In generale, sia M una varietà differenziabile e consideriamo un punto $p\in M$. Chiameremo T_pM l'insieme di tutti i vettori tangenti a o in M. Ad esempio, se prendiamo l'unione disgiunta $\forall p\in U\subset S^2$ dei T_pS^2, questa è omeomorfa a $U\times\mathbb{R}^2$, ma si dimostra che

$$\coprod_{p\in S^2}\{p,T_pS^2\}\neq S^2\times\mathbb{R}^2$$

Se per una varietà differenziabile M consideriamo per ogni $p \in M$ l'unione disgiunta degli spazi tangenti T_pM, otteniamo quello che si chiama **fibrato tangente a** M, e si indica con TM. La condizione di banalità locale può essere rivista come la richiesta che $\forall U \subset M$, $TM|_U \simeq U \times T$, dove T è la fibra tipo, o modello comune ad ogni punto di spazio tangente. Mostreremo a breve alcune proprietà degli spazi tangenti: gli spazi tangenti a varietà differenziabili finito-dimensionali sono tutti isomorfi a $\mathbb{R}^n$, e la dimensione (come spazio lineare) di T_pM, per ogni p, è uguale alla dimensione (topologica) di M. Inoltre, è possibile pensare a dei fibrati in cui le fibre sono spazi vettoriali, ma non necessariamente corrispondono a spazi tangenti; in questo caso si parla di **fibrati vettoriali**.

Teorema 0.0.1. *Consideriamo degli spazi lineari $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^p$, e due applicazioni $G : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ e $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, allora:*

1. *Se calcoliamo la jacobiana $J(G \circ F)$, questa è data da $J(G)J(F)$ (regola della derivazione a catena);*
2. *se consideriamo $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, e calcoliamo $J(F)|_p$ e $\det(J(F))|_p$, ci troviamo davanti a due possibilità: $\det(J(F))|_p$ può essere zero oppure diverso da zero.*

   *Se è zero, dal punto di vista delle derivate, significa che qualche derivata si annulla; in particolare, se $\det(J(F))|_p = 0$ F **non** è un isomorfismo di $T_p\mathbb{R}^n$ in $T_{F(p)}\mathbb{R}^n$.*

   Viceversa, se $\det(J(F))|_p \neq 0$, allora F è un isomorfismo 1 a 1 di $T_p\mathbb{R}^n$ in $T_{F(p)}\mathbb{R}^n$. In particolare, se F è l'identità in p, $J(F)|_p = 1$

Chi è lo spazio tangente in un punto di $\mathbb{R}^n$? Consideriamo σ curva su $\mathbb{R}^n$ e $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Si ha:

$$\frac{d}{dt}(F \circ \sigma) = \left.\frac{\partial F}{\partial x^i}\right|_{x=p=\sigma(t_0)} \cdot \left.\frac{d\sigma^i}{dt}\right|_{t_0}$$

Vogliamo estrarre il vettore tangente, per questo isoliamo la funzione F:

$$\left[\left.\frac{d\sigma^i}{dt}\right|_{t_0} \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\sigma(t_0)}\right] F$$

Le $\left.\frac{d\sigma^i}{dt}\right|_{t_0}$ sono le componenti del vettore tangente. Diremo allora che il vettore tangente nel punto $p = \sigma(t_0)$ è $\dot{\sigma}(t_0) = \left.\frac{d\sigma^i}{dt}\right|_{t_0} \frac{\partial}{\partial x^i}|_{\sigma(t_0)}$.

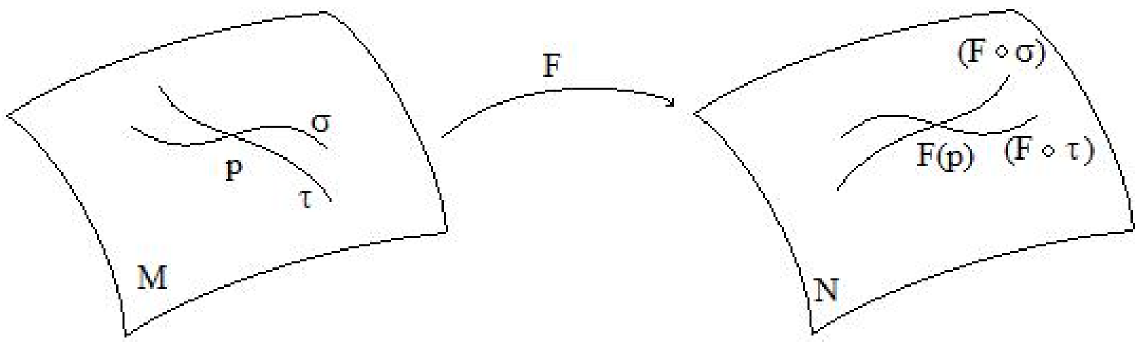
Se invece di σ consideriamo una curva τ la forma del vettore tangente è la solita:

$$\dot{\tau}(t_0) = \left.\frac{d\tau^i}{dt}\right|_{t_0} \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\tau(t_0)}$$

Allora le $\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$ si possono considerare come una base di $T_p\mathbb{R}^n$, e i coefficienti individuano un particolare vettore tangente. Dunque concludiamo che $T_p\mathbb{R}^n$ è uno spazio vettoriale, in cui la struttura lineare è data dalle derivate (la somma di derivate è ancora una derivata, così come il prodotto per uno scalare di una derivata). Inoltre, siccome abbiamo trovato una base, $T_p\mathbb{R}^n$ ha dimensione n, e la dimensione non cambia al variare di $p \in \mathbb{R}^n$. Possiamo quindi definire il fibrato tangente a $\mathbb{R}^n$:

$$T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

Consideriamo adesso una applicazione differenziabile (nel senso che abbiamo specificato) F da una varietà M ad una varietà N. Siano σ e τ due curve su M con un contatto del prim'ordine in $\sigma(t_0) = \tau(t_0)$. Se denotiamo con $[\sigma]_{t_0}$ la classe di equivalenza di σ in t_0, cioè il vettore tangente a M in $\sigma(t_0)$, e con $[\tau]_{t_0}$ l'equivalente per τ, avremo che $[\sigma]_{t_0} = [\tau]_{t_0}$. Possiamo considerare le applicazioni $F \circ \sigma, F \circ \tau : \mathbb{R} \to N$, e poichè rappresentano curve su N, potremmo chiederci se anch'esse appartengano alla stessa classe di equivalenza per $t = t_0$, fintanto che σ e τ hanno un contatto del prim'ordine.



Proposizione 0.0.2. *Se* $[\sigma]_{t_0} = [\tau]_{t_0}$*, allora* $[F \circ \sigma]_{t_0} = [F \circ \tau]_{t_0}$*.*

Dimostrazione. In carte locali la dimostrazione è banale (derivazioni a catena). □

Definiremo allora "derivata dell'applicazione differenziabile $F : M \to N$" nel punto $p \in M$ l'applicazione da T_pM in $T_{F(p)}N$ definita come sopra:

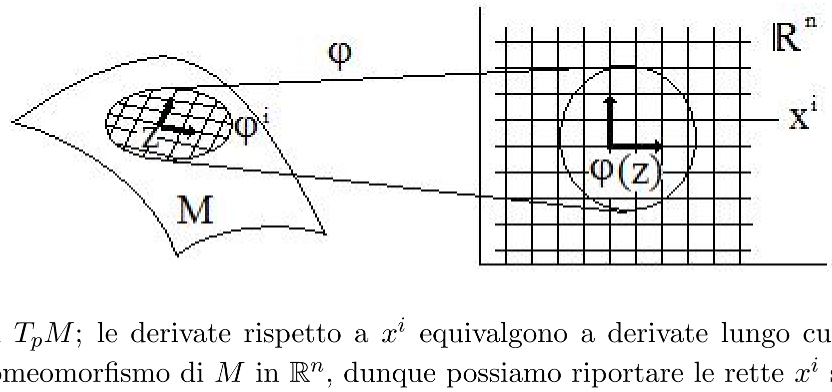
$$dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$$

In coordinate locali

$$\psi \circ F \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

$$d(\psi \circ F \circ \phi^{-1})_{\phi(p)} = J_{\phi(p)}(\psi \circ F \circ \phi^{-1})$$

Dimostriamo adesso che $\forall p \in M$, i T_pM sono tutti isomorfi tra loro:



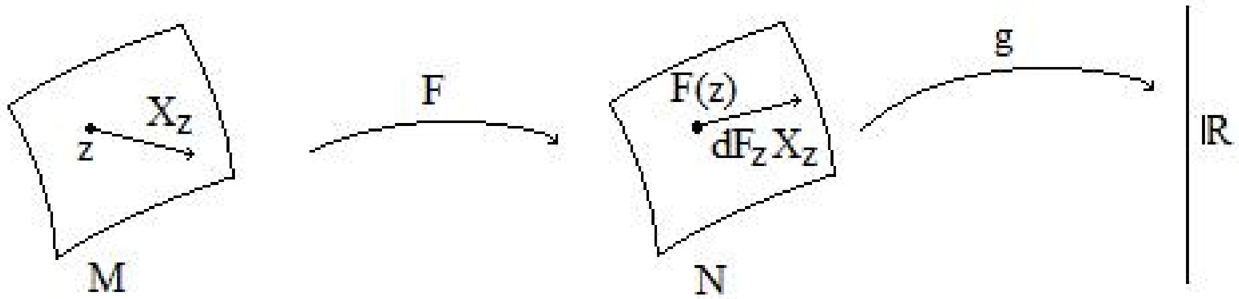
Sia $\frac{\partial}{\partial x^i}$ una base di T_pM; le derivate rispetto a x^i equivalgono a derivate lungo curve parallele agli assi coordinati. ϕ è un omeomorfismo di M in $\mathbb{R}^n$, dunque possiamo riportare le rette x^i sulla varietà, e poichè i $\frac{\partial}{\partial x^i}$ sono indipendenti ognuno di essi corrisponderà ad una classe di equivalenza su M. Non ci può essere una degenerazione nel rango dei vettori indipendenti, per il teorema della funzione implicita. Sulla varietà quindi, le derivate rispetto a x^i diventano derivate rispetto a ϕ^i. Chiamiamo dF_p l'applicazione da T_pM in $T_{F(p)}N$ e se $v \in T_pM$ indichiamo con $dF_p(v)$ la sua immagine attraverso dF_p. L'applicazione che porta $\mathbb{R}^n$ in M, e che quindi dobbiamo derivare, è ϕ^{-1}:

$$\frac{\partial}{\partial \phi^i} = d\phi^{-1}_{\phi(z)} \left(\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{\phi(z)} \right)$$

pertanto risulta che $\left\{ \frac{\partial}{\partial \phi^i} \right\}_{i=1,\dots,n}$ è una base di T_zM (n-dimensionale).

Siano M ed N due varietà differenziabili, $g : N \to \mathbb{R}$, $g \in C^\infty(N)$, dove $C^\infty(N)$ è l'insieme delle funzioni differenziabili $N \to \mathbb{R}$. Sia F una applicazione da M in N, e $X_z \in T_zM$. Per definire $dF_z : T_zM \to T_{F(z)}M$, il differenziale di F in z, è sufficiente dire come agisce sulle funzioni $g : N \to \mathbb{R}$:

$$(dF_z X_z)g = X_z(g \circ F)$$



In coordinate locali questo significa, scelta ϕ carta locale su un intorno di z:

$$X_z(g \circ F) = X^i(\phi(z)) \left. \frac{\partial}{\partial x^i} (g \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ F \circ \phi^{-1}) \right|_{\phi(z)} = X^i(\phi(z)) \left. \frac{\partial (g \circ \psi^{-1})}{\partial y^k} \frac{\partial (\psi \circ F \circ \phi^{-1})^k}{\partial x^i} \right|_{\phi(z)}$$

dove x^i e y^k sono rispettivamente sistemi di coordinate $\mathbb{R}^m$ e su $\mathbb{R}^n$.

