

# Fisica subnucleare

## Lunedì 6 ottobre

Secondo le nostre definizioni, il requisito che una particella deve possedere per essere considerata elementare è quello di non avere una struttura interna, e questo rende non assoluto il concetto stesso di particella elementare, in quanto particelle di cui fino ad oggi non si conosce la struttura interna potrebbero un domani cambiare il loro "status" con il progresso della tecnologia e delle tecniche di sondaggio. Le dimensioni sondabili mediante fotoni sono quelle per cui  $D \geq \lambda$ , dove  $D$  è la dimensione dell'oggetto sondato e  $\lambda$  è la lunghezza d'onda della radiazione emessa, ottenuta secondo la relazione:

$$\lambda = \frac{\hbar c}{E} \simeq \frac{197 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{E}$$

Tuttavia nonostante questa ambiguità nella definizione, esistono alcune grandezze che dobbiamo garantire per una particella elementare: massa e spin. Da dove deriva la necessità di queste due grandezze? Ormai abbiamo chiaro che ogni trattazione delle particelle elementari deve essere compatibile con la relatività ristretta (RR) e con la nostra assunzione di omogeneità dello spazio-tempo, per cui gli elementi del gruppo di Poincarè  $(a, \Lambda)$  (dove  $a$  è un quadrivettore e  $\Lambda$  è una matrice di Lorentz) devono essere rappresentati da un operatore unitario sullo spazio di Hilbert delle particelle.

Immaginiamo di avere uno stato  $|\psi\rangle$  di una particella in uno spazio di Hilbert  $H$ . Tale spazio di Hilbert dovrà contenere tutti e soli gli stati che corrispondono allo stesso stato visto da differenti sistemi di riferimento, traslati o ruotati secondo Lorentz. Tutti, perchè richiediamo che lo spazio di Hilbert non abbia sottospazi invarianti, in altre parole che la rappresentazione del gruppo di Lorentz su  $H$  sia irriducibile, o ancora, che per ogni coppia di stati  $|\psi\rangle, |\psi'\rangle \in H$  esista un operatore unitario  $O(a, \Lambda)$  rappresentazione del gruppo di Poincarè tale che  $O(a, \Lambda)|\psi\rangle = |\psi'\rangle$ ; soli, perchè non vogliamo che una particella abbia gradi di libertà aggiuntivi non controllabili tramite le trasformazioni del gruppo di Poincarè.

**Conseguenza:** l'irriducibilità della rappresentazione del gruppo di Poincarè ha come conseguenza che lo spazio di Hilbert può essere caratterizzato da due grandezze, massa e spin.

Il gruppo di Poincarè è un gruppo a 10 parametri (4 di traslazione, 6 di trasformazioni di Lorentz). È un gruppo di Lie, e si possono definire i generatori del gruppo in un intorno dell'identità. Studiando le traslazioni  $(a, I)$ , dove  $I$  è l'identità  $4 \times 4$ , si ottengono i 4 generatori delle traslazioni nella rappresentazione fondamentale, che chiameremo (non a caso)  $P^\mu$ . Nella rappresentazione concreta tali generatori diventeranno operatori (generatori delle traslazioni) sullo spazio di Hilbert della particella. Dato che la relazione tra i generatori astratti e la loro rappresentazione su uno spazio di Hilbert è un isomorfismo, la stessa algebra dei generatori del gruppo si ritrova per ciascuna rappresentazione. Ad esempio per il momento angolare,

sappiamo che l'algebra dei generatori di  $SU(2)$   $J_1$ ,  $J_2$  e  $J_3$  è

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k$$

e tale algebra è soddisfatta in tutte le rappresentazioni di spin intero o semintero.

Ai 6 parametri delle trasformazioni di Lorentz corrispondono 6 generatori; la generica matrice di Lorentz può essere scritta come:

$$\Lambda = e^{\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}}$$

dove  $\omega_{\mu\nu}$  è una matrice  $4 \times 4$  antisimmetrica di parametri, dunque  $M^{\mu\nu}$  (la matrice dei generatori astratti) ha solo 6 componenti indipendenti. Ci aspettiamo che anche nella rappresentazione sullo spazio di Hilbert avremo 6 generatori; anche stavolta, la differenza tra  $M^{\mu\nu}$  nella rappresentazione fondamentale e nella rappresentazione sullo spazio di Hilbert è che nel primo caso si ha una matrice  $4 \times 4$ , nel secondo caso per ogni scelta ammissibile di  $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$  si ha un operatore sullo spazio di Hilbert.

$M^{\mu\nu}$  si può splittare in due contributi:

$$e^{i\vec{\phi} \cdot \vec{J}} \\ e^{i \tanh^{-1}(\beta) \vec{n} \cdot \vec{K}} \quad (\text{trasformazioni di Lorentz proprie})$$

dove  $\vec{n}$  è il verso della velocità relativa tra i due sistemi di riferimento considerati nella trasformazione, e  $\tanh^{-1}(\beta)$  è la rapidità. Se prendiamo  $\mu, \nu = 1, 2, 3$  otteniamo i generatori del momento angolare:

$$\vec{J} = (M^{32}, M^{13}, M^{21})$$

Nella rappresentazione fondamentale  $J_i$  è rappresentato come una matrice  $4 \times 4$ :

$$J_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & j_i & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} (j_i)_{km} = -i\epsilon_{ikm}$$

Quando si guarda la rappresentazione dei  $J_i$  sullo spazio di Hilbert di particella questi sono espressi mediante derivate rispetto agli angoli, ma nonostante questa diversità in forma, l'algebra come si è detto resta la solita.

$\vec{K}$  è l'analogo di  $\vec{J}$  per le trasformazioni di Lorentz proprie (boosts). Nella rappresentazione fondamentale si ha:

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il gruppo di Poincarè è definito dai suoi 10 generatori, e dalle loro regole di commutazione. L'unità immaginaria  $i$  all'interno di  $e^{\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}}$  ci impone di scegliere i generatori  $G$  tra gli operatori hermitiani, cosicchè l'operatore  $e^{iG}$  risulta unitario.

Supponiamo adesso di voler cercare gli operatori di Casimir dell'algebra. I generatori delle traslazioni  $P^\mu$  commutano tra loro, come ci aspettiamo che sia, mentre le regole di commutazione dei  $M^{\mu\nu}$  tra di sè e con i  $P^\mu$  sono più complesse:

$$[M^{\mu\nu}, P^\rho] = g^{\mu\rho}P^\nu - g^{\nu\rho}P^\mu$$

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = g^{\mu\rho} M^{\nu\sigma} + g^{\nu\sigma} M^{\mu\rho} - g^{\mu\sigma} M^{\nu\rho} - g^{\nu\rho} M^{\mu\sigma}$$

$\vec{K}$  è un operatore vettoriale, quindi ha regole di commutazione con i  $J_i$  di questo tipo:

$$[J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk} K_k$$

inoltre

$$[K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk} J_k$$

Queste ultime regole di commutazione sono particolari e meritano attenzione. Supponiamo infatti di passare da un sistema di riferimento ad un altro in moto relativo rispetto al primo con velocità relativa  $\vec{\beta}$  diretta lungo l'asse  $z$  positivo. L'operatore che effettua il boost è rappresentato da  $e^{i \tanh^{-1}(\beta) K_3}$ . Consideriamo adesso un boost in una direzione generica  $\vec{n}$ , l'operatore sarà descritto da un esponenziale contenente una combinazione lineare dei  $K_i$ . Applichiamo queste considerazioni ad un caso pratico: per studiare il decadimento  $A \rightarrow B + C$  passiamo dal sistema di riferimento del laboratorio nel sistema di riposo della particella  $B$  con un primo boost in direzione  $\vec{n}_1$ . In caso la particella  $B$  decada a sua volta in  $D + E$  e noi fossimo interessati a  $D$ , dovremo fare un secondo boost in direzione  $\vec{n}_2$  per spostarci nel sistema di riposo di  $D$ . Per tornare indietro nel sistema del laboratorio si potrebbe ingenuamente pensare di fare un boost nella direzione  $\vec{n} = -\vec{n}_1 - \vec{n}_2$ , in questo modo si torna al punto di partenza senza aver mai ruotato gli assi in nessuna delle tre trasformazioni. Purtroppo il procedimento è sbagliato proprio in virtù delle proprietà di commutazione dei  $K_i$ , per cui effettuando la trasformazione inversa in realtà abbiamo ottenuto l'effetto collaterale di aver ruotato il sistema di riferimento (rotazione di Wick). La rotazione di Wick è calcolabile e quantificabile, tuttavia dal punto di vista pratico è più conveniente fare un passo in più ed effettuare a ritroso le due trasformazioni in direzione  $-\vec{n}_2$  e  $-\vec{n}_1$ .

L'obiettivo adesso è costruire mediante i dieci generatori  $P^\mu$  e  $M^{\mu\nu}$  un operatore che commuti con tutti e 10, in tal modo questo operatore commuterà necessariamente con tutti gli operatori della forma  $O(a, \Lambda)$ , che altro non sono che polinomi nei generatori. Dato che la rappresentazione è irriducibile, l'operatore di Casimir non può essere che un multiplo dell'identità. Per dimostrare questa affermazione, supponiamo che l'operatore di Casimir  $C$  sia diagonalizzabile a blocchi, e nella sua forma canonica di Jordan presenti due blocchi con autovalori rispettivamente  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ :

$$C = \begin{pmatrix} \begin{array}{c|c|c} | & | & \\ \hline | & [\lambda_1] & | \\ \hline | & & | \end{array} & \begin{array}{c|c} & 0 \\ \hline & \end{array} \\ \hline \begin{array}{c|c|c} & & | \\ \hline & 0 & | \\ \hline & & | \end{array} & \begin{array}{c|c} [\lambda_2] & | \\ \hline & | \end{array} \end{pmatrix}$$

In questo modo un autovettore con  $\lambda = \lambda_1$  e uno con  $\lambda = \lambda_2$  non sono congiungibili in virtù della commutatività del prodotto  $CO(a, \Lambda)$ :

$$C|\lambda_1\rangle = \lambda_1|\lambda_1\rangle$$

$$O(a, \Lambda)C|\lambda_1\rangle = CO(a, \Lambda)|\lambda_1\rangle = \lambda_1 O(a, \Lambda)|\lambda_1\rangle$$

cioè anche  $O(a, \Lambda)|\lambda_1\rangle$  è autovettore di  $C$  con autovalore  $\lambda_1$ , dunque esistono due sottospazi invarianti dello spazio di Hilbert, con autovalori  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ . Tuttavia abbiamo richiesto che comunque presi  $|a\rangle$  e  $|b\rangle$  in  $H$ , esista un operatore  $O(a, \Lambda)$  che li connetta, quindi si hanno due alternative:

1.  $U(a, \Lambda)$  non è irriducibile (impossibile perchè abbiamo richiesto espressamente l'irriducibilità);
2. gli unici sottospazi invarianti siano quelli banali corrispondenti all'insieme nullo, e all'intero spazio di Hilbert, quest'ultimo con un certo autovalore  $\lambda$ . Di conseguenza l'operatore di Casimir risulta essere della forma  $\lambda I$ , ovvero un multiplo dell'identità.

L'operatore di Casimir caratterizza la rappresentazione; ad esempio nel caso del momento angolare abbiamo  $J^2$ , e le rappresentazioni di  $SU(2)$  sono caratterizzate dal suo autovalore  $s(s+1)$  (e dalla proiezione del momento angolare  $s$ ). Nel caso del gruppo di Poincaré possiamo costruire due invarianti:

$$P_\mu P^\mu$$

$$W_\mu W^\mu \quad W^\mu = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} M_{\nu\rho} P_\sigma \text{ (vettore di Pauli-Lubanski)}$$

Entrambi sono scalari di Lorentz, dunque per costruzione commutano con i generatori delle trasformazioni di Lorentz  $M_{\mu\nu}$ . Nel primo caso è immediato dimostrare che commutano anche con i generatori delle traslazioni  $P_\mu$ , nel secondo è possibile dimostrare che  $W_\mu W^\mu$  commuta anche con i  $P_\mu$ .  $P_\mu P^\mu$  e  $W_\mu W^\mu$  quindi devono avere un solo valore su uno stato  $|\psi\rangle \in H$ . Poichè  $P^\mu$  rappresenta l'impulso,  $P_\mu P^\mu$  avrà come autovalore  $m^2$ , mentre  $W_\mu W^\mu$  ha come autovalore  $\frac{1}{2}m^2 s(s+1)$ , dove per una particella con massa,  $s$  rappresenta lo spin.

