

Transizioni di fase

—>20/5/08<—

Lo scopo sarà studiare le transizioni di fase dal punto di vista della meccanica statistica dell'equilibrio. Fisicamente, una transizione di fase è un cambiamento brusco del comportamento collettivo del sistema, che si verifica al variare di qualche parametro:

1. Il cambiamento deve avvenire senza che cambi niente nei costituenti fondamentali del sistema, e al livello delle loro mutue interazioni (ovvero l'hamiltoniana del sistema resta la stessa).
2. "Brusco" significa che tutto va come se il cambiamento avvenisse per un valore particolare di un parametro.

Matematicamente, si ha una transizione di fase ogni volta che una funzione macroscopica $g(T)$ che descrive lo stato del sistema ha un comportamento *non analitico*:

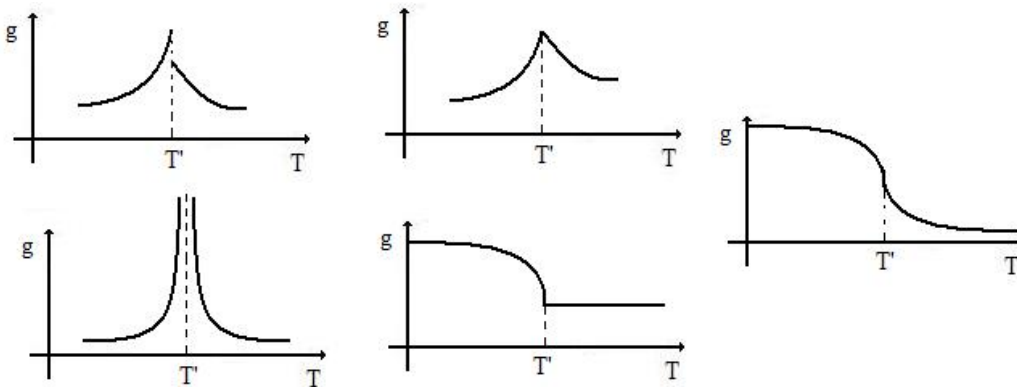


Figura 1: Esempi di non analiticità

Si deve pensare però che è una descrizione matematica, e sperimentalmente non si osserveranno mai le singolarità, dunque la migliore descrizione che si può fare è dire che c'è una singolarità, ma che questa non è dimostrabile sperimentalmente. Le transizioni di fase sono ovunque: il terreno privilegiato è la fisica della materia condensata, con i passaggi di stato (es. solido-liquido) ma anche passaggi di stato dei sistemi magnetici; conduttori-superconduttori; transizione duperfluida; cristalli liquidi; transizioni di fase nei polimeri. Si ritiene che esista una transizione di fase ad energie molto alte tra la materia adronica e una fase confinata: si parla del cosiddetto plasma di quark e gluoni; in ambito cosmologico, si possono avere

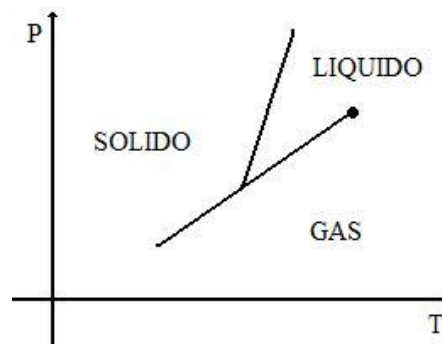
transizioni di fase correlate al fenomeno dell'inflazione, ma si parla di transizioni di fase anche in economia, in matematica, o in biologia.

La condizione (1) ci dice che la transizione di fase è un fenomeno complessivo. Proprio questo dovrebbe far sì che i fenomeni debbano mostrarsi a noi su scala macroscopica; la cosa buona è che le transizioni di fase hanno tante cose in comune, oltre a mantenere comunque alcuni aspetti peculiari. Ci sono tuttavia un sacco di proprietà comuni, e si può imparare molto studiando dei prototipi. I prototipi che si usano sono due, ma vedremo che alla fine si riducono ad uno solo:

1. Transizioni di fase in un fluido: in particolare la transizione liquido-vapore;
2. Transizione paramagnetica-ferromagnetica; si può usare per descrivere sia sistemi isolanti come l'ossido di europio, che conduttori come ferro e nichel.

Liquidi

Disegniamo il diagramma di fase: utilizzeremo due variabili intensive per descrivere il sistema (ad esempio pressione e temperatura)



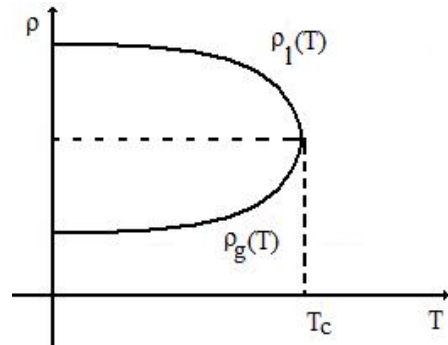
Il piano è diviso in regioni, che vengono chiamate *fasi*. Le linee continue che le delimitano sono dette *contorni di fase*, o regioni di coesistenza. I luoghi in cui le fasi coesistono hanno dimensione minore delle regioni delle fasi singole, e se attraversiamo un contorno, abbiamo una transizione di fase.

Concentriamoci sulla transizione liquido-gas; possiamo mantenere fissa la pressione, e variare la temperatura. Quello che differenzia solido e liquido è la densità: si ha una transizione discontinua in cui una qualche grandezza fa un salto (in questo caso la densità). Una caratteristica della transizione liquido-vapore è che finisce, quando siamo al **punto critico**: se facciamo un cammino del tipo in figura

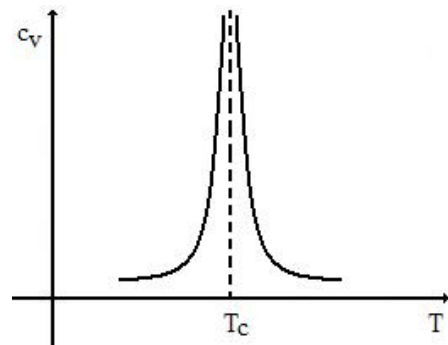


osserviamo che questo connette le due fasi liquida e gassosa senza passare attraverso una transizione di fase. Da questo deduciamo che liquido e gas hanno delle cose in comune; se avviciniamo sempre più il cammino alla linea, concludiamo che al punto critico la transizione di fase deve essere un po' diversa, perché al di fuori

non c'è più differenza tra liquido e gas. Quel che accade è che la differenza di densità $\rho_l - \rho_g$ ha uno zero nel punto critico. Sulla linea di coesistenza si ha:



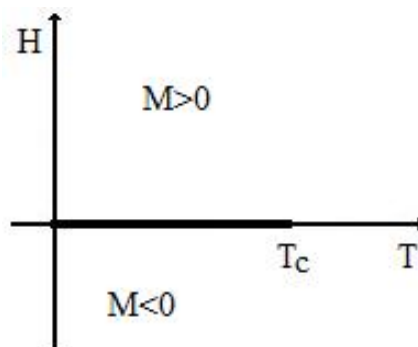
Osserviamo una cosa interessante: se il punto critico fosse soltanto il punto in cui le proprietà di liquido e gas coincidono, non sarebbe poi così critico. In realtà si osserva anche altro; il primo esperimento che mise in luce le proprietà del punto critico fu fatto con l'anidride carbonica: liquido e vapore coesistono, ma via via che ci si avvicina al punto critico l'interfaccia tra le due fasi è sempre meno evidente; inoltre cambiano le proprietà di rifrazione e il sistema diventa nebbioso (*opalescenza critica*). Allora si può pensare che l'indice di rifrazione cambi bruscamente, e che si abbiano quindi grandi fluttuazioni di densità. Ma le fluttuazioni delle grandezze sono collegate alle funzioni di risposta dal teorema di fluttuazione-dissipazione; ad esempio misurarono il calore specifico e trovarono che c'era una "divergenza":



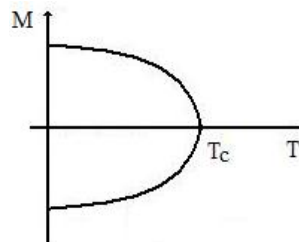
Dunque al punto critico la transizione di fase da discontinua (nella densità) diventa continua, ma il calore specifico diventa divergente.

Ferromagneti

Si passa da un diagramma $P - T$ a un diagramma $H - T$, dove H è un campo magnetico esterno. Il diagramma di fase è simile a quello liquido-vapore, ma stavolta la linea di coesistenza si ha per $H = 0$: dove M è il momento magnetico del sistema nel suo complesso. Se attraversiamo l'asse delle temperature per $T < T_c$ abbiamo una transizione di fase discontinua, mentre se come nel caso dei liquidi aggiriamo il punto critico con un cammino che non interseca il segmento $[0, T_c]$, la magnetizzazione si annulla con continuità. I grafici nel caso dei ferromagnetici sono più simmetrici, perchè le variabili che usiamo per descrivere il sistema sono rilevanti anche a livello microscopico; è un pò come se fossero le coordinate "natural" del problema,



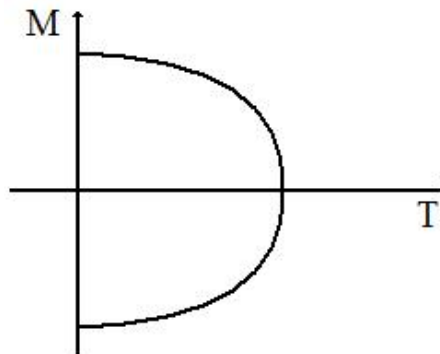
nel caso dei fluidi tali coordinate erano opportune combinazioni di P e T . Se riportiamo la magnetizzazione al variare della temperatura (avendo spento il campo magnetico H , si ha un grafico del tipo:



Se misuriamo il calore specifico, troviamo ancora una divergenza vicino al punto critico. Questa analogia tra fluidi e ferromagneti fu notata ancor prima di scoprire le proprietà del punto critico, da Pierre Curie, che nel 1895 fece esperimenti per misurare la magnetizzazione dei ferromagneti. Per il ferro la temperatura critica (o, appunto, temperatura di Curie) risulta di 1050 K.

—>21/5/08<—

Tra tutte le grandezze ce n'è una più interessante, la magnetizzazione M , ovvero il valore di aspettazione del momento magnetico del sistema. Sulla curva di coesistenza (ovvero per $H = 0$) la magnetizzazione in funzione della temperatura ha questo andamento:



La cosa interessante è che a $H = 0$ il sistema può avere una fase paramagnetica (cioè a magnetizzazione $M = 0$) per temperature alte, e una fase ferromagnetica ($M \neq 0$) per temperature basse. Tanto più M è grande, tanto più il sistema è ordinato, dunque questa transizione di fase fa passare da stati più ordinati

($M \neq 0$) a stati meno ordinati ($M = 0$); per questo motivo M viene detta *parametro d'ordine*. Un parametro d'ordine in generale un operatore \hat{O} il cui valore d'aspettazione è diverso da zero sotto una certa temperatura critica T_c , e uguale a zero sopra T_c . Nel caso dei materiali ferromagnetici, si potrebbe in linea di principio prendere come parametro d'ordine M^2 , o $\sqrt{|M|}$, o una qualunque potenza positiva di M , ma vedremo in seguito che il concetto di parametro d'ordine potrà essere meglio precisato. Per le transizioni liquido-vapore il parametro d'ordine è la differenza di densità $\rho_l - \rho_v$: questa è diversa da zero finchè siamo sulla linea di coesistenza, per annullarsi al punto critico. È possibile anche prendere $\rho_l - \rho_c$, dove ρ_c è la densità critica, oppure normalizzare la differenza:

$$\frac{\rho_l - \rho_v}{\rho_l}$$

In questi casi si parla di transizioni di fase continue perchè i parametri d'ordine vanno a zero con continuità. Per gli antiferromagneti, che sono descrivibili mediante due sottoreti che si orientano in maniera opposta, si definisce una magnetizzazione M per ogni sottoreticolo. Per i sistemi ferroelettrici il parametro d'ordine è la polarizzazione, mentre nella transizione di fase superfluida si prende la funzione d'onda del condensato: c'è infatti una frazione del sistema che forma un condensato di Bose.

Introduciamo adesso un nuovo tipo di grandezze: abbiamo il sospetto che al punto critico le fluttuazioni siano importanti, dunque le grandezze globali non ci batano più perchè non sono in grado di darci informazioni sulle scale su cui avvengono tali fluttuazioni. Le nuove grandezze che introduciamo prendono il nome di **funzioni di correlazione**. Consideriamo per semplicità un sistema su reticolo; la sua hamiltoniana sarà dunque della forma:

$$H = H(\phi_1, \dots, \phi_N)$$

Ad esempio, se i ϕ_i rappresentano gradi di libertà di spin, la magnetizzazione del sistema sarà:

$$M = \langle \sum_i \phi_i \rangle$$

Salvo ulteriori precisazioni, indicheremo sempre con $\langle \rangle$ delle medie canoniche (temperatura assegnata). Cominciamo col definire la *funzione di correlazione a due punti*:

$$G_{ij}^{(2)} = \langle \phi_i \phi_j \rangle$$

Se assumiamo l'ipotesi che il sistema sia invariante per traslazioni (in questo caso traslazioni discrete poichè siamo su reticolo), la funzione di correlazione può dipendere solo dalla differenza $|i - j|$:

$$G_{ij}^{(2)} = G^{(2)}(|i - j|)$$

Se immaginiamo un sistema dove l'hamiltoniana è separabile in N hamiltoniane indipendenti, la corrispondente densità di probabilità canonica sarà il prodotto di N densità $\rho(\phi_i)$; di conseguenza la funzione di correlazione risulta anch'essa fattorizzabile:

$$\langle \phi_i \phi_j \rangle = \langle \phi_i \rangle \langle \phi_j \rangle$$

Tuttavia in sistemi di questo tipo di solito non succede niente di interessante in quanto i sottosistemi non interagiscono.

La funzione di correlazione a due punti ci dice soltanto qual'è la tendenza dei gradi di libertà nei siti i e j ad assumere valori simili; ci aspetteremmo questi andamenti:

$$G_{ij}^{(2)} \rightarrow 0 \text{ se } |i - j| \rightarrow \infty$$

$$G_{ij}^{(2)} \sim \langle \phi \rangle^2 \text{ per } |i - j| \text{ piccoli}$$

ovviamente la seconda richiesta è ragionevole soltanto nel caso di interazioni che favoriscono valori uguali per siti vicini, dunque non è applicabile ad esempio ai ferromagneti; tuttavia sorge subito un problema: per come è definita questa funzione di correlazione non funziona, (PERCHÉ NON FUNZIONA?)[...]. Il problema sta nel fatto che la funzione di correlazione non dice soltanto quant'è la correlazione, ma contiene al suo interno anche i valori medi, quindi stiamo mescolando le informazioni. Definiamo allora la funzione di correlazione *connessa*:

$$G_c^{(2)}(i, j) = \langle \phi_i \phi_j \rangle - \langle \phi_i \rangle \langle \phi_j \rangle = \langle (\phi_i - \langle \phi_i \rangle)(\phi_j - \langle \phi_j \rangle) \rangle$$

Questa funzione misura le fluttuazioni di ϕ_i e ϕ_j rispetto ai loro valori medi.

Il problema adesso è sapere quanto si deve andare lontano affinché le funzioni di correlazione si annullino. In ogni caso esse sono le uniche grandezze che sono accessibili sperimentalmente: un esperimento di scattering con neutroni o raggi X ha una risposta che dipende proprio dalle funzioni di correlazione. Infatti, gli esperimenti di scattering ci dicono che in praticamente tutte le situazioni, nell'ipotesi in cui per $|i - j|$ abbastanza grande il sistema si possa considerare isotropo, si ha:

$$G_c^{(2)}(r) \sim e^{-\frac{r}{\xi}}$$

dove ξ è detta lunghezza di correlazione e dice qual'è la scala su cui le grandezze sono correlate. Una delle cose curiose che succedono ai sistemi vicino al punto critico è che questa dipendenza cambia:

$$G_c^{(2)} \sim \frac{1}{r^{d-2+\eta}}$$

dove d è la dimensione dello spazio. I due comportamenti sono completamente diversi: infatti nell'esponentiale è presente la lunghezza di correlazione, mentre nella legge di potenza (che è una delle cosiddette leggi invarianti di scala) si perde questa informazione.

Vediamo dunque che quando il sistema è vicino al punto critico l'andamento delle grandezze è descritto quantitativamente da leggi di potenza, e tutta l'informazione è racchiusa nell'esponente η . Torniamo adesso a studiare grandezze termodinamiche, ad esempio introduciamo una funzione energia libera $F(h, T)$, dove h è il campo magnetico: useremo la lettera h minuscola per evitare confusione con l'hamiltoniana H e perchè il campo magnetico è una grandezza intensiva. Assumeremo inoltre che il magnetone di Bohr μ_B sia 1, questo equivale a misurare il campo magnetico in unità di energia, ed a rendere adimensionale la magnetizzazione. L'energia del sistema si ottiene come:

$$E = \frac{\partial(\beta F)}{\partial \beta}$$

da cui il calore specifico (ad h costante):

$$C_h = \frac{\partial E}{\partial T}$$

Per la magnetizzazione invece:

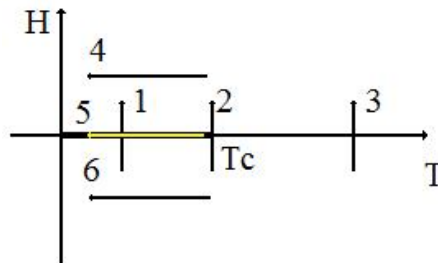
$$M = -\frac{\partial F}{\partial H}$$

e la grandezza intensiva ad essa associata è la suscettività χ :

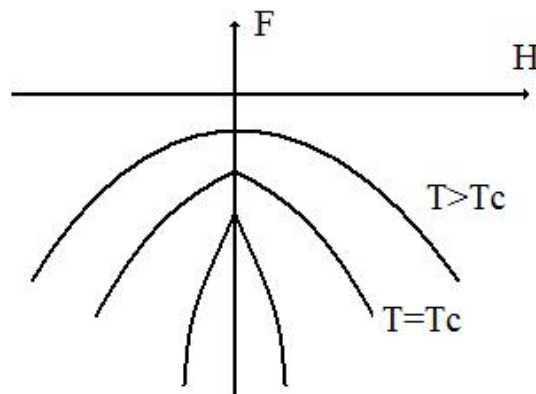
$$\chi = \frac{\partial M}{\partial h} = -\frac{\partial^2 F}{\partial h^2}$$

Così come il calore specifico è connesso alle fluttuazioni di energia, la suscettività è legata alle fluttuazioni della magnetizzazione.

Torniamo adesso a studiare il diagramma di fase, seguendo dei cammini ben precisi:



L'energia libera ha andamenti di questo tipo:



e osserviamo che per $T < T_c$ la derivata è discontinua. Per quanto riguarda la magnetizzazione e la suscettività, sui cammini 1, 2 e 3 si ha un andamento come in figura.

La divergenza della suscettività per $T = T_c$ è caratterizzata da una legge di potenza. La magnetizzazione e la suscettività in funzione della temperatura hanno grafici di tipo diverso:

Ci si può chiedere quale sia l'andamento del calore specifico: è qualitativamente lo stesso della suscettività, ma con una legge di potenza diversa per la divergenza. Costruiremo adesso un formalismo per descrivere tali leggi, e poichè siamo interessati al comportamento delle grandezze nel punto critico, lo assumeremo come origine definendo una *temperatura ridotta*:

$$t = \frac{T - T_c}{T_c}$$

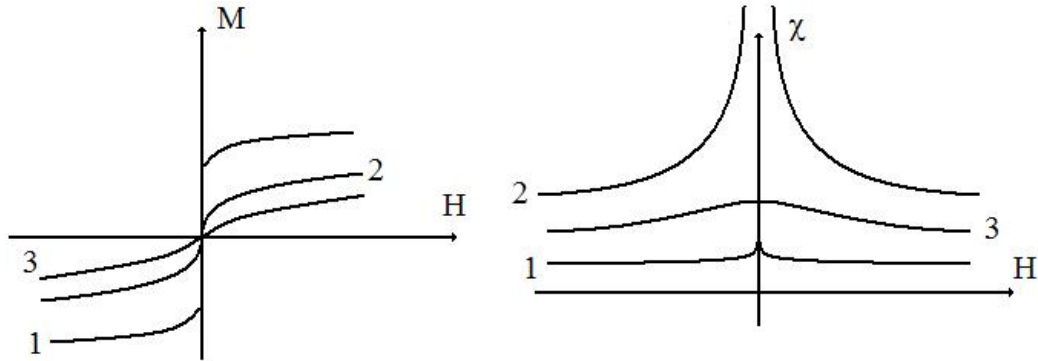
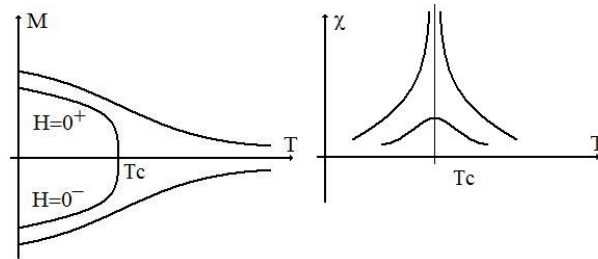


Figura 2: 1: $T < T_c$ - 2: $T = T_c$ - 3: $T > T_c$



Definiamo inoltre l'*esponente critico*, ovvero un esponente che descrive l'andamento a potenza di una certa grandezza $F = F(t)$:

$$F(t) \sim |t|^\lambda$$

La definizione di tale esponente è questa:

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log |F(t)|}{\log |t|}$$

Per ogni grandezza definiremo un esponente critico:

- Per $H = 0$ abbiamo:
 - $C_H \sim |t|^{-\alpha}$;
 - $M \sim (-t)^\beta$; infatti la magnetizzazione è diversa da zero soltanto per $t < 0$ ($T < T_c$);
 - $\chi \sim |t|^{-\gamma}$.
- Per $t = 0$ definiamo invece la cosiddetta isoterma critica, e abbiamo:
 - $H \sim |M|^\delta \text{sign}(M)$

I quattro esponenti sopra definiti vengono detti *esponenti critici termodinamici*, poichè sono legati a funzioni termodinamiche; è possibile definirne altri due, legati alle funzioni di correlazione, per $t = 0$:

- $G(r) \sim \frac{1}{r^{d-2+\eta}}$;
- $\xi \sim |t|^{-\nu}$.

Gli esponenti η e ν sono detti *esponenti di correlazione*. Con questi sei esponenti è possibile descrivere il comportamento del sistema nelle vicinanze del punto critico. Se invece di un ferromagnete si vuole descrivere un fluido, basta scambiare la magnetizzazione con la differenza di densità $\rho_l - \rho_v$, il calore specifico a campo magnetico costante con quello a volume costante, e la suscettività con la compressibilità. Inoltre risulta $p - p_c \sim |\rho_l - \rho_v|^\delta \text{sign}(\rho_l - \rho_v)$.

Osservazione: a questo livello potremmo sospettare che α e γ possano non essere gli stessi se ci avviciniamo alla temperatura critica da destra oppure da sinistra, tuttavia secondo gli esperimenti, nei limiti delle incertezze, è effettivamente così e per adesso ci accontentiamo.

Ci possiamo aspettare che questi esponenti critici cambino di sistema in sistema, così come cambia la temperatura critica. In realtà le variazioni degli esponenti risultano essere completamente scollegate da quelle della temperatura critica, anzi risulta che gli esponenti critici sono gli stessi per una grande varietà di sistemi: ad esempio tutti i fluidi hanno $\beta = 0,335(5) \simeq \frac{1}{3}$. Questo comportamento è strano e notevolissimo, la prima cosa che osserviamo è che oltre ai fluidi ci sono ferromagneti con gli stessi esponenti (ad esempio ferromagneti con magnetizzazione di tipo Ising, cioè descrivibile mediante un parametro d'ordine scalare). Questa proprietà prende il nome di *universalità*.

Inoltre, non soltanto gli esponenti sono universali, ma sono pure collegati tra loro: utilizzando le relazioni tra le grandezze termodinamiche si può dimostrare infatti che

$$\gamma + 2\beta + \alpha \geq 2 \quad (a)$$

tale relazione deriva dall'equazione

$$\chi(C_H - C_M) = T \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)^2$$

Gli esperimenti verificano questa relazione, anzi ci dicono che la disuguaglianza è in realtà un'uguaglianza. Ci sono altre tre relazioni:

$$\alpha + \beta(\delta + 1) = 2 \quad (b)$$

$$(2 - \eta)\nu = \gamma \quad (c)$$

$$\nu d = 2 - \alpha \quad (d)$$

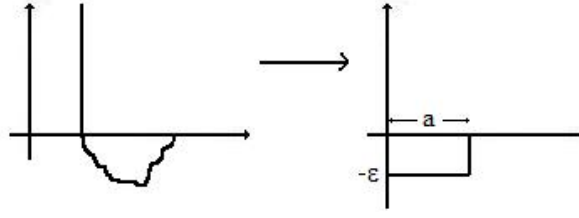
ma quest'ultima relazione non è valida per tutte le dimensioni, viceversa (a) e (b) vengono fuori come disuguaglianza, da considerazioni termodinamiche. Queste quattro relazioni fanno sì che soltanto due dei sei esponenti siano indipendenti.