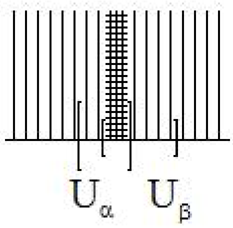
Fibrati vettoriali

Introduciamo ora la nozione di **fibrato vettoriale** (*vedi **Hatcher - Vector Bundles***). Un fibrato vettoriale aggiunge al fibrato la nozione di proprietà vettoriale. Un fibrato è vettoriale se la fibra tipo F è uno spazio vettoriale.

Anche sui fibrati è possibile definire dei cambi di carta, consideriamo infatti due aperti $U_\alpha, U_\beta \in B$, tali che $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$.

Poichè la condizione di banalità locale impone che

$$\pi^{-1}(U_\alpha) \simeq U_\alpha \times F$$



possiamo leggere gli isomorfismi:

$$\Phi : U_\alpha \times F \to \pi^{-1}(U_\alpha)$$

e

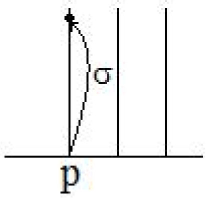
$$\Psi : U_\beta \times F \to \pi^{-1}(U_\beta)$$

come ″carte″ del fibrato. Consideriamo allora

$$\Phi^{-1} \circ \Psi : U_\alpha \cap U_\beta \times F \to U_\alpha \cap U_\beta \times F$$

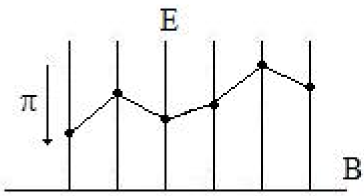
Essendo una applicazione tra fibrati, deve mandare fibre in fibre, e deve essere lineare.

Con queste definizioni, possiamo andare a definire cos'è un **campo**: consideriamo una applicazione (differenziabile) che associa ad ogni punto della varietà di base un punto dello spazio totale:



Chiameremo σ **sezione** del fibrato, e ci accorgiamo subito che manca ancora una nozione fondamentale: ogni punto deve venire mappato nella fibra che ad esso corrisponde, aggiungiamo quindi la richiesta che

$$\pi \circ \sigma = Id : B \to B$$



Definiamo allora un **campo vettoriale** come una sezione del fibrato vettoriale, e un **campo tangente** come una sezione del fibrato tangente. Sia adesso $p \in M$, e $U \subset M$ intorno di p sufficientemente piccolo in modo che un vettore tangente si possa scrivere come

$$\sum_{i=1}^{n} v^i \left. \frac{\partial}{\partial \phi^i} \right|_p$$

Il vettore tangente si estende a un campo definito sull'intorno U in questa maniera:

$$X = \sum_{i=1}^{n} v^i \frac{\partial}{\partial \phi^i}$$

dove le v^i stavolta sono funzioni (differenziabili).

Che effetto ha il campo X applicato ad una funzione $f \in C^\infty(M)$? Punto per punto, Xf va in un numero, dunque su U avremo delle funzioni. Tali funzioni sono derivate di funzioni C^∞, quindi saranno C^∞ a loro volta. In astratto, un campo vettoriale è una **derivazione** su $C^\infty(M)$, ovvero una funzione $C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ che ha le seguenti proprietà:

$$X(\alpha f + \beta g) = \alpha X(f) + \beta X(g) \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}) \quad (\mathbb{R}\text{-linearità})$$

$$X(fg) = f(Xg) + (Xf)g \quad (\text{Leibniz})$$

Lunedì 3 novembre

Riassunto: Abbiamo definito le varietà differenziabili, ovvero ambienti dove è possibile fare il calcolo differenziale. Le varietà differenziabili hanno associato un atlante massimale, che è caratterizzato dai cambi di carta:

$$\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$$

Si passa da una carta all'altra in questo modo:

$$\phi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$$

$$\Phi_{\beta\alpha} = \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

e richiediamo che $\Phi_{\alpha\beta}$ sia differenziabile. Inoltre le $\Phi_{\gamma\delta}$, con le opportune restrizioni ai domini, soddisfano

$$\Phi_{\alpha\beta}\Phi_{\beta\gamma} = \Phi_{\alpha\gamma}$$

detta **condizione di cociclo**.

Le funzioni differenziabili sulla varietà sono definite mediante le carte locali. Sia $F : M \to \mathbb{R}$, allora F è differenziabile se la funzione

$$F \circ \phi_\alpha^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

lo è. Si vede subito che la definizione è indipendente dalla carta scelta, per la richiesta di differenziabilità dei cambi di carta.

Consideriamo anche applicazioni tra due varietà:

$$\Phi : M^m \to N^n$$

$$(U_\alpha, \phi_\alpha) \to (V_\beta, \psi\beta)$$

Allora Φ è differenziabile se $\psi_\beta \circ \Phi \circ \phi_\alpha^{-1} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ lo è.

Introduciamo poi la nozione di tangenza, o di contatto del prim'ordine. Prendiamo due curve:

$$\sigma_1, \sigma_2 : \mathbb{R} \to M$$

tali che $\sigma_1(t_0) = \sigma_2(t_0) = p \in M$. Se ϕ è una carta intorno a p, diciamo che le due curve hanno un contatto del prim'ordine se

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\phi \circ \sigma_1(t) - \phi \circ \sigma_2(t_0)}{t - t_0}$$

Per definizione, chiameremo **vettore tangente a M in p** la classe di equivalenza $[\sigma_1]_p$ delle curve con un contatto del prim'ordine con σ_1 in p.

Chiameremo inoltre spazio tangente a M in p l'insieme dei vettori tangenti in p. Se σ è una curva, e $F : M \to \mathbb{R}$, possiamo associare alla nozione geometrica un qualcosa di algebrico, un operatore differenziale:

$$F \circ \sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$\left[\frac{d}{dt}\right]_\sigma F = \frac{d}{dt} \left[F \circ \sigma\right]|_{t=t_0}$$

Questa derivazione è associata in maniera biunivoca ad una classe di equivalenza, infatti si verifica che

$$\frac{d}{dt}(F \circ \sigma_1)\bigg|_{t=t_0} = \frac{d}{dt}(F \circ \sigma_2)\bigg|_{t=t_0}$$

se e solo se

$$[\sigma_1] = [\sigma_2]$$

Lo spazio tangente quindi è lo spazio delle derivate in ogni direzioni, e poichè le derivate sono operatori lineari, lo spazio tangente è anche uno spazio vettoriale.

Per vedere ancora più esplicitamente la struttura di spazio vettoriale, dobbiamo trovare il modo di definirne una base. Chiameremo T_pM lo spazio tangente a M in p. Cominciamo a definire, se abbiamo due varietà M ed N, una applicazione

$$F : M \to N$$

$$p \in M \quad [\sigma]_p \in T_pM$$

É possibile trovare in maniera naturale una applicazione tra T_pM e $T_{F(p)}N$: sia σ un rappresentante della classe di equivalenza $[\sigma]_p$, tale che $\sigma_(t_0) = p$, allora

$$\sigma : \mathbb{R} \to M$$

Componendo le due funzioni

$$F \circ \sigma : \mathbb{R} \to N$$

si ottiene una curva, e quindi un vettore tangente su N:

$$F \circ \sigma \to [F \circ \sigma] \in T_{F(p)}N$$

Definiamo allora l'applicazione naturale

$$dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$$

in modo che

$$F_p[\sigma_p] = [F \circ \sigma]_{F(p)}$$

Ad esempio, consideriamo

$$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

$$p \in \mathbb{R}^n \quad F(p) \in \mathbb{R}^m$$

$$x^i \text{ componenti del vettore in } \mathbb{R}^n$$

$$y^j \text{ componenti del vettore in } \mathbb{R}^m$$

Allora, dF_p è lineare e risulta

$$(dF_p)_{ij} = \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)_p$$

Ricordiamo il teorema della funzione implicita: se abbiamo una applicazione F da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$, e det $\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right) \neq 0$ (ovvero F è non degenere) allora F è un diffeomorfismo locale, ovvero una trasformazione differenziabile tra i due spazi, con inversa differenziabile.

Consideriamo allora $\phi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$. Su $\mathbb{R}^n$ abbiamo le curve coordinate

$$\sigma_{i0} = \begin{cases} x^i|_{i \neq i_0} = cost \\ x^{i_0}(t) = t \end{cases}$$

Derivare rispetto al parametro di una di queste curve equivale a derivare rispetto alla direzione coordinata x^{i_0}:

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_{\sigma_{i_0}} = \frac{\partial}{\partial x^{i_0}}$$

Poichè le carte sono applicazioni tra varietà, si può prendere il differenziale dell'inversa e portare sulla varietà le derivate rispetto agli assi coordinati:

$$d\phi_\alpha^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_0}}\right) = \frac{\partial}{\partial \phi_\alpha^{i_0}}$$

e otteniamo delle derivate sulla varietà, fatte nella direzione delle retroimmagini di $[\sigma_{i_0}]$. Allora abbiamo trovato una base poichè

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_{[\sigma]} = \left(\frac{d\sigma^i}{dt}\right)_{t_0} \frac{\partial}{\partial \phi_\alpha^i}\bigg|_p$$

Introduciamo adesso la struttura di fibrato: si vuole formalizzare il fatto che il vettore tangente sta in un determinato punto della varietà (vettore applicato), dunque per determinarlo completamente dobbiamo specificare sia p che T_pM. Il fibrato è una proiezione, ovvero una applicazione surgettiva da uno spazio totale E in una base B, cui richiediamo una condizione di regolarità (o banalità locale): se $U \in B$ è un aperto, allora

$$\pi^{-1}(U) \simeq U \times F$$

dove F è la fibra tipo. Specializziamo questa nozione a quella di fibrato vettoriale: se $\{x\} \in B$, allora $\pi^{-1}\{x\} = F_x$, ovvero l'insieme di tutti i punti che hanno come proiezione x, è uno spazio vettoriale.

Volendo confrontare dei fibrati, dobbiamo scegliere applicazioni tra di essi che non ne distruggano la struttura, pertanto se abbiamo due fibrati 1 e 2, e due applicazioni $F : E_1 \to E_2$ e $f : B_1 \to B_2$, richiediamo che $f \circ \pi_1 = \pi_2 \circ F$ (nozione di diagramma commutativo), ovvero se $B_1 \ni x_1 \mapsto x_2 \in B_2$ mediante f, qualsiasi punto della fibra di E_1 corrispondente a x_1 viene portato da F nella fibra corrispondente a x_2. Se siamo su un fibrato tangente, richiederemo che F sia una applicazione lineare, in modo da non distruggere la struttura di spazio lineare in arrivo.

Dai vettori tangenti passiamo a definire i campi vettoriali: un campo vettoriale è l'associazione di un vettore a ciascun punto della varietà, ovvero un'applicazione $\sigma : B \to E$ alla quale richiediamo di soddisfare la condizione

$$\pi \circ \sigma = I_B$$

L'applicazione σ viene detta **sezione del fibrato**, e nel nostro caso sarà un'applicazione differenziabile.

Se $\pi : E \to B$ è un fibrato vettoriale, allora una sezione $\sigma : B \to E$ è un *campo vettoriale*. Per il fibrato tangente a una varietà M, ovvero

$$TM = \sqcup_{p \in M} T_p M$$

una sezione $\sigma : M \to TM$ è un *campo tangente*. Ad esempio, se prendiamo $\mathbb{R}^3$ e consideriamo il fibrato tangene corrispondente, questo è

$$T\mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \text{ (fibrato banale)}$$

Curve integrali

Cerchiamo adesso le curve integrali dei campi, ovvero quelle curve definite su M con la proprietà che il vettore tangente alla curva coincide con un campo vettoriale dato, punto per punto. L'insieme delle curve integrali viene detto **flusso**.