Se  $m^2 > 0$ , i valori di  $P_\mu P^\mu$  e di  $W_\mu W^\mu$  sono indipendenti. Se  $m^2 = 0$  invece, anche  $\frac{1}{2}m^2 s(s+1)$  è identicamente nullo per qualsiasi valore di  $s$ , dunque cade l'indipendenza. Questa differenza si traduce nei gradi di libertà delle particelle: supponiamo una particella (ad esempio un elettrone) di cui conosciamo massa e spin; come facciamo a determinare lo spazio di Hilbert che contiene i suoi stati? Possiamo pensare di partire da uno stato, ad esempio lo stato con l'elettrone fermo e applicarci  $U(a, \Lambda)$  al variare di  $a$  e  $\Lambda$ . Lo stato di partenza sarà  $\hat{p} = (m, 0, 0, 0)$ ; questo non è ancora sufficiente per trovare tutti gli stati, dobbiamo infatti includere anche lo spin:

$$|\psi\rangle = |\hat{p}, s_z\rangle$$

Per quanto riguarda la descrizione dell'elettrone questo è sufficiente. I due vettori atti a descrivere i due possibili stati di spin sono degeneri rispetto a  $\hat{p}$ ; dunque, per una particella con massa, nel riferimento in cui la particella è ferma dobbiamo descrivere lo stato interno del sistema studiando lo spin.

**Osservazione:** supponiamo di non sapere che l'elettrone abbia spin  $\frac{1}{2}$ . Se ci mettiamo nel sistema di riferimento in cui è fermo, i gradi di libertà residui che servono a descriverlo sono soltanto quelli di spin, e le uniche trasformazioni di Lorentz che è lecito applicare per non cambiare l'impulso sono le rotazioni. Dunque, per determinare lo stato di spin è sufficiente controllare se applicando  $\vec{J}$  cambia qualcosa; si dice anche che lo spin è legato al piccolo gruppo di Lorentz delle rotazioni.

Il caso di massa nulla è diverso, perchè non si può trovare un sistema di quiete. Un possibile sistema di riferimento da cui partire può essere un sistema in cui la particella (es. il fotone) ha una certa energia  $E = 1$  in qualche sistema di unità di misura. A questo punto, il fotone si muove in una qualche direzione, che supporremo essere la direzione dell'asse  $z$ :

$$(E, 0, 0, E) \rightarrow (1, 0, 0, 1)$$

Osserviamo che un boost lungo l'asse  $z$  può modificare l'energia in modo arbitrario. Adesso, il piccolo gruppo di trasformazioni che possiamo applicare senza cambiare lo stato dell'impulso è meno evidente; è un gruppo

a tre parametri, dunque comprende tre tipi di trasformazione. La prima trasformazione consiste in una rotazione attorno all'asse di volo del fotone, mentre le altre due trasformazioni sono opportune combinazioni di rotazioni e boosts, ma non le considereremo.

Se ruotiamo attorno all'asse di volo, possiamo osservare cosa succede; questo metterà in evidenza l'eventuale momento angolare posseduto dalla particella, proiettato lungo l'asse stesso: quello che si ottiene è quindi il prodotto  $\vec{J} \cdot \vec{n}$ , l'**elicità**. Poichè l'angolo di rotazione è compreso tra 0 e  $2\pi$  l'elicità può assumere sia valori interi che seminteri.

Sottolineiamo comunque che l'elicità **non** è lo spin. Perchè? Se prendiamo una particella di spin 1 questa avrà 3 stati di spin indipendenti, dunque non possiamo pensare di descrivere una particella di spin 1 con soltanto 2 stati a disposizione. In questo caso, peraltro, il valore dell'elicità è soltanto uno, ed è quello che si mette in evidenza con la rotazione. Tuttavia sappiamo che esistono fotoni con elicità  $\lambda = 1$  oppure  $\lambda = -1$ , ma non è possibile connettere stati con  $\lambda$  opposte mediante trasformazioni del gruppo di Lorentz proprio (trasformazioni connesse con l'identità): l'unica trasformazione in grado di ribaltare l'elicità è una trasformazione di parità, che viceversa è contenuta nel gruppo di Lorentz esteso. Tecnicamente, quindi, fotoni con elicità diverse corrisponderebbero a particelle diverse, anche se decidiamo di "soprascedere" anche in virtù del fatto che l'elettromagnetismo è invariante sotto parità.

## Martedì 7 ottobre

Il quadro delle particelle elementari può essere studiato in ambito del modello standard (MS). In questo modello, le particelle elementari sono divise in 3 famiglie leptoniche e 3 famiglie di quark:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}$$

Le interazioni che riguardano le particelle nel modello standard sono descritte da teorie di campo di gauge. Il primo aspetto da considerare nell'ambito di teorie di campo quantistiche (QFT) è quello della simmetria. Questo interessa perchè nelle teorie di gauge sono presenti alcune simmetrie che vengono rispettate dal sistema; le simmetrie che studieremo sono simmetrie discrete, come P, C e T, rispettivamente parità, coniugazione di carica e inversione temporale. Esistono anche simmetrie continue, descritte da gruppi di Lie.

La parola "simmetria" nel mondo greco significa "della stessa misura", era usata per indicare proporzioni corrette ed aveva a che fare con il concetto di bellezza. Nel contesto in cui lo useremo, il concetto è un pò diverso, e ci rifaremo alla definizione di Weyl: "Una simmetria è un'operazione che si fa su un sistema in modo tale che ad operazione fatta il sistema resta uguale a quello di prima", in poche parole, non ce ne accorgiamo. In questo modo il concetto di simmetria è legato a quello di invarianza.

In natura esistono molte simmetrie, la più comune è quella bilaterale (o chirale). La simmetria ha consentito di trarre conclusioni importanti, avendo un diretto legame con la struttura di gruppo: tra le operazioni che possiamo fare su un sistema c'è sicuramente l'operazione identica che lo lascia invariato, data

una operazione di solito è sempre possibile fare anche quella inversa, e si assume che le operazioni siano associative.

Si è arrivati all'idea di gruppo di simmetria per una strada assolutamente insolita, infatti l'idea nacque nell'ambito dello studio delle soluzioni di equazioni di grado superiore al quarto. Le equazioni di primo grado si sapevano risolvere già nell'antica Babilonia, quelle di secondo grado fin dal tempo di Diofanto, in merito a problemi le cui soluzioni riguardavano lunghezze, aree, questioni finanziarie. Per le equazioni di terzo grado si deve arrivare agli inizi del 1500: tre matematici, Del Ferro, Tartaglia e Cardano, furono protagonisti di una insolita diatriba per decidere a chi dovesse spettare la paternità della scoperta dell'algoritmo per la risoluzione delle equazioni di terzo grado. Si narra che Del Ferro lo trovò ma non lo volle pubblicare, Tartaglia in seguito ripeté l'impresa mentre Cardano riuscì a carpire il segreto facendolo ubriacare.

Entro pochi anni, Ferrari, allievo di Cardano, risolve il problema delle equazioni di quarto grado (1555); subito dopo cominciarono gli attacchi al problema delle equazioni di quinto grado, finchè verso la fine del 1700 Ruffini e Abel dimostrarono che in generale non si poteva trovare la risolvente per grado maggiore o uguale a 5. Il passo avanti (legame con la simmetria) fu fatto da un altro, Evarist Galois, che affrontò il problema delle equazioni algebriche a coefficienti razionali seguendo la strada delle proprietà di simmetria dei polinomi che si annullavano sulle soluzioni. Ad esempio se consideriamo il polinomio di secondo grado

$$(x - x_1)(x - x_2)$$

l'equazione scritta in forma estesa ha dei coefficienti  $b = -x_1 - x_2$  e  $c = x_1x_2$ . Due polinomi indipendenti che si annullano sulle soluzioni sono, ad esempio

$$P_1(\alpha, \beta) = \alpha + \beta + b$$

$$P_2(\alpha, \beta) = \alpha\beta - c$$

Galois dimostrò che data una equazione di grado  $n$  a coefficienti razionali, il gruppo (gruppo di Galois) delle simmetrie di scambio è un elemento del gruppo di simmetrie di  $n$  elementi,  $S_n$ . In termini dei suoi sottogruppi normali massimali, se il rapporto delle cardinalità è un numero primo, esiste la possibilità di trovare la risolvente, altrimenti no (?). I gruppi  $S_2$ ,  $S_3$  ed  $S_4$  hanno questa proprietà, mentre da  $S_5$  in poi non è più verificata.

Tornando alla teoria quantistica dei campi, questa nasce dalla teoria dei campi classica, a cui si è aggiunta la relatività ristretta e la meccanica quantistica. La teoria classica si basa sul fatto che la dinamica dei campi

$$\phi^\alpha(x)$$

si può ottenere a partire da una lagrangiana  $\mathcal{L}(\phi^\alpha, \partial_\mu \phi^\alpha, x)$  attraverso il principio di minima azione, che determina l'evoluzione dei campi attraverso le equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\alpha} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^\alpha)} = 0$$

L'approccio lagrangiano consente di definire un'altra grandezza, l'impulso coniugato al campo, che risulterà importante in fase di quantizzazione. Già classicamente,  $\phi$  è una coordinata lagrangiana generalizzata; nel caso quantistico i campi continuano ad essere pensati come "coordinate" generalizzate, ma contemporaneamente diventano operatori sullo spazio degli stati. Inoltre la definizione è delicata perchè la coordinata è una

variabile hermitiana, mentre in generale il campo  $\phi$  può non esserlo. Tenendo presente queste definizioni, il campo quantistico per noi sarà una coordinata e dovremo riuscire ad associargli un impulso coniugato:

$$\Pi^\alpha(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^\alpha}$$

Non abbiamo ancora detto niente riguardo alle regole di commutazione tra i campi; per le coordinate e i rispettivi momenti coniugati si postulano regole di commutazione (o anticommutazione per campi fermionici) della forma

$$[\phi(x), \Pi(y)] = i\hbar\delta(x-y)$$

Nel caso delle simmetrie continue abbiamo un risultato importante che lega i gruppi di simmetria a delle grandezze conservate, il teorema di Noether (1918). Tale teorema stabilisce che se abbiamo una lagrangiana e un gruppo di simmetria che è un gruppo di Lie a  $n$  parametri  $\omega_a$ ,  $a = 1, \dots, n$ , nel caso in cui la lagrangiana sia invariante in forma sotto  $G(\omega_a)$  allora esistono  $n$  correnti conservate, una per ogni parametro:

$$T_a^\mu(x) \rightarrow \partial_\mu T_a^\mu = 0$$

Ogni  $T^\mu$  descrive una quantità conservata, infatti:

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \Rightarrow \partial_0 J^0 + \partial_i J^i = 0$$

Se integriamo su tutto lo spazio, e assumiamo che la corrente vettoriale  $\vec{J}$  abbia flusso nullo all'infinito, otteniamo:

$$\int d^3x \partial_0 J^0 + \int d^3x \partial_i J^i = 0 \Rightarrow \int d^3x \partial_0 J^0 = 0$$

dunque  $\int d^3x \partial_0 J^0$  è la "carica" conservata, e la sua interpretazione fisica dipende dalla struttura della corrente.