—>26/5/08<—

Esistono quantità che sono le stesse per una intera classe di sistemi e si può pensare che anche modelli minimali possano fare previsioni corrette. Il primo modello che analizziamo è il gas reticolare; partiamo dalla funzione di partizione di un fluido interagente:

$$Z = \lambda^{3N} \int d^{3N} q e^{-\beta V(\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_N)} = Z_k Z_c$$

Trascuriamo il contributo cinetico Z_k , e identifichiamo Z con $Z_c = \int d^{3N} q e^{-\beta V(\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_N)}$. Assumiamo adesso che le particelle stiano su un reticolo, e supponiamo esista una forza repulsiva tra di esse, in modo che su ogni sito ci possa stare al massimo una particella. Tra ogni particella e i suoi primi vicini c'è una forza



attrattiva, che contribuisce all'energia con un $-\epsilon$, questo equivale a minimalizzare un potenziale di tipo van Hove:

Definiamo poi la variabile τ_i , legata all' i -esimo sito reticolare:

$$\tau_i = \begin{cases} 0, & \text{se non c'è alcuna particella nel sito;} \\ 1, & \text{se c'è.} \end{cases}$$

Allora la funzione di partizione si può scrivere come:

$$Z = \sum_{\tau_i} \delta_{\sum \tau_i, N} \exp \left[\beta \epsilon \sum_{\langle i, j \rangle} \tau_i \tau_j \right]$$

dove la $\delta_{\sum \tau_i, N}$ ci assicura che il sistema sia costituito da N particelle. Si può descrivere il sistema anche nel grancanonico:

$$Z_{gc} = \sum_{N=0}^{\infty} e^{\beta \mu N} Z$$

e vediamo che oltre alla profondità della buca, parametrizzata da ϵ , adesso è comparso come nuovo parametro anche il potenziale chimico μ :

$$= \sum_{N=0}^{\infty} e^{\beta \mu N} \sum_{\{\tau_i\}} \delta_{\sum \tau_i, N} \exp \left[\beta \epsilon \sum_{\langle i, j \rangle} \tau_i \tau_j \right]$$

Se scambiamo le somme:

$$= \sum_{\{\tau_i\}} \sum_{N=0}^{\infty} \delta_{\sum \tau_i, N} e^{\beta \mu N} \exp \left[\beta \epsilon \sum_{\langle i, j \rangle} \tau_i \tau_j \right]$$

Sfruttiamo adesso la $\delta_{\sum \tau_i, N}$ per mandar via una somma:

$$\sum_{\{\tau_i\}} e^{\beta \mu \sum_i \tau_i} e^{\beta \epsilon \sum_{\langle i, j \rangle} \tau_i \tau_j}$$

e osserviamo che la funzione di partizione grancanonica è diventata una funzione di partizione canonica per un modello con un termine in più:

$$H = -\epsilon \sum_{\langle i, j \rangle} \tau_i \tau_j - \mu \sum_i \tau_i$$

É possibile fare delle simulazioni numeriche, e si scopre che questo oggetto si comporta qualitativamente come un fluido, infatti se misuriamo gli esponenti critici troviamo proprio quelli dei fluidi. Questa proprietà va sotto il nome di *universalità*.

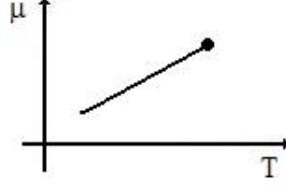


Figura 3: Diagramma di fase per un gas su reticolo

Esiste una linea di coesistenza, $\mu^* = \mu^*(T)$:

Come parametro d'ordine scegliamo il valor medio di τ , $\langle \tau \rangle$; nella fase gassosa abbiamo $\langle \tau \rangle = 0$. La forma del diagramma di fase è sbagliata ma il risultato è corretto (?). Definiamo $\sigma_i = 2\tau_i - 1$ (in modo che σ_i possa assumere come valori soltanto 1 e -1), $J = \frac{\epsilon}{4}$ e $\tilde{H} = \frac{\mu + z\epsilon}{2}$, dove z è il numero di primi vicini che ha ogni sito, ed è legato alla dimensionalità del sistema e alla forma del reticolo: ad esempio per un reticolo cubico tridimensionale si ha $z = 3d$. Possiamo riscrivere l'hamiltoniana come:

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j - \tilde{H} \sum_i \sigma_i$$

che è un modello di Ising. Questo ci fa capire che un magnete e un fluido hanno gli stessi esponenti critici perchè sono descritti dallo stesso modello minimale. Mettere a zero il campo estero \tilde{H} equivale a selezionare un particolare valore del potenziale chimico; in realtà però il modello di Ising non descrive correttamente nessun ferromagnete, (a parte MnF_2), perchè si presuppone che la variabile magnetica possa assumere soltanto due valori. Il modello di Ising descrive bene i fluidi e le transizioni da ordine a disordine con un parametro d'ordine scalare; questo modello non ha transizioni di fase in dimensione 1, e a temperatura finita; in dimensione 2 si può risolvere esattamente (Onsager 1944), mentre in dimensione 3 non si sa ancora fare. Per quanto riguarda le proprietà di simmetria, se mettiamo il campo esterno a zero il modello diventa invariante sotto ribaltamento simultaneo di tutti gli spin:

$$R; \sigma_i \rightarrow -\sigma_i \quad \forall i$$

$$\Rightarrow R = -I$$

Se prendiamo la trasformazione R e l'identità, $\{I, -I\}$, con la moltiplicazione tra matrici queste formano un gruppo, Z_2 , dunque il modello di Ising è invariante sotto Z_2 . Tale simmetria a volte viene detta simmetria di *time-reversal*.

Esistono dei modelli che si comportano diversamente, ad esempio il modello ϕ^4 , che descrive campi su reticolo. In campo esterno nullo si ha:

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \phi_i \phi_j + \sum_i \left(-\frac{1}{2} a \phi_i^2 + \frac{1}{4} b \phi_i^4 \right) \quad (a, b > 0)$$

Tale modello si comporta come il modello di Ising; in assenza di interazioni il sistema sta in una delle due buche di potenziale, in presenza di interazioni invece preferisce (????).

Un altro modello è il modello sferico, dovuto a Berlin e Kac; l'interazione è della forma:

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \phi_i \phi_j$$

e in più c'è il vincolo che $\sum_i \phi_i^2 = N$. Tale vincolo viene aggiunto per mantenere il fatto che nel modello di Ising le variabili avessero quadrato 1. Il modello si risolve esattamente in tutte le dimensioni; ci aspettiamo che abbia gli stessi esponenti critici del modello di Ising, ma non è così perchè l'aggiunta del vincolo fa sì che le interazioni da primi vicini diventino a lungo raggio.

Modelli per i magneti

Consideriamo adesso il *modello di Heisenberg*; è simile al modello di Ising, con la differenza che stavolta gli spin non sono più variabili scalari bensì vettori:

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j - \vec{H} \cdot \sum_i \vec{S}_i$$

Questi modelli sono chiaramente invarianti sotto $O(3)$. Esistono poi i modelli di tipo $O(n)$, di cui il modello di Heisenberg è un caso particolare per $n = 3$; per $n = 2$ si ha il cosiddetto *modello XY*. La cosa interessante di questi modelli è che se si prende il limite $n \rightarrow \infty$ si ritrova il modello sferico; la dimostrazione di questo fatto è dovuta a Stanley, 1960. Nel caso di $O(3)$ e $O(2)$, che sono gruppi continui, le transizioni di fase richiedono dimensione del sistema maggiore di 2, mentre per $O(1)$ è sufficiente $dim > 1$. Una eccezione è rappresentata dal modello *XY*, in cui si ha la transizione di fase di Berezinsky-Kosterlitz-Thouless, che è continua ma non rompe alcuna simmetria.

L'universalità divide allora i sistemi fisici in classi di universalità, ognuna delle quali presenta gli stessi esponenti critici per ogni sistema che descrive; il nome di ogni classe è scelto in base ai rispettivi modelli minimali. In realtà, mentre per ogni N nei modelli $O(N)$ si ha una classe diversa, non si ha lo stesso comportamento se si cambia la dimensionalità del sistema.

La teoria delle transizioni di fase e dei fenomeni critici inizia con Van der Waals; l'equazione di Van der Waals è la prima che fa vedere che c'è un fenomeno strano (osservazione dovuta a Maxwell, 1850). Nel 1907 Weiss costruisce la prima teoria fenomenologica per i magneti (teoria del campo molecolare), che spiegava le misure di Curie. Nel 1937 fu fatto un gigantesco passo in avanti da Landau, il quale fece una teoria che prediceva l'esistenza dell'universalità. Tuttavia l'universalità di Landau era eccessiva, inoltre prediceva esponenti critici sbagliati, anche se all'inizio sembravano consistenti a causa della scarsa precisione sperimentale.

L'altro punto di rottura fu la soluzione di Onsager (1944); fino al 1965 la situazione restò la solita, finché alla prima conferenza internazionale sui fenomeni critici, Uhlenbeck riconciliò i risultati di Onsager con quelli di Van der Waals. Widom, Fisher e Griffiths a livello fenomenologico proposero una equazione di stato per un ferromagnete:

$$H = M^\delta \psi(tM^{-\frac{1}{\beta}}) \quad (M > 0)$$

mentre per i fluidi:

$$p - p_c = (\rho - \rho_c)^\delta \psi(t(\rho - \rho_c)^{-\frac{1}{\beta}})$$

Se sostituiamo $\delta = 3$, $\beta = \frac{1}{2}$, e se ψ è una funzione lineare, si riottiene le teorie di Landau e Weiss. Viceversa, aggiustando i valori e prendendo una funzione non lineare, i conti tornavano, ed erano soddisfatte anche le relazioni tra gli esponenti critici. Se riportiamo in grafico $HM^{-\delta}$ vs $tM^{-\frac{1}{\beta}}$, otteniamo che molti sistemi stanno più o meno sulla stessa curva (ipotesi di Schering (?)).

Il problema è che non si aveva idea di come si potessero derivare questi dati da una teoria; Domb affermò che tali risultati non avevano una derivazione matematica. Kadonoff e Wilson proposero la soluzione, introducendo la teoria del gruppo di rinormalizzazione (1972). Ci sono stati anche dei risultati più generali, che non si limitavano alle transizioni di fase al punto critico (1950, teoria di Landau).

Per quanto riguarda gli aspetti concettuali, c'erano dei grossi problemi. Si potrebbe pensare che in ambito meccanico statistico le transizioni di fase non siano possibili; ad esempio, la teoria del campo molecolare non discende dalle ipotesi della meccanica statistica, e ci possiamo chiedere cosa succederebbe se non mettessimo a mano le singolarità. Negli anni 30-40 si era già scoperto quasi tutto in ambito di meccanica statistica classica e quantistica, e si discuteva se la meccanica statistica dell'equilibrio fosse in grado di descrivere le transizioni di fase. Perché si diceva che non era possibile? Nel canonico, la funzione di partizione per un sistema finito con N gradi di libertà è:

$$Z = \int d^N p d^N q e^{-\beta H(p,q)}$$

Tale funzione è l'integrale di un esponenziale, la funzione analitica per eccellenza, dunque essendo una somma di esponenziali il risultato resta analitico, anche se ne prendiamo il logaritmo. Questo viceversa non è vero nel microcanonico, poichè la densità degli stati in generale non è analitica. Si può pensare allora di trattare uno stesso sistema con due hamiltoniane diverse, a seconda che un certo parametro assuma un valore maggiore o minore di un valore critico; ma Kramers nel 1938 mostrò che questo ragionamento era sbagliato, e osservò che nel limite termodinamico le singolarità non avevano motivi per non essere presenti: quello che si deve dimostrare è che la successione di funzioni $\{f_N\} = -\frac{1}{\beta N} \log Z_N$ ammette limite; tuttavia, anche se esiste $\lim_N f_N = f$, questo può non essere necessariamente una funzione analitica, allora sarà possibile descrivere transizioni di fase con una unica funzione di partizione, ma con l'obbligo di prendere il limite termodinamico. Questa idea fu in qualche modo "verificata" da Onsager, per la cui soluzione era cruciale il limite termodinamico, ma si pensava comunque che fosse un caso particolare. Nel 1952 comunque con i lavori di Lee e Yang si chiarì tutto.

	Ising $n = 1$ $d = 2$	Ising $n = 1$ $d = 3$	XY $n = 2$ $d = 3$	Heisenberg $n = 3$ $d = 3$	Sferico $n = \infty$ $d = 3$
α	0 (log)	0.1	0.01	-0.12	-1
β	1/8	0.33	0.34	0.36	1/2
γ	7/4	1.24	1.30	1.39	2
δ	15	4.8	4.8	4.8	5
η	1	0.63	0.66	0.71	0
ν	1/4	0.04	0.04	0.04	1
	monolayers adsorbiti (H su Fe)	fluidi ordine-disordine	superfluidi	ferromagneti	?

La teoria di Lee e Yang

La teoria di Lee e Yang prevedeva la possibilità dell'esistenza di singolarità della funzione di partizione nel limite termodinamico, e si basa sul presupposto che se vogliamo studiare l'analiticità di una funzione si deve passare al piano complesso. A tutt'oggi questa teoria è l'unica capace di spiegare transizioni di fase continue e discontinue, e il lavoro originale risale al 1952. La teoria originale era sviluppata nell'insieme grancanonico e trattava un fluido; si promuove il potenziale chimico, o meglio la fugacità $e^{\beta\mu}$, da reale a complessa. In realtà, negli anni 70 Michael Fisher mostrò che si poteva raggiungere gli stessi risultati anche passando da una funzione di partizione canonica. Sarà la $Z(\beta)$ stavolta che diventerà funzione di variabile complessa, ed è questo approccio che noi useremo.

Consideriamo un sistema che può avere soltanto valori discreti per l'energia; assumiamo dunque che $H = n\epsilon$ con n intero, ma non è detto che tutti gli n siano possibili, ad esempio supponiamo $n = 0, 1, 2, \dots, M$. Se M è finito, è finito anche il massimo valore che l'energia può assumere, quindi anche N (ovvero ad esempio il numero massimo di possibili spin in un modello di Ising, o il numero di particelle). Si ha per la funzione di partizione:

$$Z_N(\beta) = \sum_{n=0}^M g(n) e^{-\beta n \epsilon}$$

dove $g(n)$ è la molteplicità del livello n -esimo. La cosa importante per il seguito è che tutti i $g(n)$ sono maggiori o uguali a zero, inoltre almeno uno di questi deve essere diverso da zero altrimenti la funzione di partizione è identicamente nulla.

Se M è finito, queste due proprietà garantiscono che Z sia una funzione analitica e strettamente positiva. La densità di energia libera si ottiene come:

$$f_N(\beta) = -\frac{1}{\beta N} \log Z_N(\beta)$$

ed è una funzione analitica. Assumiamo che $\beta \in \mathbb{C}$; è comodo definire $z = e^{-\beta\epsilon}$, e con questa definizione si ha:

$$Z_N(z) = \sum_{n=0}^M a_n z^n$$

cioè la funzione di partizione è un polinomio di grado M in z , dunque vale il teorema fondamentale dell'algebra: un polinomio di grado M ha esattamente M radici complesse. Avremo:

$$z_1, \dots, z_M : Z_N(z_i) = 0 \quad z_i \in \mathbb{C}$$

Possiamo riscrivere la funzione di partizione sviluppando il polinomio in termini degli zeri:

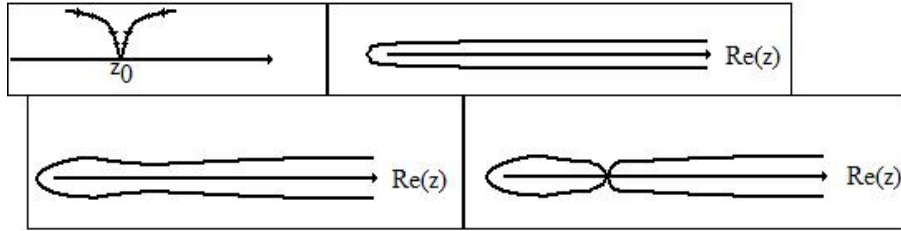
$$Z_N(z) = a_M \prod_{n=1}^M (z - z_n) = C \prod_{n=1}^M \left(1 - \frac{z}{z_n}\right)$$

$$C = (-1)^M a_M z_1 \cdots z_M$$

Per ogni $z \in \mathbb{C}$, esclusi gli zeri, possiamo definire $\log Z_N$. Identifichiamo per comodità $f_N(z)\beta \equiv f_n(z)$, per cui a meno di una costante:

$$f_N = \frac{1}{N} \log Z_N(z) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^M \log \left(1 - \frac{z}{z_n} \right)$$

Questo oggetto è analitico ovunque, a parte sugli zeri; esiste un teorema che ci assicura che siccome i coefficienti del polinomio sono tutti reali e positivi, allora nessuno degli zeri di questo polinomio può essere reale. É chiaro che se β è reale, anche z sarà reale; questo ci conferma (ed è possibile generalizzare al caso di energie continue) che per M finito non ci possono essere singolarità. Nel limite termodinamico questo oggetto ha degli zeri complessi, ma può succedere che qualcuno di questi zeri "migri" fin sull'asse reale. Potrebbe infatti succedere che esista $z_0 \in \mathbb{R}$ tale da essere sia un punto di accumulazione per gli zeri. Allora $f_N(\beta)$, come funzione su \mathbb{C} , ha uno sviluppo in serie definito fino a quando non incappa in uno degli zeri di Z_N .



Per N finito esiste di sicuro una striscia di analiticità (riquadro in alto a destra in figura), mentre per $N \rightarrow \infty$ ci possono essere delle mutamenti di questa striscia, che possono restare semplici deformazioni (basso a sx) oppure possono portare ad una accumulazione. In ogni caso l'energia libera non può fare salti poichè è una funzione continua, ma è libera di manifestare singolarità nelle proprie derivate.

Cerchiamo di far vedere adesso come questa teoria descrive le transizioni di fase; assumiamo innanzitutto che esista limite termodinamico, ed esista quindi il limite:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} f_N(z) = f(z)$$

Si può dimostrare che tale limite esiste, ma ometteremo la dimostrazione. Poichè la $f(z)$ si può scrivere come somma su tutti gli zeri, ognuno pesato con i coefficienti, faremo l'ipotesi che per $N \rightarrow \infty$ la somma si possa scrivere come un integrale:

$$f(z) = \int dz' \rho(z') \log \left(1 - \frac{z}{z'} \right)$$

Questo integrale sarà esteso ad un certo dominio del piano complesso, ed è dato dal modello che consideriamo. Definiamo adesso $\phi(z) = \text{Re}[f(z)] = \int dz' \rho(z') \log |1 - \frac{z}{z'}|$. Possiamo capire cosa lega le proprietà della $f(z)$ alla proprietà della densità degli zeri, introducendo una analogia formale con l'elettrostatica. Infatti, il $\log |z|$ è la funzione di Green del laplaciano in due dimensioni:

$$\nabla^2 \log |z| = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \log |x + iy| = 2\pi \delta(x) \delta(y)$$

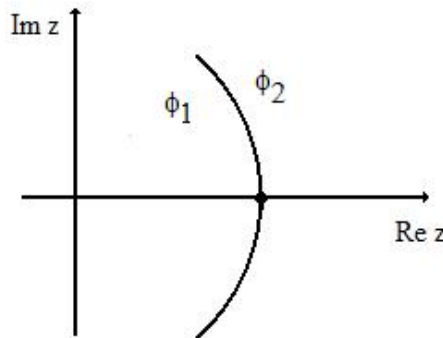
Allora possiamo prendere $\nabla^2 \phi(z)$:

$$\begin{aligned}\nabla^2 \phi(z) &= \int dz' \rho(z') \nabla^2 \log |1 - \frac{z}{z'}| = 2\pi \int dz' \rho(z') \delta(z - z') = 2\pi \rho(z) \\ \Rightarrow \rho(z) &= \frac{1}{2\pi} \nabla^2 \phi(z)\end{aligned}$$

dunque l'energia libera è del tutto analoga al potenziale elettrostatico, se interpretiamo ρ densità di zeri analogamente alla ρ densità di carica. A seconda della forma di $\rho(z)$ si ricavano le proprietà dell'energia libera.

Il potenziale elettrostatico V è analitico in assenza di sorgenti, ma in presenza di sorgenti compaiono delle non analiticità; le derivate del potenziale sono legate al campo elettrico (nel nostro caso all'energia libera). Analogamente, se nel limite termodinamico c'è una densità di zeri finita si avranno discontinuità (?) e non analiticità nell'energia libera. Finora abbiamo tacitamente ammesso che la distribuzione degli zeri sia integrabile, ma questo è ragionevole data l'analogia con la densità di carica elettrica.

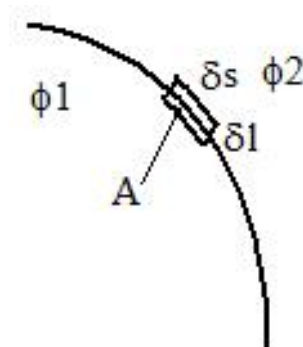
In che modo nascono le diverse fasi? È possibile che si abbiano due regioni diverse del piano complesso, in cui c'è una stessa ϕ che ha due sviluppi diversi, ϕ_1 e ϕ_2 ; si ha $\phi_1(z) \neq \phi_2(z)$, anche se entrambe soddisfano $\rho(z) = \frac{1}{2\pi} \nabla^2 \phi(z)$. Poichè sono funzioni analitiche, da qualche parte ci dev'essere una regione in cui i due sviluppi coincidono; per trovare tale regione, imponiamo $\phi_1(z) = \phi_2(z)$ e già sappiamo che queste regioni di equivalenza saranno quelle con gli zeri (?). In generale, se abbiamo due funzioni f e g su un piano, la regione di uguaglianza è di solito una curva, dunque ci aspettiamo che gli zeri si addensino su curve. Questa situazione descrive una transizione di fase fisica quando il dominio C (luogo degli zeri) arriva a tagliare l'asse reale:



Osserviamo che la curva è simmetrica per ribaltamento lungo l'asse reale.

Ci interessa sapere cosa succede intorno a z_0 : per capirlo, poichè non sappiamo a priori come saranno distribuiti gli zeri, parametrizzeremo la curva con una ascissa s , e chiameremo $\mu(s)$ la densità degli zeri. Prendiamo un piccolo cammino attorno alla curva di equivalenza; δl è molto piccolo e potremo scrivere che $\mu(s)\delta s$ è la quantità di "carica" dentro la regione:

$$\mu(s)\delta s = \int A\rho(z)dz$$



Usiamo adesso il fatto che ρ è legata a ϕ :

$$\int_A \rho(z) dz = \frac{1}{2\pi} \int dz \nabla^2 \phi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_A dz \nabla \cdot [\nabla \phi(z)] =$$

ma questo è il flusso di $\nabla \phi$ attraverso la regione A . Trascuriamo i contributi lungo δl per due motivi:

- δl è piccolo;
- la direzione di cambio drastico è quella normale alla curva.

In definitiva si ha:

$$= \frac{1}{2\pi} [\nabla \phi_2 \cdot \vec{n} \delta s - \nabla \phi_1 \cdot \vec{n} \delta s]$$

La funzione ϕ però è analitica fuori dalla curva, e valgono le condizioni di Cauchy-Riemann:

$$\phi(z) = \text{Re}[f(z)], \psi(z) = \text{Im}[f(z)]$$

$$\partial_x \phi(z) = \partial_y \psi(z)$$

$$\partial_y \phi(z) = -\partial_x \psi(z)$$

Se introduciamo il versore tangente $\vec{t} \perp \vec{n}$, le condizioni di Cauchy-Riemann si riformulano come:

$$\nabla \phi \cdot \vec{n} = \nabla \psi \cdot \vec{t}$$

In base a questo riscriviamo il flusso come:

$$\frac{1}{2\pi} [\nabla \psi_2 \cdot \vec{t} - \nabla \psi_1(z) \cdot \vec{t}] \delta s$$

ma per definizione questo è:

$$= \frac{\delta s}{2\pi} \left[\frac{d}{ds} (\psi_2(z) - \psi_1(z)) \right]$$

Allora si ha:

$$\mu(s) \delta s = \frac{\delta s}{2\pi} \left[\frac{d}{ds} (\psi_2 - \psi_1) \right]$$

$$\Rightarrow \mu(s) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{d}{ds} (\psi_2 - \psi_1) \right]$$

In che modo diverse densità danno origine a diversi comportamenti non analitici? Il termine noto in z_0 deve essere lo stesso perchè la funzione f è continua, dunque avremo:

$$f_1 = f(z_0) + b_1(z - z_0) + c_1(z - z_0)^2 + \dots \quad (\operatorname{Re}[z - z_0] < 0)$$

$$f_1 = f(z_0) + b_2(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots \quad (\operatorname{Re}[z - z_0] > 0)$$

Una condizione che si vede subito è che tutti i coefficienti sono reali, perchè in $z = z_0$ la funzione è reale (??? $z = z_0$ o $\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} z_0$??). È conveniente cambiare coordinate ed andare intorno a z_0 :

$$\tilde{z} = z - z_0$$

$$\Rightarrow \tilde{x} = \operatorname{Re} \tilde{z}$$

$$\tilde{y} = \operatorname{Im} \tilde{z}$$

Assumiamo che $c_2 \neq c_1$ (è un caso possibile). A questo punto, se imponiamo la continuità, si può trovare l'equazione della curva intorno a $\tilde{z} = 0$:

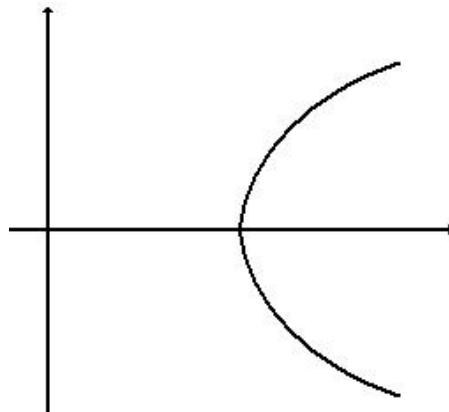
$$\tilde{y}^2 = \tilde{x}^1 + \frac{b_2 - b_1}{c_2 - c_1} \tilde{x}$$

Abbiamo deciso che ci basta fermarci al second'ordine; imponendo che la parte reale sia continua si ottiene la curva.