Sia X un campo vettoriale, ovvero $X \in Sec(TM)$ oppure $X \in \mathfrak{X}(M)$. Se $x \in M$, $X_z \equiv X(z) \in T_z M$. Il campo X_z può essere espresso mediante come combinazione lineare di una certa base $\left.\frac{\partial}{\partial \phi^i}\right|_z$ derivata da una carta locale

$$X_z = a^i(z) \left.\frac{\partial}{\partial \phi^i}\right|_z$$

Localmente, in un intorno di z, è possibile scrivere

$$X = a^i \frac{\partial}{\partial \phi^i}$$

dove $\frac{\partial}{\partial \phi^i} \in (X)(M)$ è la solita base locale ma stavolta gli a^i non sono più numeri come nel caso puntuale ma funzioni $C^\infty(M)$. Poichè i coefficienti della base sono funzioni, e le funzioni non sono in generale invertibili, si dice che i campi sono un **modulo** su $C^\infty(M)$.

Trovare una curva integrale significa trovare una curva tale che il suo vettore tangente in t_0 deve essere uguale al campo definito nello stesso punto:

$$\left[\frac{d}{dt}\right]_{\sigma(t_0)} = X_{\sigma_(t_0)} = a^i(\sigma(t_0)) \frac{\partial}{\partial \phi^i}$$

ma sappiamo che

$$\left[\frac{d}{dt}\right]_{\sigma(t_0)} = \left(\frac{d\sigma^i}{dt}\right)_{t_0} \frac{\partial}{\partial \phi^i}$$

dunque deve essere

$$\left(\frac{d\sigma^i}{dt}\right)_{t_0}\frac{\partial}{\partial\phi^i} = a^i(\sigma(t_0))\frac{\partial}{\partial\phi^i}$$
$$\Rightarrow \left(\frac{d\sigma^i}{dt}\right)_{t_0} = a^i(\sigma(t_0))$$

e quindi, per t aribitrario

$$\frac{d\sigma^i}{dt} = a^i(\sigma(t)) \equiv a^i(\sigma^1(t), ..., \sigma^n(t)) \quad (*)$$

Il risultato precedente è un sistema di equazioni differenziali, non lineare. Se non consideriamo punti singolari, ovvero punti in cui tutte le componenti del campo si annullano, esiste un teorema di esistenza e unicità:

Sia M una varietà, e $X \in \mathfrak{X}(M)$. Il teorema di unicità dice che esistono un intervallo $I = (-\epsilon, \epsilon)$, un intorno U_z di z, e una funzione $\Phi_X : I \times U_{z_0} \to M$ detta **flusso del campo vettoriale** X, tale che:

1. Partendo da qualunque punto dell'intorno e seguendo la traiettoria, $\Phi_z(t, \bar{z})$ è soluzione di $(*)$ con condizione iniziale $\Phi(0, \bar{z}) = \bar{z}$. Indicheremo con $\Phi_{X,\bar{z}}$ la funzione Φ a cui abbiamo bloccato il punto sulla varietà.

2. Se invece di fissare il punto fissiamo il tempo, consideriamo tutti i punti nell'intorno U_{z_0} al tempo iniziale e seguiamo le loro curve integrali fino ad un certo tempo $\bar{t}$. Indicheremo la funzione Φ col tempo bloccato come $\Phi_{X,\bar{t}}$, e risulta che

$$\Phi_{X,\bar{t}} : Uz_0 \to M$$

è un diffeomorfismo. Per quanto riguarda le proprietà di unicità, si ha che laddove tutto è definito:

$$\Phi_{X,t} \circ \Phi_{X,s} = \Phi_{X,t+s}$$

Inoltre, risulta

$$\Phi_{X,0} = Id \quad \Phi_{X,t} \circ \Phi_{X,-t} = \Phi_{X,0} = Id$$

Mediante il flusso è possibile derivare le funzioni.

Sia X un campo vettoriale, e Φ_X il suo flusso corrispondente. Sia $F \in C^\infty(M)$. Scriveremo la derivata di F come

$$XF = (a^i\frac{\partial}{\partial\phi^i})F = a^i\frac{\partial F}{\partial\phi^i} = \frac{d}{dt}(F \circ \Phi_X)\bigg|_{t=0}$$

dove le $\frac{\partial}{\partial\phi^i}$ sono le derivate che provengono dalle carte locali.

Giovedi 6 novembre

Ricordiamo che un vettore tangente in un punto può essere associato univocamente alla derivata rispetto al parametro di un rappresentante della classe di equivalenza corrispondente al vettore stesso:

$$X_z = \left(\frac{d}{dt}\right)_{\sigma(t_0)}$$

Se abbiamo una applicazione differenziabile da una varietà M in una varietà N, è possibile definire in maniera canonica il differenziale di tale funzione, che porta vettori tangenti su M in vettori tangenti su N, rispettivamente nei punti z e $F(z)$:

$$dF_z X_z = \left(\frac{d}{dt}\right)_{F\circ\sigma(t_0)}$$

Inoltre si verifica che se G è un'applicazione differenziabile da N in una terza varietà V,

$$d(G \circ F)_z = dG_{F(z)} \circ dF_z$$

Per visualizzare meglio queste definizioni, conviene vederle applicate ad una funzione $g : N \to \mathbb{R}$:

$$[dF_z(X_z)]g = X_z(g \circ F)$$

In generale, si può anche scrivere:

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_{\sigma(t_0)} = \dot{\sigma}^i(t_0)\frac{\partial}{\partial x^i}$$

dunque nel caso del vettore tangente su N avremo

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_{(F\circ\sigma)(t_0)} = (F \dot{\circ} \sigma)^i(t_0)\frac{\partial}{\partial y^i} = \frac{\partial F^i}{x^j}\dot{\sigma}^j(t_0)\frac{\partial}{\partial y^i} =$$

Identifichiamo adesso l'applicazione F con il cambio di coordinate $y = y(x^1, ..., x^n)$:

$$= \frac{\partial y^i}{x^j}\dot{\sigma}^j(t_0)\frac{\partial}{\partial y^i} = \dot{\sigma}^j(t_0)\frac{\partial}{\partial x^j} = X_z(g \circ F)$$

$$\Rightarrow [dF_z(X_z)]g = X_z(g \circ F)$$

Integrando l'equazione differenziale

$$\frac{d\dot{\sigma}^i}{dt} = v^i(\sigma^1, ..., \sigma^n)$$

$$\sigma(t_0) = z$$

abbiamo quindi definito il flusso di un campo vettoriale X:

$$\Phi : I \times M \to M$$

e abbiamo visto come fissando il tempo si ottenga un diffeomorfismo locale dalla varietà in se stessa:

$$\Phi_t : M \to M$$

Viceversa, fissando un punto $z \in M$, $\Phi_t(z)$ al variare di t rappresenta una curva integrale del campo vettoriale passante per z, e unica per il teorema di esistenza e unicità delle equazioni differenziali. Φ_t ha le proprietà

$$\Phi_0 = Id$$

$$\Phi_t \circ \Phi_s = \Phi_{t+s} \quad \text{(proprietà di gruppo a un parametro, legata all'unicità)}$$

Il problema è adesso derivare dei campi vettoriali, lungo le curve integrali di altri campi. In linea di principio non ci sono problemi, poichè abbiamo il diffeomorfismo Φ che trasporta punti della varietà in altri punti della varietà, quindi il suo differenziale $d\Phi$ porterà spazi tangenti in spazi tangenti. Per le funzioni potevamo scrivere il rapporto incrementale

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(\Phi_{t_0}z) - f(\Phi_{t_0-h}z)}{h} = X_{\Phi_{t_0}z} f$$

mentre per i campi direttamente non è possibile procedere nello stesso modo perchè non è definita la differenza tra vettori definiti su spazi tangenti differenti. Se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, e Φ è il flusso di X, supponiamo di voler spostare il campo Y usando il differenziale del flusso. Abbiamo che $d\Phi_t|_{\Phi_{-t}z} : T_{\Phi_{-t}z}M \to T_z M$, in generale

$$d\Phi_s Y_{\Phi_{-t}z} \in T_{\Phi_{s-t}z}M \equiv T_{\Phi_s(\Phi_{-t}z)}$$

Risulta quindi $d\Phi_t T_{\Phi_{-t}} M \subseteq T_z M$, ma essendo $d\Phi$ un diffeomorfismo locale è anche bigettiva quindi $d\Phi_t T_{\Phi_{-t}} M = T_z M$. Possiamo quindi scrivere il seguente limite

$$\lim_{t\to 0} \frac{Y_z - d\phi_t|_{\Phi_{-t}z} Y_{\phi_{-t}z}}{t}$$

e per calcolarlo prendiamo lo sviluppo di Taylor al prim'ordine, pensato applicato ad una funzione f:

$$d\Phi_t|_{\Phi_{-t}z} Y_{\Phi_{-t}z} f \simeq d\Phi_0|_{\Phi_0 z} Y_{\phi_0 z} f + t\frac{d}{dt}\left[d\Phi_t|_{\Phi_{-t}z} Y_{\Phi_{-t}z} f\right]_{t=0} = Y_z + t\frac{d}{dt}\left[Y_{\Phi_{-t}(z)}(f\circ\Phi_t) f\right]_{t=0} =$$

$$= Y_z + t\frac{d}{dt}\left(Y_{\Phi_0 z}(f\circ\Phi_t)\right)\big|_{t=0} + t\frac{d}{dt}\left(Y_{\Phi_{-t}z}(f\circ\Phi_0)\right)\big|_{t=0}$$

Ma la $\frac{d}{dt}\left(f\circ\Phi_t\right)|_{t=0}$ è la derivata della f lungo il flusso del campo X:

$$tY_z \frac{d}{dt}\left(f\circ\Phi_t\right)|_{t=0} = tY_z(Xf)$$

mentre

$$t\frac{d}{dt} Y_{\Phi_{-t}z}\left(f\circ\Phi_0\right)|_{t=0} = t\frac{d}{dt}(Y_{\Phi_{-t}z} f)|_{t=0} = t\frac{d}{dt}(Yf)_{\Phi_{-t}z}|_{t=0} = -tX_z(Yf)$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 0} \frac{Y_z - d\phi_t|_{\Phi_{-t}z} Y_{\phi_{-t}z}}{t} \simeq X_z(Y) - Y_z(X) \equiv [X,Y]_z \equiv (L_x Y)_z$$

L'espressione $(L_x Y)_z$ viene detta derivata di Lie del campo Y nella direzione di X, valutata nel punto z, ed è un vettore appartenente allo spazio tangente nel punto z. Vedremo passando in componenti, che questa derivata non ci soddisfa completamente:

$$X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

In un intorno di z_0 si ha

$$X = X^i(z)\frac{\partial}{\partial z^i}$$

$$Y = Y^i(z)\frac{\partial}{\partial z^i}$$

$$(L_x Y)_{z_0} f = X^i(z)\frac{\partial}{\partial z^i}\left(Y^i(z)\frac{\partial}{\partial z^i} f\right)\bigg|_{z=z_0} - Y^i(z)\frac{\partial}{\partial z^i}\left(X^i(z)\frac{\partial}{\partial z^i} f\right)\bigg|_{z=z_0} =$$

$$\left[X^i(z)Y^j(z)\frac{\partial}{\partial z^i}\frac{\partial}{\partial z^j} - Y^i(z)X^j(z)\frac{\partial}{\partial z^i}\frac{\partial}{\partial z^j}\right]_{z_0} f + \left[X^i(z)\frac{\partial Y^j(z)}{\partial z^i}\frac{\partial}{\partial z^j} - Y^i(z)\frac{\partial X^j(z)}{\partial z^i}\frac{\partial}{\partial z^j}\right]_{z_0} f = \left[X^i(z_0)\frac{\partial Y^j(z_0)}{\partial z^i}\frac{\partial}{\partial z^j}\right.$$

Come campo vettoriale, la derivata di Lie rimane una derivazione del prim'ordine e questo ci piace; tuttavia risulta che per conoscere la derivata di Lie di un vettore Y lungo un vettore X in un certo punto z_0, non è sufficiente conoscere il valore di X puntualmente, ma è richiesta anche la conoscenza della sua derivata, quindi la definizione della derivata di Lie non è **puntuale** ma **locale**. Dunque questa derivata non va bene per le applicazioni, dato che esistono infiniti modi di estendere un vettore da un punto ad un intorno.