Il teorema lega le grandezze conservate alle proprietà di invarianza della lagrangiana; scriviamo la trasformazione infinitesima che agisce in generale su coordinate e campi:

$$x \rightarrow x' : x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu \equiv x^\mu + \Lambda^\mu{}_a(x) \omega_a$$

dove ci siamo fermati al prim'ordine nei parametri  $\omega_a$  (infinitesimi). La trasformazione sul campo si può scrivere come:

$$\phi^\alpha(x) \rightarrow \phi'^\alpha(x) = \phi^\alpha(x) + \delta\phi^\alpha(x)$$

La variazione del campo  $\delta\phi^\alpha(x)$  dipende dai parametri  $\omega_a$  al prim'ordine, dagli altri campi  $\phi^\beta$ , e da altri coefficienti che a loro volta dipendono dalle trasformazioni sui campi:

$$\delta\phi^\alpha = \omega_a \Gamma_{a\beta}^\alpha \phi^\beta$$

Noether dimostrò allora che

$$T_a^\mu(x) = [-\Gamma_{a\beta}^\alpha \phi^\beta + \partial_\nu \phi^\alpha \Lambda_a^\nu] \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)} - \mathcal{L} \Lambda_a^\mu$$

**Applicazioni:** consideriamo il caso in cui la lagrangiana sia invariante per traslazioni:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$$

Il gruppo di Lie in questione è il gruppo delle traslazioni in quattro dimensioni:

$$\begin{aligned}\delta x^\mu &= \delta_a^\mu \omega_a \Rightarrow \Gamma_a^\mu = \delta_a^\mu \\ \delta\phi &= 0 \quad (\phi'(x') = \phi(x)) \Rightarrow \Gamma_{a\beta}^\alpha\end{aligned}$$

Abbiamo allora che

$$T_a^\mu = \partial_\nu \phi^\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)} \delta_a^\nu - \mathcal{L} \delta_a^\mu$$

Reinterpretando l'indice  $a \rightarrow \rho$  come indice di Lorentz e alzandolo, otteniamo:

$$T^{\mu\rho} = \partial_\nu \phi^\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)} \delta^{\nu\rho} - \mathcal{L} \delta^{\mu\rho}$$

che altri non è che il tensore energia-impulso. Risulta  $\partial_\mu T^{\mu\rho} = 0$ , da cui si hanno 4 correnti conservate (una per ogni  $\rho$ ), e 4 cariche, che è possibile mettere in correlazione con l'energia e l'impulso del sistema. L'invarianza della lagrangiana sotto traslazioni si traduce quindi nella conservazione del quadrimpulso.

Se il gruppo di simmetria non agisce sulle coordinate ma sui campi, si parla di gruppo di simmetria *interno*; ad esempio possiamo pensare ad una trasformazione di fase, o trasformazione di gauge di prima specie.

Se pensiamo al campo  $\phi$  come ad un campo complesso, possiamo immaginare che  $\phi$  e il suo complesso coniugato  $\phi^*$  siano indipendenti tra loro, così come potremmo pensare indipendenti le combinazioni  $Re[\phi] + Im[\phi]$  e  $Re[\phi] - Im[\phi]$ . Dunque la lagrangiana, funzione dei campi, si scriverà in generale come

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \phi^*, \partial_\mu \phi, \partial_\mu \phi^*) \equiv \mathcal{L}(\phi_1, \phi_1, \partial_\mu \phi_1, \partial_\mu \phi_2)$$

Una trasformazione di fase consiste semplicemente nella moltiplicazione del campo  $\phi$  per un fattore di fase  $e^{i\alpha}$ , che nel caso di  $\alpha$  infinitesimo si riscrive come  $e^{i\alpha} \simeq 1 + i\alpha$ . Può succedere che la lagrangiana sia invariante rispetto alla trasformazione (interna)

$$x \rightarrow x' = x \Rightarrow \delta x^\mu = 0$$

$$\phi'_1 = \phi_1 + i\alpha\phi_1$$

$$\phi'_2 = \phi_2 - i\alpha\phi_2$$

Dunque  $\Lambda_a^\mu = 0$  (non c'è effetto su  $x$ ), mentre in generale i coefficienti  $\Gamma_{a\beta}^\alpha$  non saranno nulli. L'indice  $a$  assume un unico valore, mentre  $\alpha$  e  $\beta$  assumono i valori 1 e 2. Dobbiamo quindi determinare gli elementi di una matrice  $2 \times 2$ :

$$\begin{aligned}\Gamma_1^1 &= i & \Gamma_2^1 &= 0 \\ \Gamma_1^2 &= 0 & \Gamma_2^2 &= -i\end{aligned}$$

Allora, la corrente conservata è data da:

$$J^\mu(x) = -i\phi_1 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_1)} + i\phi_2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_2)} \equiv -i\phi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} + i\phi^* \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)}$$

In caso la lagrangiana sia quella di Schroedinger,  $J^\mu$  rappresenta la corrente di probabilità, anche se usualmente rappresenta la corrente elettrica. Si ha una situazione favorevole per questo sviluppo ogniqualvolta  $\phi$  e  $\phi^*$  entrano nella lagrangiana in maniera simmetrica ed in combinazione del tipo  $\phi\phi^*$ , ossia tale che le trasformazioni di fase su  $\phi$  vengano annullate da quelle corrispondenti su  $\phi^*$ .



## Mercoledì 8 ottobre

I campi come abbiamo visto possono essere intrinsecamente complessi oppure avere una struttura che li identifica con campi reali. Si ha un campo intrinsecamente complesso ogni volta che presi  $\phi$  e  $\phi^*$ , questi due campi sono indipendenti. Viceversa, nei casi in cui i gradi di libertà dell'uno siano gli stessi dell'altro, il campo non è complesso. Un caso particolare è quando  $\phi = \phi^*$ , ovvero il campo è autoaggiunto. Una conseguenza importante sta nel fatto che quando  $\phi \neq \phi^\dagger$  i campi descrivono particelle che differiscono dalle proprie antiparticelle; viceversa se  $\phi$  e  $\phi^*$  sono collegati risulta che le particelle sono antiparticelle di se stesse.

### Esempi:

- Una situazione in cui si ha  $\phi = \phi^*$  è il campo elettromagnetico  $A^\mu$ . Il campo  $A^\mu$  può essere sempre scelto in modo da essere reale; dal punto di vista fisico questo significa che se ci limitiamo alla parte classica, l'espressione del campo elettromagnetico mediante esponenziali  $e^{ip \cdot x}$  è una pura comodità di calcolo, infatti nelle applicazioni poi si prende la parte reale del campo, eliminando l'altro grado di libertà artificialmente introdotto.
- Un altro caso particolare è il caso del  $\pi^0$ , una particella pseudoscalare, descritta da un campo che si trasforma sotto Lorentz come uno scalare. Il  $\pi^0$  risulta essere antiparticella di se stesso.

Le particelle cariche non sono antiparticelle di se stesse, quindi saranno descritte da un campo non autoaggiunto. Quindi per i quark e per i leptoni carichi non c'è ombra di dubbio, mentre per i neutrini la questione è ancora aperta:  $\nu = \bar{\nu}$ ?

Nell'ambito delle particelle elementari i neutrini sono le uniche particelle neutre; parlando di particelle in generale viceversa lo scenario si allarga, e abbiamo il  $\pi^0$ , il fotone, lo  $Z^0$  e il neutrone, anche se sappiamo che quest'ultimo è formato da 3 quark quindi non può coincidere con la propria antiparticella. In base a questa lista si potrebbe sospettare che le particelle di spin intero coincidano con la propria antiparticella, ma questo è falso e non c'è nessuna correlazione tra spin e autoconiugazione, basti pensare al  $K^0$  e al  $\bar{K}^0$ .

É possibile che neutrini e antineutrini siano in realtà la stessa particella? La domanda può sembrare ovvia, ma in realtà attualmente non si ha una risposta certa. Nello schema V-A che nasce ad esempio dall'interazione alla Fermi neutrino e antineutrino sono trattati come particelle diverse, ma dal punto di vista sperimentale non si riesce ancora a trovare prove a favore di una tesi o dell'altra. Nell'interazione debole, il neutrino è descritto da uno spinore a 4 componenti  $\psi_\nu$  che soddisfa all'equazione di Dirac:

$$i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi_\nu(\vec{x}, t) = 0$$

Le quattro componenti dello spinore, quando si quantizza il campo in seconda quantizzazione, si interpretano bene come due blocchi che singolarmente descrivono i gradi di libertà di particella/antiparticella e quelli di spin: in tutto 4 gradi di libertà.

Quando una particella viene descritta dall'equazione di Dirac, è nell'equazione stessa che esistela distinzione tra particella e antiparticella. Si può introdurre ad hoc la carica leptonica, per cui neutrino ed elettrone hanno carica leptonica -1, mentre antineutrino e positrone hanno carica +1, e questo è un ulteriore modo per ricordarci che siamo partiti da una descrizione di Dirac. Tuttavia noi sappiamo che l'interazione debole non seleziona tutte le componenti di  $\psi$ , ma solo gli stati con chiralità definita, grazie al proiettore

di chiralità  $\frac{1-\gamma_5}{2}$ . Dunque nell'interazione debole entreranno soltanto il neutrino e l'antineutrino con elicità rispettivamente -1 e +1 (ricordiamo infatti che per particelle ultrarelativistiche chiralità ed elicità possono essere confuse in buona approssimazione).

A causa della piccola massa ( $\sim eV$ ), e delle relativamente alte energie che il neutrino si trova a possedere di solito ( $\sim MeV, GeV$ ), il generico stato di neutrino può essere scritto in questa forma:

$$|\nu\rangle = |\nu, \lambda = -1\rangle + \frac{m}{E} |\nu, \lambda = +1\rangle$$

dunque anche se il secondo termine risulta spesso ampiamente trascurabile, lo stato di neutrino non ha necessariamente elicità definita.

Se il neutrino è un neutrino di Dirac, i due stati di spin che possiede sono trattati in maniera diversa nelle interazioni in cui partecipa: uno vi entra con forza, mentre l'altro non vi entra per nulla. Sembra quindi che la natura abbia creato una particella con due gradi di libertà e abbia deciso di usarne soltanto uno.

Potrebbe sorgere lo stesso dubbio anche per l'elettrone, dato che nelle interazioni deboli anch'esso compare sempre come left-handed, ma in questo caso la scappatoia è fornita dal fatto che l'elettrone interagisce anche per via elettromagnetica, e in tale contesto elettroni right-handed sono ben ammessi.

A Majorana venne in mente di scrivere una equazione per particelle di spin  $\frac{1}{2}$  che non abbia distinzione tra particella e antiparticella:

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi_c = 0$$

dove  $\psi_c$  è il coniugato di carica di  $\psi$ :

$$\psi_c = i\gamma^2 \psi^*$$

Il passo successivo è retendere che  $\psi$  e  $\psi_c$  coincidano; si riottiene l'equazione di Dirac, ma stavolta col vincolo che  $\psi_c = \psi$ . Tale condizione lega tra loro grandi e piccole componenti, e fa sì che particella e antiparticella non siano più distinte. Rimangono i due gradi di libertà dello spin, e a questo punto non si parla più di particelle di Dirac bensì di particelle di Majorana.

Come entra questa trattazione nell'interazione debole? Per particelle di Dirac, nel limite di energia molto grande  $\nu_D$  ha elicità -1 mentre  $\bar{\nu}_D$  ha elicità +1; nel caso di Majorana,  $\nu$  e  $\bar{\nu}$  sono la stessa particella, e l'azione è determinata dall'elicità. Se la massa è nulla, diventa impossibile distinguere  $\nu_D$  da  $\nu_M$ . In ogni caso, per una questione di terminologia, ci riferiremo a neutrino e antineutrino come a due oggetti che danno luogo a reazioni di questo tipo:

$$\nu + \square \rightarrow e^- + \Delta$$

$$\bar{\nu} + \square \rightarrow e^+ + \Delta$$

Esiste un modo per rispondere alla domanda? Ad esempio, consideriamo un decadimento debole di un nucleo:

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$$

$$(A, Z) \rightarrow (A, Z + 1) + e^- + \bar{\nu}$$

Alcuni nuclei possono fare il cosiddetto decadimento "doppio  $\beta$ ":

$$(A, Z) \rightarrow (A, Z + 1) + e^- + \bar{\nu} \rightarrow (A, Z + 2) + 2e^- + 2\bar{\nu} \quad \text{doppio } \beta \text{ normale}$$

Questo decadimento è coerente con Dirac perchè conserva il numero leptonico.