Vediamo i vari casi:

1. supponiamo che $b_2 \neq b_1$; questo equivale ad assumere che la derivata prima non esista nel punto $z = z_0$, dunque l'energia interna ha un salto. Se prendiamo il limite $\tilde{x}, \tilde{y} \rightarrow 0$, la curva è una parabola:

$$\tilde{y} = \pm \sqrt{a\tilde{x}}$$



Possiamo legare la derivata rispetto ad s con la derivata rispetto a \tilde{y} : scriveremo che

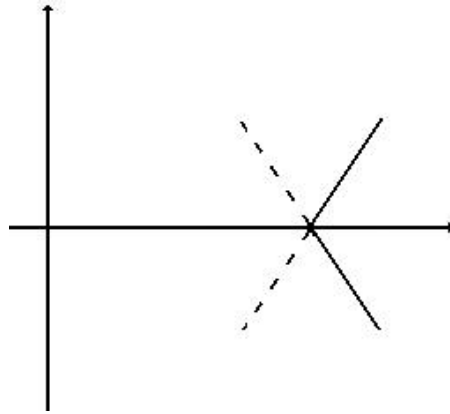
$$\begin{aligned} \mu(0) &= \frac{1}{2\pi} \frac{d}{d\tilde{y}} (\psi_2(\tilde{x}, \tilde{y}) - \psi_1(\tilde{x}, \tilde{y}))|_{\tilde{x}, \tilde{y}=0} = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{d\tilde{y}} ((b_2 - b_1\tilde{y} + 2(c_2 - c_1)\tilde{x}\tilde{y}))|_{\tilde{x}, \tilde{y}=0} \\ &\Rightarrow \mu(0) = \frac{b_2 - b_1}{2\pi} \end{aligned}$$

Allora, quando gli zeri sono addensati in modo che la densità sia finita quando si taglia l'asse reale, la f salta nella derivata.

2. $b_1 = b_2$; vediamo che per consistenza la densità di zeri non è finita in zero, ma si annulla. La curva di prima degenera in due rette:

$$\tilde{y}^2 = \tilde{x}^2$$

$$\tilde{y} = \pm \tilde{x}$$



Le rette per $Re[z_0] < 0$ sono tratteggiate perchè gli zeri sono complessi coniugati (???). Definiamo una ascissa curvilinea come:

$$\tilde{x} = \tilde{y} = \frac{s}{\sqrt{2}}$$

da cui si ha:

$$\mu(s) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{ds} [(c_2 - c_1)s^2] = \frac{c_2 - c_1}{\pi} s$$

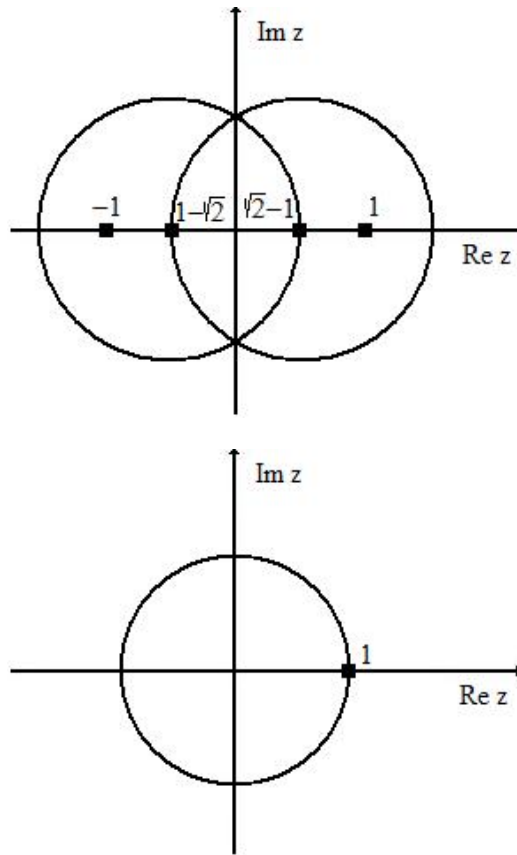
La transizione di fase è continua, la derivata di ordine successivo (dell'energia interna??) non fa un salto. La densità di zeri tende linearmente a zero avvicinandosi al punto $\tilde{z} = 0$.

In generale, tutte le volte che $\mu(s) \rightarrow 0$, si ha una transizione di fase continua, mentre se è finita la transizione di fase è discontinua. Si può anche vedere che c'è un salto nel calore specifico, dunque il coefficiente α sarà uguale a zero, perchè non si ha una divergenza ma un salto. Si può far vedere che in generale $\mu(s)\tilde{s}^{1-\alpha}$, in un intorno di $s = 0$ dove α è sempre l'esponente critico del calore specifico.

Nel canonico funziona quindi tutto, in linea di principio potremmo pensare di aver concluso. Il problema è che è una teoria poco pratica, perchè calcolare $\mu(s)$ è solitamente una pratica disumana. Non esistono neanche metodi numerici che garantiscano la convergenza nella ricerca degli zeri di una funzione in tutto il piano complesso. Si hanno comunque dei risultati esatti, ad esempio il modello di Ising in due dimensioni: si possono trovare tutti gli zeri e si mostra che stanno su due cerchi:

Stavolta si ha $z = \tanh(\beta J)$ dove J è il J del modello di Ising, e i punti interessanti sono quelli per $\beta J > 0$ (ferromagneti) e $\beta J < 0$ (antiferromagneti). $\sqrt{2} - 1$ è proprio la temperatura critica del modello di Ising, mentre $1 - \sqrt{2}$ è la temperatura critica per gli antiferromagneti.

Un altro risultato esatto è nel lavoro originale di Lee e Yang: nel caso di un modello di Ising in presenza di campo esterno (situazione equivalente a un fluido, nel grancanonico, con potenziale chimico assegnato) gli zeri si distribuiscono sul cerchio unitario:



Stavolta $z = e^{\beta H}$, dove H è il campo esterno, e $z = 1$ corrisponde all'annullarsi del campo stesso.
 —>28/5/08<—

Il modello ipercubico

La funzione di partizione del modello ipercubico era:

$$Z_N(\beta) = \left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^{\frac{N}{2}} [2a^N + (b^N - 2a^N)e^{-\beta v_c N}]$$

dove $a, b > 1$ e $b > 2a$. Il sistema ha una transizione di fase discontinua per $\beta_c = \frac{1}{v_c} \log \frac{b}{a}$. Calcoliamoci l'energia interna:

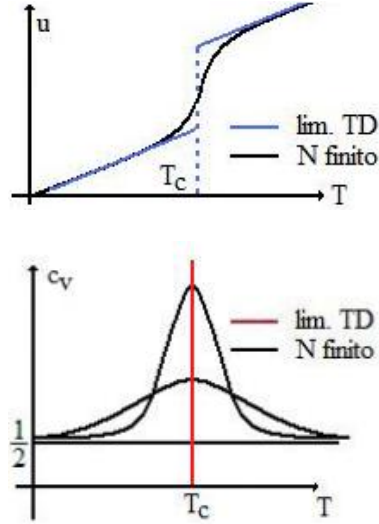
$$u(\beta) = \frac{\partial}{\partial \beta} \log Z = \frac{1}{2\beta} \frac{(b^N - 2a^N)v_c e^{-\beta N v_c}}{2a^N + (b^N - 2a^N)e^{-\beta N v_c}}$$

Nel limite $N \rightarrow \infty$ si ha:

$$u_\infty(\beta) = \begin{cases} \frac{1}{2\beta}, & \text{se } \beta > \beta_c; \\ \frac{1}{2\beta} + v_c, & \text{se } \beta < \beta_c. \end{cases}$$

La situazione è la seguente:

La derivata seconda, il calore specifico, è una funzione analitica:



Osservazione: non ci interessa tutta la funzione di partizione, ma soltanto la parte configurazionale, dato che la Z_k non si annulla mai per β reali positivi:

$$Z_N^c = [2a^N + (b^N - 2a^N)e^{-\beta v_c N}]$$

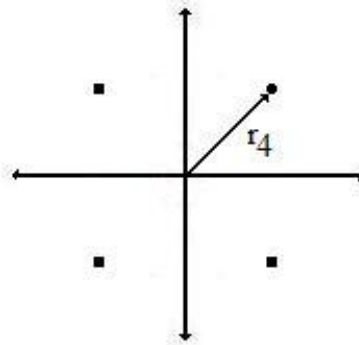
É naturale porre $z = e^{-\beta v_c}$:

$$\Rightarrow Z_N^c = [2a^N + (b^N - 2a^N)z^N]$$

Gli zeri di questo oggetto sono le soluzioni z_0 di $Z_N(z_0) = 0$, quindi:

$$z_0^N = \frac{2a^N}{2a^N - b^N} \Rightarrow z_0 = \left(\frac{2a^N}{2a^N - b^N} \right)^{\frac{1}{N}} = (-1)^{\frac{1}{N}} \left(\frac{2a^N}{2a^N - b^N} \right)^{\frac{1}{N}}$$

Abbiamo quindi N zeri distinti, le N radici complesse di -1 , che stanno su un cerchio. Chiamiamo $r_N = \left(\frac{2a^N}{2a^N - b^N} \right)^{\frac{1}{N}}$, dunque $z_0 = e^{i\frac{(2k+1)\pi}{N}} r_N$, per $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$; ad esempio, se $N = 4$ abbiamo:



Per $N \rightarrow \infty$ si ha:

$$r_\infty = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{2a^N}{b^N - 2a^N} \right)^{\frac{1}{N}} = \frac{a}{b}$$

In tal caso si ha una circonferenza densa di zeri: ogni punto della circonferenza è un punto di accumulazione per gli zeri della funzione di partizione. Deve risultare $r_\infty = e^{-\beta_c v_c} = \frac{a}{b} \Rightarrow \beta_c = \frac{1}{v_c} \log\left(\frac{a}{b}\right)$. Poichè la densità di zeri è finita, ci aspettiamo una transizione di fase discontinua.

Abbiamo fatto tutto questo discorso nel canonico, ma si può mostrare che nel grancanonico si ottengono gli stessi risultati. Nel microcanonico che succede? Fino a poco tempo fa si pensava che fosse tutto uguale, ma non c'è nessuno motivo per cui a priori debba essere proprio così. Non esiste infatti un teorema che dice che l'entropia $S(E)$ sia sempre una funzione analitica a N finito. Andiamo dunque a studiare la densità di entropia microcanonica a N finito: nel limite termodinamico $s(\epsilon)$ ha un punto di singolarità per $\epsilon^* = \frac{v_c}{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2}$.

Per N finito invece si ha:

$$s_N(\epsilon) = \begin{cases} A + \frac{1}{2} \log \epsilon, & \text{se } \epsilon < v_c; \\ B + \frac{1}{N} \log[2a^N (2N\epsilon)^{\frac{N}{2}} + (b^N - 2a^N)[2N(\epsilon - v_c)]^{\frac{N}{2}}], & \text{se } \epsilon > v_c. \end{cases}$$

A e B sono tali che S_N sia continua in v_c ; ci sarebbe una singolarità in $\epsilon = 0$ ma ce ne fregiamo. È vero che s_N è analitica per il valore ϵ^* , che è maggiore di v_c , quindi a occhio sembrerebbe che le cose vadano come nel canonico. Tuttavia nel punto $\epsilon = v_c$ nessuno ci garantisce che sia derivabile:

$$\frac{\partial S}{\partial \epsilon} = \begin{cases} \frac{1}{2\epsilon} \\ \frac{1}{N} \frac{2a^N \frac{N}{2} (2N\epsilon)^{\frac{N}{2}} \epsilon^{\frac{N}{2}-1} + N^2 (b^N - 2a^N) [2N(\epsilon - v_c)]^{\frac{N}{2}-1}}{2a^N (2N\epsilon)^{\frac{N}{2}} + (b^N - 2a^N) [2N(\epsilon - v_c)]^{\frac{N}{2}}} \end{cases}$$

Se $N > 2$ la funzione è ancora continua:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow v_c^-} s'_N = \frac{1}{2v_c}$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow v_c^+} s'_N = \frac{1}{N} \frac{2N^2 a^N (2Nv_c)^{\frac{N}{2}-1}}{2a^N (2Nv_c)^{\frac{N}{2}}} = \frac{1}{2v_c}$$

Se $N = 2$ però la funzione non è analitica:

$$s'(v_c^-) = \frac{1}{2v_c}$$

$$s'(v_c^+) = \frac{1}{4} \frac{b^2}{a^2 v_c}$$

Dunque questa funzione non è analitica per $N = 2$. Per $N = 3$? Si verifica che la derivata prima è continua, mentre la derivata seconda no, dunque la non analiticità si vede ad un ordine superiore; quindi se la derivata prima è legata alla temperatura, la derivata seconda è collegata al calore specifico. In generale avremo che per un sistema a N gradi di libertà, la derivata k -esima diverge se $k > \frac{N}{2}$

$$x = \epsilon - v_c$$

$$\frac{d^k}{dx^k} (x^{\frac{N}{2}}) \alpha x^{\frac{N}{2}-k}$$

In generale nel modello ipercubico possiamo dire che s_N a N finito non è mai analitica. la non analiticità si manifesta con la non definizione in un punto di una derivata di ordine proporzionale al numero di particelle del sistema. L'entropia inoltre è tanto più analitica quanto N è grande, e in ogni caso la non analiticità che si ha nel limite termodinamico è per un valore diverso da quello considerato adesso, v_c .

Si potrebbe pensare che questo sia solo un modello matematico, quindi poco fisico, in realtà si osserva che questa situazione è proprio quella tipica, e le cose vanno in generale come nel modello ipercubico. Possiamo vedere perchè l'entropia a N finito non può essere una funzione analitica: S è proporzionale al $\log \omega(E)$, ma

$$\omega(E) = \frac{1}{C} \int_{\Sigma_E} \frac{d\Sigma}{|\nabla H|}$$

Sappiamo che ∇H può essere zero (assenza di forze), dunque ogni sistema meccanico che ammetta punti stazionari ha una $\omega(E)$ non analitica. I valori pericolosi dell'energia sono quelli per cui ∇H si annulla, e poichè $\frac{1}{|\nabla H|}$ è integrato sulla misura, il risultato dipende da com'è fatta la misura stessa. Si osserva che più N è grande e più la misura è capace di assorbire le singolarità; da argomenti generali si può sospettare che $\omega(E)$ sia non analitica, e la sua non analiticità si veda da un certo ordine di derivata in poi. Gli ultimi risultati (M. Kastner, O. Scnetz, S. Schreiber) dicono questo è fondamentalmente vero per hamiltoniane generiche, ma di questo non c'è dimostrazione; la dimostrazione esiste soltanto per hamiltoniane del tipo standard:

$$H = \sum_i \frac{p_i^2}{2m} + V(q_1, \dots, q_N)$$

La restrizione che si deve fare è quella di considerare i cosiddetti *potenziali confinanti*:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} V(\lambda q) = \infty$$

ovvero il sistema è confinato in una regione finita; c'è infatti il sospetto che per potenziali non confinanti il risultato non sia valido.

In generale una funzione di N variabili possiede un certo numero di punti stazionari:

$$\exists q_c : dV(q_c) = 0$$

tali punti hanno vari nomi (punti di sella, punti critici), e corrispondono a punti di massimo, minimo o sella. Se i punti critici sono non degeneri, ovvero il determinante hessiano del potenziale calcolato in q_c è diverso da zero, si ha che i punti critici sono isolati, ovvero non costituiscono una varietà. Quando accade questo la funzione V si dice *funzione di Morse*. In generale, una funzione è di Morse: si dimostra che le funzioni di Morse sono dense nello spazio delle funzioni regolari. Si dimostra inoltre che se $V(q)$ non è di Morse, basta perturbarla:

$$\tilde{V}(q) = V(q) + \sum_{i=1}^N h_i q_i$$

con coefficienti h_i piccoli a piacere, in modo che se $V(q)$ non è di Morse, $\tilde{V}(q)$ lo è. Se un potenziale è invariante sotto simmetrie continue, non è di Morse.

I risultati finora elencati sono validi per una $\omega(E)$ scritta restringendosi solo al contributo configurazionale. In definitiva: la densità degli stati configurazionale in generale è non analitica, se V è una funzione di Morse, e dato il potenziale la parte singolare si conosce esattamente. La densità degli stati è analitica per derivate di ordine $\frac{N}{2}$, ovvero sono continue tutte le derivate fino all'ordine $\frac{N-3}{2}$, e si può vedere esplicitamente la non analiticità della derivata successiva. La non analiticità scompare nel limite termodinamico.

Dunque, in generale $\omega(E)$ non è analitica, allora si osserva che la descrizione canonica e quella microcanonica sono diverse, ma se N è abbastanza grande il segnale delle singolarità non si vede.

Domanda: le singolarità sono transizioni di fase oppure no? In realtà sì, poichè noi chiamiamo transizione di fase ogni comportamento non analitico di una funzione macroscopica del sistema.

Per il microcanonico può non essere molto sensato, poichè più il sistema è grande più i dettagli contano meno e ci avviciniamo ad una descrizione termodinamica; inoltre, in generale quanti sono i punti critici di una funzione di Morse? Ci sono stime che dicono che il numero di punti critici va come e^N , ma in realtà quello che conta è il numero di valori dell'energia per cui si hanno punti critici, e in generale $N_{E_c} \propto N$. In generale si avrebbe un insieme denso di valori dell'energia per cui si hanno transizioni di fase. Da un punto di vista matematico non ci sono problemi, ma da un punto di vista fisico è poco soddisfacente perchè bisognerebbe usare sistemi piccoli e contemporaneamente essere sicuri che siano ben descritti da un insieme microcanonico. La cosa curiosa (e non ancora risolta) è che ci sono alcuni risultati esatti, teoremi e congetture che fanno pensare che tra alcune di queste singolarità ci siano proprio quelle che inducono le transizioni di fase. Esiste un teorema: se le interazioni sono a corto raggio, non ci possono essere transizioni di fase se non ci sono punti critici del potenziale; ovvero le transizioni di fase vengono da quei punti, anche se essi nel limite termodinamico scompaiono.

—>3/6/08<—

(primi 20 minuti)

Prendiamo in considerazione un ferromagnete di tipo Ising:

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j - H \sum_i \sigma_i$$

Tutto quello che diemo adesso vale anche per un modello ϕ_4 . Per $H = 0$ c'è simmetria Z_2 , ma ovviamente è vero che anche avendo un H qualsiasi, si ha:

$$\mathcal{H}(\{\sigma\}, H) = \mathcal{H}(\{-\sigma\}, -H)$$

Per la funzione di partizione si ha:

$$Z(\beta, -H) = \sum_{\{\sigma\}} e^{-\beta \mathcal{H}(\{\sigma\}, -H)}$$

ma osserviamo che la somma su tutte le configurazioni di $e^{-\beta \mathcal{H}}$ è equivalente a sommare su tutte le configurazioni con gli spin ribaltati:

$$\Rightarrow Z(\beta, -H) = \sum_{\{\sigma\}} e^{-\beta \mathcal{H}(\{-\sigma\}, -H)} =$$

utilizziamo adesso la proprietà dell'hamiltoniana:

$$= \sum_{\{\sigma\}} e^{-\beta \mathcal{H}(\{\sigma\}, H)} = Z(\beta, H)$$

dunque Z è pari in H , e i logaritmi mantengono la parità, dunque anche per l'energia libera risulta:

$$F(\beta, H) = F(\beta, -H)$$

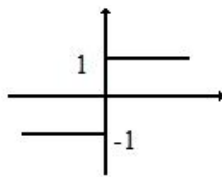
Per quanto riguarda la magnetizzazione:

$$M(H) = -\frac{\partial F(H)}{\partial H} = -\frac{\partial F(-H)}{\partial H} = -\frac{\partial F(-H)}{\partial -H} = -M(-H)$$

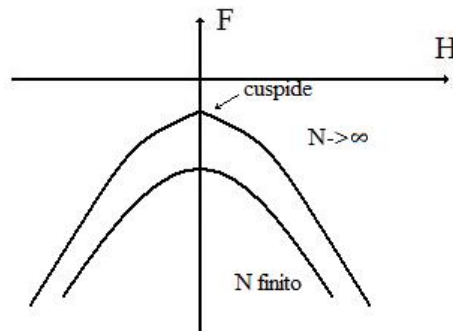
dunque la magnetizzazione è dispari in H ; questo significa che $M(0) = 0$ e dunque non esiste magnetizzazione spontanea. In realtà in questo discorso c'è un "bug" tecnico: questo vale finché N è finito, ma il fatto che se una funzione $f(x)$ è dispari, allora $f(0) = 0$ è vero solo se f è analitica.

Consideriamo ad esempio la funzione a gradino:

Dunque se M non è analitica c'è possibilità di magnetizzazione spontanea. La nostra energia libera ha una



non analiticità di questo tipo:



Si può mostrare che:

$$F(H) = F(0) + M_s |H| + O(H^\alpha) \quad (\alpha > 1)$$

Vediamo cosa succede quando $H \rightarrow 0$:

$$M = -\frac{\partial F}{\partial H} = \begin{cases} M_s, & \text{se } H \rightarrow 0^+; \\ -M_s, & \text{se } H \rightarrow 0^-. \end{cases}$$

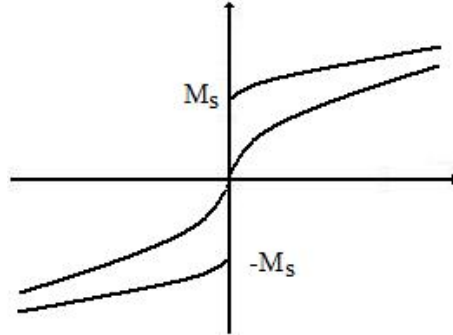
Ovviamente ci troviamo ad una temperatura minore di quella critica.

Dunque la magnetizzazione può essere vista come il limite:

$$M_s = \lim_{H \rightarrow 0^+} F_\infty(H)$$

ed il limite termodinamico quindi è cruciale. La caratteristica peculiare dell'energia libera è che per ogni N finito è una funzione regolare, e la sua derivata si annulla nell'origine:

$$\lim_{H \rightarrow 0} \frac{\partial F_N}{\partial H} = 0 \quad \forall N$$



Ma se è vero per ogni N , è vero anche per $N \rightarrow \infty$:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{H \rightarrow 0} \frac{\partial F_N}{\partial H} = 0$$

ma d'altra parte abbiamo visto adesso che esiste

$$M_s = \lim_{H \rightarrow 0^+} \frac{\partial F_\infty}{\partial H}$$

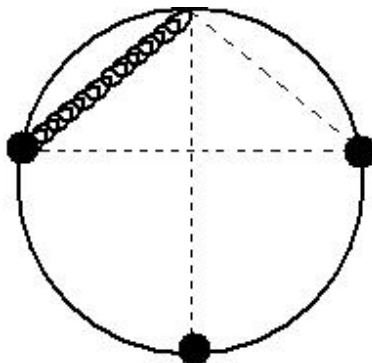
ciò significa che

$$\lim_{H \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\partial F_N}{\partial H} \neq 0$$

ovvero il risultato dipende dall'ordine in cui si fanno i limiti. Questo fatto è fondamentale, e viene chiamato *rottura spontanea della simmetria*: il sistema in campo nullo è simmetrico sotto Z_2 , ma se però c'è una magnetizzazione questa si ribalta; in altre parole, l'hamiltoniana ha una simmetria, ma realizza uno stato fisico che non ha più quella simmetria. Si ha

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j$$

ma il valor medio $\langle \sum_i \sigma_i \rangle$ è diverso da zero. Perché si dice *spontanea*: non c'è niente nell'hamiltoniana che suggerisca da che parte debba puntare la magnetizzazione; si parla invece di rottura esplicita quando introduciamo a mano nell'hamiltoniana un campo esterno. L'esempio è simile a quello di una molla vincolata ai suoi estremi ad una guida circolare:



Un estremo è fisso, mentre all'altro è attaccato un peso; a seconda della costante elastica k della molla ci possono essere due punti di equilibrio simmetrici, oppure uno solo, in basso. Nel linguaggio dei sistemi dinamici la rottura spontanea della simmetria prende il nome di biforcazione.