La derivata di Lie viene detta anche parentesi di Lie, e soddisfa le seguenti proprietà

$$[X,Y] = -[Y,X] \quad \text{(antisimmetria)}$$

$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0 \quad \text{(identità di Jacobi)}$$

Con la derivata di Lie, i campi vettoriali su M sono un'algebra di Lie di dimensione infinita.

Forme differenziali (o 1-forme)

Per introdurre i campi tangenti abbiamo seguito uno schema logico:

1. Abbiamo costruito lo spazio tangente alla varietà M in un punto z, T_zM;
2. abbiamo preso l'unione disgiunta $\bigsqcup_{z\in M} T_zM = TM$, e gli abbiamo dato una struttura di fibrato, costruendo il fibrato tangente;
3. abbiamo trovato le carte appropriate per definire una struttura differenziabile su TM;
4. abbiamo introdotto i campi vettoriali come sezioni del fibrato tangente.

Questa costruzione è modulare e ripetibile, dato che si articola in 4 punti fondamentali: 1) situazione in un punto, 2) estensione a tutta la varietà, 3) struttura (differenziabile nel nostro caso), 4) sezioni. La struttura doi spazio fibrato è comoda per estendere la struttura algebrica che si ha in un punto a tutta la varietà (geometrizzazione). Le carte ϕ permettono di costruire una base (locale) $\frac{\partial}{\partial \phi^i}$ sullo spazio tangente, e inducono una struttura differenziabile sul fibrato.

Se abbiamo uno spazio vettoriale V, ad esso è associato canonicamente il suo duale V^*, in quanto esso richiede soltanto V stesso e il campo $\mathbb{K}$ degli scalari su cui è definito. Il duale V^* è definito come l'insieme delle applicazioni **lineari** da V in $\mathbb{K}$, allora:

1. possiamo prendere un punto $x \in M$, e definire lo spazio tangente T_xM (in questo caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$); a questo punto consideriamo l'insieme

   $$T_x^*M\{\phi : T_xM \to \mathbb{R} : \phi \ lineare\}$$

   ossia il duale dello spazio tangente, che chiameremo **spazio cotangente**, o spazio delle **forme** lineari da T_xM in $\mathbb{R}$. Se α è una forma lineare $\in T_x^*M$, e $X \in T_xM$, esiste un accoppiamento di dualità definito da

   $$\langle \alpha, X\rangle \equiv \alpha(X) \in \mathbb{R}$$

2. Adesso prendiamo l'unione disgiunta
$$\bigsqcup_{x\in M} T_x^*M = T^*M$$
e poichè esisterà sempre una applicazione $q : T^*M \to M$ che associa un vettore cotangente in un punto $x \in M$ a x stesso, T^*M ha la struttura di fibrato, ed è detto **fibrato cotangente**.

3. Così come la struttura differenziabile su T_xM era data dalle carte $\left(\phi, \frac{\partial}{\partial\phi^i}\right)$, cercheremo di costruire analogamente una base duale della base dello spazio tangente. Il fibrato tangente inoltre risultava una varietà differenziabile perchè gli elementi di matrice dello jacobiano delle carte sono derivate di funzioni C^∞, quindi ne mantengono le caratteristiche di derivabilità. Nel seguito identificheremo le coordinate ϕ^i con x^i.

   Se abbiamo $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{x_0}$ base di $T_{x_0}M$, definiamo la base duale di $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ come $\{dx^i\}$, nel modo seguente:
$$\langle dx^i, \frac{\partial}{\partial x^j}\rangle = \delta^i_j$$
   Le $\{dx^i\}$ si dicono base delle 1-forme su $T_{x_0}M$, o più semplicemente base di $T^*_{x_0}M$. Se le $\frac{\partial}{\partial x^i}$ cambiano con lo jacobiano delle carte, dalla definizione data segue che le dx^i cambiano con la matrice inversa J^{-1}, dunque se estendiamo le dx^i da un punto ad un intorno, il fibrato cotangente avrà anch'esso una struttura differenziabile.

4. Per quanto riguarda le sezioni, possiamo definire una applicazione $\alpha : M \to T^M$ tale che la composizione con la proiezione $q : T^*M \to M$ abbia la proprietà
$$q \circ \alpha = Id_M$$
   Se $\alpha_x \in T_x^*M$, e $X_x \in T_xM$, si ha che $\langle \alpha_x, T_x\rangle = \alpha_x(X_x) \in \mathbb{R}$. Estendendo questa relazione ad un intorno del punto X, possiamo definire un accoppiamento di dualità tra 1-forme e campi in questa maniera:
$$\langle \alpha, X\rangle \mapsto C^\infty(M)$$
$$\langle \alpha, X\rangle(x) = \langle \alpha_x, X_x\rangle$$

Il differenziale esterno

Se $\mathfrak{X}(M)$ è il $C^\infty-$modulo localmente libero (cioè ha una base) dei campi vettoriali su M, e $\Omega^1(M)$ è il $C^\infty-$modulo delle 1-forme differenziali su M, possiamo definire un'operazione
$$d : C^\infty(M) \to \Omega^1(M)$$
$$f \mapsto df$$
Un modo per specificare quest'applicazione è calcolare la forma differenziale risultante applicata su un generico campo X, punto per punto:
$$\langle df, X\rangle_x = df(X)_x = X_xf$$

Se sviluppiamo su una base $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ di $\mathfrak{X}(M)$ e su una base $\{dx^i\}$ di $\Omega^1(M)$, abbiamo

$$df = \alpha_j dx^j \quad \alpha_j \in C^\infty(M)$$

$$\langle df, \frac{\partial}{\partial x^i}\rangle = \langle \alpha_j dx^j, \frac{\partial}{\partial x^j}\rangle = \alpha_j \langle dx^j, \frac{\partial}{\partial x^j}\rangle = \alpha_j \delta^i_j = \alpha_j$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x^i} = \alpha^i \Rightarrow df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

dunque il differenziale esterno risulta essere la generalizzazione geometrica del differenziale dell'analisi.

Lunedi 10 novembre

Abbiamo visto che esiste una dualità tra campi vettoriali e 1-forme, ovvero un'applicazione $\langle\, ,\, \rangle : \Omega^1(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$. Per quanto riguarda i campi vettoriali, questi come abbiamo detto sono un modulo localmente libero sulle funzioni $C^\infty(M)$, abbiamo quindi sostituito il corpo degli scalari nel caso dei vettori tangenti, con un anello. Se scriviamo un campo v come $v^j e_j$, e una forma come $\alpha_i \epsilon^i$, con $\langle \epsilon^i, e_j\rangle = \delta^i_j$ per definizione di base duale, allora abbiamo che $\langle \alpha, v\rangle = \alpha_i v^i$, dove α e v sono delle funzioni $\in C^\infty(M)$. Ovviamente, se vogliamo mantenere questa proprietà dobbiamo sempre scegliere insieme alla base locale per i campi $\frac{\partial}{\partial x^i}$ la base duale per le forme dx^i.

Cambi di base

Consideriamo una base e_i, e una nuova base $f_k = A^j_k e_j$ dove A^j_k è una matrice non singolare. Vogliamo definire una nuova base anche sullo spazio delle 1-forme, per cui $\eta^l = B^l_i \epsilon^i$ dove anche B^l_i è una matrice non singolare. Tali scelte di base sono sempre possibili perchè la base è arbitraria. Se vogliamo che le due nuove basi restino comunque duali l'una dell'altra, dobbiamo imporre che

$$\langle \eta^l, f_k\rangle = \delta^l_k$$

$$\langle \eta^l, f_k\rangle = \langle B^l_m \epsilon^m, A^j_k e_j\rangle = B^l_m A^j_k \langle \epsilon^m, e_j\rangle = B^l_j A^j_k$$

$$\Rightarrow B^l_j A^j_k = \delta^l_k \Rightarrow B^l_j A^j_k (A^{-1})^k_m = \delta^l_k (A^{-1})^k_m$$

$$\Rightarrow B^l_m = (A^{-1})^l_m$$

Allora se i vettori si trasformano con la matrice A, le forme si trasformano con A^{-1}. Se trasportiamo l'operazione di cambio di base su tutti i punti della varietà, questa è equivalente ad una trasformazione di gauge: ad esempio in meccanica quantistica, punto per punto di $\mathbb{R}^3$, è definita (a meno di una costante complessa di modulo 1) una funzione d'onda $\psi(x)$, che corrisponde alla sezione del fibrato $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$:

$$\pi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}^3$$

$$\pi(\psi(x))$$

Su ogni fibra abbiamo quindi una ψ, determinata in modulo dalla propria normalizzazione, ma indefinita in fase. Possiamo decidere di passare da una fibra all'altra imponendo una fase costante, il che è equivalente a scegliere una gauge globale. Sulle fasi possiamo agire sommando, o moltiplicando, quindi in qualche modo abbiamo $\mathbb{R}$ visto come gruppo abeliano che agisce su $\mathbb{R}$ spazio di numeri. In tal caso, il gruppo che agisce sulla varietà ha dimensione 1; se invece decidiamo di cambiare la fase punto per punto, abbiamo in ogni punto un $\mathbb{R}$ diverso, e da un gruppo di dimensione 1 passiamo a un gruppo di dimensione infinita.

Torniamo a considerare la derivata di Lie. Avevamo concluso che questa non poteva essere una buona derivata per la fisica, poichè richiede la conoscenza del campo vettoriale nella cui direzione si deriva, non soltanto in un punto ma anche in un intorno del punto. Vorremmo che la derivata di Lie si comportasse come una derivata normale, cioè $L_{fX}Y = fL_XY$, ma quello che succede è diverso:

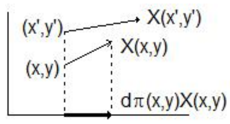
$$L_{fX}Y = [fX, Y] = -[Y, fX] = -L_Y(fX) = -fL_YX - (Yf)X = fL_XY - (Yf)X$$

Siano M ed N varietà differenziabili, e $F : M \to N$. Il differenziale di tale funzione come sappiamo porta punto per punto vettori tangenti a M in vettori tangenti a N. Quello che ci chiediamo è se dato un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$, questo campo venga portato in un campo su N, ovvero:

$$dFX = Y \in \mathfrak{X}(N)$$

Vediamo subito che in generale questo è falso, sia ad esempio $M = \mathbb{R}^2$ e $N = \mathbb{R}$, e $F : \pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, tale che $(x, y) \mapsto x$. π è un'applicazione lineare, dunque anche il suo differenziale è lineare, e coincide con l'applicazione stessa; infatti, se ϕ è un'applicazione lineare qualunque:

$$\phi(x + dx) - \phi(x) = Ldx + o(dx^2) \Rightarrow \phi(dx) = Ldx \Rightarrow \phi = L$$



L'idea iniziare era di mandare campi X su M in campi Y su N, ma o su tutti i punti della fibra $\pi(x, y)$ ha stesso valore, oppure si hanno infiniti valori diversi per ogni fibra, e non si può avere un campo vettoriale sulla varietà N. Viceversa, se la funzione F è biettiva, $dFX = Y$ è un campo sulla varietà di arrivo, e X ed Y si dicono F-correlati.

Osservazione: abbiamo introdotto il differenziale esterno $d : C^\infty(M) \to \Omega^1(M)$, definito in modo che se $X \in \mathfrak{X}(M)$, $F \in C^\infty(M)$, allora $\langle df, X\rangle = Xf$.

Introduciamo adesso il cambio di variabile, o **composizione**, o **pull-back**. Sia $F : M \to N$ e $f : N \to \mathbb{R}$. Possiamo considerare $f \circ F : M \to \mathbb{R}$. Data F, la composizione associa ad ogni funzione $f \in C^\infty(N)$ una funzione $f \circ F \in C^\infty(M)$. Leggiamo quindi il cambio di variabile come una applicazione sugli spazi di funzioni indotta dal passaggio da M ad N. Data F, a questa resta associata una applicazione tra $C^\infty(N)$ e $C^\infty(M)$:

$$F^* : C^\infty(N) \to C^\infty(M)$$

tale che se $f \in c^\infty(N)$, $F^*f = f \circ F \in C^\infty(M)$ e F^* si dice pull-back.