Cerchiamo di capire se il decadimento doppio  $\beta$  può avvenire in altri modi; l'antineutrino può essere in realtà un oggetto composto da una parte con  $\lambda = 1$  ed un'altra, molto più piccola, con  $\lambda = -1$ :

$$|\bar{\nu}\rangle = | + 1 \rangle + \epsilon | - 1 \rangle$$

dove  $\lambda = 1$  caratterizza l'antineutrino e  $\lambda = -1$  il neutrino. Può succedere allora che l'antineutrino, a causa del contributo di elicità "sbagliata", venga assorbito dal nucleo e si abbia la reazione:

$$\nu + n \rightarrow p + e^-$$

in questo modo l'antineutrino potrebbe fare un nuovo processo per cui

$$(A, Z) \rightarrow (A, Z + 2) + 2e^- \quad \text{doppio } \beta \text{ senza neutrini}$$

Questo discorso è compatibile con l'ipotesi che neutrino e antineutrino siano la stessa particella, ma non con la conservazione del numero leptonico. L'esperimento si effettua controllando le energie in gioco, in quanto in assenza di neutrini gli elettroni si prenderanno più energia nel caso del doppio  $\beta$  senza neutrini.

## Simmetrie discrete

Poichè tratteremo il problema delle simmetrie nell'ambito della meccanica quantistica classica, è opportuno rivedere alcuni punti di partenza.

Sia  $S$  una simmetria in generale. Cosa dobbiamo richiedere ad  $S$  per concludere che è una simmetria? Per prima cosa dobbiamo sapere cosa fa e cosa agisce: la struttura su cui si lavora è uno spazio di Hilbert separabile (ovvero ha una base numerabile ortonormale). Gli stati di un sistema sono descritti da raggi nello spazio di Hilbert, e un raggio è della forma

$$R = \{ae^{i\phi}|\alpha\rangle\} \quad (a > 0, \phi \in \mathbb{R})$$

Imponiamo inoltre il principio di sovrapposizione: se abbiamo due raggi  $R_1$  ed  $R_2$ , corrispondenti a due vettori  $|\alpha\rangle$  e  $|\beta\rangle$ , la combinazione lineare  $a|\alpha\rangle + b|\beta\rangle$  deve corrispondere ad un terzo raggio  $R_3$ .

Le osservabili saranno rappresentate da operatori hermitiani  $\Theta$  sullo spazio di Hilbert, e godono della proprietà che il loro valore di aspettazione su uno stato  $\psi$  non normalizzato è dato da

$$\frac{\langle\psi|\Theta|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}$$

L'algebra delle osservabili è definita dalle regole di commutazione. Alcune sono postulate, ad esempio  $[Q, P] = i\hbar$ . La dinamica di uno stato segue l'equazione di Schroedinger:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle$$

Un sistema fisico può avere determinate simmetrie; tali simmetrie agiranno sui raggi dello spazio di Hilbert, e dovremo richiedere loro di possedere certe caratteristiche. Se prendiamo due raggi e i corrispondenti vettori (normalizzati), la probabilità di transizione da uno all'altro è data da:

$$|\langle\alpha|\beta\rangle|^2$$

e questa struttura probabilistica deve sopravvivere sotto la simmetria, in altre parole la simmetria non deve alterare la probabilità di transizione. Dunque consideriamo dei raggi; ad ogni raggio  $R$  la simmetria assocerà il raggio  $SR$ , e se abbiamo due raggi  $R_1$  ed  $R_2$  identificati da due vettori  $|R_1\rangle$  e  $|R_2\rangle$  per cui la probabilità di transizione è  $|\langle R_1|R_2\rangle|^2$ , avremo:

$$R_1, R_2 \rightarrow SR_1, SR_2$$

$$|R_1\rangle, |R_2\rangle \rightarrow |SR_1\rangle, |SR_2\rangle$$

Diremo allora che  $S$  è una simmetria se  $\forall R_1, R_2$

$$|\langle R_1|R_2\rangle|^2 = |\langle SR_1|SR_2\rangle|^2$$

Da questa condizione discende la seguente conclusione: una simmetria  $S$  può essere rappresentata da operatori di due tipi

- operatori lineari unitari  $U$ ;
- operatori *antilineari antiunitari*  $A$ .

Supponiamo che  $V$  sia un operatore lineare:

$$|\psi\rangle = \lambda_i |e_i\rangle \Rightarrow V|\psi\rangle = \lambda_i V|e_i\rangle = \lambda_i V_{ij} |e_j\rangle$$

$$V_{ij} = \langle e_i|V|e_j\rangle$$

Per l'operatore antilineare l'azione sulla base canonica è la stessa:

$$A|e_i\rangle = A_{ji} |e_j\rangle$$

mentre la differenza si vede quando si applica  $A$  ad un vettore qualunque:

$$A|\psi\rangle = A(\lambda_i |e_i\rangle) = \lambda_i^* A|e_i\rangle = \lambda_i^* A_{ji} |e_j\rangle$$

Siano  $|\phi\rangle, |\psi\rangle \in H$ ,  $|\phi\rangle = \mu_k |e_k\rangle$ ; se calcoliamo il prodotto  $\langle\phi|V\psi\rangle$  abbiamo:

$$\langle\phi|V\psi\rangle = \langle\mu_k e_k|\lambda_i V_{ji} e_j\rangle = \mu_k^* \lambda_i V_{ji} \langle e_k|e_j\rangle = \mu_k^* V_{ki} \lambda_i$$

mentre per  $A$  abbiamo:

$$\langle\phi|A\psi\rangle = \mu_k^* \lambda_i^* A_{ki}$$

ovvero i coefficienti dei vettori che descrivono lo sviluppo di  $\phi$  e  $\psi$  entrano in modo diverso nel prodotto.

Definiamo adesso l'autoaggiunto di un operatore lineare  $V$ :

$$\langle V\phi|\psi\rangle \equiv \langle\phi|V^\dagger\psi\rangle$$

Come conseguenza, la matrice  $V_{ij}$  che descrive  $V$  e quella  $(V^\dagger)_{ij}$  che descrive  $V^\dagger$  saranno legate dalla relazione

$$(V^\dagger)_{ij} = V_{ji}^* \quad (V = V^H)$$

Per gli operatori antilineari ci sono dei problemi anche a livello di definizione, infatti se utilizziamo la stessa definizione data per gli operatori lineari arriviamo ad una contraddizione:

$$\langle A\phi|\psi\rangle \equiv \langle \phi|A^\dagger\psi\rangle$$

Infatti sia  $\lambda \in \mathbb{C}$ , secondo la definizione scriveremo  $\langle A(\lambda\phi)|\psi\rangle = \langle (\lambda\phi)|A^\dagger\psi\rangle$ , ma calcolando separatamente i membri destro e sinistro abbiamo:

$$\langle A(\lambda\phi)|\psi\rangle = \langle \lambda^* A\phi|\psi\rangle = \lambda \langle \phi|A^\dagger\psi\rangle$$

$$\langle (\lambda\phi)|A^\dagger\psi\rangle = \lambda^* \langle \phi|A^\dagger\psi\rangle$$

che rispetto alla formula precedente ha una coniugazione in più del numero  $\lambda$ , da cui la contraddizione. Cambieremo quindi definizione, e per l'aggiunto di un operatore antilineare avremo

$$\langle A\phi|\psi\rangle = \langle \phi|A^\dagger\psi\rangle^*$$

Segue immediatamente che la matrice  $(A^\dagger)_{ij}$  è legata a  $A_{ij}$  da

$$(A^\dagger)_{ij} = A_{ji} \quad (A^\dagger = A^T)$$

Per quanto riguarda gli operatori unitari, per la definizione abbiamo che  $U^\dagger U = I$ , quindi

$$\langle U\phi|U\psi\rangle = \langle \phi|U^\dagger U\psi\rangle = \langle \phi|\psi\rangle$$

Per un operatore antiunitario vale comunque  $A^\dagger A = I$ , però applicando le definizioni per gli operatori antilineari si ha:

$$\langle A\phi|A\psi\rangle = \langle \phi|A^\dagger A\psi\rangle^* = \langle \phi|\psi\rangle^* = \langle \psi|\phi\rangle$$

allora, mentre gli operatori unitari che agiscono su due stati ne lasciano invariato il prodotto scalare, quelli antiunitari lo fanno diventare il complesso coniugato. È evidente che ai fini della conservazione della probabilità, e quindi del modulo quadro dei prodotti scalari, vadano bene sia operatori unitari che antiunitari.

## Lunedì 27 ottobre

Definiamo adesso l'operatore di coniugazione complessa,  $K$ . Tale operatore è definito in maniera apparentemente banale, scegliamo una base ortonormale  $|e_i\rangle$ :

$$K|e_i\rangle = |e_i\rangle$$

Su un vettore generico  $|\psi\rangle = \mu_i |e_i\rangle$ , combinazione a coefficienti complessi della base  $|e_i\rangle$ , l'azione è la seguente:

$$K|\psi\rangle = K\mu_i |e_i\rangle = \mu_i^* K|e_i\rangle = \mu_i^* |e_i\rangle$$

Dati due vettori  $|\psi\rangle$  e  $|\phi\rangle = \lambda_j |e_j\rangle$ , consideriamo il prodotto

$$\langle K\psi|K\phi\rangle$$

tenendo conto che  $K$  è antiunitario.

$$K|\phi\rangle = K(\lambda_j|e_j\rangle) = \lambda_j^*|e_j\rangle$$

$$\langle K\phi|K\psi\rangle = \langle \lambda_i^*e_i|\mu_j^*e_j\rangle = \lambda_i\mu_j\delta_{ij} = \lambda_i\mu_i^* = \langle\psi|\phi\rangle^*$$

Una cosa che dobbiamo mettere in evidenza è il comportamento di  $K$  su altre base, diverse da quella su cui è stato definito. Sia  $|f_j\rangle$  una nuova base ortonormale, ottenuta a partire dalla prima con una trasformazione unitaria:

$$|f_j\rangle = U_{ij}|e_i\rangle$$

$$K|f_j\rangle = KU_{ij}|e_j\rangle = U_{ij}^*|e_j\rangle = U_{ij}^*U_{ki}^{-1}|f_k\rangle$$

Come casi concreti, consideriamo l'applicazione di  $K$  nella meccanica quantistica di una particella senza gradi di libertà interni; ad esempio per un sistema del genere un set completo di operatori è costituito dall'operatore di posizione  $\vec{X}$ ; se  $|\vec{x}\rangle$  è la base delle coordinate, si ha

$$|\psi\rangle = \int dx \langle \vec{x}|\psi\rangle |\vec{x}\rangle dx$$

dove  $\langle x|\psi\rangle \equiv \psi(x)$  è la funzione d'onda della particella. Supponiamo di definire l'operatore di coniugazione complessa come

$$K|\vec{x}\rangle = |\vec{x}\rangle$$

L'effetto sul generico stato  $|\psi\rangle$  è:

$$K|\psi\rangle = K \int \langle \vec{x}|\psi\rangle |\vec{x}\rangle dx = \int \langle \vec{x}|\psi\rangle^* |\vec{x}\rangle dx$$

da cui deduciamo che l'operatore di coniugazione associa ad uno stato un nuovo stato con funzione d'onda complessa coniugata di quella iniziale. Un altro modo per vederlo è considerare il prodotto  $\langle x|K\psi\rangle$ , ricordando che  $K|\vec{x}\rangle = |\vec{x}\rangle$ :

$$\langle \vec{x}|\psi\rangle = \psi(x)$$

$$\langle \vec{x}|K\psi\rangle \equiv \langle K\vec{x}|K\psi\rangle = \langle \vec{x}|\psi\rangle = \psi^*(x)$$

per definizione di operatore antiunitario. Avendo definito  $K$  su una base, che succede cambiando base? Sappiamo che una rappresentazione ammissibile è anche quella degli impulsi:

$$|\vec{p}\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\vec{x} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} |\vec{x}\rangle$$

Risulta evidente che  $K|\vec{p}\rangle = |-\vec{p}\rangle \neq |\vec{p}\rangle$ , ma questo non ci meraviglia dato che  $K$  è definito su una base ma la sua azione è indeterminata su altre basi. Era possibile alternativamente partire definendo  $K|\vec{p}\rangle = |\vec{p}\rangle$ , e avremmo ottenuto ugualmente  $K|\vec{x}\rangle = |-\vec{x}\rangle$ .  $K$  gode inoltre della proprietà  $K^2 = I$ .