Sembrerebbe dunque che il problema sia risolto semplicemente facendo attenzione all'ordine con cui si fanno i limiti, ma sorge un altro problema: prima era necessario garantire che l'energia libera non fosse una funzione analitica, mentre adesso la probabilità di una configurazione è data da:

$$\rho(\sigma) = \frac{1}{Z} e^{-\beta \mathcal{H}(\sigma)}$$

Se ci mettiamo a campo nullo abbiamo:

$$\langle \sigma_i \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\{\sigma\}} \sigma_i e^{-\beta \mathcal{H}(\sigma)}$$

e questo oggetto si annulla necessariamente se $H = 0$, per il semplice fatto che $e^{-\beta \mathcal{H}(\sigma)}$ è invariante sotto Z_2 . Finchè si definisce la magnetizzazione M come $-\frac{\partial F}{\partial H}$ possiamo pensare di fare un limite, ma se siamo già in condizione di campo nullo la magnetizzazione è già nulla, ora e per sempre. Il fatto che il problema sia risolvibile ci fa capire che quando c'è rottura spontanea, il peso statistico nel limite termodinamico non possa più essere quello di Boltzmann: in altre parole cambia la ricetta per fare le medie, e non possiamo più usare $\sum_{\{\sigma\}} \sigma_i e^{-\beta \mathcal{H}(\sigma)}$. La rottura spontanea di simmetria porta quindi con sé la necessità di una ridefinizione delle medie statistiche.

Cerchiamo dunque di capire come va modificata la misura di equilibrio. Consideriamo, anzichè tutte le possibili configurazioni, solo due configurazioni, legate l'una all'altra da una trasformazione di simmetria (il campo H è preso identicamente nullo):

$$A = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N\}$$

$$B = \{-\sigma_1, -\sigma_2, \dots, -\sigma_N\}$$

Con un abuso di linguaggio, assegniamo una certa magnetizzazione ad ogni configurazione (*magnetizzazione locale*):

$$\begin{aligned} M_A &= \sum_i \sigma_i = Nm \quad (\text{assumo } m > 0) \\ \Rightarrow M_B &= -M_A = -Nm \end{aligned}$$

Chiaramente se siamo in questa situazione, le probabilità $P(A)$ e $P(B)$ saranno uguali, perchè il peso dipende dall'hamiltoniana \mathcal{H} :

$$\frac{P(A)}{P(B)} = 1$$

Accendiamo adesso un campo $H \neq 0$:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{H=0} - H \sum_i \sigma_i$$

Adesso avremo che:

$$\frac{P(A)}{P(B)} = \frac{e^{-\beta \mathcal{H}_{H=0}} e^{-\beta(-H \sum_i \sigma_i)}}{e^{-\beta \mathcal{H}_{H=0}} e^{-\beta(H \sum_i \sigma_i)}} = e^{2\beta N m H}$$

Se $H > 0$, prendiamo il limite per $N \rightarrow \infty$, e otteniamo:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{P(B)}{P(A)} = 0$$

Quindi, se il sistema potesse scegliere tra uno stato e il suo ribaltato, per $N \rightarrow \infty$ sarebbe costretto a scegliere. Ma siccome questo discorso vale per ogni $H > 0$, varrà anche per $H \rightarrow 0^+$:

$$\lim_{H \rightarrow 0^+} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{P(B)}{P(A)} = 0$$

Viceversa, se $H < 0$, è $\frac{P(A)}{P(B)}$ che si annulla.

Nei modelli Z_2 ogni configurazione ha una sua ribaltata: se immaginiamo un campo esterno piccolo quanto vogliamo, allora il sistema potrà vedere soltanto metà delle sue configurazioni. Per ogni valore di $H > 0$, il peso statistico delle configurazioni con $M > 0$ è esponenzialmente maggiore di quelle con $M < 0$; allora in caso di campo $H = 0$, la misura delle probabilità non è più univoca (*misura singolare*), dunque si deve fornire anche un altro parametro: dal punto di vista fisico, è come dire che si ha un piccolo campo residuo. Ognuna delle due misure statistiche è definita con supporto su tutto lo spazio delle fasi, se N è finito, ma soltanto metà di esso è disponibile se $N \rightarrow \infty$.

Dobbiamo considerare anche quanti modi ci sono per fare una certa magnetizzazione M (questo è legato all'entropia). Possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} S^+ &= \{\sigma : \sum_i \sigma_i \geq 0\} \\ S^- &= \{\sigma : \sum_i \sigma_i \leq 0\} \\ S &= S^+ \cup S^- \\ S^+ \cap S^- &= \{\sigma_i : \sum_i \sigma_i = 0\} \\ \lim_{H \rightarrow 0^+} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{P(S^-)}{P(S^+)} &= 0 \end{aligned}$$

In altri termini:

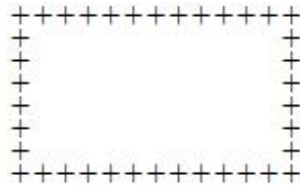
$$\lim_{N \rightarrow \infty} \rho = \begin{cases} \rho^+ \\ \rho^- \end{cases}$$

dove:

$$\rho_+ = \begin{cases} \frac{1}{Z_+} e^{-\beta \mathcal{H}(\sigma)}, & \text{se } \sigma \in S^+; \\ 0, & \text{se } \sigma \in S^-. \end{cases}$$

Z_+ è la normalizzazione della funzione di partizione soltanto sulle configurazioni S^+ . Vediamo quindi che non possiamo fare la media su tutto S , ma dobbiamo prendere soltanto un pezzo; questo è equivalente a fare il limite termodinamico e poi mandare il campo a 0. Nel caso in cui ci troviamo a temperatura maggiore della temperatura critica, è più probabile vedere magnetizzazioni nulle perchè sono più facili da ottenere, quindi abbiamo $\rho \neq 0$ soltanto su $S^+ \cap S^-$. Da un altro punto di vista, la precedente affermazione si può rivedere dicendo che anche facendo i limiti correttamente, gli esperimenti ci dicono che la magnetizzazione M è nulla, cioè ρ_+ e ρ_- sono uguali.

Per $N \rightarrow \infty$, lo stato del sistema è determinato dalla misura singolare; supponiamo di volere la media di una grandezza A : prendiamo la media $\langle A \rangle_+$ oppure $\langle A \rangle_-$? In realtà il problema si pone soltanto se H è rigorosamente zero, altrimenti la ρ spontaneamente si butta da una parte. Dobbiamo quindi aggiungere un indice Z_2 , che ci dice cosa scegliere: sono le condizioni al contorno, e questo rende il tutto ancora più strano, dato che nel limite termodinamico queste non dovrebbero contare. Ad esempio possiamo pensare di scegliere il contorno con spin tutti orientati verso l'alto:



A questo livello le condizioni al contorno ammissibili sono solo quelle invarianti per traslazioni.

Se la misura è composta da due pezzi, sappiamo che nel limite termodinamico se ne deve scegliere uno. Ma perchè ad esempio non si può scegliere come media una combinazione del tipo $\langle \rangle_p = p\langle \rangle_+ + (1-p)\langle \rangle_-$? Il motivo per cui non va bene sta nel fatto che se calcoliamo la funzione di correlazione a due punti su un generico stato otteniamo:

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_p^c = \langle \sigma_i \sigma_j \rangle_p - \langle \sigma_i \rangle_p \langle \sigma_j \rangle_p = p \langle \sigma_i \sigma_j \rangle_+ + (1-p) \langle \sigma_i \sigma_j \rangle_- - (p \langle \sigma_i \rangle_+ + (1-p) \langle \sigma_i \rangle_-)(p \langle \sigma_j \rangle_+ + (1-p) \langle \sigma_j \rangle_-)$$

Per grandi distanze, ovvero $|i - j| \rightarrow \infty$ si ha che

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_p^c \rightarrow 4p(1-p)m^2$$

dove $m = \frac{1}{N} \langle M \rangle$. Ma sappiamo che la funzione di correlazione deve fare zero per grandi distanze (*cluster property*), dunque per $m = 0$ ogni p va bene (per $T > T_c$). Se invece siamo sotto la temperatura critica, la magnetizzazione è diversa da zero e la funzione di correlazione si annulla solo per dei particolari valori di p , che sono 0 e 1: dunque ci sono solo due stati distinti che obbediscono alla cluster property. Gli stati con $p = 0, 1$ si dicono stati puri del sistema; tutti gli stati con $p \neq 0, 1$ non descrivono stati con magnetizzazione nulla, perchè non sono invarianti per traslazioni. Se vogliamo invarianza per traslazioni dobbiamo usare stati puri, poichè godono di una simmetria inferiore di quella dell'intero sistema (?). In definitiva, se non è soddisfatta la cluster property non si ha un buon stato di equilibrio invariante per traslazioni.

—>4/6/08<—

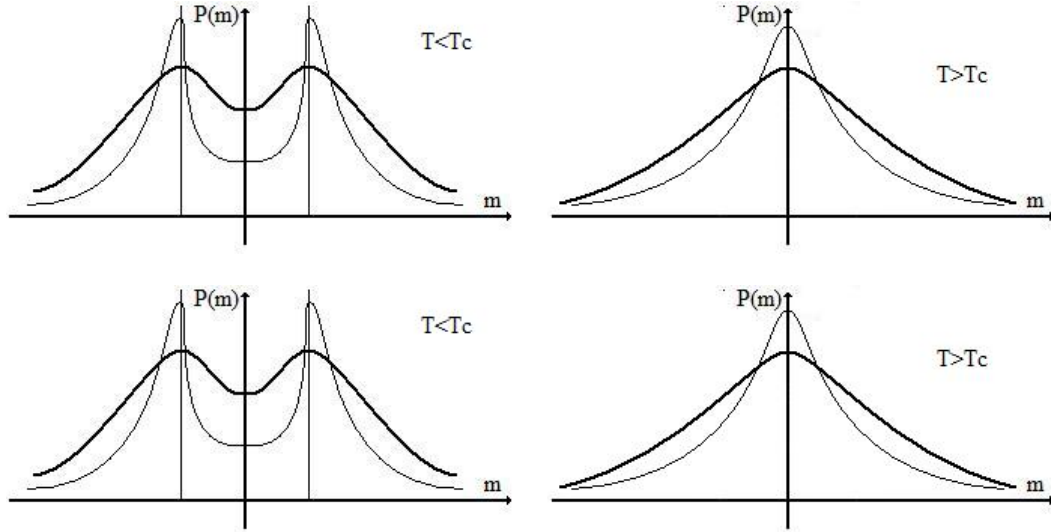
Abbiamo visto che in caso di rottura spontanea della simmetria l'hamiltoniana gode di una certa simmetria, mentre lo stato fisico no; il motivo è che aumentando N si modifica contemporaneamente la distribuzione di probabilità:

Nel modello ipercubico, poichè che la ρ dipende solo da N ed E , si può scrivere come (???controllare):

$$\rho(x) = P_{A^+} \chi(A^+) + P_{A^-} \chi(A^-) + P_B \chi(B \setminus \{A^+ \cup A^-\})$$

Questo modello è invariante sotto Z_2 , vista come l'inversione delle coordinate attorno alla retta $y = -x$: chiaramente la ρ è una funzione discontinua (ah si?); intanto $P_{A^+} = P_{A^-} = \frac{a^N}{Z_N^c(\beta)}$, e risulta:

$$P_B = \frac{(b^N - 2a^N)e^{-\beta N v_c}}{Z_N^c(\beta)}$$

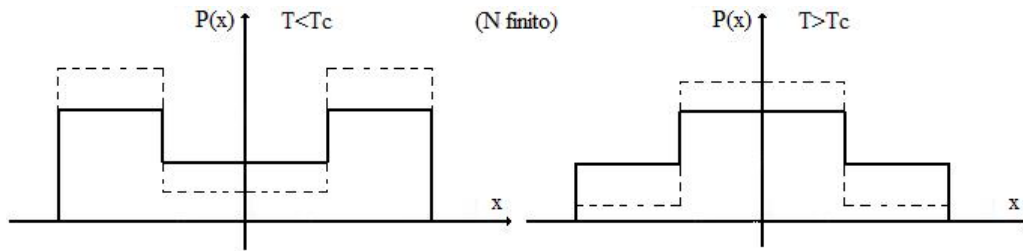


$$Z_N^c = (b^N - 2a^N)e^{-\beta N v_c} + 2a^N$$

Se R è una regione qualsiasi dello spazio delle fasi, deve essere:

$$P(R) = \int_R \rho(x) dx$$

Si trova che $P(A^+) = \frac{a^N}{Z_N^c(\beta)}$. Si può anche guardare ρ proiettandola sulla diagonale (coordinata x):



Al limite termodinamico si ha una regione proibita per $T < T_c$:

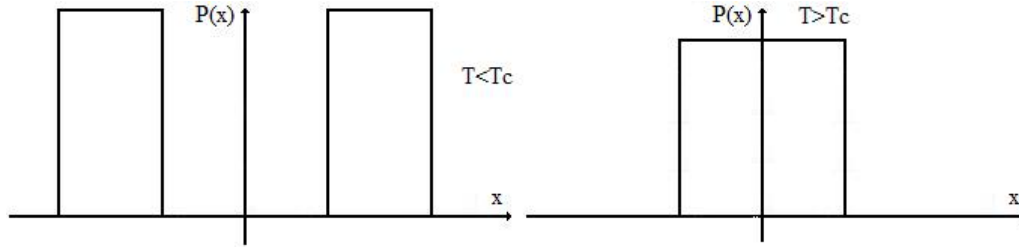
Chiameremo adesso $m = \frac{1}{N} \langle \sum_i q_i \rangle$; se facciamo la media su entrambe le colonne, otteniamo identicamente zero per ogni N e per ogni temperatura, quindi se si vuole una "magnetizzazione" diversa da zero si deve fare la media solo su una parte. Possiamo decidere che $B = B^+ \cup B^-$ dove $B^\pm = \{q : \sum q \gtrless 0\}$.

Il formalismo dà dunque il risultato giusto, a patto di aggiungere una regola per le medie:

- O si fa il limite nel giusto ordine, con una hamiltoniana non simmetrica,
- oppure si utilizza una hamiltoniana simmetrica ma usiamo una media ristretta.

Il motivo fisico per cui tutto funziona è oscuro (??).

Esiste anche un punto di vista diverso: ricordiamoci che la meccanica statistica è stata inventata per modellizzare sistemi con una certa evoluzione temporale. La ρ non può più avere un solo parametro perchè sotto la temperatura critica dobbiamo sapere da che parte stiamo. Consideriamo di nuovo l'evoluzione



temporale; l'ipotesi alla base del fatto che associamo ad una media un qualcosa ottenuto dagli esperimenti è la seguente: se vogliamo misurare una qualche osservabile $A(p, q)$, facciamo sempre una misura con tempi dell'ordine del tempo scala del sistema. Si pensa allora di interpretare la media come media temporale:

$$\bar{A} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt A(p(t), q(t))$$

In meccanica statistica di solito interessano misure all'equilibrio, quindi grandezze senza dipendenza temporale esplicita (possiamo allora considerare τ molto grande); diremo che $\bar{A} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt A(p(t), q(t))$. In meccanica statistica invece si dice che $\langle A \rangle_\mu = \int A(p, q) d\mu(p, q)$ dove la misura ad esempio può essere quella canonica:

$$d\mu = \frac{1}{Z} e^{-\beta \mathcal{H}} d^N q d^N p$$

L'ipotesi che ci dice che possiamo usare entrambe ed identificarle è l'ipotesi ergodica:

$$\bar{A} = \langle A \rangle_\mu$$

In generale l'ipotesi ergodica non è verificata, anche se lo è nella stragrande maggioranza dei casi. Diciamo che quando il sistema è all'equilibrio possiamo supporre che $\tau = \infty$. L'ipotesi ci dice allora che l'unica scala di tempo importante è quella intrinseca del sistema.

Il modello di Ising non va bene (????), perchè usando variabili discrete non si sanno scrivere le equazioni del moto, useremo allora un modello ϕ^4 2-dimensionale.

Siamo a campo esterno nullo, e vogliamo studiare la magnetizzazione; la definiamo come:

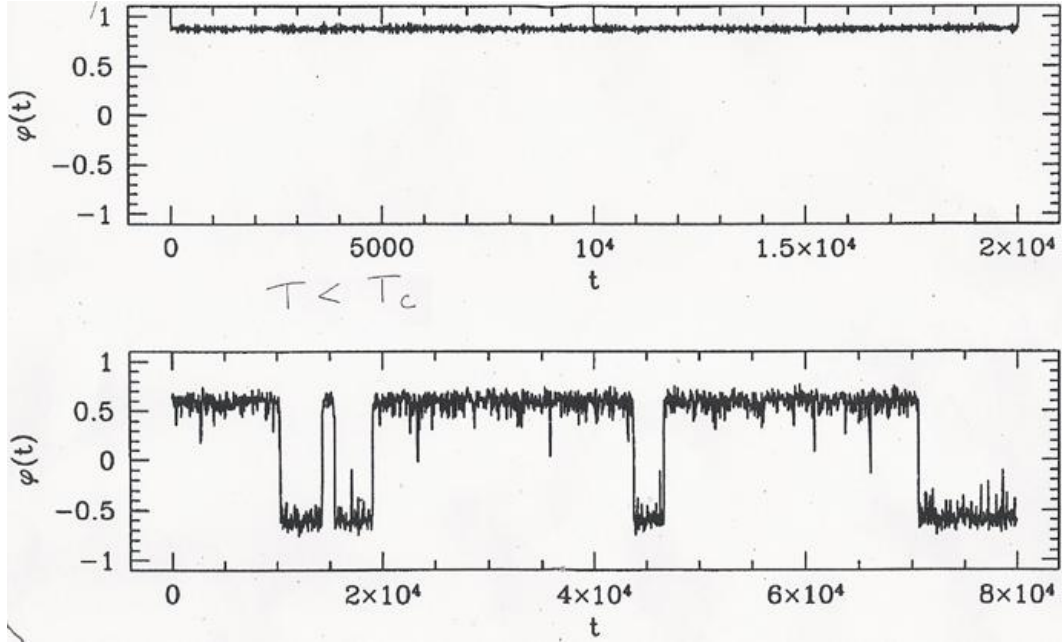
$$\phi(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \phi_i(t)$$

$$\bar{\phi}_\tau = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \phi(t) dt$$

Il sistema ha un numero fisso, N , di gradi di libertà. Ci aspettiamo che se τ è abbastanza lungo, e se N è fissato, la media faccia zero. τ non deve essere confrontabile col tempo scala degli oggetti appartenenti al sistema. Ci aspettiamo che $\bar{\phi}(t) = 0$:

Osserviamo che non c'è più soltanto una scala di tempo di misura, e una scala di tempo del sistema, bensì è presente anche una terza scala, τ_0 , su cui il sistema oscilla. Dunque viene meno l'ipotesi che non esistano scale di tempo intermedie.

Questa nuova scala è tale che se facciamo la media, si ha $\bar{\phi}_\tau = 0$ se $\tau \gg \tau_0$. τ_0 non è sempre uguale, ma si assume che abbia una distribuzione ragionevole da cui si possa ottenere un valor medio. Siccome τ_0

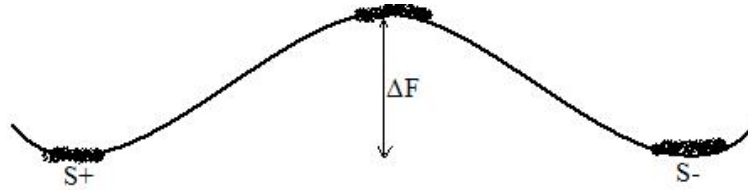


è macroscopico, si può avere $\bar{\phi}_\tau = \pm\phi_0$ se $\tau < \tau_0$ e il sistema ci appare come se la simmetria fosse rotta. Lo spazio delle configurazioni si decompone in due falde: S^+ ed S^- , e per un tempo medio τ_0 il sistema resta confinato in una delle due. Allora non ha senso riprodurre i risultati delle misure con la meccanica statistica, se non ci limitiamo ad una sola falda. Se $T > T_c$, τ_0 è piccolo.

Perchè il sistema sta da una parte o dall'altra? Qual'è la probabilità di passare da una parte all'altra? Dobbiamo fare un cammino attraverso il confine; se si fa l'integrale su tutto lo spazio delle fasi, questo è proporzionale a $e^{-\beta F}$, ma possiamo decidere di associare una funzione F anche ad una regione finita. Se alle regioni 1 e 2 associamo le funzioni F_1 ed F_2 , la probabilità di fare il salto è:

$$P = e^{-\beta\Delta F}$$

È ragionevole che un sistema possa rimanere confinato, se è circondato da barriere:



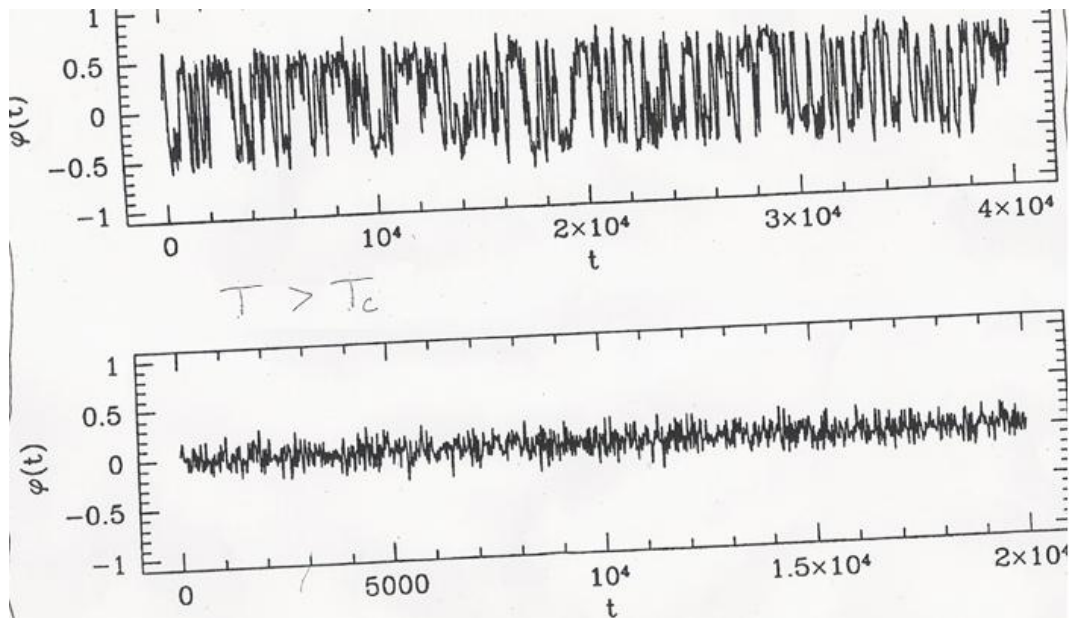
Allora il tempo scala sarà l'inverso del rate (??); ci aspettiamo che $\tau_0 \propto e^{\beta\Delta F}$. Si riesce a far vedere che ΔF è proporzionale a $N^{\frac{d-1}{d}}$, allora ci aspettiamo che $\tau_0 \propto e^{N^\alpha}$ dove $\alpha = \frac{d-1}{d}$. Se la scala τ_0 cresce esponenzialmente con N , allora per ogni τ esiste un N_0 tale che $\forall N > N_0$ $\bar{\phi}_\tau = \pm\phi_0 \neq 0$, allora si ha che:

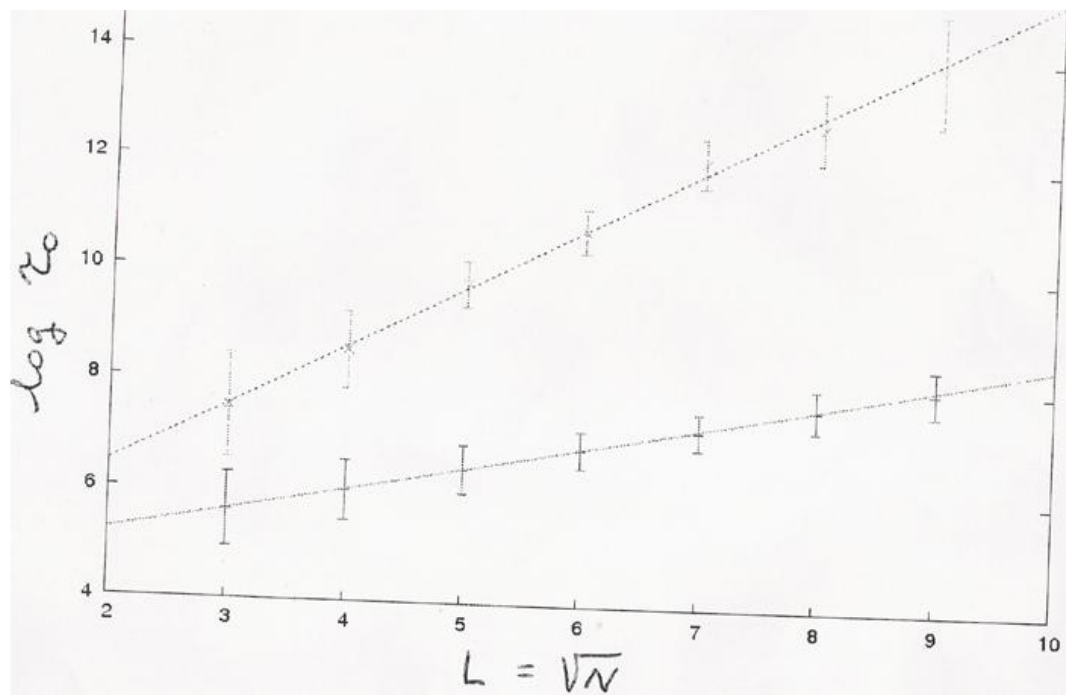
$$\lim_{N \rightarrow \infty} \bar{\phi}_\tau \neq 0$$

quindi al limite termodinamico osserveremo rottura spontanea di simmetria su qualsiasi scala di tempo. Quando τ_0 cresce con N , nel limite termodinamico possiamo avere un sistema confinato, e si parla di *rottura*

dell'ergodicità. Possiamo dire che $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \bar{\phi} \neq 0$, ma se invertiamo i limiti otteniamo zero, allora la causa della rottura di simmetria è proprio il fatto che il sistema stia da una parte (??).