Il pull-back risulta utile in quanto uno dei sistemi per descrivere le varietà consiste nel descrivere il fascio delle funzioni che vi sono sopra definite. Se per due varietà corrispondono le funzioni, anche le varietà corrispondono. Questo tipo di studi è racchiuso nella cosiddetta geometria non commutativa (e vabè).

Si può verificare che se $F : M \to N$ e $G : N \to P$, allora

$$(G \circ F)^* = F^* \circ G^*$$

Esercizio: dimostrare che $d(F^*g) = F^*dg$.

La connessione

Definiamo adesso la connessione du $\mathbb{R}^n$. Se consideriamo $\mathbb{R}^n$, il suo spazio tangente in un punto x sarà $T_x\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$. Supponiamo $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$, avremo $X = a^i\partial_i$, $Y = b^i\partial_j$, $a^i, b^i \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Abbiamo definito $L_XY = [X, Y]$, ma sappiamo che derivando nelle applicazioni l'operatore di derivazione è un altro:

$$(D_XY)_x = (D_{a^i\partial_i}(b^j\partial_j))_x = a^i(x)(\partial_i(b^j(x)))\partial_j$$

dove le $\partial_i(b^j(x))$ sono le derivate delle componenti di Y. Viceversa, risulta che

$$(L_XY)_x = (X_xb^i - Y_xa^i)(\partial_i)_x$$

mentre

$$(D_XY)_x = (X_xb^i)(\partial_i)_x$$

dunque $D_XY \neq L_XY$.

Proprietà della connessione

1. $D_{X+Y} = D_x + D_Y$; infatti se $Z = c^i\partial_i$,

$$(D_{X+Y}Z)_x = ((X + Y)_xc^i)(\partial_i)_x = (X_xc^i + Y_xc^i)(\partial_i)_x = (X_xc^i)(\partial_i)_x + (Y_xc^i)(\partial_i)_x$$

2. $D_{fX}Y = fD_XY$, infatti:

$$D_{fX}Y = ((fX)b^i)\partial_i = f(Xb^i)\partial_i$$

3. $D_X(fY) = (Xf)Y + fD_XY$ (Leibniz)

$$D_X(fY) = X(fb^i)\partial_i = (Xf)b^i\partial_i + f(Xb^i)\partial_i = (Xf)Y + fD_XY$$

Le proprietà 1) e 2) si possono sintetizzare come $C^\infty(M)-$linearità.

Metrica su varietà

Di solito si ha a che fare con spazi in cui è definito un prodotto scalare, ovvero una operazione che permette di moltiplicare tra loro due vettori. Nel caso di spazi vettoriali finito-dimensionali, la metrica corrisponde ad un prodotto interno euclideo. Su una varietà, dobbiamo fornire un prodotto interno spazio vettoriale per spazio vettoriale: dato $x \in M$, e dati due vettori $v, w \in T_xM$, una metrica è una applicazione bilineare simmetrica

$$g_x : T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}$$

tale che

$$\langle v_x, w_x \rangle = g_x(v, w) = g(v, w)_x$$

É chiaro che g può cambiare al variare di $x \in M$. Oltre alla bilinearità, assumiamo anche che $\forall x \in M$ g_x sia non degenere, ovvero non esistano vettori x oltre al vettore nullo, tali che $\langle x, y \rangle = 0$ $\forall y \in M$.

Definizione 0.3. La metrica si dice **riemanniana** (o di Riemann) se $\forall x \in M$, g_x è definito positivo.

In particolare, se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, una volta definita la metrica possiamo definire un accoppiamento bilineare

$$(X, Y) \mapsto \langle X, Y \rangle \in C^\infty(M)$$

$$\langle X, Y \rangle_x = \langle X_x, Y_x \rangle = g_x(X_x, Y_x)$$

Se consideriamo una carta U_α, ϕ_α di M, e la base "naturale" $\partial_i^{(\alpha)}$, abbiamo $g_{ij}^{(\alpha)} = \langle \partial_i^{(\alpha)}, \partial_j^{(\alpha)} \rangle$, e

$$(g_{ij}^{(\alpha)})(x) = \langle \partial_i^{(\alpha)}, \partial_j^{(\alpha)} \rangle_x$$

Su $\mathbb{R}^n$ la metrica naturale è $g_{ij} = \delta_{ij}$.

Consideriamo allora $\mathbb{R}^n$ con la metrica naturale. Riscriviamo le proprietà della derivata:

$$D_{fX+Y} = fD_X + D_Y$$

$$D_X(fY + Z) = (Xf)Y + fD_XY + D_XZ$$

$$D_XY - DY_X - [X, Y] = 0$$

Inoltre, se prendiamo tre campi X, Y, Z e consideriamo la derivata lungo X del prodotto scalare, si può verificare che si ha:

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle D_XY, Z \rangle + \langle Y, D_XZ \rangle \quad \text{(regola di Leibniz per il prodotto interno)}$$

Definizione 0.4. La D_X con le 4 proprietà sopra elencate si dice **connessione di Levi-Civita** su $\mathbb{R}^n$.

Il prossimo passo è vedere cosa succede per ipersuperfici. Sia M una ipersuperficie immersa in $\mathbb{R}^n$, si dice che M ha codimensione 1, ovvero $M = M^{n-1}$. In inglese esistono due termini che descrivono l'immersione, *embedding* e *immersion*: la differenza sta in un problema di topologia relativa; ad esempio se consideriamo una retta immersa in $\mathbb{R}^2$, la topologia indotta sullo spazio immerso può essere definita prendendo la topologia dello spazio ambiente e definendo gli aperti sul sottoinsieme come intersezioni degli aperti dello spazio ambiente con il sottoinsieme stesso. Se l'immersione è fatta a modo (embedding), la topologia indotta coincide con la topologia dello spazio ambiente, in caso contrario (immersion not embedding) le cose possono essere più complicate.

Tornando all'ipersuperficie, in ciascun punto di M possiamo trovare una direzione $N_x \in T_x\mathbb{R}^n$, tale che $N_x \not\exists T_xM$, e con cui possiamo completare una base di T_xM a base di $T_x\mathbb{R}^n$.

Si suppone che $\mathbb{R}^n$ sia dotato della struttura riemanniana naturale $\langle \partial_i, \partial_j \rangle = \delta_{ij}$. Si ha la possibilità di restringere questa metrica all'ipersuperficie: se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, possiamo considerare l'accoppiamento

$$(X, Y) \mapsto \langle X, Y \rangle \in C^\infty(M)$$

Siccome $\mathbb{R}^n$ è dotato di una metrica, il completamento di una base di T_xM può essere sempre fatto considerando il vettore unitario normale a T_xM, cioè consideriamo $N_x \in T_x\mathbb{R}^n$ tale che

$$\langle N_x, N_x \rangle = 1$$

e

$$\langle X_x, X_x \rangle = 0 \ \ \forall x \in T_xM$$

Una volta che N_x è definito $\forall x \in M$, chiameremo N *campo normale* su M. Consideriamo adesso l'idea della derivata di un campo tangente ad M. SU $\mathbb{R}^n$ abbiamo l'operatore D_X, in particolare ci possiamo limitare a vedere cosa succede su una ipersuperficie: siano $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Restringendo il prodotto scalare di $\mathbb{R}^n$ alla ipersuperficie, chiameremo **prima forma fondamentale** su M tale restrizione:

$$\langle \, , \, \rangle \equiv g \equiv \langle \, , \, \rangle_{\mathbb{R}^n}|_M$$

Consideriamo adesso D_XY. Se $Y = b^i\partial_i$ (osserviamo che i ∂_i **non** sono una base dei campi su M, essendo in tutto n), e calcoliamo

$$D_XY = (X_xb^i)\partial_i$$

ci accorgiamo subito che c'è un problema: infatti D_XY è un campo vettoriale ed è un campo tangente a $\mathbb{R}^n$, ma in generale **non** è un campo tangente a M. Come esempio, possiamo considerare il caso semplice dell'accelerazione centripeta che si genera in un moto circolare uniforma su una circonferenza S^1 non appena la immergiamo in $\mathbb{R}^2$. In ogni punto abbiamo un campo vettoriale dato dalla derivata del campo tangente delle velocità, che però non è a sua volta un campo tangente. Definiremo allora una nuova connessione, che elimina questo problema e restituisce soltanto la componente tangente del campo vettoriale.

La derivata covariante

Sia M una ipersuperficie, e $N \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ un campo normale a M. In particolare $\langle N_p, N_p \rangle = 1$ e $\langle N_p, X_p \rangle = 0$, per ogni $X_p \in T_pM$. Definiamo

$$\nabla_XY = D_XY - \langle D_XY, N \rangle N$$

e la chiamiamo **derivata covariante**.

Consideriamo $\langle D_XY, N \rangle$, questo è uguale a

$$\langle D_XY, N \rangle = X\langle Y, N \rangle - \langle Y, D_XN \rangle = -\langle Y, D_XN \rangle$$

$$\Rightarrow \nabla_XY = D_XY + \langle DXN, Y \rangle N$$

L'applicazione che per ogni $x \in M$ associa a $(D_XY)_x$ la sua componente normale $\langle (D_XY)_x, N_x \rangle N_x$ viene detta **seconda forma fondamentale**.

Mettiamo a confronto le proprietà di D_XY e di ∇_XY.

1. $D_{fX+Y} = fD_x + D_Y$:

$$\nabla_{fX+Y} = D_{fX+Y} + \langle D_{fX+Y}N, Z \rangle N = fD_XZ + D_YZ + \langle fD_XN + D_YN, Z \rangle N =$$

$$= f(D_XZ + \langle D_XN, Z \rangle N) + D_YZ + \langle D_YN, Z \rangle N = f\nabla_XZ + \nabla_YZ$$

2. $D_XY(fY+Z) = f(D_XY + (Xf)Y + D_XZ)$:

$$\to \nabla_X(Y{+}Z) = D_X(Y{+}Z){+}\langle D_XN, Y{+}Z\rangle = D_XY{+}\langle D_XN, Y\rangle N{+}D_XZ{+}\langle D_XN, Z\rangle N = \nabla_XY{+}\nabla_XZ$$

$$\to \nabla_X(fY) = D_X(fY) + \langle D_XN, fY\rangle N = (Ff)Y + fD_XY + f\langle D_XN, Y\rangle = (Xf)Y + f\nabla_XY$$

$$\Rightarrow \nabla_X(fY+Z) = (Xf)Y + f\nabla_XY + \nabla_XZ$$

3. $D_XY - D_YX = [X,Y]$:

$$\nabla_XY - \nabla_YX = D_XY - D_YX + \langle D_XN, Y\rangle N - \langle D_YN, X\rangle N = [X,Y] + (\langle D_XN, Y\rangle - \langle D_YN, X\rangle)N$$

ma

$$\langle D_XN, Y\rangle - \langle D_YN, X\rangle = X\langle N, Y\rangle - Y\langle N, X\rangle - \langle N, D_XY\rangle + \langle N, D_YX\rangle =$$
$$= -\langle N, D_XY - D_YX\rangle = -\langle N, [X,Y]\rangle = 0$$

perchè $[X,Y] \in \mathfrak{X}(M)$, quindi

$$\nabla_XY - \nabla_YX = [X,Y]$$

4. $X\langle Y, Z\rangle = \langle D_XY, Z\rangle + \langle Y, D_XZ\rangle$:

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle D_XY, Z\rangle + \langle Y, D_XZ\rangle = \langle \nabla_XY, Z\rangle + \langle Y, \nabla_XZ\rangle - \langle\langle D_XN, Y\rangle N, Z\rangle - \langle Y, \langle D_XN, Z\rangle N\rangle$$

ma Y e Z sono ortogonali a N, quindi

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_XY, Z\rangle + \langle Y, \nabla_XZ\rangle$$