**Osservazione:** il prodotto di due operatori antiunitari è un operatore unitario, e se un operatore unitario ha la stessa azione dell'identità, coincide con essa.

Si può dimostrare che ogni operatore antilineare o antiunitario si può scrivere come  $UK$ , dove  $U$  è un operatore unitario. La cosa si dimostra dicendo che  $AK$  è unitaria, essendo prodotto di due operatori antiunitari, inoltre, se  $|\psi\rangle$  e  $|\phi\rangle$  generici:

$$\langle AK\phi|AK\psi\rangle = [\langle K\phi|K\psi\rangle]^* = [\langle\phi|\psi\rangle^*]^* = \langle\phi|\psi\rangle$$

ovvero poichè  $AK$  lascia invariato il prodotto scalare, è un operatore unitario.

Nel caso degli operatori unitari, legati strettamente alle simmetrie, questi descrivono isomorfismi dello spazio di Hilbert in sè. Esistono due modi per descrivere l'effetto di questi operatori, ovvero la visione di Schroedinger, in cui gli operatori di trasformazione agiscono sugli stati, e quella di Heisenberg, in cui sono gli operatori a venire trasformati: Sia  $\Theta$  una simmetria unitaria:

$$|e_i\rangle \rightarrow |e'_i\rangle$$

$$|\psi\rangle \rightarrow |\Theta\psi\rangle$$

Consideriamo in generale una quantità legata ad una qualche osservabile  $Q$ , che coinvolga  $|\psi\rangle$  e  $|\phi\rangle$ :

$$\langle\phi|Q|\psi\rangle$$

dopodichè applichiamo la simmetria:

$$\langle\Theta\phi|Q|\Theta\psi\rangle = \langle\Theta\phi|Q\Theta\psi\rangle = \langle\phi|\Theta^\dagger Q\Theta\psi\rangle$$

per definizione di aggiunto. Allora possiamo descrivere l'azione di  $\Theta$  o sugli stati, oppure sugli operatori:

$$Q \rightarrow \Theta^{-1}Q\Theta$$

Se la simmetria applicata agli stati era un isomorfismo dello spazio di Hilbert, sugli operatori dovrà rappresentare un isomorfismo dell'algebra.

Spesso succede che per definire una simmetria si parta dalla definizione dell'azione dell'operatore sulle osservabili; nel far questo, dobbiamo verificare che l'algebra delle osservabili, ovvero le loro regole di commutazione, restino invariate sotto l'azione della simmetria. Ad esempio, se definiamo un operatore di "parità" in modo tale che  $Px = -x$  e  $Pp = p$ , affinchè le regole canoniche di commutazione  $[x, p] = i\hbar$  restino immutate dovremo richiedere che l'operatore  $P$  sia antiunitario, infatti:

$$P^{-1}[x, p]P = P^{-1}i\hbar P \rightarrow [P^{-1}xP, P^{-1}pP]P = -i\hbar \rightarrow -[x, p] = -i\hbar$$

Osserviamo che una parità così definita non è molto utile, per un problema che evidenzieremo tra poco.

Tra tutte le simmetrie che possiamo definire mediante operatori unitari o antiunitari, quelle che ci interessano maggiormente sono quelle conservate (o compatibili con la dinamica). Consideriamo uno stato  $|\psi, 0\rangle$  in meccanica quantistica, e facciamolo evolvere mediante la sua hamiltoniana:

$$|\psi, 0\rangle \rightarrow |\psi, t\rangle$$

Data una simmetria  $\Theta$ , questa è compatibile con la dinamica se risulta:

$$\Theta|\psi, 0\rangle \rightarrow \Theta|\psi, t\rangle$$

Che vincoli ci sono affinché la simmetria sia conservata? Sappiamo che deve risultare  $[\Theta, H] = 0$ , e questo è una diretta conseguenza della nostra richiesta di compatibilità con la dinamica:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi, t\rangle = H |\psi, t\rangle$$

$$\Theta(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi, t\rangle) = \Theta H |\psi, t\rangle$$

Se  $\Theta$  è unitaria, commuta con l'operatore  $i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Theta |\psi, t\rangle = \Theta H |\psi, t\rangle$$

Affinchè lo stato trasformato  $\Theta |\psi, t\rangle$  evolva con la stessa hamiltoniana di  $|\psi, t\rangle$  è necessario che il membro di destra sia uguale a:

$$\Theta H |\psi, t\rangle = H \Theta |\psi, t\rangle$$

ovvero che  $\Theta H = H \Theta$ . Se invece  $\Theta$  è antiunitaria, si ha:

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Theta |\psi, t\rangle = \Theta H |\psi, t\rangle$$

da cui segue che deve essere  $\Theta H = -H \Theta$ , cioè  $\{H, \Theta\} = 0$ . Quando Wigner arrivò a questa conclusione, si rese conto che le simmetrie antiunitarie sono da buttare, fisicamente parlando, infatti queste ci dicono che se prendiamo un autostato di  $H$  con autovalore  $E$ :

$$H |E\rangle = E |E\rangle$$

e applichiamo la simmetria, abbiamo:

$$\Theta H |E\rangle = E \Theta |E\rangle = E |\Theta E\rangle$$

$$\Rightarrow -H \Theta |E\rangle \equiv -H |\Theta E\rangle = E |\Theta E\rangle$$

$$\Rightarrow H |\Theta E\rangle = -E |\Theta E\rangle$$

In altre parole, lo spettro di  $H$  risulta simmetrico rispetto allo zero, e dato che per un sistema generico non è vietato avere energie arbitrariamente elevate, tale sistema non avrebbe più una energia minima, quindi sarebbe instabile. Dunque le simmetrie conservate non possono essere antiunitarie, o meglio, come vedremo in seguito, possono anche esserlo a patto che commutino con l'hamiltoniana del sistema. Infatti esiste la simmetria di time reversal, che è antiunitaria ma commuta comunque con l'hamiltoniana, agendo direttamente sul parametro temporale.

Quando il sistema è complesso, in generale la definizione di simmetria pretende che questa commuti non soltanto con l'hamiltoniana  $H$  ma anche con l'hamiltoniana libera  $H_0$ , ma questo solitamente non rappresenta un vincolo troppo stretto. Iniziamo quindi a vedere come si rappresentano alcune simmetrie discrete,  $P$ ,  $C$  e  $T$ .



## P - Parità

La parità viene definita a partire dalla sua azione sulle osservabili:

$$P^{-1} \vec{X} P = \vec{X}' = -\vec{X} \Rightarrow P \vec{X} = -\vec{X} P$$

Le simmetrie in meccanica quantistica hanno grande libertà di definizione, anche se si ha comunque in mente delle azioni in relazione a ciò che già si conosce classicamente. Per questo decidiamo subito che la parità sia rappresentata da un operatore unitario.

Consideriamo particelle senza spin, quale sarà allora l'azione di  $P$  su una base, ad esempio quella delle coordinate?

$$\begin{aligned} \vec{X}|\vec{x}\rangle &= \vec{x}|\vec{x}\rangle \\ P\vec{X}|\vec{x}\rangle &= \vec{x}P|\vec{x}\rangle \\ \Rightarrow P\vec{X}|\vec{x}\rangle &= \vec{x}P|\vec{x}\rangle \end{aligned}$$

allora  $P|\vec{x}\rangle$  è autostato di  $\vec{X}$  con autovalore  $-\vec{x}$ . Osserviamo che sarebbe sbagliato dire che  $P|\vec{x}\rangle = |-\vec{x}\rangle$ , perchè può essere presente un fattore di fase; comunque, l'applicazione di  $P^2$  ad uno stato  $|\vec{x}\rangle$  deve riportare ad uno stato equivalente allo stato  $|\vec{x}\rangle$  di partenza, quindi:

$$P^2|\vec{x}\rangle = e^{i\alpha(\vec{x})}|\vec{x}\rangle$$

Vediamo però che l'arbitrarietà nella scelta della fase viene meno invocando la validità del principio di sovrapposizione: siano infatti  $|\vec{x}\rangle$  e  $|\vec{y}\rangle$  due stati, si avrà

$$\begin{aligned} P^2|\vec{x}\rangle &= e^{i\alpha}|\vec{x}\rangle \\ P^2|\vec{y}\rangle &= e^{i\beta}|\vec{y}\rangle \\ P^2(|\vec{x}\rangle + |\vec{y}\rangle) &= e^{i\alpha}|\vec{x}\rangle + e^{i\beta}|\vec{y}\rangle \end{aligned}$$

ma il membro di sinistra deve essere uguale a  $e^{i\gamma}(|\vec{x}\rangle + |\vec{y}\rangle)$  quindi in generale dovrà essere  $\alpha = \beta = \gamma$ , dunque  $P^2$  è proporzionale all'identità e  $P^2 = e^{i\alpha}I$ .

Tuttavia, poichè la fase di  $P^2$  è definita arbitrariamente, la cosa più semplice è ridefinire l'operatore  $P$  in questo modo:

$$\begin{aligned} \hat{P} &= e^{-\frac{i\alpha}{2}} P \\ \Rightarrow \hat{P}^2 &= I \end{aligned}$$

Questa ridefinizione non perde di generalità, essendo la fase non osservabile. Tornando a  $P$ , tutto ciò che possiamo dire è che

$$P|\vec{x}\rangle = e^{i\alpha(\vec{x})}|-\vec{x}\rangle$$

Stavolta non possiamo più invocare il principio di sovrapposizione, però possiamo dire che  $\alpha(\vec{x}) + \alpha(-\vec{x}) = 0$ . Possiamo inoltre pretendere che  $\alpha$  risulti indipendente da  $|\vec{x}\rangle$ , cosicchè concluderemo che

$$e^{i\alpha(\vec{x})} = e^{\pm i\alpha} = \pm 1$$

Le particelle per cui  $P|\vec{x}\rangle = |-\vec{x}\rangle$  sono dette particelle **scalari**, quelle per cui  $P|\vec{x}\rangle = -|-\vec{x}\rangle$  sono dette **pseudoscalari**.

Avendo definito  $P$  su  $|\vec{x}\rangle$ , possiamo estendere  $P$  a tutta l'algebra delle osservabili. Siamo interessati in particolare all'impulso e ai momenti angolari. Per l'impulso, possiamo utilizzare un criterio che riflette l'idea classica di parità: infatti l'impulso è il generatore delle traslazioni nello spazio, e possiamo definire un operatore (unitario)

$$\mathcal{T}(\vec{a}) = e^{\frac{i}{\hbar} \vec{P} \cdot \vec{a}}$$

Come deve agire allora  $P$  su  $\vec{P}$ ? Se prendiamo una traslazione finita o infinitesima che sia, e applichiamo la trasformazione di parità, questo sarà equivalente a effettuare prima la trasformazione di parità e poi fare la traslazione opposta. Se  $\vec{a}$  è infinitesimo, avremo:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\vec{a})P &= P\mathcal{T}(-\vec{a}) \\ \Rightarrow (I + \frac{i}{\hbar} \vec{P} \cdot \vec{a})P &= P(I - \frac{i}{\hbar} \vec{P} \cdot \vec{a}) \end{aligned}$$

È fondamentale adesso sapere che  $P$  è un operatore unitario, in modo da sapere come trattare le unità immaginarie presenti nelle parentesi al membro di destra. Avremo:

$$i\vec{P}P \cdot \vec{a} = -iP\vec{P} \cdot \vec{a}$$

e questo è vero soltanto se

$$\vec{P}P = -P\vec{P} \Rightarrow [\vec{X}, \vec{P}] = i\hbar \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Passiamo adesso a considerare cosa succede al momento angolare:

$$\vec{J} = \vec{X} \wedge \vec{P}$$

Sappiamo che i  $J_i$  soddisfano le regole di commutazione

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k$$

In virtù del fatto che la parità cambia di segno a  $\vec{X}$  e a  $\vec{P}$ , dunque  $\vec{J}$  non cambierà segno. Questo ci dà ulteriore conferma del fatto che abbiamo fatto bene a scegliere  $P$  come operatore unitario, altrimenti, poichè a secondo membro è presente un'unità immaginaria, avremmo avuto un cambio di segno non compensato dal cambio di  $\vec{J}$ . Se  $\vec{J}$  avesse cambiato segno sotto parità, saremmo stati costretti a scegliere l'operatore di parità come antiunitario.