Perchè la meccanica statistica sbaglia, se non cambiamo le medie? Il problema sta nel fatto che in meccanica statistica di solito il limite che si fa è $\lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\tau \rightarrow \infty}$, e la componente da scegliere allora diventa quella in cui il sistema stava all'inizio. La verifica sperimentale è molto difficile perchè τ_0 per sistemi macroscopici è gigantesco. L'equilibrio del sistema è sempre l'equilibrio di Boltzmann, ma ristretto ad una regione parziale dello spazio delle configurazioni. (vedi articolo: **Palmer - Broken Ergodicity**) In realtà rottura spontanea della simmetria e rottura dell'ergodicità non sono la stessa cosa; la rottura dell'ergodicità è più generale perchè non è necessario che le varie regioni in cui il sistema resta siano legate da trasformazioni di simmetria. Si può dire che ogni volta che c'è un comportamento singolare ci sia associata una rottura dell'ergodicità (ad esempio nelle transizioni di fase).





9/6/08

Campo Molecolare

La teoria del campo medio o del campo molecolare è la più semplice approssimazione che si fa quando non si possono eliminare le interazioni. Se abbiamo un fluido, la funzione di partizione è:

$$Z_c = \int d^N \vec{r} e^{-\beta V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)}$$

L'idea fisica è: invece di scrivere l'interazione come funzione delle coordinate, tutto va come se ogni particella sentisse una interazione media fissata:

$$V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \sum_{i=1}^N v(\vec{r}_i)$$

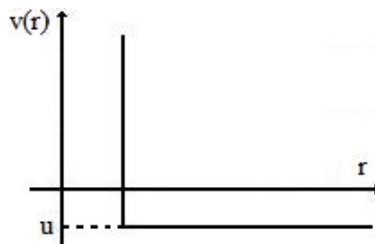
Supponiamo le particelle ferme; allora si può scrivere in modo esatto, dato che l'energia della particella i -esima dipende soltanto dalla sua posizione. Si suppone che ogni particella stia in una posizione media, e in campo medio si buttano via tutte le fluttuazioni. Si ha:

$$Z = \int d^N \vec{r} e^{-\beta \sum_i v(\vec{r}_i)} = \left[\int d\vec{r} e^{-\beta v(\vec{r})} \right]^N$$

Anche se in linea di principio ci sarebbe una dipendenza da \vec{r} , in tutti i casi interessanti basta considerare soltanto $r = |\vec{r}|$. Le interazioni nei fluidi hanno due caratteristiche:

- Nucleo duro;
- Se le particelle sono sufficientemente vicine sentono un potenziale attrattivo.

In campo medio però si dipende da una sola coordinata, per cui:



$$Z = \text{cost} * [(V - V_{ex})e^{-\beta u}]^N$$

Si ricava l'equazione di stato:

$$p = -\frac{\partial F}{\partial V} = \frac{1}{\beta} \frac{N}{V - V_{ex}} - N \frac{\partial u}{\partial v}$$

Introduciamo il volume specifico $v = \frac{V}{N}$, e il volume escluso per particella, $b = \frac{V_{ex}}{N}$; si ha allora:

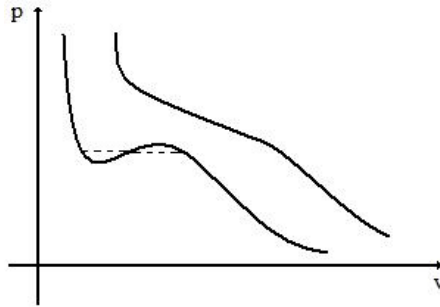
$$p = \frac{KT}{v - b} - \frac{\partial u}{\partial v}$$

Dobbiamo allora fare ipotesi su come u dipende da v . u dipende dall'effetto medio, ed è ragionevole pensare che dipenda dalla densità:

$$u = -\frac{a}{v} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial v} = \frac{a}{v^2}$$

$$\Rightarrow p = \frac{KT}{v - b} - \frac{a}{v^2}$$

Dunque la teoria di Van Der Waals è giustificata fisicamente; in grafico si ha:



Per temperature alte si ha la curva del gas perfetto. Esiste una temperatura critica per cui si ha un flesso, ed esiste una regione in cui la pressione cresce al crescere del volume specifico (il che è poco fisico), e lì il sistema è instabile.

Finchè la curva è monotona, essa è invertibile (per temperature maggiori di T_c), e possiamo scrivere $v(p) = 0$. Per $T = T_c$ ci sono tre soluzioni coincidenti, dunque possiamo riscriverla come $(v - v_c)^3 = 0$. Se usiamo anche l'altra equazione otteniamo:

$$v^3 - (b + \frac{KT}{p})v^2 + \frac{a}{p}v - \frac{ab}{p} = 0$$

dopodichè identifichiamo i coefficienti termine a termine:

$$KT = \frac{8a}{27b}$$

$$v_c = 3b$$

$$p_c = \frac{a}{27b^2}$$

Osserviamo che a e b non dipendono da parametri esterni come T e p , ma dal sistema in esame. Per temperature molto alte, poichè il limite $T \rightarrow \infty$ corrisponde al gas perfetto, possiamo fare un gas diluito e

stimare b ed a , dunque predire quanto vale la temperatura critica. Ci potremmo aspettare che vengano dei numeri totalmente senza senso, invece per i gas rari si hanno dei risultati sensati:

	<i>sperimentale</i>	<i>teorico</i>
$T_c[^\circ C]$	-122	-119,7
$p_c[atm]$	48	48
$v_c[\frac{cm^3}{molecola}]$	75	97

In questa teoria non c'è nessuna ipotesi sul fluido considerato. Esiste quindi una qualche grandezza funzione di T_c , p_c e v_c che è universale:

$$\frac{p_c v_c}{K T_c} = \frac{3}{8} = 0,375$$

La teoria di Van der Waals quindi prevede che questo rapporto sia uguale per tutti i fluidi; si ha:

$$argon \rightarrow 0,292$$

$$acqua \rightarrow 0,23$$

$${}^4He \rightarrow 0,31$$

L'altra cosa che viene fuori, di carattere universale, è che riscaldiamo tutti i valori con i loro valori critici, otteniamo una legge che vale per tutti i fluidi. Questa teoria allora, almeno nell'ambito dei fluidi, prevede l'universalità, ed è quindi positivo. Il problema è che la curva che viene fuori da questa teoria è completamente sbagliata, infatti va bene solo per $T > T_c$, e i guai cominciano proprio intorno a T_c .

Conviene allora considerare una teoria di campo medio per un magnete. Assumiamo che invece di scrivere l'interazione tra primi vicini, ogni spin senta l'effetto medio di tutti gli altri:

$$\mathcal{H} \simeq -H_{eff} \sum_i \sigma_i$$

Adesso si deve risolvere la meccanica statistica canonica dell'oggetto (ESERCIZIO), da cui si ottiene:

$$Z = [2 \cosh(\beta H)]$$

$$\langle \sigma \rangle = m = \tanh(\beta H)$$

$$s = -K\beta \left[\frac{1-m}{2} \log \left(\frac{1-m}{2} \right) + \frac{1+m}{2} \log \left(\frac{1+m}{2} \right) \right]$$

Dove m è la magnetizzazione per sito. Se adesso rimettiamo dentro il fatto che H_{eff} non è un campo assegnato ma un campo efficace, si ottiene:

$$\langle \sigma \rangle = m = \tanh(\beta H_{eff})$$

Facciamo adesso un'ipotesi: cos'è H_{eff} ? L'hamiltoniana vera era questa:

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} -H \sum_i \sigma_i$$

Assumeremo allora che gli spin possano essere rimpiazzati dai loro valori medi:

$$\mathcal{H}_{eff} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \langle \sigma_j \rangle - H \sum_i \sigma_i = -Jzm \sum_i \sigma_i - H \sum_i \sigma_i = -(Jzm + H) \sum_i \sigma_i$$

dove z è il numero di primi vicini, e abbiamo assunto che $\langle \sigma_j \rangle = \langle \sigma \rangle + \text{correzioni} \simeq \langle \sigma \rangle$. Quindi risulta che $H_{eff} = Jzm + H$, e si ha che:

$$m = \tanh(\beta(Jzm + H))$$

e questa è l'equazione di stato del sistema.

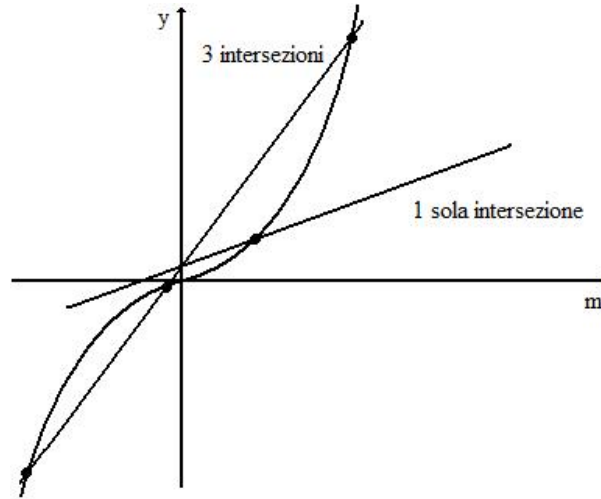
Conviene riscrivere tutto come:

$$\tanh^{-1}(m) = \beta H + \beta Jzm$$

$$\Rightarrow y = \tanh^{-1}(m)$$

$$y = \beta H + \beta Jzm$$

Consideriamo il caso di H piccolo e positivo: la curva diventa una retta che taglia l'asse y in un punto vicino all'origine:



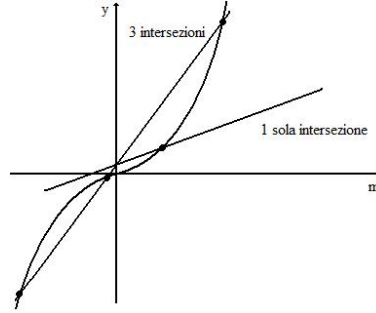
Se $\beta zJ > 1$ si hanno tre soluzioni. Se $H = 0$ si ha una soluzione sempre nulla, dunque la magnetizzazione $m_0 = 0$ indipendentemente dalla pendenza, e si hanno anche due soluzioni $m_+ = -m_- \neq 0$. In teoria di campo medio la temperatura critica è data da $\beta_c zJ = 1$, e la stima di campo medio è che si hanno sicuramente tre soluzioni si $\beta > \beta_c = (Jz)^{-1}$. Osserviamo che da nessuna parte, eccetto in z , compare la dimensione. Questo crea un problema, perchè in dimensione 1 β_c dovrebbe essere infinita mentre non lo è; in dimensione 2 si ha $\beta_c = 0,441$, mentre la teoria di campo medio predice 0,25, mentre in dimensione 3 si ha 0,222 contro gli 0,133 predetti dal campo medio.

L'approssimazione quindi è grossolana, ma discutiamo adesso il perchè della nostra affermazione che se $\beta > \beta_c$, allora le soluzioni giuste sono quelle diverse da zero. Perchè non potrebbe essere $m_0 = 0$ quella giusta? Il ragionamento è questo: se abbiamo una teoria che prevede più di una soluzione in dipendenza da un parametro, dobbiamo prendere quella che minimizza l'energia libera. Si può scrivere:

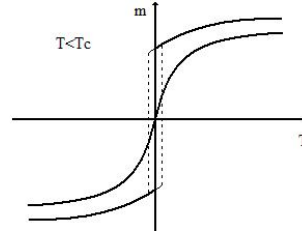
$$f(m) = -zJm^2 - Hm - \frac{S(m)}{\beta}$$

e quando $\beta > \beta_c$, i valori minori dell'energia libera si hanno sempre per $m \neq 0$. Tuttavia ragionare in questo modo non è rigoroso, seppur ragionevole; infatti tutto questo discorso si basa sull'ipotesi che l'entropia si possa scrivere ancora nella stessa forma, mentre in linea di principio l'approssimazione non comporta più la soluzione esatta, e ci potrebbero essere delle correzioni che in questo modo trascuriamo.

Quando $H = 0$ si ha:



mentre se $H \neq 0$ si ha:



Nella realtà oltre le curve solide in figura continuano nella parte tratteggiata (ciclo di isteresi).

Sembra di avere a che fare con tante ricette di cucina; questo è inevitabile o c'è qualcosa dietro? Ovviamente c'è qualcosa dietro, valido sia in meccanica classica che in meccanica quantistica: il principio variazionale per l'energia libera (Peierls, Bogoliubov, Feynman, 1934). Scriviamo la funzione di partizione per un sistema generico:

$$Z = Tr[e^{-\beta\mathcal{H}}]$$

Immaginiamo di decomporre l'hamiltoniana in $\mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1$, dove non facciamo nessuna ipotesi su \mathcal{H}_0 e \mathcal{H}_1 , eccettuata la richiesta di commutatività: $[\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1] = 0$. Possiamo chiamare $Z_0 = Tr[e^{-\beta\mathcal{H}_0}]$; calcoliamo il rapporto $\frac{Z}{Z_0}$:

$$\frac{Z}{Z_0} = \frac{Tr[e^{-\beta\mathcal{H}}]}{Tr[e^{-\beta\mathcal{H}_0}]} = \frac{Tr[e^{-\beta\mathcal{H}_0}e^{-\beta\mathcal{H}_1}]}{Tr[e^{-\beta\mathcal{H}_0}]} = Tr[\rho_0 e^{-\beta\mathcal{H}_1}]$$

dove $\rho_0 = \frac{1}{Z_0} e^{-\beta\mathcal{H}_0}$, dunque:

$$\frac{Z}{Z_0} = \langle e^{-\beta\mathcal{H}_1} \rangle_0$$

Esiste una proprietà dell'esponenziale: data una qualunque distribuzione di probabilità risulta

$$\langle e^f \rangle \geq e^{\langle f \rangle}$$

Questo è immediato per una distribuzione uniforme, ma è vero anche in generale (Chaikin-Lubenski); allora risulta

$$\frac{Z}{Z_0} \geq e^{-\beta \langle \mathcal{H}_1 \rangle_0}$$

Passando ai logaritmi:

$$\log Z - \log Z_0 \geq -\beta \langle \mathcal{H}_1 \rangle_0$$

Ricordiamo che poichè $F = -KT \log Z$, allora risulta:

$$F \leq F_0 + \langle \mathcal{H}_1 \rangle_0$$

In generale $F = \langle \mathcal{H} \rangle - TS$, allora $F_0 = \langle \mathcal{H}_0 \rangle_0 - TS_0$, dove

$$S_0 = -K_B Tr[\rho_0 \log \rho_0]$$

Sostituiamo:

$$\begin{aligned} F &\leq \langle \mathcal{H}_0 \rangle_0 - TS_0 + \langle \mathcal{H}_0 \rangle_1 \leq \langle \mathcal{H}_1 \rangle_0 - TS_0 \\ &\Rightarrow F \leq \langle \mathcal{H} \rangle_0 - TS_0 \end{aligned}$$

Dunque, preso un sistema qualsiasi, descritto da \mathcal{H} , e separata questa in due, l'energia libera del canonico è sempre minore o uguale dell'energia libera che si calcolerebbe utilizzando una misura che non è quella vera.

Si può fare un guess su quale sia la misura di probabilità; la facciamo dipendere da dei parametri $\{\lambda\}$, dopodichè ci calcoliamo $F_{var}(\{\lambda\})$, e questa sarà sempre uguale a $F_0(\{\lambda\}) + \langle \mathcal{H}_1(\{\lambda\}) \rangle_0$. Allora si capisce subito come inventare una teoria di campo medio: il campo medio è l'applicazione di queste idee sotto l'ipotesi che la distribuzione di probabilità sia fattorizzata in distribuzioni di singola particella. Una volta fatto questo è sufficiente applicazione il principio variazionale.

Applicazione al modello di Ising

Immaginiamo che la distribuzione di probabilità sia $\rho_0(\sigma_1, \dots, \sigma_N) = \prod_{i=1}^N \rho_0(\sigma_i; \lambda)$. Scegliamo ρ_0 come:

$$\rho_0 = \frac{1}{Z_0} e^{-\beta \lambda \sum_i \sigma_i}$$

L'espressione precedente è un prodotto di spin indipendenti, e corrisponde ad aver scelto l'hamiltoniana come:

$$\mathcal{H}_0 = -\lambda \sum_i \sigma_i$$

di conseguenza sarà:

$$\mathcal{H}_1 = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j + (\lambda - H) \sum_i \sigma_i$$

Il risultato lo sappiamo:

$$\begin{aligned} Z_0 &= [2 \cosh(\beta \lambda)]^N \\ \Rightarrow F_0 &= -\frac{1}{\beta} \log Z_0 = -\frac{N}{\beta} \log[2 \cosh(\beta \lambda)] \end{aligned}$$

Per calcolare l'energia libera dobbiamo fare la media sulla distribuzione 0 di tutta l'hamiltoniana: c'è intanto la media di $-J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j$, e sappiamo che se ρ_0 è fattorizzata, $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_0 = \langle \sigma_i \rangle_0 \langle \sigma_j \rangle_0$, da cui

$$\begin{aligned}\langle \sigma \rangle_0 &= \tanh(\beta \lambda) \\ \Rightarrow \langle -J \sum \sigma_i \sigma_j \rangle_0 &= -\frac{J}{2} N z \langle \sigma \rangle_0^2 \\ \langle (\lambda - H) \sum_i \sigma_i \rangle_0 &= N(\lambda - H) \langle \sigma \rangle_0 \\ \Rightarrow F_{var}(\lambda) &= \langle \mathcal{H} \rangle_0 - TS_0 = F_0 + \langle \mathcal{H}_1 \rangle_0 \\ \Rightarrow F_{var}(\lambda) &= N \left[-\frac{1}{\beta} \log[2 \cosh(\beta \lambda)] - \frac{z}{2} J \tanh^2(\beta \lambda) + (\lambda - H) \tanh(\beta \lambda) \right]\end{aligned}$$

Adesso dobbiamo trovare l'estremo inferiore rispetto a λ (assumendo che lo abbia):

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_{var}}{\partial \lambda} &= 0 \\ \Rightarrow \tilde{\lambda} - H &= Jz \tanh(\beta \tilde{\lambda})\end{aligned}$$

A questo punti ributtiamo tutto dentro:

$$F_{var}(\lambda) = N \left[-\frac{1}{\beta} \log[2 \cosh(\beta \tilde{\lambda})] + \frac{(\tilde{\lambda} - H)^2}{2Jz} \right]$$

Se calcoliamo la magnetizzazione:

$$\begin{aligned}m &= -\frac{1}{N} \frac{\partial F}{\partial H} = \frac{\tilde{\lambda} - H}{Jz} \\ \tilde{\lambda} - H &= Jz \tanh(\beta \tilde{\lambda}) \\ \Rightarrow m &= \tanh[\beta(zJm + H)]\end{aligned}$$

che è la stessa equazione che avevamo trovato dalla termodinamica.

Questo ci suggerisce come migliorare il campo medio: si può assumere di poter usare una funzione di distribuzione fattorizzata a cluster (*approssimazione di Bethe*) oppure delle shell sempre più vicine (*cluster variation method*), e questo porta a risultati numericamente buoni. Il problema è che le equazioni danno risultati comunque sbagliati nelle vicinanze della temperatura critica.

—>10/7/08<—

Per quanto riguarda gli esponenti critici, la teoria di campo medio non funziona. Definiamo la temperatura adimensionalizzata $t = \frac{T-T_c}{T_c}$, e la variabile $h = \beta H$; allora l'equazione di campo medio di autoconsistenza diventa:

$$m = \tanh \left(\frac{m}{1+t} + h \right) \quad (z\beta_c J = 1)$$

Sviluppiamo la tangente iperbolica per piccoli valori dell'argomento:

$$\tanh(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + O(x^5)$$

Se ci mettiamo in condizioni di campo nullo, cioè $h = 0$, abbiamo:

$$m = \frac{m}{1+t} - \frac{1}{3} \frac{m^3}{(1+t)^3} + \dots$$

$$\Rightarrow m^2 = -3t(1+t^2)$$

L'espressione precedente ha senso perchè la magnetizzazione è diversa da zero solo se $t < 0$, cioè $T < T_c$. Per $t \rightarrow 0$ si ha quindi $m^2 \sim t$, quindi $m \sim (-t)^{\frac{1}{2}}$, dunque $\beta = \frac{1}{2}$. Il valore sperimentale è 0,33 mentre quello teorico è $\frac{1}{8}$ (ma di cosa????). Per la suscettività basta prendere lo sviluppo al prim'ordine in h (stavolta $h \neq 0$):

$$m = \frac{m}{1+t} + h$$

Vogliamo $\chi = \frac{\partial m}{\partial H} = \beta \frac{\partial m}{\partial h}|_{h=0} = \beta$, da cui:

$$\chi \sim (t^{-1}) \Rightarrow \gamma = 1$$

Per il calore specifico, ricordiamo qual'è la dimensione:

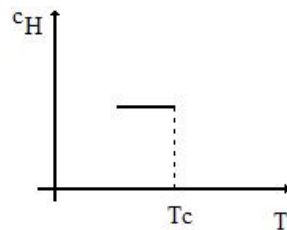
$$c_H = \frac{d}{dT} \langle \mathcal{H} \rangle$$

Nel limite di campo nullo si ha:

$$\langle \mathcal{H} \rangle_0 = 2zJm^2$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dT} \langle \mathcal{H} \rangle = hJzm \frac{dm}{dT}$$

Per $T \rightarrow T_c^-$, questo ci dice che c_H va come $m \sim |t|^{\frac{1}{2}}$ moltiplicato per la derivata, che dà un contributo $\sim |t|^{-\frac{1}{2}}$, quindi a meno di costanti si ha $c_H \sim \text{costante} \neq 0$ per $t \rightarrow 0^-$. Viceversa, per $t \rightarrow 0^+$ il calore specifico è identicamente nullo perchè m è identicamente nulla. Il calore specifico allora fa un salto:



Allora α , l'esponente del calore specifico, è zero. Riassumendo, si ha:

$$\alpha = 0$$

$$\beta = \frac{1}{2}$$

$$\gamma = \frac{1}{2}$$

Per gli esponenti termodinamici manca soltanto δ , che la magnetizzazione e il campo alla temperatura critica. Ci mettiamo a $t = 0$ e a $h \neq 0$:

$$m = \tanh\left(\frac{m}{1+t} + h\right) \rightarrow m = \tanh(m+h) \simeq m + h - \frac{1}{3}m^3 - \frac{1}{3}h^3$$

$$\Rightarrow h \sim m^2 \Rightarrow \delta = 3$$

Osserviamo che in questa teoria nessuno degli esponenti dipende dalla dimensionalità, però si può verificare che tornano le condizioni di scala. Questo ci dice che il comportamento di questi esponenti non va contro nessun principio fisico, però non si osservano sistemi a cui si potrebbe applicare la teoria.

Manca da calcolare η e ν , legati alle funzioni di correlazione:

$$G_c^{(2)} = \langle \sigma_i \sigma_j \rangle - \langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_j \rangle$$

In campo medio, i valori medi sono calcolati con una ρ_0 sbagliata (perchè approssimata), ma fattorizzata, allora la funzione di correlazione è identicamente nulla; così non si può definire η e ν , ma esiste un modo per scrivere le funzioni di correlazione in modo consistente e senza ottenere risultati assurdi: immaginiamo di avere un magnete, ma invece di immergerlo in un campo H costante lo immergiamo in un campo H diverso da sito reticolare a sito reticolare. Abbiamo ovviamente perso l'invarianza per traslazioni, ma adesso possiamo scrivere:

$$\langle \sigma_i \rangle = \frac{\log Z}{\partial H_i}$$

Sappiamo che in campo medio $\langle \sigma_i \rangle$ è diverso da zero, allora definiamo così la funzione di correlazione:

$$G_c^{(2)} = \frac{\partial^2 \log Z}{\partial H_i \partial H_j} = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial^2 F}{\partial H_i \partial H_j} = \frac{\langle \sigma_i \rangle}{\partial H_j}$$

In campo medio le medie $\langle \rangle$ sono da intendersi come $\langle \rangle_0$; con questa procedura in generale $G_c^{(2)} \neq 0$ perchè $\langle \sigma_i \rangle$ sarà funzione di H_i .

In realtà, in campo medio non si fa un calcolo esatto ma una approssimazione variazionale. Di quanto si sbaglia sostituendo $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle$ con $\langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_j \rangle$? Si può stimare in questo modo:

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle - \langle \sigma_i \sigma_j \rangle_0 = \text{Tr}[(\rho - \rho_0) \sigma_i \sigma_j] \simeq O(\delta\rho)$$

Questo è un errore "del prim'ordine"; quando però calcoliamo l'energia libera in campo medio, siccome questa è stazionaria è ragionevole pensare che si abbia:

$$F_{var} - F \simeq O(\delta\rho^2)$$

perchè la prima variazione è nulla per via della stazionarietà; dunque F risulta "meno sbagliata", per questo è più sensato usare la seconda definizione per la funzione di correlazione, che coinvolge per l'appunto F .