Apparentemente quindi non c'è differenza tra la derivata e la derivata covariante, ma vedremo che non è così. Consideriamo infatti l'espressione

$$D_XD_Y - D_YD_X - D_{[X,Y]} = 0$$

Se consideriamo

$$\nabla_X\nabla_Y + \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]}$$

questa in generale non sarà più zero. Definiamo allora

$$R(X,Y) = \nabla_X\nabla_Y + \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]}$$

$R(X,Y)$ è un operatore differenziale, apparentemente del secondo ordine; vediamo che succede applicandolo ad un campo Z:

$$R(X,Y)Z = \nabla_X(D_YZ + \langle D_YN, Z\rangle N) - \nabla_Y(D_XZ + \langle D_XN, Z\rangle N) - D_{[X,Y]}Z - (\langle D_{[X,Y]}Z, N\rangle N) =$$

$$= ... =$$

$$\langle D_YN, Z\rangle D_XN - \langle D_XN, Z\rangle D_YN$$

$D_X N$ e $D_Y N$ in linea di principio sono campi vettoriali su $\mathbb{R}^n$. Ma sappiamo che $\langle N, N\rangle = 1$, e derivando il modulo di un versore si ottiene zero, quindi:

$$0 = X\langle N, N\rangle = \langle D_X N, N\rangle + \langle N, D_X N\rangle = 2\langle D_X N, N\rangle$$

$$\Rightarrow D_X N \perp N$$

dunque $R(X, Y)Z$ è un campo vettoriale tangente alla ipersuperficie:

$$R(X, Y)Z \in \mathfrak{X}(M)$$

Abbiamo quindi constatato che la prima differenza tra D_X e ∇_X non si vede al livello di derivata prima ma con le derivate seconde. Su $\mathbb{R}^n$, $R(X, Y)Z$ vale zero, mentre su M R è un campo vettoriale tangente ad M.

Giovedì 13/11

Abbiamo visto che la derivata covariante si può definire in questo modo:

$$\nabla_X Y = D_X Y - \langle D_X N, Y\rangle N$$

dove il termine $\langle D_X N, Y\rangle N$ è detto forma di Weingarten, ed è un'applicazione : $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$, che porta $(X, Y) \mapsto \langle D_X N, Y\rangle N$. L'operatore ∇_X con le proprietà che abbiamo elencato si dice connessione di Levi-Civita su $M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$.

Come abbiamo visto, non ci sono differenze tra la D e la ∇ per quanto riguarda le derivate prime, ma per quanto riguarda le derivate seconde, mentre $D_X D_Y - D_Y D_X - D_{[X,Y]} = 0$, era possibile costruire la quantità $\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]}$ e questo non si annullava identicamente, bensì dava origine ad un operatore differenziale che risultava essere un campo tangente alla varietà M:

$$R(X, Y)Z = \langle D_Y N, Z\rangle D_X N - \langle D_X N, Z\rangle D_Y N$$

Vogliamo conoscere anche le proprietà di linearità dell'operatore R rispetto alle funzioni; per quanto riguarda ad esempio la metrica, questo risulta essere un operatore $C^\infty(M)-$lineare:

$$\langle fX, Y\rangle = f\langle X, Y\rangle$$

Per quanto riguarda R, invece, vogliamo dimostrare che:

$$R(\alpha X, \beta Y)\gamma Z = \alpha\beta\gamma R(X, Y)Z$$

(*conto*)

Dunque R risulta essere un omomorfismo dei campi in sè. Possiamo definire

$$R(V, Z, X, Y) = \langle R(X, Y)Z, V\rangle$$

In questo caso

$$R : (\mathfrak{X}(M))^4 \to C^\infty(M)$$

in modo $C^\infty(M)$-quadrilineare, ovvero

$$R(fV, gZ, hX, jY) = (fghj)R(V, Z, X, Y)$$

Spazio tangente per spazio tangente, se abbiamo una applicazione che prende quatto vettori e li porta in un numero in modo quadrilineare, questa applicazione risulta essere un tensore (covariante). Allo stesso modo in cui è definita una relazione di dualità tra elementi di uno spazio vettoriale V ed elementi del duale V^*, la stessa applicazione definisce una dualità tra elementi del duale V^* ed elementi del biduale V^{**}, che è canonicamente isomorfo a V.

Consideriamo adesso la sfera $S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, ovvero il luogo dei punti per cui

$$r = \sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} (x^i)^2}$$

Il campo normale N è un vettore che esce dalla sfera, e quindi ha la direzione del raggio della sfera:

$$N = \frac{x^i}{r}\partial_i$$

Se vogliamo proiettare un vettore sul piano tangente alla sfera, dobbiamo sottrarre la componente lungo N, definiamo allora il proiettore:

$$P_{ij} = \left(\delta^{ij} - \frac{x^i x^j}{r}\right) \equiv \delta^{ij} - n^i n^j$$

Se abbiamo un campo X, e vogliamo assicurarci che sia un campo tangente, lo definiamo in questo modo:

$$X = a_i P^{ij}\partial_j$$

Infatti se $N = \frac{x^l}{r}\partial_l$ è il versore normale, allora

$$\langle X, N\rangle = a_i P^{ij} n^l \delta_{jl} = a_i \left(\delta^{ij} - \frac{x^i x^j}{r}\right)\frac{x_j}{r} = a_i \left(\frac{x^i}{r} - \frac{x^j x_j x^i}{r^2}\right) = a_i \left(\frac{x^i}{r} - \frac{x^i}{r}\right) = 0$$

Dunque risulta che

$$D_X N = D_{a_i P^{ij}\partial_j} \frac{x^l}{r}\partial_l = \frac{a_i}{r}\left(\delta^{ij} - \frac{x^i x^j}{r^2}\right)\partial_j = \frac{X}{r}$$

Allora

$$R(V, Z, X, Y) = \langle D_Y N, Z\rangle\langle D_X N, V\rangle - \langle D_Y N, V\rangle\langle D_X N, Z\rangle = \frac{1}{r}^2 (\langle Y, Z\rangle\langle X, V\rangle - \langle X, Z\rangle\langle Y, V\rangle)$$

Osserviamo che il risultato dipende da $\frac{1}{r^2}$, che è proprio la curvatura della sfera in teoria classica. Per questo R viene detto *operatore (o tensore) di curvatura*.

Il fatto che R vada dallo spazio dei campi tangenti in sè ci dice che tutta la nostra costruzione non dipende dal fatto di aver preso un campo normale, ma soltanto dalle proprietà della derivata covariante (o connessione affine) che abbiamo usato. Se prendiamo per buone le proprietà sopra enunciate, queste sono sufficienti per arrivare alla conclusione che R dipende solo dai campi tangenti. Dunque, per una situazione generale anche al di fuori della ipersuperficie, se abbiamo una connessione siamo sicuri di poter costruire un operatore di curvatura che funzionerà sempre nel solito modo. La costruzione è indipendente dall'immersione per cui il suo risultato è qualcosa di intrinseco.

Operazioni sui fibrati vettoriali

I fibrati tangente e cotangente sono stati costruiti prendendo per ogni punto $x \in M$ una base $(\partial_i)_x$, e costruendo lo spazio tangente T_xM come span a coefficienti reali di tale base. Considerando l'unione disgiunta $\bigsqcup_{x\in M} T_xM$, questo insieme acquisiva una struttura di varietà differenziabile in quanto era sempre possibile scegliere un sistema di coordinate (ϕ, Φ), e mentre le coordinate sulla base ϕ cambiavano in maniera differenziabile per cambio di carta, le coordinate sugli spazi tangenti cambiavano con la matrice jacobiana del cambio di carta, per cui anche i cambi sugli spazi tangenti sono differenziabili. La varietà differenziabile così costruita prendeva il nome di fibrato tangente a M.

Associato allo spazio tangente c'è il suo duale, lo spazio cotangente T_x^*M, e prendendo l'unione disgiunta $\bigsqcup_{x\in M} T_x^*M$, con i cambi di carta sulle coordinate dello spazio cotangente definiti tramite l'inversa trasposta della jacobiana del cambio di carta, ottenevamo il fibrato cotangente. La base del duale punto per punto viene scelta in funzione della base dello spazio tangente, in modo che

$$\langle (dx^i)_x, (\partial_j)_x \rangle = \delta^i_j$$

Applicazioni multilineari

Consideriamo l'unione disgiunta delle applicazioni bilineari

$$\bigsqcup_{x\in M} \{\beta_x : T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}, \beta_x \text{ lineare}\}$$

Dimostreremo adesso che questa è ancora una varietà differenziabile. Infatti, nel caso di un cambio di carta abbiamo una matrice:

$$\frac{\partial x^i}{\partial y^j}$$

$$\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x ()_x = \left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_x$$

che corrisponde nel caso astratto ad una matrice $A^{i_j}(x)$ dipendente dal punto, per cui una base $e_j(x)$ viene mandata in

$$A^j_i(x)e_j(x) = f_i(x)$$

Per quanto riguarda le applicazioni del duale, vogliamo che se $\{\epsilon^i\}$ è una sua base, se $\langle \epsilon^i, e_j \rangle = \delta^i_j$ anche per la base trasformata $\phi^k = B^k_l \epsilon^l$ valga

$$\langle \phi^k, f_j \rangle = \delta^k_j$$

Si dimostra quindi che la matrice che fa cambiare la base duale è l'inversa e trasposta della matrice sullo spazio vettoriale V, nel caso dello spazio tangente e dello spazio duale, le due basi rispettive cambiano con la jacobiana e con la sua inversa trasposta.

Per le applicazioni bilineare, facciamo dei ragionamenti analoghi agli spazi vettoriali. Sia $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ bilineare, allora se $(v_1, w_1), (v_2, w_2) \in V \times V$ e $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\beta(av_1 + v_2, bw_1 + w_2) = ab\beta(v_1, w_1) + a\beta(v_1, w_2) + b\beta(v_2, w_1) + \beta(v_2, w_2)$$

Cosa dobbiamo conoscere per specificare una applicazione bilineare? Per una applicazione lineare è sufficiente conoscere l'immagine della base, analogamente in questo caso basterà conoscere il risultato di:

$$\beta(e_i, e_j)$$

infatti se $v = v^i e_i$ e $w = w^j e_j$,

$$\beta(v, w) = v^i w^j \beta(e_i, e_j)$$

Allora denoteremo con $\beta_{kl}\epsilon^k\epsilon^l$ una base dell'applicazione bilineare, in modo che applicandola a (e_i, e_j) si abbia:

$$(\beta_{kl}\epsilon^k\epsilon^l)(e_i, e_j) = \beta_{kl}\epsilon^k(e_i)\epsilon^l(e_j) = \beta_{ij}$$

Abbiamo quindi costruito lo spazio $\bigsqcup_{x \in M} B_x M$ delle applicazioni bilineari, indicheremo queste applicazioni col nome di **tensori** e lo spazio si potrà scrivere come $\otimes^2 V^*$. Se invece di partire dal fibrato tangente fossimo partiti dal fibrato cotangente avremmo potuto costruire lo spazio $\otimes^2 V$, e in tal caso la base si poteva scrivere come $\{e_m e_n\}$. Nel seguito si utilizzerà la seguente scrittura per indicare le basi delle applicazioni bilineari su $\otimes^2 V^*$ o $\otimes^2 V$:

$$\epsilon^l \otimes \epsilon^k$$

$$e_m \otimes e_n$$

Abbiamo dunque definito dei fibrati in cui le fibre sono spazi tensoriali anzichè vettoriali.