## Martedì 29 ottobre

Osserviamo che per hamiltoniane della forma:

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

condizione sufficiente affinché la parità sia una simmetria, quindi  $[P, H] = 0$ , è che il potenziale  $V(x)$  sia una funzione pari di  $x$ .

## C - Coniugazione di carica

Definire la coniugazione di carica in prima quantizzazione è un pò come sparare con un cannone alle mosche. Il suo significato e la sua importanza saranno più chiari in seconda quantizzazione dove gli operatori hanno a che fare con particelle e antiparticelle. Per parlare di coniugazione di carica dobbiamo per prima cosa introdurre l'interazione col campo elettromagnetico, per una particella di carica  $e$ :

$$H = \frac{1}{2m} \left( \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + eV$$

In questo ambito definiamo la coniugazione di carica come non agente sulle variabili dello spazio tempo, ovvero non tocca  $\vec{x}$  e  $\vec{p}$ , bensì tocca la carica  $e$ :

$$e \rightarrow -e$$

$$\vec{A} \rightarrow -\vec{A}$$

$$V \rightarrow -V$$

Evidentemente  $H$  non cambia di forma; l'unico risultato non banale è che sulle  $\vec{x}$  e sulle  $\vec{p}$ , la coniugazione di carica non agisce. Questo ci dice che la simmetria è sicuramente unitaria, infatti:

$$C^{-1}[X, P]C = [X, P] \Rightarrow C^{-1}i\hbar C = i\hbar$$

## T - Time reversal

La simmetria di inversione temporale o time reversal è la più complicata e meno intuitiva. Già il nome può portare a fraintendimenti, poichè presupporrebbe di poter "invertire" l'asse del tempo, ma in realtà si riferisce soltanto alla reversibilità di un processo o di una serie di processi nel tempo. Costruiamo innanzitutto il sistema di riferimento: supponiamo di porci il problema di controllare la conservazione di  $T$  nel processo di caduta di un grave. Inversione temporale in questo caso significa che prendiamo uno stato iniziale  $(\vec{x}(t), \vec{v}(t))$  e lo facciamo evolvere per un tempo  $\Delta t$ :

$$(\vec{x}(t), \vec{v}(t)) \rightarrow (\vec{x}(t + \Delta t), \vec{v}(t + \Delta t))$$

Per verificare se  $T$  è conservata si prende lo stato finale e gli si applica la trasformazione di inversione temporale

$$\vec{x} \rightarrow \vec{x}$$

$$\vec{v} \rightarrow -\vec{v}$$

dopodichè lo lasciamo evolvere sempre per un tempo  $\Delta t$  e studiamo il moto del punto con  $\vec{v} \rightarrow \vec{v}$ . Dopo  $\Delta t$ , l'inversione temporale è conservata se il nuovo stato finale coincide con il trasformato mediante  $T$  dello stato iniziale:

$$\vec{v}' = \begin{cases} v'_x = v_{0x} \\ v'_y = v_{0y} + g\Delta t \end{cases}$$
$$-\vec{v}'' = \begin{cases} v''_x = -v_{0x} \\ v''_y = -(v_{0y} + g\Delta t) + g\Delta t \end{cases}$$

**Osservazioni:**

1. È evidente che con l'attrito tutti questi discorsi non valgono, visto che si perde energia sia all'andata che al ritorno;
2. Nel dire che lo stato finale si ottiene soltanto invertendo la velocità stiamo assumendo che
  - (a) la massa non cambia segno sotto  $T$ ;
  - (b) il campo gravitazionale non cambia segno sotto  $T$ ;

Queste considerazioni segue il fatto che nella nostra trattazione ci sono costanti di accoppiamento (la massa) e campi che sono degli scalari sotto time reversal. Le stesse conclusioni si potrebbero fare nel caso di una carica in campo elettrico, ammettendo che carica e campo non cambino segno sotto  $T$ . Procediamo adesso a studiare il comportamento sotto time reversal di una carica in campo elettromagnetico; abbiamo la forza di Lorentz

$$\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

Il campo magnetico entra nella forza accoppiato alla velocità, che cambia segno sotto  $T$ , dunque se vogliamo invarianza dell'elettromagnetismo sotto time reversal dobbiamo assumere che anche  $\vec{B}$  cambi di segno. Il fatto che campo elettrico e magnetico si comportino in maniera diversa non deve stupire, perchè  $\vec{B}$  trae origine dalle correnti, che dipendono chiaramente dalle velocità.

Nel momento in cui dobbiamo trattare anche dei campi esterni, dobbiamo conoscere l'azione della simmetria su tutti i campi, prima di poter trarre qualunque conclusione. Si può formalizzare la cosa anche in altra maniera: supponiamo di partire dalle equazioni del moto:

$$\vec{x} = \vec{x}(t)$$

Diremo allora che c'è simmetria per time reversal se la nuova legge del moto si può ottenere dalla stessa dinamica:

$$t \rightarrow \bar{t} = -t$$

$$\vec{x}(t) \rightarrow \vec{x}_T(\bar{t}) = \vec{x}(t)$$

Allora, la nuova traiettoria pensata in termini di  $\bar{t}$  ha la stessa dinamica? In tutti i casi in cui la legge di forza dipenda solo da  $\vec{x}$ , l'invarianza per time reversal sarà sempre soddisfatta:

$$m\ddot{\vec{x}}(t) = \vec{F}(\vec{x})$$

$$\vec{x}(t) \rightarrow \vec{x}(\bar{t}) = \vec{x}(-t) = \vec{x}(t)$$

$$\dot{\vec{x}} \rightarrow \dot{\vec{x}}_T(\bar{t}) = -\dot{\vec{x}}(-t) = -\dot{\vec{x}}(t)$$

$$\ddot{\vec{x}} \rightarrow \ddot{\vec{x}}_T(\bar{t}) = \ddot{\vec{x}}(-t) = \ddot{\vec{x}}(t)$$

Se invece volessimo usare un approccio lagrangiano:

$$L = \frac{1}{2} A_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + V(q_i)$$

condizione sufficiente per avere invarianza sotto time reversal è che il potenziale sia funzione soltanto delle coordinate  $q_i$ .

## Time reversal in meccanica quantistica

Supponiamo di voler definire  $T$  su un certo stato  $|\psi, t\rangle$  che evolva con una hamiltoniana  $H$ . Assumiamo di conoscere l'azione di  $T$  sugli stati, scriveremo

$$R|\psi, t\rangle = |\psi_T, \bar{t}\rangle$$

Dichiareremo che  $T$  è una simmetria conservata se facendo evolvere  $|\psi_T, \bar{t}\rangle$  con  $H$  per un tempo  $t$ , si torna in  $|\psi, 0\rangle$ . Definiamo adesso l'operatore di time reversal, così come si è fatto per la parità. Definiamo l'azione della simmetria sulle osservabili:

$$T^{-1}\vec{X}T = \vec{X}$$

$$T^{-1}\vec{P}T = -\vec{P}$$

Per vedere se le definizioni sono compatibili bisogna come al solito controllare che l'algebra delle osservabili sia rispettata, per questo  $T$ , se esiste, deve essere antiunitario:

$$[X, P] = i\hbar \Rightarrow T^{-1}[X', P']T = -[X, P] = T^{-1}i\hbar T = -i\hbar$$

Per quanto riguarda il momento angolare, si verifica facilmente che

$$T^{-1}\vec{J}T = -\vec{J}$$

Il cambio di segno richiede una riflessione: le regole di commutazione per il momento angolare,  $[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k$ , non sono omogenee, per cui un cambiamento di segno per  $\vec{J}$  non influenza il lato sinistro dell'uguaglianza, però il fatto che  $T$  sia antiunitaria ci salva anche in questo caso.

Che implicazioni ci sono su  $T$  e su  $H$ , se  $T$  deve essere una simmetria esatta? Sappiamo che se  $T$  è antiunitaria deve anticommutare con  $H$ , e questo comporterebbe il problema sullo spettro dell'energia che abbiamo visto poco fa. In realtà come vedremo  $T$  commuta con  $H$ .

Supponiamo infatti che  $|\psi, t\rangle$  evolva secondo  $H$ . Introduciamo  $T|\psi, t\rangle$  e definiamo

$$T|\psi, t\rangle = |\psi_T, \bar{t}\rangle$$

Ci chiediamo se  $|\psi, t\rangle$  e  $|\psi_T, \bar{t}\rangle$  evolvono entrambi con  $H$ , e imporremo che la risposta sia positiva:

$$Ti\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi, t\rangle = TH|\psi, t\rangle$$

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}T|\psi, t\rangle = TH|\psi, t\rangle$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}T|\psi_T, \bar{t}\rangle = TH|\psi, t\rangle = THT^{-1}T|\psi, t\rangle = THT^{-1}|\psi_T, \bar{t}\rangle$$

Allora affinché la dinamica di  $|\psi_T, \bar{t}\rangle$  sia la stessa di  $|\psi, t\rangle$  è necessario che  $THT^{-1} = H$ , ovvero  $[H, T] = 0$ .

Bisogna definire adesso quale sia l'azione di  $T$  sugli stati. I termini di  $|\psi\rangle$ , definiremo come agisce  $T$  su una base. É naturale prendere come base quella delle coordinate, e imponiamo che l'azione di  $T$  su  $|\vec{x}\rangle$  restituisca  $|\vec{x}\rangle$  stesso, senza fattori di fase

$$T|\vec{x}\rangle = |\vec{x}\rangle$$

In tal modo,  $T$  coincide in pratica con l'operatore di coniugazione complessa (per particelle senza spin). Siamo quindi anche in grado di definire cosa significa  $T|\psi, t\rangle = |\psi_T, \bar{t}\rangle$ :

$$|\psi, t\rangle = \int d\vec{x} \psi(\vec{x}, t) |x\rangle$$

$$T|\psi, t\rangle = \int d\vec{x} \psi^*(\vec{x}, t) |x\rangle$$

dunque, così come  $|\psi, t\rangle$  è associata a  $\psi(\vec{x}, t)$ ,  $|\psi_T, \bar{t}\rangle$  è associata a  $\psi^*(\vec{x}, t)$ . Per correttezza dobbiamo esprimere la  $\psi^*(\vec{x}, t)$  in termini di  $\bar{t}$ :

$$|\psi_T, \bar{t}\rangle \rightarrow \psi^*(\vec{x}, -\bar{t})$$

Dunque se abbiamo uno stato con una certa funzione d'onda, per time reversal questo stato acquista una funzione d'onda che è la complessa coniugata di quella di partenza, dove però sostituiamo a  $t$  il suo opposto.

Se la particella è in interazione, poichè di solito i potenziali non dipendono dal tempo, non ci sono particolari condizioni aggiuntive su  $H$  affinché non sia compromessa l'invarianza per time reversal. Se prendiamo la complessa coniugata dell'equazione di Schroedinger, proprio perchè  $V$  è reale, nel caso in cui  $\psi(\vec{x}, t)$  la soddisfi, anche  $\psi^*(\vec{x}, t)$  lo farà.

Come semplice applicazione consideriamo un autostato dell'impulso:

$$\psi(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{x}} e^{-\frac{i}{\hbar} Et}$$

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

$$\Rightarrow \psi_T(\vec{x}, \bar{t}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{x}} e^{-\frac{i}{\hbar} E\bar{t}}$$

quindi lo stato time reversed ha stessa energia ma impulso opposto.