Facciamo esplicitamente il conto:

$$m = \tanh[\beta(H + Jzm)]$$

$$\Rightarrow \langle \sigma \rangle = \tanh[\beta(H + Jz\langle \sigma \rangle)] \quad (\text{nel caso } \langle \sigma \rangle \text{ non dipenda dal punto})$$

Se invece $\langle \sigma \rangle$ dipende dal punto:

$$\langle \sigma_i \rangle = \tanh[\beta(H_i + J \sum_{j \in \langle i \rangle} \langle \sigma_j \rangle)]$$

dove con $\langle i \rangle$ si intende un intorno di i . Adesso abbiamo N equazioni non lineari accoppiate tra loro, ed è maiata. Però le vogliamo calcolare al punto critico, dove $\langle \sigma \rangle$ è piccolo; al prim'ordine:

$$\langle \sigma_i \rangle = \beta(H_i + J \sum_{j \in \langle i \rangle} \langle \sigma_j \rangle)$$

Abbiamo ottenuto sempre N equazioni accoppiate, ma stavolta lineari. Il sistema si risolve sfruttando il fatto che sappiamo com'è fatta l'interazione: ciascuno dei siti interagisce soltanto coi primi vicini. Per un reticolo cubico il risultato è:

$$\langle \tilde{\sigma}_{\vec{k}} \rangle = \beta \frac{\tilde{H}_{\vec{k}}}{1 - 2\beta J \sum_{l=1}^d \cos(\frac{2\pi k_l}{L})}$$

dove siamo passati nello spazio degli impulsi. Tuttavia sappiamo che nello spazio diretto:

$$\frac{\partial \langle \sigma_i \rangle}{\partial H_j} = G_c^{(2)}(i, j) = G_c^{(2)}(\vec{r})$$

Allora se ne prendiamo la trasformata di Fourier:

$$\frac{\partial \langle \tilde{\sigma}_{\vec{k}} \rangle}{\partial H_{\vec{k}}} = \tilde{G}_c^{(2)}(\vec{k}) = \frac{\beta}{1 - 2\beta J \sum_{l=1}^d \cos \frac{2\pi k_l}{L}}$$

Gli esponenti η e ν sono legati al comportamento di $G_c^{(2)}$ a grande distanza, quindi per piccoli \vec{k} :

$$\Rightarrow \tilde{G}_c^{(2)}(\vec{k}) = \left(\frac{\xi^2}{\beta J} \right) \left(\frac{1}{1 + k^2 \xi^2} \right)$$

dove $\xi = \frac{\beta J}{1 - z\beta J}$ è proprio la lunghezza di correlazione. Antitrasformando, si scopre che $G_c^{(2)} = \text{cost} * r^{d-2} e^{-\frac{r}{\xi}}$.

Si può vedere anche dal fatto che \vec{k} compare sempre accoppiato a ξ come $k\xi$, quindi ξ è la scala intrinseca dello spazio delle trasformate (??). Poichè $zJ\beta_c = 1$, si ha che

$$\xi^2 = \frac{J}{T - T_c} \Rightarrow \xi \sim t^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \nu = \frac{1}{2}$$

A t esattamente zero, l'unica dipendenza che rimane è:

$$\tilde{G}(\vec{k})|_{t=0} \sim k^{-2} \rightarrow \tilde{G}(\vec{k}) \sim k^{-2+\eta} \Rightarrow \eta = 0$$

Abbiamo visto che le leggi di scala funzionano:

$$\gamma + 2\beta + \alpha = 2$$

$$\alpha + \beta(\delta + 1) = 2$$

$$(2 - \eta)\nu = \gamma$$

$$\nu d = 2 - \alpha$$

Chiaramente la quarta sembra tornare soltanto nel caso in cui la dimensionalità del sistema è 4, in realtà vedremo che è corretta anche per $d > 4$.

Valgono le stesse conclusioni anche per un fluido di Van der Waals; anche gli esponenti critici tornano perchè l'equazione di stato è cubica, (??) tuttavia i valori degli esponenti restano gli stessi anche se si usa il cluster variation method.

La teoria di campo medio è una approssimazione variazionale, che non si applica direttamente sull'hamiltoniana, e non è ovvio che esistano sistemi ben descritti dal campo medio. Tuttavia ci sono delle situazioni fisiche che sembrano essere ben descritte dal campo medio, ad esempio alcuni esempi di transizioni critiche come la superconduttività. Ci sono dei casi limite: il caso ideale consiste nel considerare un modello di interazione a lungo raggio, come ad esempio un modello di Ising dove tutti i siti interagiscono con tutti gli altri:

$$\mathcal{H} = -\frac{J}{2N} \sum_{i \neq j} \sigma_i \sigma_j$$

L'hamiltoniana conta un numero dell'ordine di N^2 di termini, e abbiamo diviso per N rispettando la prescrizione di Kac. Questo modello si può risolvere esattamente:

$$\mathcal{H} = -\frac{J}{2N} \left(\sum_{i=1}^N \sigma_i \sum_{j=1}^N \sigma_j - \sum_{i=1}^N \sigma_i^2 \right) = -\frac{J}{2N} \left[\left(\sum_{i=1}^N \sigma_i \right)^2 - N \right] \quad (\sigma_i^2 = 1)$$

L'hamiltoniana è fattorizzata, dunque la funzione di partizione è:

$$Z = \sum_{\{\sigma\}} e^{\beta \frac{J}{2} \left[\frac{1}{N} (\sum_{i=1}^N \sigma_i)^2 - 1 \right]} = e^{-\beta \frac{J}{2}} \sum_{\{\sigma\}} e^{\beta \frac{J}{2} \left[\frac{1}{N} (\sum_{i=1}^N \sigma_i)^2 \right]}$$

Il conto non si sa fare al volo, allora si usa un trucco:

$$\begin{aligned} e^{a^2} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-\frac{1}{2}y^2 + \sqrt{2}ay} \\ a^2 &= \frac{\beta J}{2N} \left(\sum_{i=1}^N \sigma_i \right)^2 \\ Z &= \frac{e^{-\beta \frac{J}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-\frac{y^2}{2}} \sum_{\{\sigma\}} e^{y \left[\left(\frac{\beta J}{N} \right) \sum_{i=1}^N \sigma_i \right]} \end{aligned}$$

Ma $e^{y \sum_{i=1}^N \frac{\beta J}{N} \sigma_i} = \prod_{i=1}^N e^{y \frac{\beta J}{N} \sigma_i}$, allora se dobbiamo fare anche la somma su tutte le configurazioni, possiamo scambiare l'ordine delle sommatorie e ottenere:

$$\sum_{\{\sigma\}} \prod_{i=1}^N e^{y \left(\frac{\beta J}{N} \right)^{\frac{1}{2}} \sigma_i} = [2 \cosh(\sqrt{\frac{\beta J}{N}} y)]^N$$

Facciamo un cambio di variabile: $y = \sqrt{N}x$

$$\Rightarrow Z = e^{-\beta \frac{J}{2}} \sqrt{\frac{N}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-N \frac{x^2}{2}} [2 \cosh(x \sqrt{\beta J})]^N = e^{-\beta \frac{J}{2}} \sqrt{\frac{N}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{N f(x)}$$

dove $f(x) = \log[2 \cosh(x\sqrt{\beta J})] - \frac{x^2}{2}$. Siamo interessati al limite di $\frac{1}{N} \log Z$ per $N \rightarrow \infty$, e utilizzeremo il metodo di Laplace: il risultato sarà dato dal valore stazionario dell'integrando (??). Si avrà

$$\frac{1}{N} \log Z = \log[2 \cosh(\tilde{x}\sqrt{\beta J})] - \frac{\tilde{x}^2}{2}$$

dove \tilde{x} è fissato dalla condizione

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=\tilde{x}} = 0$$

Si ottiene

$$\frac{\tilde{x}}{\sqrt{\beta J}} = \tanh(\tilde{x}\sqrt{\beta J})$$

Allora se poniamo $\lambda = \sqrt{\beta J}x$, si riottiene proprio l'equazione di autoconsistenza del campo medio:

$$\tilde{\lambda} = J \tanh(\beta \tilde{\lambda})$$

La differenza rispetto al campo medio è che qui si è risolto il modello esattamente, senza approssimazioni. Questi modelli forniscono una visione microscopica di quello che accade nel campo medio, e ci fanno capire che esso funziona meglio in casi in cui la dimensionalità del sistema è grande: se prendiamo un reticolo con un numero di vicini sempre più alto questo sarà sempre meglio descritto da una teoria di campo medio.

—>11/7/08<—

Il passo successivo fu fatto da Landau, che generalizzò il campo medio. Supponiamo di non descrivere più il sistema per ogni temperatura, ma di concentrarci solo sulla regione critica; all'epoca (primi anni 30) l'evidenza fenomenologica dell'universalità era scarsa, solo qualitativa.

Osservazione: i quattro esponenti termodinamici si ricavano dall'assumere che vicino alla transizione il sistema obbedisca ad una equazione di stato di terzo grado in m e del primo in h :

$$h = mt + \frac{1}{3}m^3$$

Quest'ultima viene dallo sviluppo intorno a T_c delle condizioni di autoconsistenza. Supponiamo che ci sia una funzione che svolge il ruolo dell'energia libera (per t piccolo e $H \sim 0$):

$$f(T, H; m) = f_0(T, H) - \frac{mH}{KT} + \frac{m^2 t}{2} + \frac{1}{12}m^4$$

Se cerchiamo il minimo di questa funzione:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial m} &= 0 \\ \Rightarrow h &= mt + \frac{1}{3}m^3 \end{aligned}$$

Ci sono due parametri esterni, H e T , e un parametro d'ordine, m . Questa è la forma più generale possibile per una funzione che sia funzione di m e che rispetti la simmetria del sistema. Se riusciamo ad identificare quale possa essere un buon parametro d'ordine possiamo sempre scrivere una energia libera efficace, capire come funziona la transizione di fase e fare predizioni. Fu proprio Landau ad introdurre questo concetto:

- **Parametro d'ordine:** qualsiasi grandezza collettiva capace di segnalare se siamo in una fase ordinata o disordinata del sistema.

Supponiamo di avere un sistema descritto da $\mathcal{H}(\phi)$ e invariante sotto un gruppo G , allora:

$$\mathcal{H}(g\phi) = \mathcal{H}(\phi) \quad \forall g \in G$$

Se c'è rottura spontanea della simmetria lo stato del sistema è invariante solo rispetto ad un sottogruppo di G , diciamo $H \subset G$. Adesso prendiamo una qualche osservabile $\hat{\eta}(\phi)$ (a livello classico) che abbia queste proprietà:

1. Sia estensiva: si definisce allora la sua media statistica $\eta = \langle \hat{\eta}(\phi) \rangle$, ed esiste il limite $\lim_N \eta(N)$; chiediamo questo perchè vogliamo che η caratterizzi il sistema nel suo complesso;
2. Come deve trasformare $\hat{\eta}$ sotto la simmetria? Se immaginiamo di avere una rappresentazione irriducibile del gruppo, $T(g)$, allora imponiamo che $\hat{\eta}$ trasformi secondo questa rappresentazione:

$$\hat{\eta}(g\phi) = T(g)\hat{\eta}(\phi) \quad \forall g \in G$$

Chiediamo questo perchè se $\langle \hat{\eta} \rangle = 0$, resta uguale a zero anche se applichiamo la trasformazione. Se siamo nella fase ordinata (facendo medie con la giusta regola, ovvero soltanto su una parte dello spazio delle fasi) dove $\langle \hat{\eta} \rangle \neq 0$, questa segnala correttamente la rottura di simmetria:

$$\eta = \langle \hat{\eta}(\phi) \rangle \neq 0$$

$$\eta' = \langle \hat{\eta}(g\phi) \rangle = T(g)\langle \hat{\eta}(\phi) \rangle = T(g)\eta \neq \eta \quad \forall g \in G$$

3. Se siamo vicini a T_c , vogliamo anche che $\langle \hat{\eta} \rangle$ vada a zero con continuità.

Esempi:

1. Se abbiamo una simmetria Z_2 (Ising) usiamo una rappresentazione 1-dimensionale del gruppo, la moltiplicazione per ± 1 . Si prende allora qualcosa che sia scalare sotto il gruppo:

$$\begin{aligned} \hat{\eta}(\sigma) &= \sum_i \sigma_i \\ \Rightarrow \eta &= \langle \sum_i \sigma_i \rangle \end{aligned}$$

2. Modello di Heisenberg: il gruppo di invarianza è continuo ($O(3)$):

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \vec{s}_i \cdot \vec{s}_j$$

Se si rompe la simmetria fissando una direzione privilegiata $\frac{\vec{M}}{|\vec{M}|}$, il sistema è ancora invariante per rotazioni intorno all'asse definito da tale direzione; il gruppo residuo è il cosiddetto gruppo di isotropia, od $O(2)$ ed è un sottogruppo di $O(3)$. L'osservabile naturale per $O(3)$ sarà qualcosa che trasforma secondo la rappresentazione vettoriale: si definisce allora un parametro d'ordine

$$\eta^a = \langle M^a(\vec{\sigma}) \rangle = \langle \sum_{i=1}^N s_i^a \rangle$$

Se il gruppo di simmetria è $O(n)$, esso ammette una rappresentazione irriducibile come matrice $n \times n$. In questi casi si sceglie la somma degli spin perchè è utile per quantificare la rottura della simmetria.

3. In certo modelli di LCD (sistemi in cui le molecole hanno direzioni privilegiate), è naturale definire un parametro d'ordine che è un tensore, anzichè un vettore.

Se togliamo l'informazione sulla grandezza di η :

$$\frac{\eta}{|\eta|}$$

questo diventa soltanto una direzione nel suo spazio. Si può dimostrare che $\frac{\eta}{|\eta|} \in G \setminus H$. Siccome $G \setminus H$ si può pensare come varietà differenziabile, se consideriamo il caso di $G = O(3)$ e $H = O(2)$ si ha $O(3) \setminus O(2) \sim S^2$ e quindi tutte le possibili magnetizzazioni stanno su una sfera.

La teoria di Landau

Faremo riferimento ad un modello di tipo Ising ma si può fare anche in generale. L'idea di base è che per $T \sim T_c$ esista una funzione che funga da potenziale termodinamico efficace, e i cui punti stazionari sono punti di equilibrio per il sistema. Chiamiamo tale funzione \mathcal{L} , o funzione di Landau, dopodichè decidiamo che \mathcal{L} è determinata esclusivamente da considerazioni di simmetria. Sarà anche funzione del parametro d'ordine η , e i valori di η fisici saranno determinati dalla condizione di equilibrio:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} = 0$$

Il postulato fondamentale è che \mathcal{L} sia invariante rispetto a tutte le simmetrie del sistema. Dobbiamo costruire uno scalare rispetto alle trasformazioni, ed η in generale non sarà uno scalare. Costruiamo degli invarianti:

- simmetria Z_2 : η^2 ;
- simmetria $O(n)$: $\eta^2 = \sum_{a=1}^n (\eta^a)^2$;
- se η fosse un tensore, se ne può prendere la traccia.

Nel seguito indicheremo con η la densità di parametro d'ordine, cioè identificheremo $\eta \equiv \frac{\eta}{N}$.

La seconda ipotesi che faremo è che \mathcal{L} debba essere una funzione analitica degli invarianti; possiamo sempre costruirla come:

$$\mathcal{L} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \eta^n$$

Siccome siamo interessati a η piccoli, possiamo pensare di fermarci al quart'ordine, e poichè siamo a campo nullo eviteremo di considerare l'accoppiamento col campo magnetico H . Si ha allora:

$$\mathcal{L} = a_0(T) + a_2(T)\eta^2 + a_4(T)\eta^4$$

I coefficienti $a_1(T)$ e $a_3(T)$ devono essere nulli per la simmetria. Cosa possiamo dire? Per $T > T_c$ $\eta = 0$, dunque a_0 descrive la fisica del sistema per $T > T_c$, e non dipende da η ; per questo non contribuisce a determinare il comportamento critico:

$$\frac{\partial a_0(T)}{\partial \eta} = 0$$

dunque $a_0(T)$ è una sorta di background, pertanto possiamo assumere $a_0(T) = 0$ perchè siamo interessati soltanto al comportamento critico.

Cosa possiamo dire su a_4 ? Assumiamo che questo sia una funzione analitica di T , dunque mentre ci avviciniamo a T_c esso si possa espandere come:

$$a_4(T) = a_4^0 + (T - T_c)a_4^1 + \dots$$

In tutta la regione di interesse, a_4 deve essere positivo per la stabilità: infatti se $a_4 < 0$ il valore di η che minimizza la funzione di Landau è $\eta = \infty$; dunque ci basterà considerare a_4^0 perchè la dipendenza da η^4 moltiplicata per $T - T_c \sim 0$ diventa trascurabile.

Per quanto riguarda a_2 , supponiamo che anch'esso sia una funzione analitica di T :

$$a_2(T) = a_2^0 + a_2^1 \frac{(T - T_c)}{T_c} + \dots$$

Per $T < T_c$ una possibile soluzione di $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} = 0$ deve poter essere $\eta \neq 0$:

$$2a_2\eta + 4a_4\eta^3 = 0$$

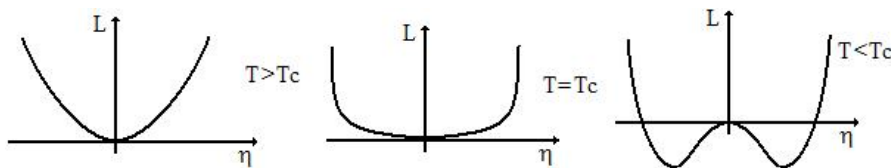
$$\Rightarrow \eta = \begin{cases} 0 \\ \pm \sqrt{-\frac{a_2}{2a_4}} \end{cases}$$

Siccome a_4 è positivo, possiamo imporre $a_2^0 = 0$ da cui $a_2(T) = a_2^1 \frac{T - T_c}{T_c}$. In questo modo per ogni temperatura maggiore di T_c c'è soltanto la soluzione $\eta = 0$, e a $T = T_c$ $a_2(T)$ cambia di segno. La funzione di Landau si riscrive come:

$$\mathcal{L} = a\eta^2 + \frac{1}{2}b\eta^4 - H\eta \quad (a, b > 0)$$

dove abbiamo reintrodotta l'accoppiamento con un campo esterno. Se abbiamo un parametro tensoriale, come abbiamo detto η^2 può essere sostituito dalla $Tr(\eta)$, in quel caso non sono più vietati i termini cubici e lineari. É chiaro che se si vuole fare predizioni per un modello, a e b devono essere determinati in modo da essere compatibili con il sistema. La cosa interessante è che emerge subito l'universalità: in linea di principio il comportamento vicino alla temperatura critica dipende dalla simmetria considerata, anche se poi in realtà non succede perchè la forma della funzione di Landau resta la medesima. Tuttavia sappiamo che anche la dimensionalità dello spazio parametrizza le classi di universalità, e qui viceversa non c'è traccia di dimensioni; inoltre, poichè la teoria di Landau generalizza il campo medio, vengono fuori gli stessi esponenti critici (sbagliati).

Mettiamoci in condizioni di campo nullo:



La funzione riportata nei vari grafici, per differenti temperature, è:

$$\mathcal{L} = a\eta^2 + \frac{1}{2}b\eta^4$$

Nel terzo grafico osserviamo che per $\eta = 0$ non si ha più un minimo ma un massimo. Minimizzando la funzione di Landau si ha quindi:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} = 2at\eta + 2b\eta^3 = 0$$

$$\text{se } t < 0 \Rightarrow \eta = \begin{cases} 0, & (\text{massimo}); \\ \pm \sqrt{-\frac{at}{b}}, & (\text{minimo}). \end{cases}$$

Allora per t piccoli $\eta \sim (-t)^{\frac{1}{2}}$ dunque $\beta = \frac{1}{2}$.

Come si determinano gli altri esponenti? La funzione di Landau non è l'energia libera, ma se ci mettiamo il valore di η all'equilibrio, essa descrive il contributo all'energia libera di η , all'equilibrio (?), quindi usando i valori opportuni di η possiamo confondere \mathcal{L} con F :

$$\mathcal{L}(\eta_{eq}) \simeq \frac{F}{N}$$

$$\Rightarrow c = -T \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial T^2}$$

poichè per $t > 0$ $\mathcal{L} = 0$ si ha che $c = 0$. Viceversa, per $t < 0$, la funzione di Landau si scrive come:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \frac{a^2 t^2}{b}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial T^2} = -\frac{a^2}{bT_c^2}$$

Se $t \rightarrow 0^-$, il calore specifico tende al valore costante $\frac{a^2}{bT_c^2} \neq 0$, dunque fa un salto, e il coefficiente α è nullo, come previsto in campo medio.

Per avere previsioni anche di δ , si rimette l'accoppiamento col campo, $-H\eta$, e nella derivata per $t \rightarrow 0^+$ si ha $H \sim \eta^3$ da cui $\delta = 3$. Per γ , poichè la suscettività χ è:

$$\chi = \frac{\partial \eta}{\partial H} = \left(\frac{\partial H}{\partial \eta} \right)^{-1}$$

$$\Rightarrow \chi = \frac{1}{1(2t + 3b\eta^2(H))}$$

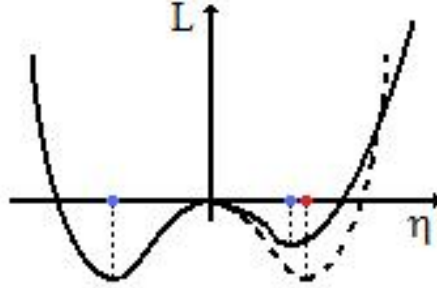
$$\Rightarrow H = 2at\eta + 2b\eta^3$$

$$\Rightarrow \chi \sim |t|^{-1} \Rightarrow \gamma = 1$$

Come si calcolano in questa teoria i coefficienti η e ν ? A questo livello non si possono calcolare, perchè il parametro η è uniforme, e come nel caso del campo medio dobbiamo far dipendere η oppure il campo H dal punto. La cosa curiosa è che la funzione di Landau descrive anche transizioni di fase discontinue, infatti basta assumere che la funzione di Landau contenga anche termini dispari; ad esempio consideriamo:

$$\mathcal{L} = at\eta^2 + \frac{1}{2}b\eta^4 - \eta H$$

Per $T < T_c$ questa funzione si rappresenta come ($H < 0$):



C'è un problema concettuale in questo ragionamento: la teoria di Landau parte dicendo che η è piccolo, ma se gli permettiamo di fare salti allora potrebbe venir meno questa condizione, e dobbiamo stare attenti a quando η assume valori grandi rispetto alla scala de sistema

—>16/7/08<—

Teoria di Landau non omogenea

Facciamo dipendere il parametro d'ordine e il campo esterno dal punto:

$$\eta = \eta(\vec{r})$$

$$H = H(\vec{r})$$

Quando ci avviciniamo alla temperatura critica la lunghezza di correlazione diverge, questo significa che i gradi di libertà microscopici del sistema tenderanno ad avere valori simili. Allo stesso tempo, se T è vicina a T_c , avremo anche che la lunghezza di correlazione ξ sarà molto maggiore della scala tipica microscopica.

Prendiamo allora una scala intermedia:

$$a \ll \Lambda^{-1} < \xi$$

dove la scrittura Λ^{-1} significa che Λ è una lunghezza nello spazio di Fourier. Per quanto detto prima, ha senso definire un η mediato su questa scala:

$$\eta_\Lambda(\vec{r}) = \frac{1}{N_\Lambda(\vec{r})} \sum_{i \in \vec{r}} \langle \sigma \rangle$$

dove $N_\Lambda(\vec{r})$ è il numero di gradi di libertà macroscopici contenuti nella regione sferica centrata in \vec{r} e di raggio Λ^{-1} . Per definizione, η non varia su scale minori di quella definita da Λ^{-1} ; in trasformata di Fourier possiamo scrivere che $\tilde{\eta}_{\vec{k}} \equiv 0$ se $|\vec{k}| > \Lambda$, cioè Λ è un cutoff nello spazio di Fourier. Questa operazione viene detta operazione di media a grana grossa (o *coarse grain*), e il valore esatto di Λ è irrilevante. Com'è possibile implementare questa scala all'interno della funzione di Landau? Chiameremo L la funzione di Landau per tutto il sistema: potremmo pensare ad una scrittura del tipo

$$L = \sum_{\vec{r}} \mathcal{L}(\eta_\Lambda(\vec{r}))$$

però questa non può essere corretta per l'ambiguità nella scelta dell' η di equilibrio: dovremmo infatti minimizzare separatamente tutte le varie funzioni di Landau per le varie regioni e alla fine troveremmo un oggetto costante (??).