Estendendo i ragionamenti fatti finora, con le applicazioni multilineari possiamo costruire tensori di qualunque ordine. I tensori covarianti sono applicazioni

$$\mu : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{n\ volte} \to \mathbb{R}$$

multilineari, ovvero

$$\mu(x_1, ..., \alpha_i x_i + y_i, ..., x_n) = \alpha_i \mu(x_1, ..., x_i, ..., x_n) + \mu(x_1, ..., y_i, ..., x_n)$$

Anche stavolta per determinare completamente l'applicazione, dobbiamo conoscere $\mu(e_{i_1}, ..., e_{i_n})$, ovvero $(dimV)^n$ numeri. Costruiamo in questo modo il prodotto tensoriale di n fibrati:

$$\otimes^n TM$$

Se abbiamoun fibrato, abbiamo anche una sezione, che in analogia chiameremo campo tensoriale:

$$T : M \to \otimes^n TM$$

Se punto per punto cambiamo base per le coordinate con una matrice $A^i_j(x)$, la trasformazione indotta sul tensore dal cambiamento di base è:

$$t_{i_1,...,i_n} \to A^{j_1}_{i_1}(x) \cdots A^{j_n}_{i_n}(x) t_{j_1,...,j_n}(x)$$

ovvero ogni indice si comporta come un vettore indipendente.

Esistono anche altre operazioni che possiamo fare sui fibrati; supponiamo di avere due fibrati : $\otimes^2 T^* M \to M$ e : $\otimes^2 TM \to M$, possiamo considerare anche per ogni punto $x \in M$ lo spazio somma diretta

$$\otimes^2 T_x M \to M \oplus \otimes^2 T_x^* M \to M$$

ovvero l'insieme delle coppie di tensori, uno covariante e l'altro controvariante. Di esse ne prendiamo l'unione disgiunta:

$$\bigsqcup_{x \in M} (\otimes^2 T_x^* M \oplus \otimes^2 T_x M) = \otimes^2 T^* M + \otimes^2 TM$$

Il generico punto della varietà così ottenuta sarà determinato assegnando le coordinate

$$(x^1, ..., x^n, t^*_{ij}, t^{lm})$$

e tutti i cambi di coordinate saranno lisci per costruzione. In questo caso si parla di **tensori misti**.

Ancora, al posto di tensori covarianti e controvarianti, è possibile prendere le applicazioni multilineari della forma

$$z : V_1^* \times \cdots \times V_n^* \times V_1 \times \cdots \times V_m \to \mathbb{R}$$

ovvero applicazioni che prendono n copie di V^* ed m copie di V e le mandano in un numero in maniera multilineare. Chiameremo ancora queste applicazioni tensori misti ed indicheremo il loro spazio con $\otimes^{(n,m)} V$. Un generico tensore appartenente a questo spazio può essere scritto come

$$T \simeq a^{i_1} \cdots a^{i_n} b_{j_1} \cdots b_{j_m} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n} \otimes \epsilon^{j_1} \otimes \cdots \otimes \epsilon^{j_m}$$

Se sezioni di questo spazio saranno campi tensoriali di rango (m, n). In particolare, possiamo prendere il fibrato tensoriale completo, costruito in questo modo:

$$\bigsqcup_{x \in M} \{\mathbb{R} \oplus T_x M \oplus \otimes^2 T_x M \oplus ... \oplus \otimes^n T_x M \oplus ...\} = \otimes TM$$

Le sezioni di $\otimes TM$ si dicono tensori, senza ulteriore specificazione.

Se consideriamo due spazi tensoriali $\otimes^n V$ e $\otimes^m V$, e le applicazioni bilineari

$$\beta(\otimes^n V, \otimes^m V) \to \mathbb{R}$$

possiamo mettere in corrispondenza β con una applicazione multilineare che prende $n + m$ elementi:

$$\beta \to \bar{\beta}(\otimes^{n+m}) \to \mathbb{R}$$

allora abbiamo dimostrato che $(\otimes^n V) \otimes (\otimes^m V) \simeq \otimes^{n+m} V$, mentre non è in generale vero che $\otimes^{n+m} V$ si possa spezzare in due sottospazi.

Abbiamo infine un criterio per riconoscere tensori e campi tensoriali: se abbiamo un oggetto, lo saturiamo con campi vettoriali o 1-forme (a seconda della varianza), e il risultato dovrà essere una funzione che dipende da ciascun campo o 1-forma in modo lineare sulle funzioni $C^\infty(M)$. É importante che la curvatura sia un tensore perchè se cambiamo sistema di riferimento, ciascuno degli indici di R cambierà con una matrice che sarà la trasposta inversa della matrice con cui cambiano i vettori.

Le derivate covarianti in componenti

Consideriamo una sfera, un triangolo sferico e un vettore tangente; supponiamo di voler trasportare il vettore in maniera ″parallela″. Per parallelismo intendiamo che un individuo bidimensionale che si muova col vettore sulla superficie della sfera lo deve vedere sempre orientato nella stessa direzione, pur restando tangente alla superficie della sfera. Vediamo però che prendendo un cammino chiuso, in generale il vettore non tornerà in se stesso, ma punterà in una direzione diversa. Su $\mathbb{R}^3$, invece, non succederebbe e ritroveremmo lo stesso vettore. Questa diversità ha proprio a che fare con la curvatura: maggiore è questa, maggiore è l'angolo formato dal vettore iniziale e da quello finale.

Definiamo quindi il trasporto parallelo, se abbiamouna curva descritta dal parametro t:

$$t \mapsto c(t)$$

Prendiamo la derivata covariante della X in direzione della curva:

$$\frac{\nabla X}{dt} = \nabla_{\dot{c}(t)} X$$

Quando questa derivata si annulla, il vettore viene trasportato parallelamente a se stesso.

Se abbiamo una varietà M, un vettore $X = a^i \partial_i$ e $Y = v^j \partial_j$, allora

$$\nabla_X Y = \nabla_{a^i \partial_i}(b^j \partial_j) = a^i \nabla_{\partial_i}(b^j \partial_j) = a^i b^j \nabla_{\partial_i}(\partial_j) + a^i (\partial_i b^j)(\partial_j)$$

Il secondo termine lo sappiamo calcolare, mentre il primo è ancora ignoto: sappiamo soltanto che deve essere un campo su M, quindi avrà la forma

$$\nabla_{\partial_i}(\partial_j) = \Gamma^k_{ij} \partial_k$$

i Γ^k_{ij} si dicono coefficienti della connessione, e si possono caratterizzare in questo modo: se ω^j è una base di 1-forme duale di ∂_i, ovvero

$$\langle \omega^j, \partial_i \rangle = \delta^j_i$$

allora

$$\Gamma^k_{ij} = \langle \omega^k, \nabla_{\partial_i} \partial_j \rangle$$

ma l'espressione precedente non trasforma come un tensore, perchè sotto cambio di coordinate di ∂_j abbiamo anche la derivata della jacobiana:

$$\partial_i \to \hat{\partial}_i = J^j_i \partial_j$$

$$\omega^k \to \hat{\omega}^k = (J^{-1})^k_l \omega^l$$

$$\hat{\Gamma}^k_{ij} = \langle \hat{\omega}^k, \nabla_{\hat{\partial}_i} \hat{\partial}_j \rangle = (J^{-1})^k_l J^n_i \langle \omega^l, \nabla_{\partial_n} (J^m_j \partial_m) = (J^{-1})^k_l J^n_i J^m_j \langle \omega^l, \nabla_{\partial_n} \partial_m + (J^{-1})^k_l J^n_i \langle \omega^l, \partial_m)(\partial_n J^m_j)$$

Se ci fosse soltanto il primo termine i coefficienti sarebbero elementi di matrice di un tensore, ma c'è anche un pezzo aggiuntivo dove viene derivata la jacobiana.

Lunedì 17 novembre

La metrica g prende due campi vettoriali e li manda in una funzione $C^\infty(M)$, è quindi un tensore di varianza opposta rispetto a quella dei campi. Se $\{e_i\}$ è una base locale di $\mathfrak{X}(M)$, e $\{\epsilon^j\}$ una base di $\Omega^1(M)$, allora si può scrivere

$$g = g_{ij}\epsilon^i \otimes \epsilon^j$$

L'affermazione fatta in precedenza che

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_x Y, X\rangle + \langle Y, \nabla_X, Z\rangle$$

implica che abbiamo scelto $X(g(Y,Z)) = 0$. Infatti quando scriviamo ∇_X intendiamo una funzione $\mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$, ma possiamo estendere la derivata anche ai campi tensoriali. Il nostro scopo è di derivare un tensore due volte covariante come la metrica. Se Y e Z sono due campi, consideriamo il prodotto

$$Y \otimes Z$$

Sappiamo chi sono $\nabla_X Y$ e $\nabla_X Z$, allora definiamo la derivata del loro prodotto tensoriale come

$$\nabla_X(Y \otimes Z) = \nabla_X Y \otimes Z + Y \otimes \nabla_X Z$$

Se richiediamo questo, esiste una ed una sola derivazione. Se consideriamo $T \in Sec(\otimes^2 TM)$, possiamo scrivere T come

$$T = c^{ij}(x) e_i \otimes e_j$$

$$\Rightarrow \nabla_X T = (Xc^{ij}(x))(e_i \otimes e_j) + (c^{ij}(x)(\nabla_X e_i \otimes e_j) + (c^{ij}(x)(e_i \otimes \nabla_X e_j)$$

Se $\omega \in \Omega^1(M)$, la possiamo saturare con un campo Y:

$$\langle \omega, Y\rangle$$

Deriviamo adesso tale prodotto

$$\nabla_X\langle \omega, Y\rangle = X\langle \omega, Y\rangle = \langle \nabla_X \omega, Y\rangle + \langle \omega, \nabla_X Y\rangle$$

$\nabla_X Y$ sappiamo chi è, mentre ancora $\nabla_X \omega$ è definita in base alla precedente espressione:

$$(\nabla_X \omega)(Y) = X\langle \omega, Y\rangle - \langle \omega, \nabla_X Y\rangle$$

In relatività generale, richiedere che la metrica sia costante equivale ad avere una specie di immersione anche se di fatto non c'è immersione. É possibile definire un operatore

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

Si può dimostrare facilmente che tale operatore è un tensore, e si vede anche che per la derivata covariante così definita esso è nullo. Il tensore $T(X,Y)$ è detto **tensore di torsione**.

Se abbiamo una varietà differenziabile e una metrica, c'è sempre modo di avere una derivata covariante che abbia le proprietà sopra elencate, infatti basta che richiediamo che la metrica sia covariantemente costante e che il tensore di torsione sia sempre nullo. Dovremo determinare quindi opportunamente i coefficienti della connessione Γ^k_{ji}, e come vedremo saranno funzioni della metrica. In relatività ad esempio abbiamo le seguenti situazioni:

1. Non conosciamo la metrica, ma possiamo fare ipotesi sulla la distribuzione di massa contenuta in $T^{\mu\nu}$, ad esempio sulla scala dei superammassi di galassie si può immaginare una distribuzione costante di massa.

2. Abbiamo un centro di attrazione e vogliamo vedere le proprietà dello spazio-tempo in un suo intorno: la distribuzione di materia viene presa singolare, cioè concentrata in un punto (buchi neri o stelle di neutroni).

Il tensore di curvatura è costruito con le derivate seconde, e i Γ^k_{ji} dipendono dalle derivate prime della metrica, l'equazione di Einstein $G = kT$ è quindi una equazione differenziale del secondo ordine nella metrica. In relatività si cerca una geometria senza sapere a priori che geometria sia, l'idea è quella di determinarla in base alla distribuzione di materia, e in un colpo solo ottenere anche la distribuzione della materia stessa.