## Mercoledì 29 ottobre

Reintroduciamo lo spin, e definiamo l'azione di  $T$  su di esso. In realtà lo sappiamo già, perchè conosciamo l'azione sul momento angolare  $\vec{J}$ :

$$T^{-1} \vec{J} T = -\vec{J} \Rightarrow T^{-1} \vec{S} T = -\vec{S}$$

Per spin  $\frac{1}{2}$ , gli operatori di spin sono

$$S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \sigma_1$$

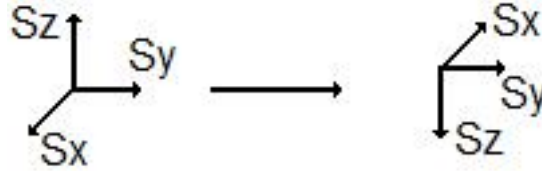
$$S_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \sigma_2$$

$$S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \sigma_3$$

La trasformazione che agisce sullo spin deve mandare  $\vec{S}$  in  $-\vec{S}$ . Si vede subito che non basta la coniugazione complessa poichè  $\sigma_1$  e  $\sigma_3$  sono reali. Abbiamo dimostrato che se  $T$  è una trasformazione antiunitaria, questa si può sempre scrivere come prodotto di un operatore unitario per l'operatore di coniugazione complessa, pertanto:

$$T = UK$$

Nel caso di particella senza spin si aveva che  $U = I$ , ma adesso l'operatore  $U$  non sarà banale. Esso deve agire sulle variabili di spin, pertanto sarà una matrice  $2 \times 2$ ; poichè  $K$  commuta sia con  $S_x$  che con  $S_z$ , è necessario che  $U^{-1}S_xU = -S_x$ , e analogamente per  $S_z$ . Viceversa, questo non deve accadere per  $S_y$ ; vediamo dunque che dal punto di vista dello spazio degli spin, per la trasformazione di time reversal abbiamo una situazione di questo genere: tale operazione corrisponde quindi ad una rotazione di  $180^\circ$  intorno all'asse  $y$ ,



ed è rappresentata dall'operatore

$$U = e^{i\frac{\pi}{2}\sigma_2}$$

Consideriamo in generale  $e^{i\alpha\sigma_2}$ , sviluppando in serie si ha:

$$e^{i\alpha\sigma_2} = I + i\alpha\sigma_2 + \frac{(i\alpha\sigma_2)^2}{2!} + \frac{(i\alpha\sigma_2)^3}{3!} + \dots$$

Ci ricordiamo che per le proprietà delle matrici di Pauli  $\sigma_2^2 = I$ , e che  $\sigma_2^{2n+1} = \sigma_2$ , per cui

$$e^{i\alpha\sigma_2} = I \cos \alpha + i\sigma_2 \sin \alpha$$

Se  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , si ha

$$i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \equiv R$$

Quindi, nel caso in cui lo spin sia  $\frac{1}{2}$ , l'operatore (non relativistico) di time reversal è dato da  $T = RK$ .

Consideriamo ora il problema di  $T^2$ . Confrontandoci col caso della parità, stavolta  $T^2$  potrebbe avere un fattore di fase agendo sulla base delle coordinate, non più trascurabile. Infatti, essendo  $T$  antiunitario:

$$T' = e^{i\alpha}T \Rightarrow (T')^2 = e^{i\alpha}Te^{i\alpha}T = e^{i\alpha-i\alpha}T^2 = T^2$$

Se supponiamo allora una base ortonormale  $|e_i\rangle$ , tutto ciò che sappiamo è che  $T^2$  manda ogni elemento della base in sè, con un'ambiguità di fase:

$$T^2|e_i\rangle = e^{i\eta_i}|e_i\rangle$$

dove  $\eta_i$  è ignoto. Sappiamo che  $T = UK$ , e che  $T^2 = UKUK$  è diagonale sulla base  $|e_i\rangle$ :

$$UKUK = D \quad D_{ij} = \delta_{ij}e^{i\eta_i}$$

In pratica si ha:

$$\begin{aligned}
UKUK|e_i\rangle &= UKU|e_i\rangle = \\
&= (U|e_i\rangle = U_{ji}|e_j\rangle) \\
&= UK(U_{ji}|e_j\rangle) = U_{ji}^*U|e_j\rangle = U_{ji}^*U_{kj}|e_k\rangle \\
&= U_{ji}^*U_{kj}|e_k\rangle = (UU^*)_{ki}|e_k\rangle
\end{aligned}$$

Ma poichè siamo partiti da un operatore diagonale,  $UU^* = D$ .  $U^*$  corrisponde a  $(U^\dagger)^T$ , ma  $U^\dagger = U^{-1}$ , e  $(U^{-1})^T = (U^T)^{-1}$ ; si ha allora

$$D = U(U^T)^{-1}$$

Moltiplicando a destra per  $U^T$ :

$$DU^T = U$$

e prendendo la trasposta:

$$U^T = UD$$

$$\Rightarrow U = DUD$$

$$\Rightarrow U_{ij} = \sum_{mn} D_{im} U_{mn} D_{nj} = \sum_{mn} \delta_{im} e^{i\eta_i} U_{mn} \delta_{nj} e^{i\eta_j} = U_{ij} e^{i(\eta_i - \eta_j)}$$

per cui  $e^{i\eta_i} e^{i\eta_j} = 1$ ,  $\forall i, j$ , e nel momento in cui conosciamo uno degli  $\eta_i$ , conosciamo automaticamente anche tutti gli altri. Poichè  $T^2 = D$ , risulta che  $T^2$  può avere autovalori soltanto  $+1$  e  $-1$ , ed esistono sistemi in cui  $T^2 = 1$ , e altri in cui  $T^2 = -1$ . Ad esempio particelle senza spin (in cui  $T = K$ ) hanno  $T^2 = +1$ , mentre nel caso di spin  $\frac{1}{2}$ :

$$T = RK$$

$$T^2 = RKRK = R^2 K^2 = R^2 = -I$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che  $[R, K] = 0$ , essendo  $R$  reale.

In realtà si può dire in generale che per sistemi di spin intero  $T^2 = +1$  e per spin semintero  $T^2 = -1$ . Consideriamo il caso di spin intero, e un multipletto di momento angolare

$$|J, m\alpha\rangle$$

Studiamo l'azione di  $T^2$  su uno stato, partendo dall'azione di  $T$ :

$$T|J, m\alpha\rangle = ?$$

$T$  commuta con  $J^2$ , per cui l'azione di  $T$  mantiene all'interno dello stesso multipletto, allora

$$T|J, m\alpha\rangle = e^{i\phi(m)}|J, -m\alpha\rangle$$

Abbiamo dimostrato che se su uno stato qualsiasi  $T^2|\psi\rangle = \pm|\psi\rangle$ , farà  $\pm 1$  sempre, dunque ci scegliamo uno stato particolare, quello con  $m = 0$  (esiste perchè lo spin è intero per ipotesi):

$$T|J, 0\alpha\rangle = e^{i\phi}|J, 0\alpha\rangle$$



$$TT|J, 0\alpha\rangle = Te^{i\phi}|J, 0\alpha\rangle = e^{-i\phi}e^{i\phi}|J, 0\alpha\rangle \Rightarrow T^2 = +1$$

Se lo spin è semintero, i discorsi precedenti non valgono, supponiamo allora di essere su un multipletto a spin indefinito, per cui gli stati saranno:

$$|J, m\rangle$$

Sappiamo che  $J_z|J, m\rangle = m|J, m\rangle$ , mentre

$$J_+|J, m\rangle = \sqrt{J(J+1) - m(m+1)}|J, m+1\rangle$$

$$J_-|J, m\rangle = \sqrt{J(J+1) - m(m-1)}|J, m-1\rangle$$

$$J_x = \frac{J_+ + J_-}{2} \quad J_y = \frac{J_+ - J_-}{2i}$$

Allora, nel multipletto  $J_z$  è diagonale e reale,  $J_x$  è reale, mentre  $J_y$  è immaginaria pura; abbiamo quindi ancora bisogno di una rotazione di  $\pi$  attorno a  $J_y$  per ottenere la corretta azione dell'operatore di time reversal:

$$T = e^{i\pi S_y} K$$

Per quanto riguarda  $T^2$ :

$$T^2 = e^{i\pi S_y} K e^{i\pi S_y} K = e^{2i\pi S_y} K^2 = e^{2i\pi S_y} K$$

Dunque vediamo che una rotazione di  $2\pi$  attorno a  $S_y$  fa -1 se lo spin è semintero, mentre fa 1 se lo spin è intero.

Una conseguenza del fatto che  $T^2 = 1$  è questa: supponiamo un sistema per cui  $T$  è una simmetria esatta, quindi  $[T, H] = 0$ . Sia  $H|E\rangle = E|E\rangle$ , allora  $T|E\rangle = |E_T\rangle$ , e anche lui è autostato di  $H$  con autovalore  $E$ . Il problema che ci poniamo è se  $|E_T\rangle$  è in qualche modo legato a  $|E\rangle$  oppure sono indipendenti. Si dimostra che se  $T^2 = -1$  gli stati sono ortogonali (degenerazione di Kramer):

$$\langle E|E_T\rangle = \langle E|TE\rangle = \langle TE|E\rangle^* =$$

ma poichè  $T$  è antiunitario

$$= \langle TTE|TE\rangle = -\langle E|TE\rangle = -\langle E|E_T\rangle = \langle E|E_T\rangle \Rightarrow \langle E|E_T\rangle = 0$$

Dunque in presenza di  $T^2 = 1$  è presente questa ulteriore degenerazione degli stati; ciò significa che per un sistema fisico a spin semintero,  $H$  non è sufficiente per costruire un set completo di osservabili. L'hamiltoniana allora ha un ulteriore grado di libertà, che cambia segno con  $T$ ; tale variabile di solito è la componente  $z$  dello spin ma non è sempre così.

## Momento di dipolo elettrico

Se abbiamo un sistema elementare, e lo mettiamo in un campo elettrico esterno, l'energia si può scrivere come

$$\mathcal{E} = qV + \vec{E} \cdot \vec{d} + \frac{1}{2}Q_{ij}E_iE_j + \dots$$

Il momento di dipolo, classicamente, è dato da

$$\vec{d} = \sum_i e_i \vec{r}_i$$

e se la carica complessiva è nulla, è indipendente dall'origine. Esso fornisce la polarizzazione del sistema in assenza di campo, ed è indipendente da esso. Per i sistemi elementari, diciamo che se la parità è una simmetria conservata, e il sistema non ha degenerazione accidentale (cioè le uniche degenerazioni che ammette sono quelle all'interno di un singolo multipletto), allora sugli stati fisici (in particolare sul fondamentale) il momento di dipolo deve essere nullo.

La ragione è questa: se abbiamo solo la degenerazione dovuta al momento angolare, significa che è possibile esprimere gli autostati dell'hamiltoniana in termini di  $E$ ,  $J^2$ ,  $J_z$ . Però questi stati avranno tutti parità definita, poichè questa è stabilita dal momento angolare orbitale. Qualunque autostato di  $H$  avrà parità definita, allora se calcoliamo  $\langle \psi_0 | \vec{d} | \psi_0 \rangle$  otteniamo ( $P$  è unitario):

$$\langle \psi_0 | \vec{d} | \psi_0 \rangle = \langle \psi_0 | P^\dagger P \vec{d} P^\dagger P | \psi_0 \rangle = \langle P \psi_0 | P \vec{d} P^* - 1 | P \psi_0 \rangle =$$

Poichè  $|\psi_0\rangle$  ha parità definita, qualunque essa sia si avrà comunque  $(\pm 1)^2 = 1$  quindi

$$\Rightarrow \langle \psi_0 | P \vec{d} P^{-1} | \psi_0 \rangle$$

Sulla base della definizione di  $\vec{d}$ , questo cambia segno sotto parità:

$$P \vec{d} P^{-1} = -\vec{d}$$

$$\Rightarrow \langle \psi_0 | \vec{d} | \psi_0 \rangle = -\langle \psi_0 | \vec{d} | \psi_0 \rangle = 0$$

Questa conclusione fu usata negli anni 50 da Ramsey e Purcell per cercare di capire se le interazioni forti conservavano la parità: andarono a verificare sul neutrone se questo aveva un momento di dipolo elettrico, che avrebbe dovuto essere indice di una eventuale "violazione di parità". La precisione della misura, dagli anni 50 a circa due anni fa, è migliorata di 8 ordini di grandezza, e si è scoperto che è legata anche alla violazione di time reversal.