Allora aggiungeremo un termine che in qualche modo penalizza il fatto di avere valori diversi di η da blocco a blocco: la nostra ipotesi sarà che la funzione di Landau si può scrivere come

$$L = \sum_{\vec{r}} \mathcal{L}(\eta_{\Lambda}(\vec{r})) + \sum_{\vec{r}} \sum_{\vec{\delta}} \frac{\gamma'}{2} \left(\frac{(\eta_{\Lambda}(\vec{r}) - \eta_{\Lambda}(\vec{r} + \vec{\delta}))^2}{\Lambda^{-1}} \right)$$

In questo modo la funzione di Landau aumenta ogni volta che $\eta_{\Lambda}(\vec{r}) \neq \eta_{\Lambda}(\vec{r} + \vec{\delta})$, dove $\vec{\delta}$ è un vettore che collega le varie cellette del coarse grain, $|\vec{\delta}| > \Lambda^{-1}$ (maggiore oppure uguale???). Siccome però assumiamo che η vari in modo dolce, formalmente possiamo pensare di fare un passaggio da sommatoria ad integrale; assumiamo che $\Lambda \rightarrow \infty$, cioè la scala su cui facciamo le nostre misure sia sostanzialmente zero, $\Lambda^{-1} \simeq 0$. In questo modo:

$$L = L[\eta_{\Lambda}(\vec{r})] = \int d^d \vec{r} [\mathcal{L}(\eta(\vec{r})) + \frac{\gamma}{2} (\nabla \eta_{\Lambda}(\vec{r}))^2]$$

e la funzione di Landau diventa così un funzionale. Ci potrebbero essere anche oggetti del tipo $\eta_{\Lambda}(\vec{r}) \nabla^2 \eta_{\Lambda}(\vec{r})$, perchè sono invarianti Z_2 , però in realtà si può mostrare che a meno di divergenze totali sono già considerati nel termine $(\nabla \eta_{\Lambda}(\vec{r}))^2$.

Come si modificano le regole della teoria di Landau? Il valore buono di η resta quello che minimizza η , anche se adesso la condizione di minimo si esprime attraverso una derivata funzionale:

$$\frac{\delta L(\eta(\vec{r}))}{\delta \eta(\vec{r})} = 0$$

In ogni caso, il coarse grain consiste nel guardare il sistema ad una scala intermedia tra le scale fisiche, e questo ha senso solo per determinate temperature (??); con il valore giusto di η , anche stavolta L può essere assimilata all'energia libera, ma cosa vuol dire il fatto che abbiamo scritto L come integrale? Quando il sistema è all'equilibrio la funzione di Landau diventa l'energia libera; in realtà questo equivale a dire che quando η è quello giusto, L non è nient'altro che:

$$L[\eta_{\Lambda}(\vec{r})] = F(T, H) + Vincolo : \left[\sum_{i \in \vec{r}} \sigma_i = N_{\Lambda}(\vec{r}) \eta_{\Lambda}(\vec{r}) \right]$$

Il vincolo è che la magnetizzazione debba essere proprio $\eta(\vec{r})$; allora poichè $e^{-\beta F} = Tr[e^{-\beta \mathcal{H}}]$, possiamo pensare di scrivere formalmente:

$$e^{-\beta L} = Tr \left[e^{-\beta \mathcal{H}} \delta \left[\sum_{i \in \vec{r}} \sigma_i - N_{\Lambda}(\vec{r}) \eta_{\Lambda}(\vec{r}) \right] \right]$$

dove la delta all'interno della traccia significa che la traccia è presa soltanto sulle configurazioni che rispettano il vincolo. Per ogni profilo $\eta(\vec{r})$ possiamo fare lo stesso discorso, ma dobbiamo tenere presente che non stiamo considerando l'intera funzione $e^{-\beta F}$. Possiamo pensare di riscrivere la traccia parziale introducendo questa notazione:

$$\{\underline{\sigma}\} = \{\vec{\sigma}(\vec{\eta}(\vec{r}))\}$$

ovvero $\{\underline{\sigma}\}$ è l'insieme delle configurazioni macroscopiche compatibili col vincolo di grana grossa; se $\Lambda^{-1} \gg a$ esistono tantissime configurazioni possibili. Risulta allora:

$$e^{-\beta L[\bar{\eta}(\vec{r})]} = \sum_{\{\underline{\sigma}\}} e^{-\beta \mathcal{H}(\sigma)}$$

Ma la funzione di partizione si scrive come:

$$Z = e^{-\beta F} = \sum_{\{\sigma\}} e^{-\beta \mathcal{H}(\sigma)}$$

però possiamo riscriverla come:

$$\sum_{\eta(\vec{r})} e^{-\beta L[\bar{\eta}(\vec{r})]} = \sum_{\{\underline{\sigma}\}} \sum_{\{\bar{\sigma}\}} e^{-\beta \mathcal{H}(\sigma)}$$

Passando agli integrali funzionali, si può scrivere:

$$Z = \int D\eta_{\Lambda} e^{-\beta L[\bar{\eta}_{\Lambda}(\vec{r})]}$$

da cui viene gratis l'ipotesi di Landau (??). Questo ci dice anche che $e^{-\beta L[\bar{\eta}(\vec{r})]}$ è la proprietà di osservare il profilo η , dunque L è l'hamiltoniana efficace del sistema.

Ci manca da dire cosa sia la teoria di Landau che abbiamo visto all'inizio; se diciamo che la fisica è descritta da una energia libera definita dalla funzione di Landau, abbiamo:

$$Z \simeq e^{-\beta L[\bar{\eta}(\vec{r})]}$$

dove $\bar{\eta}(\vec{r})$ risolve $\frac{\delta L}{\delta \eta_{\Lambda}(\vec{r})} = 0$; allora la teoria di Landau uniforme consiste semplicemente nel rimpiazzare l'integrale funzionale con una sua stima, ovvero è un'approssimazione di punto sella della fisica giusta. Però trascurando tutti i pezzi rimanenti, stiamo eliminando completamente le fluttuazioni.

Per quanto riguarda la suscettività, si ha:

$$\chi = \frac{\partial M}{\partial H}$$

Definiamo adesso $\chi(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{\delta \eta(\vec{r})}{\delta H(\vec{r}')}$; per l'invarianza sotto traslazioni si può scrivere $\chi(\vec{r}, \vec{r}') = \chi(\vec{r} - \vec{r}')$ e si può mostrare che risulta $\chi(\vec{r} - \vec{r}') = \beta G(\vec{r} - \vec{r}')$, dove $G(\vec{r} - \vec{r}')$ è la funzione di correlazione (????); nello spazio di Fourier si ha $\tilde{\chi}(\vec{k}) = \beta \tilde{G}(\vec{k})$. La suscettività usuale non è nient'altro che la suscettività appena definita, calcolata su scale piccole:

$$\chi = \tilde{\chi}(0) = \beta \tilde{G}(0)$$

Questo perchè la suscettività su tutto lo spazio è equivalente alla suscettività in spazio di Fourier per $\vec{k} = 0$. Vediamo cos'è allora $\tilde{G}(0)$:

$$\tilde{G}(0) = \int d^d \vec{r} G(\vec{r}) e^{i \overbrace{\vec{k}}^{=0} \cdot \vec{r}} = \int d^d \vec{r} G(\vec{r})$$

Scriviamo adesso la cosiddetta **regola di somma**:

$$\chi \overset{DEF}{\equiv} \beta \int d^d \vec{r} G(\vec{r})$$

Essa è lo strumento che ci permette di capire quando la teoria di Landau funziona e quando no. Per calcolare esplicitamente la G ci vuole la L :

$$L = \int d^d \vec{r} \left[\frac{\gamma}{2} (\nabla \eta_\Lambda)^2 + at \eta_\Lambda^2(\vec{r}) + \frac{1}{2} b \eta_\Lambda^4(\vec{r}) - H(\vec{r}) \eta_\Lambda(\vec{r}) \right]$$

Una volta assegnato il campo $H(\vec{r})$, troviamo η di equilibrio come quello che rende estremo L :

$$\frac{\delta L}{\delta \eta} = 0$$

$$\Rightarrow -2\gamma \nabla \eta(\vec{r}) + 2at \eta(\vec{r}) + 2b \eta^3(\vec{r}) - H(\vec{r}) = 0$$

$$\Rightarrow \beta(-\gamma \nabla^2 + 2at + 6b \eta^2) G(\vec{r} - \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

Definiamo ora:

$$\xi(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\gamma}{2at}}, & t > 0; \\ \sqrt{\frac{\gamma}{4at}}, & t < 0. \end{cases}$$

Dopodichè reintroduciamo il valore della teoria di Landau omogenea (??):

$$\beta \gamma (-\nabla^2 + \xi^{-2}) G(\vec{r} - \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

dunque la funzione di correlazione è la funzione di Green dell'operatore $(-\nabla^2 + \xi^{-2})$:

$$\tilde{G}(k) = \frac{1}{\beta \gamma} \frac{1}{k^2 + \xi^{-2}}$$

che è il propagatore per una particella di massa ξ^{-1} .

In fin dei conti, è grave approssimare a punto sella? Possiamo quantificare l'errore? La risposta è sì ad entrambe le domande, e stimeremo adesso le fluttuazioni; se abbiamo la funzione di correlazione a due punti possiamo scrivere:

$$\frac{|\langle \eta(\vec{r}) \eta(\vec{r}') \rangle - \langle \eta(\vec{r}) \rangle \langle \eta(\vec{r}') \rangle|}{\eta^2} = \epsilon(\vec{r}, \vec{r}')$$

Se ϵ è grande, è male. Tuttavia, non ci piace che una stima dipenda da \vec{r} ed \vec{r}' ; sappiamo che la teoria è definita su una scala Λ^{-1} che è minore o circa uguale alla lunghezza di correlazione ξ , dunque una buona stima si può avere facendo un integrale su un volume $V \sim (\xi)^3$. Decidiamo di porre l'origine in $\vec{r} = 0$, da cui abbiamo che $G(\vec{r}) = \langle \eta(0) \eta(\vec{r}) \rangle - \langle \eta(0) \rangle \langle \eta(\vec{r}) \rangle$, mentre per l'errore:

$$\epsilon = \frac{\int d^d \vec{r} G(\vec{r})}{\int_V d^d \vec{r} \eta^2(\vec{r})}$$

La teoria è autoconsistente quando $\epsilon \lesssim 1$.

Il volume su cui facciamo l'integrale è $\xi^d(T)$, e ci mettiamo chiaramente a $t < 0$ altrimenti $\eta = 0$. In questo caso possiamo utilizzare per η il valore

$$\eta = \left(\frac{a|t|}{b} \right)^{\frac{1}{2}}$$

poichè siamo su scale all'incirca uguali a ξ ed η non varierà tanto. Avremo allora che

$$\int d^d \vec{r} \eta^2(\vec{r}) = \frac{a|t|}{b} \xi^d(T)$$

Usando le regole di somma, abbiamo:

$$|\int_V d^d \vec{r} G(\vec{r})| = K_B T_c \chi = \frac{K_B T_c}{4a|t|}$$

dove abbiamo usato T_c perchè siamo vicino alla temperatura critica. Sappiamo anche che

$$\xi(t) = \sqrt{\frac{\gamma}{4a}} |t|^{-\frac{1}{2}}$$

Diciamo allora che possiamo scrivere:

$$\xi(t) = \xi(1) |t|^{-\frac{1}{2}}$$

dove $\xi(1) \equiv \xi_0$ è una costante. Si ha allora:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} |t| \xi_0^d |t|^{-\frac{d}{2}} &= \frac{a}{b} \xi_0^d |t|^{1-\frac{d}{2}} \\ \Rightarrow \epsilon &= \frac{K_B T_c}{4a|t|} \frac{b}{a \xi_0^d |t|^{1-\frac{d}{2}}} = \frac{b}{4a^2} \frac{K_B T_c}{\xi_0^d} \frac{1}{|t|^{2-\frac{d}{2}}} = \end{aligned}$$

Adesso ci ricordiamo che $\frac{a^2}{bT_c}$ è proprio il salto del calore specifico in teoria di Landau, Δc :

$$= \frac{K_B}{4\xi_0^d \Delta c} |t|^{-\frac{4-d}{2}}$$

Affinchè la teoria di Landau sia consistente deve essere $\epsilon \ll 1$, il che significa:

$$|t|^{\frac{4-d}{2}} \gg \frac{K_B}{4\xi_0 \Delta c}$$

$\frac{K_B}{4\xi_0 \Delta c}$ è un numero puro; la cosa importante è che esso dipende dalle proprietà del sistema, e viene chiamata **temperatura di Ginzburg**:

$$\frac{K_B}{4\xi_0 \Delta c} \equiv t_G^{\frac{4-d}{2}}$$

La temperatura di Ginzburg dipende quindi dai dettagli del sistema. Questo criterio che abbiamo appena ricavato ci dice che la teoria di Landau funziona quando $|t| \gg t_G$, e si vede subito che le cose dipendono dalle dimensioni del sistema:

- Se $d > 4$ il criterio è sempre soddisfatto, finchè siamo vicini a $t = 0$; per esempio, da simulazioni numeriche si vede che gli esponenti critici tornano bene per sistemi in dimensione maggiore di 4;
- se $d < 4$ la teoria di Landau non è mai buona; le fluttuazioni contano sempre: esiste sempre t vicino a $t = 0$ tale che il criterio non è soddisfatto per $|t| < t_G$ (??).

Per questo motivo $d = 4$ è detta *dimensione critica superiore*. La regione in cui la fisica è dominata dalle fluttuazioni è detta regione critica; tale regione esiste soltanto in dimensione minore di 4. Inoltre, tutti questi ragionamenti valgono se il funzionale di Landau è quello scritto da noi, con simmetria Z_2 ; per altri sistemi basta ricordarsi che:

$$\int d^d \vec{r} G(\vec{r}) \sim K_B T_c \chi \sim t^{-\gamma}$$

$$\int d^d \vec{r} \eta^2 \sim \xi^d |t|^{2\beta}$$

allora il criterio di Ginzburg diventa:

$$t^{-\gamma} \ll t^{2\beta-\nu d} \Rightarrow d > \frac{2\beta+\gamma}{\nu} \equiv d_c$$

—>17/7/08<—

Abbiamo introdotto il criterio di Ginsburg; in ogni sistema con dimensione minore della dimensione critica $d_c = \frac{2\beta+\gamma}{\nu}$ (dove gli esponenti sono quelli calcolati in teoria di Landau), l'ampiezza della regione critica è $|t| < t_G$, dove:

$$t_G = \left(\frac{K_B}{4\Delta c \xi_0^d} \right)^{\frac{2}{4-d}}$$

Trascuriamo il 4. Il calore specifico può essere scritto come $K_B * n_{gdl}$, dove n_{gdl} è il numero di gradi di libertà per unità di volume, da cui:

$$t_G \simeq (N \xi_0^d)^{-\frac{2}{4-d}}$$

In un tipico magnete si ha $d = 3$ e $\xi_0 \simeq 1 \text{Å}$. In un Å^3 ci sta all'incirca 1 grado di libertà, dunque $n_{gdl} \xi_0^3 = 1$ e si ha:

$$t_G \sim 1^{-\frac{2}{4-3}} = 1$$

Dunque la zona critica si estende per un intervallo simmetrico centrato in T_c di ampiezza T_c . Per un superfluido si ottiene più o meno la stessa cosa.

Per i superconduttori si ha un transizione di fase continua; qual'è in questo caso la lunghezza di correlazione? Si hanno coppie di Cooper, quindi correlazione tra elettroni distanti, e la ξ è allora la distanza media tra gli elettroni di una coppia:

$$\xi_0 \simeq 10^3 \text{Å}$$

Poichè il numero di elettroni, e quindi di gradi di libertà, in 10^9Å^3 è dell'ordine di 10^8 , stavolta abbiamo:

$$t_G \simeq [10^8]^{-2} = 10^{-16}$$

Dunque per osservare un comportamento regolato dalle fluttuazioni bisogna andare ad una distanza di $10^{-16} T_c$ da T_c ; questo significa che ogni esperimento possibile di superconduttività troverà gli esponenti predetti dalla teoria di Landau. Esistono anche dei casi intermedi, con dimensione minore di 3 (sistemi su film); la regione critica è osservabile ma piccola. In generale si avrà quindi il cosiddetto fenomeno del *crossover*: ad una certa distanza dalla temperatura critica la teoria di Landau va bene, mentre avvicinandosi le cose peggiorano.

Abbiamo visto che si può scrivere:

$$Z = e^{-\beta L[\bar{\eta}]} \int D\eta(r) e^{-\beta L[\eta - \bar{\eta}]}$$

Se poniamo $\psi(\vec{r}) = \eta(\vec{r}) - \bar{\eta}$ possiamo riscrivere:

$$Z = e^{-\beta L[\bar{\eta}]} \int D\psi e^{-\beta[\frac{\gamma}{2}(\nabla\psi)^2 + at\psi^2 + \frac{b}{2}\psi^4]}$$

Supponiamo di buttare via il termine quartico, allora l'integrale diventa un integrale gaussiano che si sa risolvere esattamente. Nonostante ciò si ritrovano le stesse funzioni di correlazione e gli stessi esponenti, a parte α . Il contributo gaussiano infatti cambia α , e si trova:

$$\alpha = 2 - \frac{d}{2}$$

I risultati non si confrontano ancora bene con i dati sperimentali, non essendo ad esempio presente una dipendenza dal numero di particelle N . Si prova allora a fare una teoria delle perturbazioni, ma questo si vede che non funziona concettualmente; la teoria di Landau-Ginzburg infatti non permette di capire come si può fare la perturbazione, e questo si vede da una analisi dimensionale:

$$A = \int D\eta e^{-\beta L[\eta]}$$

Se leviamo il termine di campo esterno, abbiamo per la funzione di Landau:

$$L[\eta] = \int d^d\vec{r} [\frac{1}{2}\gamma(\nabla\eta)^2 + at\eta^2 + \frac{1}{2}b\eta^4]$$

Riscaliamo i campi:

$$\psi = (\beta\gamma)^{\frac{1}{2}}\eta$$

$$\frac{at}{\gamma} = \frac{r_0}{2}$$

$$\frac{1}{2}\frac{b}{\beta\gamma^2} = \frac{u_0}{4}$$

$$\Rightarrow L\beta = H_{eff}[\psi] = \int d^d\vec{r} [\frac{1}{2}(\nabla\psi)^2 + \frac{1}{2}r_0\psi^2 + \frac{1}{4}u_0\psi^4]$$

Vogliamo scrivere tutto in termini di variabili adimensionali:

$$H_{eff} = 1$$

$$[\int d^d\vec{r}(\nabla\psi)^2] = 1$$

$$\Rightarrow l^d l^{-2}[\psi] = 1 \Rightarrow [\psi] = l^{1-\frac{d}{2}}$$

Anche per gli altri pezzi è possibile fare ragionamenti analoghi e si trova:

$$[r_0] = l^{-2}$$

$$[u_0] = l^{d-4}$$

Le dimensioni di r_0 quindi non dipende dalla dimensionalità del sistema, $\frac{1}{\sqrt{r_0}}$ quindi è una lunghezza e possiamo usarla come scala di lunghezza:

$$\lambda = r_0^{\frac{1}{2}}$$

Concettualmente, r_0 è proporzionale a $t^{-\frac{1}{2}}$, cioè stiamo misurando le lunghezze in unità di ξ_0 (??). Introduciamo inoltre

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{\psi}{\lambda^{1-\frac{d}{2}}} \\ \vec{x} &= \frac{\vec{r}}{\lambda} \\ \bar{u}_0 &= \frac{u_0}{\lambda^{d-4}}\end{aligned}$$

L'integrale funzionale diventa funzione di \bar{u}_0 :

$$Z(\bar{u}_0) = cost * \int D\phi e^{-H_{eff}(\phi, \bar{u}_0)}$$

Le costanti sono dovute al cambio di coordinate da ψ e ϕ .

$$H_{eff}(\phi, \bar{u}_0) = \int d^d \vec{x} \left(\frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} \phi^2 + \frac{1}{4} \bar{u}_0 \phi^4 \right)$$

Se poniamo:

$$H_0 = \int d^d \vec{x} \left[\frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} \phi^2 \right]$$

e

$$H_{int} = \int d^d \vec{x} \frac{1}{4} \bar{u}_0 \phi^4 = \bar{u}_0 \int d^d \vec{x} \frac{1}{4} \phi^4$$

allora

$$Z = \int D\phi e^{-H_0[\phi]} e^{-H_{int}[\phi, \bar{u}_0]} = \int D\phi e^{-H_0[\phi]} \left(1 - H_{int} + \frac{1}{2} H_{int}^2 \dots \right)$$

Il termine n-esimo dello sviluppo in serie sarà proporzionale a \bar{u}_0^n , e \bar{u}_0 è il parametro "piccolo" dello sviluppo. Ma \bar{u}_0 è davvero $\ll 1$?

$$\bar{u}_0 = \frac{u_0}{\lambda^{d-4}}$$

Se $\bar{a} = \frac{2a}{\gamma}$ dove a e γ sono i coefficienti della teoria di Landau, allora $r_0 = \bar{a}t$, e si ha:

$$\bar{u}_0 = u_0 a^{-\frac{d-4}{2}} t^{\frac{d-4}{2}} = cost * t^{\frac{d-4}{2}}$$

Ci interessa il caso $t \rightarrow 0$, dunque se $d < 4$ abbiamo che $\bar{u}_0 \rightarrow \infty$ per $t \rightarrow 0$. Se rimettiamo i coefficienti, si può dimostrare che per $d > 4$ $\bar{u}_0 < 1$, e ritroviamo il risultato di Ginzburg.

Poichè la lunghezza di correlazione è proporzionale a r_0 , ed $r_0 \alpha t$, ne seguirebbe $\xi \alpha t^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \nu = \frac{1}{2}$, ma sappiamo che il risultato non è corretto. Ricordiamo le altre scale in gioco, la intermedia Λ^{-1} , e la distanza microscopica a ; se chiamiamo A indistintamente le due scale, abbiamo

$$[A] = l$$

$$[r_0] = l^{-2}$$

Ci aspettiamo che per $t \rightarrow 0$ la scala dominante sia A :

$$\xi = r_o^{-\frac{1}{2}} f(r_o a^2)$$

L'unica cosa che sappiamo è che per $t \rightarrow 0$ anche $r_o a^2 \rightarrow 0$. Supponiamo che per qualche motivo la funzione f non sia analitica, ad esempio $f(x) \sim x^{-\theta}$; allora per $t \rightarrow 0$ abbiamo:

$$\begin{aligned} \xi &\sim t^{-\frac{1}{2}} (t^{-\theta} a^{-2\theta}) = t^{-\frac{1}{2}-\theta} a^{-2\theta} \\ \Rightarrow \xi &\sim t^{-\frac{1}{2}+\theta} \end{aligned}$$

Cioè è possibile che $\alpha \neq \frac{1}{2}$, e la correzione dipende dal contributo della scala microscopica. L'esponente θ si chiama dimensione anomala: è come se le lunghezze si prendessero una dimensione anomala.

Gli esperimenti ci dicono che esattamente al punto critico le funzioni di correlazione hanno andamenti a potenza e non esponenziali:

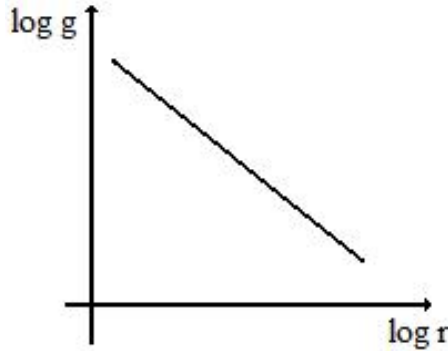
$$G(r) = r^{-(d-2+\eta)}$$

$$\tilde{G}(k) \sim k^{-2+\eta}$$

Quando una funzione segue una legge di potenza, si dice che essa è invariante di scala, ovvero l'andamento è lo stesso per ogni scala. Se consideriamo ad esempio la funzione $g(r) = r^{-p}$:

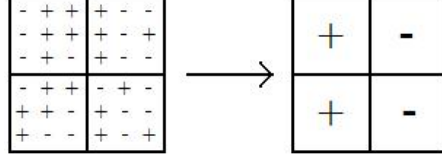
$$\mathcal{L} = at\eta^2 + \frac{1}{2}b\eta^4 - \eta H$$

Per $T < T_c$ questa funzione si rappresenta come ($H < 0$):



Variare la scala significa moltiplicare le lunghezze per una costante, e questo comporta soltanto uno spostamento rigido della retta sul piano. In pratica, immaginiamo un modello di Ising su un reticolo quadrato: facciamo un coarse grain e raggruppiamo un certo numero di spin a formare una variabile collettiva; É ancora una possibile configurazione, ma per un modello di Ising in dimensione $\frac{n}{b^2}$, se b è il lato del quadrato più piccolo. In questo caso infatti $n = 36$ e $b = 3$. Il passo reticolare è tre volte più grande, quindi riscaliamo anche la lunghezza: $L \rightarrow \frac{L}{b}$.

Verso la fine degli anni 60, dagli studi di Leo Kadanoff emerse che fare il coarse graining era equivalente a cambiare la temperatura allontanandosi da T_c (se partiamo da una temperatura $T > T_c$) o avvicinandosi



(se partiamo da una temperatura $T < T_c$). A questa procedura si dà il nome di trasformazione di Kadanoff; le temperature $T = 0$, $T = T_c$ e $T = \infty$ sono i tre punti fissi della trasformazione di Kadanoff, anche se T_c è un punto repulsivo. Le temperature $T = 0$ e $T = \infty$ corrispondono rispettivamente alla fase ordinata e a quella disordinata. A livello qualitativo questo è tutto quello che ci serve per fare calcoli di esponenti. Tutto questo discorso funziona ma ha un difetto, infatti c'è una assunzione implicita: il sistema è descritto figura per figura da una hamiltoniana che è la stessa, e quello che cambia è soltanto la temperatura; in realtà andrebbe cambiata anche l'hamiltoniana ad ogni passo.