Finora abbiamo considerato la base canonica dei campi vettoriali, per cui

$$[\partial_i, \partial_j] = 0$$

ma in generale se abbiamo una base $e_i = A_{ij}\partial_j$, potremo avere

$$[e_i, e_j] = c^k_{ij} e_k$$

Esplicitiamo adesso l'operatore di curvatura ($\nabla_{e_i} \equiv \nabla_i$):

$$R(e_i, e_j)e_k = \nabla_i\nabla_j e_k - \nabla_j\nabla_i e_k - \nabla_{[i,j]}e_k = \nabla_i\nabla_j e_k - \nabla_j\nabla_i e_k - \nabla_{c^n_{ij}e_n}e_k = R^n_{ijk}e_n$$

$$\nabla_i\Gamma^p_{kj}e_p - \nabla_j\Gamma^p_{ki}e_p - c^n_{ij}\Gamma^p_{kn}e_p =$$

Introduciamo la notazione $\nabla_i\Gamma^p_{kj} = \Gamma^p_{kj;i}$:

$$= \Gamma^m_{kj;i}e_m + \Gamma^p_{kj}\Gamma^m_{pi}e_m - \Gamma^p_{ki;j}e_m - \Gamma^p_{ki}\Gamma^m_{pj}e_m - c^n_{ij}\Gamma^m_{kn}e_m =$$

$$= (\Gamma^m_{kj;i} + \Gamma^p_{kj}\Gamma^m_{pi} - \Gamma^p_{ki;j} - \Gamma^p_{ki}\Gamma^m_{pj} - c^n_{ij}\Gamma^m_{kn})e_m$$

$$\Rightarrow R^m_{kij} = \Gamma^m_{kj;i} + \Gamma^p_{kj}\Gamma^m_{pi} - \Gamma^p_{ki;j} - \Gamma^p_{ki}\Gamma^m_{pj} - c^n_{ij}\Gamma^m_{kn}$$

Osserviamo subito che data la presenza di prodotti di due Γ si ha a che fare con oggetti non lineari.

Per quanto riguarda il tensore di torsione:

$$\nabla_i e_j - \nabla_j e_i - [e_i, e_j] = T^m_{ij}e_m$$

$$\Gamma^m_{ji}e_m - \Gamma^m_{ij}e_m - c^m_{ij}e_m$$

$$\Rightarrow T^m_{ij} = \Gamma^m_{ji} - \Gamma^m_{ij} - c^m_{ij}$$

Se scegliamo una base coordinata, in cui $e_i = \partial_i$, $c^m_{ij} = 0$, e in questa base

$$T^m_{ij} = \Gamma^m_{ji} - \Gamma^m_{ij}$$

Se richiediamo torsione nulla, significa che su una base coordinata i coefficienti Γ sono simmetrici:

$$\Gamma^m_{ji} = \Gamma^m_{ij}$$

In relatività generale si richiede torsione nulla perchè non si è trovato nessun campo classico che si accoppi con tensore di torsione. In teorie come la supersimmetria si ha torsione diversa da zero ma in questo caso la torsione si accoppia con lo spin che è un oggetto quantistico.

Deriviamo adesso i Γ in termini della metrica:

$$\frac{\nabla}{ds} = \text{derivata covariante lungo una curva } c(s) = \nabla_{\dot{c}(s)}$$

Consideriamo le componenti q^μ di un campo vettoriale X. Se $c(s)$ è una curva coordinata $x^i(s)$, allora $\frac{\nabla}{ds} \equiv \nabla_i$, e poichè $X = q^\mu e_\mu$, si avrà:

$$\nabla_{\dot{c}(s)} = \nabla_{\frac{dx^\rho}{ds}e_\rho} = \frac{dx^\rho}{ds}\nabla_\rho$$

$$\Rightarrow \frac{\nabla}{ds}X = \frac{\nabla}{ds}(q^\mu e_\mu) = \frac{dx^\rho}{ds}\nabla_\rho(q^\mu e_m u) = \frac{dx^\rho}{ds}(\nabla_\rho q^\mu)e_\mu + \frac{dx^\rho}{ds}q^\mu \nabla_\rho e_\mu$$

$$\frac{\nabla}{ds}X = \frac{dx^\rho}{ds}(e_\rho q^\mu)e_\mu + \frac{dx^\rho}{ds}q^\mu \Gamma^\nu_{\mu\rho}e_\nu = (\frac{dx^\rho}{ds}(e_\rho q^\mu) + \frac{dx^\rho}{ds}q^\nu \Gamma^\mu_{\nu\rho})e_\mu$$

$$\Rightarrow \frac{\nabla q^\mu}{ds} = \frac{dq^\mu}{ds} + \Gamma^\mu_{\nu\rho}\frac{dx^\rho}{ds}q^\nu$$

e questa è la derivata covariante delle componenti di un campo vettoriale (cioè un campo controvariante).

Consideriamo ora la derivata covariante di una 1-forma ω:

$$\langle \omega, X \rangle = \nabla q_\mu \epsilon^\mu, v^\nu e_\nu \rangle = q_\mu v^\mu$$

$$\nabla_{\dot{c}}(\langle \omega, X \rangle) = \frac{\nabla}{ds}(v^\mu q_\mu) =$$

Scriveremo questa derivata in due modi, in quanto il prodotto $v^\mu q_\mu$ dipende soltanto dal parametro s, essendo stati saturati tutti i vettori delle basi:

$$= \frac{d}{ds}(v^\mu q_\mu) = \frac{dv^\mu}{ds}q_\mu + \frac{dq_\mu}{ds}v^\mu$$

Però adesso ci ricordiamo da dove siamo partiti, ovvero

$$\frac{\nabla}{ds}\langle \omega, X \rangle = \langle \frac{\nabla}{ds}\omega, X \rangle + \langle \omega, \frac{\nabla}{ds}X \rangle$$

$$\Rightarrow \frac{\nabla}{ds}(v^\mu q_\mu) = \frac{\nabla v^\mu}{ds}q_\mu + v^\mu \frac{\nabla q_\mu}{ds}$$

per confronto si ha che

$$v^\mu \frac{\nabla q_\mu}{ds} = \frac{dv^\mu}{ds}q_\mu + v^\mu \frac{dq_\mu}{ds} - q_\mu \frac{\nabla v^\mu}{ds} = \frac{dv^\mu}{ds}q_\mu + v^\mu \frac{dq^\mu}{ds} - q_\mu \frac{dv^\mu}{ds} - q_\mu \Gamma^\mu_{\nu\rho}\left(\frac{dx^\rho}{ds}\right)v^\nu = v^\mu\left(\frac{dq_\mu}{ds} - q_\nu \Gamma^\nu_{\mu\lambda}\left(\frac{dx^\lambda}{ds}\right)\right)$$

Possiamo eliminare le v^μ, che sono arbitrarie

$$\Rightarrow \frac{\nabla q_\mu}{ds} = \frac{dq_\mu}{ds} - q_\nu \Gamma^\nu_{\mu\rho}\left(\frac{dx^\rho}{ds}\right)$$

Mettiamo a confronto le due derivate per vettori e 1-forme, nel caso in cui la curva lungo cui deriviamo sia $x^\sigma = x^\sigma(s)$:

$$\frac{\nabla q^\mu}{dx^\sigma} = \frac{dq^\mu}{dx^\sigma} + q^\nu \Gamma^\mu_{\nu\rho}\left(\frac{dx^\rho}{dx^\sigma}\right)$$

$$\frac{\nabla q_\mu}{dx^\sigma} = \frac{dq_\mu}{dx^\sigma} - q_\nu \Gamma^\nu_{\mu\rho}\left(\frac{dx^\rho}{dx^\sigma}\right)$$

Siamo adesso in grado di derivare un tensore due volte covariante:

$$A_{\mu\nu}$$

Possiamo contrarlo con due vettori:

$$A^\mu_{\mu\nu} v^\nu \equiv = \langle A_{\mu\nu}\epsilon^\mu \otimes \epsilon^\nu, q^\mu e_\mu \otimes v^\nu e_\nu \rangle$$

Vista come derivata rispetto al parametro s, si ha:

$$\frac{\nabla}{ds}(A_{\mu\nu} q^\mu v^\nu) = \frac{dA_{\mu\nu}}{ds} q^\mu v^\nu + A_{\mu\nu}\frac{dq^\mu}{ds} v^\nu + A_{\mu\nu} q^\mu \frac{dv^\nu}{ds}$$

ma per la compatibilità, si deve anche avere:

$$\left(\frac{\nabla}{ds}A_{\mu\nu}\right) q^\mu v^\nu + A_{\mu\nu}\left(\frac{\nabla}{ds}q^\mu\right) v^\nu + A_{\mu\nu} q^\mu \left(\frac{\nabla}{ds}v^\nu\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\nabla}{ds}A_{\mu\nu}\right) q^\mu v^\nu = \frac{dA_{\mu\nu}}{ds} q^\mu v^\nu + A_{\mu\nu}\left(\frac{dq^\mu}{ds} - \frac{\nabla q^\mu}{ds}\right) v^\nu + A_{\mu\nu} q^\mu \left(\frac{dv^\nu}{ds} - \frac{\nabla v^\nu}{ds}\right) =$$

$$= \frac{dA_{\mu\nu}}{ds} + A_{\mu\nu}\left(-\Gamma^\mu_{\sigma\rho}\frac{dx^\rho}{ds}\right) q^\sigma v^\nu + A_{\mu\nu} q^\mu \left(-\Gamma^\nu_{\sigma\rho}\frac{dx^\rho}{ds}\right) v^\sigma = \frac{dA_{\mu\nu}}{ds} + A_{\sigma\nu}\left(-\Gamma^\sigma_{\mu\rho}\frac{dx^\rho}{ds}\right) q^\mu v^\nu + A_{\mu\sigma}\left(-\Gamma^\sigma_{\nu\rho}\frac{dx^\rho}{ds}\right) q^\mu v^\nu$$

$$\Rightarrow \frac{\nabla}{ds}A_{\mu\nu} = \frac{dA_{\mu\nu}}{ds} - A_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma_{\mu\rho}\frac{dx^\rho}{ds} - A_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\nu\rho}\frac{dx^\rho}{ds}$$

$$\Rightarrow \frac{\nabla}{dx^\lambda}A_{\mu\nu} = \frac{dA_{\mu\nu}}{dx^\lambda} - A_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma_{\mu\lambda} - A_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\nu\lambda}$$

Richiediamo adesso compatibilità della connessione con la metrica, ovvero la metrica deve essere covariantemente costante, inoltre richiediamo anche torsione nulla, il che significa che su una base coordinata i Γ^k_{ij} sono simmetrici negli indici bassi:

$$\frac{\nabla g_{\mu\nu}}{dx^\rho} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} = g_{\tau\nu}\Gamma^\tau_{\mu\rho} + g_{\mu\tau}\Gamma^\tau_{\nu\rho}$$

Ricordiamo che poichè il prodotto scalare è simmetrico, anche la metrica lo è (geometria reale) quindi $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$. Possiamo definire il coefficiente Γ con l'indice abbassato mediante la metrica:

$$g_{\tau\nu}\Gamma^\tau_{\mu\rho} = \Gamma_{\nu\mu\rho}$$

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} = \Gamma_{\nu\mu\rho} + \Gamma_{\mu\nu\rho}$$

Possiamo fare delle permutazioni cicliche degli indici:

$$g_{\mu\nu,\rho} = \Gamma_{\nu\mu\rho} + \Gamma_{\mu\nu\rho}$$

$$g_{\rho\mu,\nu} = \Gamma_{\mu\rho\nu} + \Gamma_{\rho\mu\nu}$$

$$g_{\nu\rho,\mu} = \Gamma_{\rho\nu\mu} + \Gamma_{\nu\rho\mu}$$

Sommando le prime due e sottraendo la terza (tenendo conto che la connessione è simmetrica), si ottiene:

$$\Gamma_{\mu\rho\nu} = \frac{1}{2}(g_{\mu\nu,\rho} + g_{\rho\mu,\nu} - g_{\nu\rho,\mu})$$

$$\Rightarrow \Gamma^{\tau}_{\rho\nu} = \frac{g^{\tau\mu}}{2}(g_{\mu\nu,\rho} + g_{\rho\mu,\nu} - g_{\nu\rho,\mu}) = \left\{ {\tau \atop \rho\nu} \right\}$$

le parentesi $\left\{ {\tau \atop \rho\nu} \right\}$ vengono dette **simboli di Christoffel**, e sono i coefficienti della connessione che derivano dalla richiesta di compatibilità con la metrica e di annullarsi della torsione.