Ken Wilson riprese l'idea di Kadanoff e la sviluppò, costruendo la teoria del gruppo di rinormalizzazione in spazio reale: funziona bene per situazioni generali, ma è scarso su casi reali.

—>18/6/08<—

Consideriamo una trasformazione del tipo

$$\sigma'_\alpha = f(\{\sigma_i\}_{i \in \alpha})$$

$$f(\sigma_i) = \text{sign} \sum_{i \in \alpha} \sigma_i$$

questa è una possibile regola, ma ha il difetto che la funzione segno è altamente non lineare. Se vogliamo la linearità possiamo provare a considerare:

$$f(\sigma_i) = \frac{\lambda(b)}{b^d} \sum_{i \in \alpha} \sigma_i$$

Il difetto di questa espressione è che dopo pochi passi trasforma una variabile discreta in una continua; la regola precedente restituiva invece una variabile di Ising.

Se conosciamo l'hamiltoniana, nel canonico sappiamo anche la probabilità che il sistema si trovi in un determinato stato. Poniamo $\beta = 1$ in modo che $\beta H(\sigma) \rightarrow H(\sigma)$, e per la probabilità avremo quindi

$$p(\{\sigma_i\}) e^{-H(\sigma)}$$

$$p(\{\sigma'_\alpha\}) e^{-H'(\sigma')}$$

É immediato trovare la nuova hamiltoniana, basta proiettare le vecchie variabili nelle nuove:

$$e^{-H'(\sigma')} = \sum_{\{\sigma\}} \prod_{\alpha} P(\sigma'_\alpha; \sigma_{i \in \alpha}) e^{-H(\sigma)}$$

Il proiettore P si può scrivere esplicitamente:

$$P(\sigma'_\alpha; \sigma_{i \in \alpha}) = \delta[\sigma'_\alpha - f(\{\sigma_i\}_{i \in \alpha})]$$

Formalmente H' è ben definita. Queste trasformazioni hanno una proprietà molto importante: fissato σ_i c'è una sola configurazione σ'_α tale che

$$\sum_{\{\sigma'\}} \prod_{\alpha}^{N'} \delta[\sigma'_\alpha - f(\{\sigma_i\}_{i \in \alpha})] = 1$$

dove $N' < N$. O più semplicemente:

$$\text{Tr}_{\sigma'} \prod_{\alpha} P(\sigma'_\alpha, \sigma_{i \in \alpha}) = 1$$

Calcoliamo la funzione di partizione nelle nuove variabili:

$$Z' = \sum_{\{\sigma'\}} e^{-H'(\sigma')} = \sum_{\{\sigma'\}} \sum_{\{\sigma\}} \prod_{\alpha} P(\sigma'_\alpha; \sigma_{i \in \alpha}) e^{-H(\sigma)}$$

Scambiamo le somme:

$$\sum_{\{\sigma\}} \sum_{\{\sigma'\}} \prod_{\alpha} P(\sigma'_\alpha; \sigma_{i \in \alpha}) e^{-H(\sigma)}$$

per quanto detto prima c'è un unico $\{\sigma'\}$ tale che $\sum_{\{\sigma'\}} \prod_{\alpha} P(\sigma'_\alpha; \sigma_{i \in \alpha}) = 1$, e la sommatoria lo seleziona:

$$\sum_{\{\sigma\}} e^{-H(\sigma)} = Z$$

ovvero il risultato è che la funzione di partizione è invariante, dunque tutta la termodinamica non è intaccata dalle trasformazioni del gruppo di rinormalizzazione. Ora bisogna fare l'ulteriore passo di riscalar le lunghezze; i passi quindi sono due:

- $\sigma_i \rightarrow \sigma'_\alpha$, ($N \rightarrow N'$), ($H(\sigma) \rightarrow H'(\sigma')$);
- $L \rightarrow \frac{L}{b} = L'$.

Osservazione: non è semplice capire come passare da H ad H' , ed in generale non si sa fare. Data la generalità dell'impostazione, consideriamo un modello di Ising:

$$-H(\sigma) = K_1 \sum_{\langle i, j \rangle} \sigma_i \sigma_j + K_H \sum_i \sigma_i$$

$$K_1 = J\beta$$

$$K_H = H\beta$$

Nessuno ci garantisce che la nuova hamiltoniana sia della forma:

$$H'(\sigma') = K'_1 \sum_{\langle \alpha, \beta \rangle} \sigma'_\alpha \sigma'_\beta + K'_H \sum_{\alpha} \sigma'_\alpha$$

mentre questa era l'ipotesi implicita nel ragionamento di Kadanoff, però è un'ipotesi troppo forte ed è il punto cruciale. Consideriamo ad esempio un modello di Ising con interazioni soltanto tra secondi vicini. Il sistema è costituito da due sottoreticoli che non si parlano, e dopo soltanto un passo spuntano fuori

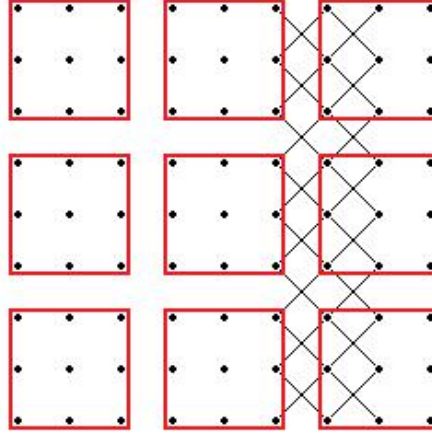


Figura 4: Interazione a secondi vicini

delle interazioni a primi vicini, quindi dobbiamo pensare ad una intera famiglia di sistemi; come si può parametrizzare?

Per il modello di Ising scriviamo una hamiltoniana con tutte le possibili interazioni:

$$-H(\sigma) = K_1 \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j + K_2 \sum_{\langle\langle i,j \rangle\rangle} \sigma_i \sigma_j + \dots + K_p \sum_{\langle i,j,k,l \rangle} \sigma_i \sigma_j \sigma_k \sigma_l + \dots + K_H \sum_i \sigma_i$$

Ci saranno delle interazioni non permesse. In generale una trasformazione di rinormalizzazione prende uno spazio di parametri e lo mappa in se stesso:

$$R_b : \{K\} \rightarrow \{K'\}$$

$$\{K'\} = R_b[\{K\}]$$

Le trasformazioni di Kadanoff mandano un sistema ad una certa temperatura in **un altro** sistema ad un'altra temperatura. Le trasformazioni sono molto generali ma non possono fare tutto; per esempio non alterano la simmetria (è stato dimostrato con un teorema).

Osservazione: riscaldare le coordinate è come cambiare volta volta le unità di misura; alla fine cambia poco se non per i calcoli espliciti. Inoltre il vettore $\{K\}$ può essere finito o infinito dimensionale.

Si può pensare alle trasformazioni di rinormalizzazione come a un sistema dinamico sullo spazio dei K . Tuttavia tale sistema dinamico è non invertibile perchè non siamo in grado di sapere da dove siamo partiti (ed è per questo che è improprio parlare di **gruppo** di rinormalizzazione, casomai di semigrupp).

Dobbiamo fare due ipotesi per andare avanti:

- La trasformazione del gruppo di rinormalizzazione deve essere una funzione analitica in ogni punto dello spazio dei parametri, quindi le $K'(K)$ sono funzioni analitiche.
- Le interazioni tra parametri non possono mai generare interazioni a lungo raggio se non sono presenti inizialmente. L'ipotesi è ragionevole perchè la trasformazione è locale.

Osservazione: se alla fine vogliamo spiegare comportamenti non analitici come facciamo? Iterando un numero di volte una trasformazione analitica possiamo ottenere un risultato non analitico, ad esempio consideriamo una pallina dentro un potenziale in presenza di attrito:

$$m\ddot{q} + \gamma\dot{q} = -\frac{dB(q)}{dq}$$

Supponiamo che l'attrito sia molto più grande dell'inerzia, in questo modo potremo scrivere approssimativamente:

$$\dot{q} = -\frac{dV(q)}{dq}$$

dunque la pallina andrà a cercare il minimo della parabola: la pallina cade a destra o a sinistra a seconda della posizione iniziale. La trasformazione è analitica, ma non è analitica per $t = \infty$.

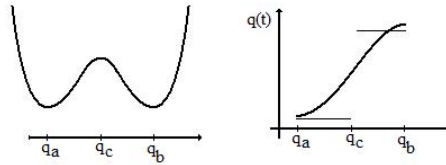


Figura 5: ??????

Il bacino di attrazione di q_c è q_c stesso. Alla fine sarà importante il comportamento della trasformazione vicino ai punti fissi; se una trasformazione non ne ha non serve a nulla. Tutte le trasformazioni interessanti hanno punti fissi:

$$\exists K^* : K^* = R_b[K^*]$$

Proprietà: ad ogni punto nello spazio dei parametri possiamo associare una lunghezza di correlazione. In generale $\xi' = \frac{\xi}{b}$, ma se siamo ad un punto fisso la divisione per b non ha effetto da cui la proprietà:

$$\xi(K^*) = \frac{\xi(K^*)}{b} \Rightarrow \xi = 0, \infty$$

Quindi tutti i punti fissi hanno lunghezza di correlazione 0 oppure ∞ . I punti fissi con $\xi = \infty$ sono legati ai punti critici, e vengono detti "punti fissi critici". Ogni punto fisso ha il suo bacino di attrazione $B(K^*)$; avremo che

$$\xi(K) = \infty \forall K \in B(K^*) \text{ se } e' \text{ un punto critico}$$

Infatti:

$$\begin{aligned} \xi(K) &= b\xi(K^{(1)}) = b^2\xi(K^{(2)}) = \dots = b^n\xi(K^{(n)}) \\ &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} K^{(n)} = K^* \end{aligned}$$

e questo ci dice già qualcosa sull'universalità (WTF???). I punti con $\xi = \infty$ finiscono nello stesso punto fisso.

Ora usiamo l'analiticità: prendiamo un punto fisso K^* . Se R_b è analitica lo è anche su K^* , quindi è sviluppabile in serie di Taylor:

$$K'_\alpha - K^*_\alpha = \sum_{\beta} T_{\alpha\beta}(K_\beta - K^*_\beta) + \text{ordini superiori}$$

dove $T_{\alpha\beta} = \frac{\partial K'_\alpha}{\partial K_\beta}|_{K=K^*}$ è la matrice delle derivate. Non è detto che tale matrice sia simmetrica, e quindi che abbia autovalori reali, tuttavia a noi non interessano casi in cui questo non succede, pertanto ci limiteremo a casi in cui gli autovalori λ' sono reali. Sia allora λ' un autovalore (reale) e ϕ' il suo corrispondente autovettore sinistro. L'equazione agli autovalori si scrive:

$$\sum_{\alpha} \phi'_\alpha T_{\alpha\beta} = \lambda' \phi_\beta$$

Definiamo adesso delle nuove variabili, dette **variabili di scala**:

$$U_i = \sum_{\alpha} \phi'_\alpha (K_\alpha - K^*_\alpha)$$

ovvero sono definite come combinazioni lineari delle deviazioni dal punto fisso. Queste sono autodirezioni del gruppo di rinormalizzazione, ovvero applicando una trasformazione ai K si ottiene:

$$U'_i = \sum_{\alpha} \phi'_\alpha (K'_\alpha - K^*_\alpha) = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \phi'_\alpha T_{\alpha\beta} (K_\beta - K^*_\beta) = \sum_{\beta} \lambda^i \phi^i_\beta (K_\beta - K^*_\beta) = \lambda^i U_i$$

Conviene definire degli esponenti:

$$y_i = \frac{\log \lambda^i}{\log b} \Rightarrow \lambda^i = b^{y_i} \quad (\text{autovalori del gruppo di rinormalizzazione})$$

Si possono distinguere tre casi:

1. $y_i > 0 \Rightarrow U_i$ è detta **variabile rilevante**, e cresce;
2. $y_i < 0 \Rightarrow U_i$ è detta **variabile irrilevante**, e diminuisce;
3. $y_i = 0 \Rightarrow U_i$ è detta **variabile marginale**; queste ultime variabili incasinano tutto, ma non le butteremo.

Le variabili rilevanti corrispondono alle direzioni instabili;

Ora possiamo spiegare l'universalità: se la dimensione è elevata possiamo avere punti fissi di molti tipi, che possono essere classificati in base al numero di direzioni rilevanti, e si parla di "codimensione del punto fisso".

Se la dimensione è 0 si parla di **pozzi**: il bacino di attrazione ha la stessa dimensione dello spazio dei parametri.

I punti fissi critici hanno codimensione maggiore o uguale a 2 (ma non lo dimostreremo). Se la dimensione è uguale a 1 non torna nulla, e il punto fisso non descrive una transizione di fase critica. Ogni punto dello spazio dei parametri è un sistema a una dimensione σ . Z è invariante, \Rightarrow possiamo avere sistemi diversi descritti dalla stessa fisica.



In codimensione 0, il punto fisso attrae una intera regione \Rightarrow rappresentano le fasi di Gesù.

Se c'è qualche direzione rilevante, abbiamo qualche transizione di fase critica. Supponiamo uno spazio a due dimensioni:

Per arrivare nel punto fisso critico dobbiamo stare in un punto stabile della varietà, e per far questo dobbiamo aggiustare i parametri. Tutti i sistemi (diversi) che stanno su questa varietà vanno a finire nello stesso punto critico, cioè hanno la stessa transizione di fase. Per la topologia dello spazio non posso andare da una regione all'altra.

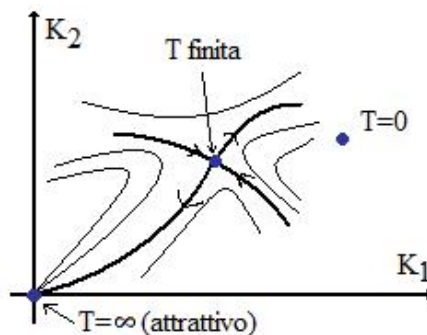
Specializziamoci per un sistema magnetico, e scopriamo le direzioni rilevanti. Per andare al punto critico ci vuole sia $H = 0$ che $T = T_c$, dunque abbiamo due direzioni rilevanti:

- U_h direzione associata a H ;
- U_t direzione associata a T .

Il gruppo di rinormalizzazione non mescola termini dispari con termini pari (???). È sufficiente studiare uno spazio bidimensionale, con interazioni tra primi e secondi vicini:

$$-H(\sigma) = K_1 \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j + K_2 \sum_{\langle\langle i,j \rangle\rangle} \sigma_i \sigma_j + h \underbrace{\sum_i \sigma_i}_{\text{via diane!}}$$

Guardiamo lo spazio dei parametri K_1 e K_2 (K_1 : solo primi vicini; K_2 : solo secondi vicini):



Dunque due modelli di Ising con interazioni a primi o a secondi vicini hanno gli stessi esponenti critici.

—>19/6/08<—

Questo ragionamento fa capire come mai le classi di universalità dipendano dalle simmetrie. Vedremo adesso come emerge la dimensionalità.

Calcoliamo gli esponenti critici termodinamici per il modello di Ising:

$$U_t \rightarrow y_t$$

$$U_h \rightarrow y_h$$

In generale saremo sempre lontani dal punto fisso, ma vogliamo metterci vicini. Per far questo basterà un numero finito di passi, dunque non interodurremo delle non analiticità e vicino al punto fisso avrà senso fare uno sviluppo lineare in t e h ; vicino al punto critico potremo scrivere:

$$U_t = \frac{t}{t_0}$$

$$U_h = \frac{h}{h_0}$$

Cosa succede all'energia libera sotto il gruppo di rinormalizzazione? Possiamo pensare di scrivere $e^{-Nf(K)} = e^{-N'f(K')}$ per l'invarianza della funzione di partizione. In realtà non è così semplice, e possiamo avere un fattore di scala che dipende dalle vecchie coordinate:

$$e^{-Nf(K)} = e^{-Ng(K)} e^{-N'f(K')}$$

$$N' = b^{-d}N \Rightarrow f(K) = g(K) + b^{-d}f(K')$$

Questa trasformazione però non è omogenea.

Osservazione fisica: non ci interessa risolvere il modello. Soltanto il secondo termine, $b^{-d}f(K')$ può sviluppare delle singolarità sotto ripetute interazioni, dunque studieremo come evolve soltanto la parte dell'energia libera che può sviluppare singolarità:

$$f_s(K) = b^{-d}f_s(K')$$

Vicino al punto critico avremo:

$$\Rightarrow f_s(U_t, U_h) = b^{-d}f_s(b^{y_t}U_t, b^{y_h}U_h) =$$

Iteriamo:

$$= b^{-nd}f_s(b^{ny_t}U_t, b^{ny_h}U_h)$$

Queste sono variabili rilevanti, quindi per n arbitrario usciamo fuori dall'approssimazione lineare, allora ci dobbiamo fermare ad un certo punto. Supponiamo $t > 0$ e fissiamo U_{t_0} piccolo abbastanza da soddisfare la relazione lineare:

$$b_{U_t}^{ny_t} = U_{t_0} \Rightarrow n = \frac{1}{y_t \log b} \log \left(\frac{U_{t_0}}{U_t} \right)$$

Sostituiamo:

$$f_s(U_t, U_h) = \left(\frac{U_t}{U_{t_0}} \right)^{\frac{d}{y_t}} f_s \left(U_{t_0}, U_h \left(\frac{U_t}{U_{t_0}} \right)^{-\frac{y_h}{y_t}} \right)$$

$$f_s(t, h) = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{d}{y_t}} \Phi_{>} \left(\frac{\frac{h}{h_0}}{\left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{y_h}{y_t}}} \right)$$

Ora Φ è una funzione universale, ma non ci interessa sapere come è fatta. Nell'altro caso c'è il problema del segno di t , dunque scriveremo:

$$f_s(t, h) = \left| \frac{t}{t_0} \right|^{\frac{d}{y_t}} \Phi_{>} \left(\frac{\frac{h}{h_0}}{\left| \frac{t}{t_0} \right|^{\frac{y_h}{y_t}}} \right)$$

e adesso abbiamo una espressione per l'energia libera. Calcoliamo il calore specifico come se la f_s fosse la vera energia libera, tanto il contributo divergente è dato da lei:

$$c = \frac{\partial^2 f_s}{\partial t^2} \alpha |t|^{\frac{d}{y_t}-2} = |t|^{-\alpha}$$

$$\Rightarrow \alpha = 2 - \frac{d}{y_t}$$

Allora per conoscere α basta calcolare y_t . Per la magnetizzazione:

$$m = \frac{\partial f_s}{\partial h} \alpha (-t)^{\frac{d-y_h}{y_t}} = (-t)^\beta \Rightarrow \beta = \frac{d-y_h}{y_t}$$

Per il terzo esponente γ , legato alla suscettività:

$$\chi = \frac{\partial^2 f_s}{\partial h^2} \alpha |t|^{\frac{d-2y_h}{y_t}} = |t|^{-\gamma} \Rightarrow \gamma = \frac{2y_h-d}{y_t}$$

δ non lo calcoliamo ma si può mostrare che si ha $\delta = \frac{y_h}{d-y_h}$. Controlliamo se sono verificate le leggi di scala:

$$2 - \frac{d}{y_t} + \frac{2d-2y_h}{y_t} + \frac{2y_h-d}{y_t} = 2 \quad OK$$

Inoltre risulta anche che $\alpha + \beta(\delta + 1) = 2$.

Abbiamo quindi completato la spiegazione dell'universalità; gli esponenti critici sono dati dalla dimensione e dagli autovalori del gruppo di rinormalizzazione che sono legati al punto fisso e quindi non dipendono dal sistema. Per quanto riguarda gli esponenti di correlazione: immaginiamo che Kadanoff abbia ragione, e facciamo un gruppo di rinormalizzazione "tascabile" in una dimensione; l'unica variabile è la t :

$$t' = b^{y_t} t$$

$$t^{(n)} = b^{ny_t} t$$

$$\xi' = \frac{\xi}{b} \Rightarrow \xi(t) = b^n \xi(t^{(n)}) = b^n \xi(b^{ny_t} t)$$

Anche in questo caso non possiamo fare troppe iterazioni. Si ha:

$$t_0 = b^{ny_t} t \Rightarrow b^n = \left(\frac{t_0}{t} \right)^{\frac{1}{y_t}} = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{-\frac{1}{y_t}}$$

$$\Rightarrow \xi(t) = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{-\frac{1}{y_t}} \xi(t_0)$$

Vicino alla temperatura critica:

$$\xi(t) \sim t^{-\frac{1}{y_t}} \Rightarrow \nu = \frac{1}{y_t}$$

Mancherebbe η ma non facciamo il calcolo. Si ha:

$$G\left(\frac{r}{b}, t'\right) = b^{2(d-y_h)} G(r, t)$$

$$\eta = d + 2 - 2y_h$$

Si può verificare le ultime due leggi di scala:

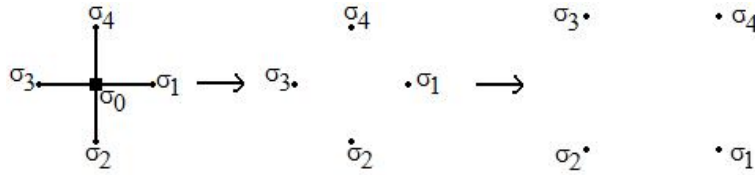
$$\alpha = 2 - d\nu$$

$$\gamma = \nu(2 - \eta)$$

Vediamo esplicitamente una trasformazione del gruppo di rinormalizzazione, in spazio reale e per un modello di Ising:

$$-H = K_1 \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j$$

Useremo la regola di rinormalizzazione detta "decimazione":



La decimazione consiste nel far scomparire σ_0 e nel ruotare di 45° . Facciamo la media statistica su σ_0 :

$$\sum_{\sigma_0} e^{K_1 \sigma_0 (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4)} = 2 \cosh(K_1 (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4))$$

poichè $\sigma_0 = \pm 1$; è questo il contributo alla nuova funzione di partizione.

Supponiamo per assurdo che la trasformazione sia di tipo Kadanoff; allora avremo:

$$-H' = K'_1 \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma'_i \sigma'_j \quad K'_1 = K'_1(K)$$

se fosse vero:

$$2 \cosh[K_1 (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4)] = e^{-\frac{K'_1}{2} (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_4 + \sigma_4 \sigma_1)}$$

Deve essere possibile scrivere questa uguaglianza, ma è impossibile per un motivo di simmetria. Il coseno iperbolico infatti è simmetrico rispetto a tutte le permutazioni di $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4$, mentre il secondo membro no. Si ha invece:

$$2 \cosh[K_1 (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4)] = \xi(K) e^{\frac{K'_1}{2} (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_4 + \sigma_4 \sigma_1) + \overbrace{K'_2 (\sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_4)}^{\text{secondi vicini}} + \overbrace{K'_p (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4)}^{\text{placchetta}}}$$

Questa equazione si può risolvere, e si ottiene:

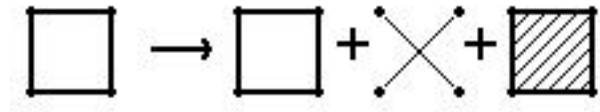
$$K'_1 = \frac{1}{4} \log[\cosh(4K_1)]$$

$$K'_2 = \frac{1}{8} \log[\cosh(4K_1)]$$

$$K'_p = \frac{1}{8} \log[\cosh(4K_1)] - \frac{1}{2} \log[\cosh(2K_1)]$$

$$\xi(K_1) = 2[\cosh(2K_1)]^{\frac{1}{2}} [\cosh(4K_1)]^{\frac{1}{8}}$$

Iterando si hanno moltissime interazioni in più, e non esiste una regola generale; già in questo caso, con una sola iterazione, da una interazione a primi vicini abbiamo ottenuto:



Faremo quindi delle approssimazioni: le nostre trasformazioni verranno fatte soltanto in uno spazio dei parametri troncato. Consideriamo uno spazio di dimensione 2 solo con K_1 e K_2 : $\{K_1, K_2\}$; inoltre decidiamo che l'hamiltoniana ha la stessa forma di quella vecchia:

$$H' = K' \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma'_i \sigma'_j$$

$$K' = K'_1 + K'_2$$

in cui abbiamo "rivenduto" il termine di interazione a secondi vicini come termine di interazione a primi vicini (WTF??). Allora abbiamo una trasformazione efficace unidimensionale:

$$K' = \frac{3}{8} \log[\cosh(4K)]$$

e questa ha un punto fisso per $K^* \sim 0,507$.

$$b^{y_t} = \left. \frac{dK'}{dK} \right|_{K=K^*} = \frac{3}{2} \tanh(4K^*) \simeq 1,449$$

$$\Rightarrow y_t = \frac{1}{\log b} \log(1,449) = \frac{2}{\log 2} \log(1,449) \simeq 1,07$$

$$\nu^{-1} \sim 1,07$$

Il ν esatto calcolato da Onsager è $\nu = 1$. Per il coefficiente α si ha:

$$\alpha = 2 - \frac{2}{y_t} = 0,13$$

ed è consistente rispetto a 0. (*Esempio su **Peliti***)

Ovviamente abbiamo avuto fortuna, perchè le approssimazioni non sono giustificate; per fare le cose in modo più sistematico bisognerebbe passare allo spazio di Fourier.