I primi risultati provenienti da questa idea si ebbero nel '57. Landau poco dopo uscì con un argomento: dimostrò che l'eventuale presenza di un dipolo in un sistema elementare aveva a che fare non solo con la violazione di parità, ma anche con quella della time reversal. Supponiamo infatti che il sistema non abbia degenerazione accidentale, dunque gli stati oltre a potersi scrivere come

$$|E, J, m\rangle$$

saranno tali che  $E$  e  $J$  siano univocamente legati

$$\Rightarrow |E(J), J, m\rangle$$

Se prendiamo  $T$  e lo applichiamo su uno stato otteniamo:

$$T|E(J), J, m\rangle = U_{-m,m}|E(J), J, -m\rangle$$

dove  $U_{-m,m}$  è il coefficiente relativo alla rotazione di  $\pi$ . Dobbiamo calcolare il valore di aspettazione del dipolo su uno stato

$$\langle E(J), J, m | \vec{d} | E(J), J, m \rangle$$

Possiamo osservare che

$$\begin{aligned} \langle (E(J), J, m) | T^{-1} T \vec{d} T^{-1} T | E(J), J, m \rangle &= \langle T^{-1} T (E(J), J, m) | T^{-1} T \vec{d} T^{-1} | T (E(J), J, m) \rangle \equiv \\ &\equiv \langle T^{-1} T (E(J), J, m) | T^{-1} \vec{d} T (E(J), J, m) \rangle = \langle T (E(J), J, m) | \vec{d} | T (E(J), J, m) \rangle^* = \langle T (E(J), J, m) | \vec{d} | T (E(J), J, m) \rangle \end{aligned}$$

**Osservazione:** consideriamo il valore di aspettazione

$$\langle E(J), J, m | d_z | E(J), J, m \rangle^*$$

Ricordiamo il teorema di Wigner-Eckert, per cui

$$\langle J', m', \alpha' | O_k^L | J, m, \alpha \rangle = \langle J', \alpha' | |O| | J, \alpha \rangle \langle J', m' | L, J, k, m \rangle$$

All'interno di un multipletto (e solo in questo caso) possiamo dire che gli elementi di matrice di operatori diversi (ma dello stesso tipo) saranno proporzionali. Nel caso in esame, applicato a un vettore, si ha che  $\langle E(J), J, m | d_z | E(J), J, m \rangle$  sarà proporzionale all'elemento di matrice della componente  $z$  di qualunque altro vettore, in particolare di  $J_z$ :

$$\langle E(J), J, m | d_z | E(J), J, m \rangle = C(E, J) \langle E(J), J, m | J_z | E(J), J, m \rangle$$

Questo in linea di principio varrebbe anche tra multipletti diversi, ma in tal caso l'elemento di matrice di  $J_z$  è nullo. Nel nostro caso abbiamo che

$$\langle E(J), J, m | d_z | E(J), J, m \rangle = m C(E, J)$$

Se consideriamo l'elemento di matrice sullo stato time reversed abbiamo:

$$\langle T(E(J), J, m) | d_z | T(E(J), J, m) \rangle = |U_{m, -m}|^2 C(E, J) (-m)$$

Questo deve essere uguale a  $m C(E, J)$ , ma essendo  $|U_{m, -m}|^2$  un numero positivo l'unica maniera è che  $C(E, J)$  sia nullo, e quindi che il valore di aspettazione di  $d_z$  sia nullo.

## Lunedì 10 novembre

Abbiamo concluso che ogniqualvolta un sistema ha un momento di dipolo elettrico, ciò è incompatibile con la conservazione sia di  $P$  che di  $T$ ; tuttavia avevamo fatto l'ipotesi che non ci fosse degenerazione accidentale di alcun tipo. In tali condizioni, se prendiamo un sistema qualunque (purchè isolato), l'unico vettore che siamo in grado di associare agli stati è  $\vec{L}$ ; se a questo punto vogliamo calcolare il valore di aspettazione di un vettore qualunque, questo dovrà come minimo essere parallelo ad  $\vec{L}$ . Tuttavia se tale vettore è polare, come accade nel caso di  $\vec{d}$ , le sue proprietà di trasformazione sotto  $P$  e  $T$  sono opposte a quelle di  $\vec{L}$ , e se  $P$  e  $T$  sono conservate il valore di aspettazione sarà necessariamente nullo.

**Esempio:** consideriamo l'atomo di idrogeno; la sua hamiltoniana è

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{k}{r}$$

e gli stati si possono descrivere mediante i tre numeri quantici  $n$ ,  $J$  e  $J_z$ :

$$|n, J, J_z\rangle$$

Fissato  $n$ , esiste una degenerazione legata al momento angolare  $J$ , che può assumere i valori  $0, \dots, n-1$ . Questo è un esempio di degenerazione accidentale: fissato  $n$  si verifica che si hanno  $n^2$  stati degeneri; è opportuno in questo caso usare come osservabili l'energia,  $J_z$  e una terza osservabile che definiremo adesso. Nel caso classico, un'hamiltoniana del tipo sopra indicato descrive un moto kepleriano. In questo tipo di moto, il momento angolare è una costante del moto, ma si verifica che c'è anche un'altra grandezza conservata, il vettore di Laplace-Runge-Lenz:

$$\vec{A} = \frac{1}{m} \vec{p} \wedge \vec{L} - k \frac{\vec{r}}{r}$$

$$|\vec{A}| = |E|(b-a)$$

La conservazione di questo vettore si concretizza nel fatto che la direzione dell'asse maggiore dell'orbita resta fissa nel tempo. Questa è una caratteristica del potenziale  $\frac{1}{r}$ , basta aggiungere una piccola perturbazione e l'orbita comincia a precedere. Quantisticamente  $\vec{p}$  e  $\vec{L}$  non commutano, dunque  $\vec{A}$  come scritto sopra non è immediatamente hermitiano, ma va simmetrizzato il prodotto:

$$A_i = \frac{1}{2m} (\vec{p} \wedge \vec{L} + \vec{L} \wedge \vec{p}) - k \frac{r_i}{r}$$

Per capire quali osservabili possiamo prendere simultaneamente, dobbiamo capire quali sono le regole di commutazione delle componenti di  $\vec{A}$  col resto degli operatori:

$$[J_i, A_j] = i\epsilon_{ijk} A_k$$

Ridefinendo il vettore come

$$\hat{A}_i = -\frac{A_i}{\sqrt{-2\frac{H}{m}}}$$

dove ci limitiamo a un supermultipletto, su cui  $H$  ha autovalore unico, si ottiene

$$[\hat{A}_i, \hat{A}_j] = i\epsilon_{ijk} J_k$$

Vediamo quindi che il commutatore di due componenti di  $\vec{A}$  genera una rotazione, un comportamento simile a quello dei generatori dei boost nel gruppo di Lorentz. Si può verificare che le algebre di  $\vec{J}$  e  $\vec{A}$  generano l'algebra di  $SO(4)$ , dunque l'atomo di idrogeno è invariante sotto  $SO(4)$ . Questo spiega la degenerazione accidentale aggiuntiva a quella del tipico potenziale centrale  $V(r)$ . Passando in coordinate paraboliche  $\xi, \eta, \phi$ , si ha:

$$\begin{cases} x = \sqrt{\xi\eta} \cos \phi, & (\xi, \eta \geq 0); \\ y = \sqrt{\xi\eta} \sin \phi \\ z = \frac{1}{2}(\xi - \eta) \\ r = \frac{1}{2}(\xi + \eta) \end{cases}$$

Ribattezziamo allora gli autostati di  $H$  mediante i numeri quantici  $n_1, n_2, m$ , dove  $m$  è ancora  $J_z$ , e  $n_1, n_2$  sono definiti da

$$n = n_1 + n_2 + |m| + 1 \quad n_1, n_2 \geq 0$$

sugli stati della forma  $|n_1, n_2, m\rangle$ ,  $A_z$  ha autovalore  $\frac{n_2 - n_1}{n}$ .

Calcoliamo, fissato  $n$ , la degenerazione degli stati. Si ha  $0 \geq |m| < n - 1$ , e se fissiamo anche  $m$  si ha

$$0 \geq n_1 \geq n - |m| - 1$$

dunque abbiamo  $n - |m|$  stati. Allora

$$2 \sum_{m=1}^{n-1} (n - m) + n = 2[n(n-1) - \frac{(n-1)n}{2}] + n = n^2$$

Adesso, se calcoliamo il valore di aspettazione di  $d_z$  su questi stati abbiamo

$$\langle d_z \rangle = \frac{3}{2} \frac{\lambda_e}{\alpha} |e| n(n_1 - n_2)$$

che in generale è diverso da zero. Inoltre, si può dimostrare che

$$\langle d_z \rangle = C(n) \langle A_z \rangle$$

Vediamo che succede per un caso di supermultipletto semplice. Non possiamo occuparci del fondamentale perchè banalmente  $n = 1$ ,  $m = 0$  dunque  $n_1, n_2$  non possono che annullarsi, partiamo allora dal primo stato eccitato,  $n = 2$ . In questo caso si può avere  $J = 0, 1$ , quindi un singoletto e un tripletto, per un totale di 4 stati:

$$J = 0 \quad |2, 0, 0\rangle \quad (pari)$$

$$|2, 1, 1\rangle$$

$$J = 1 \quad |2, 1, 0\rangle \quad (dispari)$$

$$|2, 1, -1\rangle$$

Gli stati possibili nell'altra base sono i seguenti:

$$1 = n_1 + n_2 + |m|$$

$$m = \pm 1 \Rightarrow |0, 0, 1\rangle, |0, 0, -1\rangle$$

$$m = 0 \Rightarrow |1, 0, 0\rangle, |0, 1, 0\rangle$$

Deve esistere un cambio di base che connette i due set di stati:

$$|2, 1, 1\rangle \leftrightarrow |0, 0, 1\rangle \quad (\text{a meno di fasi})$$

$$|2, 1, -1\rangle \leftrightarrow |0, 0, -1\rangle$$

$$|1, 0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2, 1, 0\rangle + |2, 0, 0\rangle)$$

$$|0, 1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2, 1, 0\rangle - |2, 0, 0\rangle)$$

Dunque capiamo perchè  $d_z$  può essere diverso da zero se prendiamo il valore di aspettazione tra due stati come ad esempio  $|0, 1, 0\rangle$  o  $|1, 0, 0\rangle$ : questi ultimi infatti non sono più autostati della parità, dunque si hanno elementi di matrice di  $d_z$  tra stati con parità diversa. Dunque in questo caso la presenza di un dipolo elettrico non implica violazioni di  $P$  o analogamente di  $T$ . Per particelle elementari, quindi, la presenza di un dipolo elettrico è potenzialmente problematica, mentre per un sistema complesso l'eventualità non deve preoccupare perchè potrebbero esserci simmetrie nascoste che possono dare origine a degenerazione accidentale.

## Cenni di teoria dei campi

Vogliamo costruire degli strumenti che ci permettano di calcolare sezioni d'urto o larghezze di decadimento, partiremo dal caso più semplice, il campo scalare.

$$\phi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$$

Se il campo  $\phi$  è scalare, per definizione il suo comportamento sotto trasformazioni del gruppo di Poincarè è il seguente:

$$x \rightarrow x' = \Lambda x + a \quad (x = \Lambda^{-1}(x' - a))$$

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x') = \phi(x)$$

Sullo spazio degli stati, ad ogni trasformazione di Poincarè è associata una trasformazione unitaria  $U(a, \Lambda)$ , e ci possiamo chiedere che succede se tali operatori anzichè sugli stati agiscono sui campi:

$$U^{-1}(a, \Lambda)\phi(x')U(a, \Lambda) = \phi'(x') = \phi(\Lambda^{-1}(x' - a))$$

Questo è il punto di vista attivo, in cui dal primo al secondo membro dell'uguaglianza le coordinate restano le stesse (cioè sono variabili mute) mentre cambia la forma del campo. Il punto di vista passivo invece è il seguente:

$$U^{-1}(a, \Lambda)\phi(x)U(a, \Lambda) = \phi(\Lambda^{-1}(x - a))$$

dove il campo è rimasto il solito mentre le coordinate sono cambiate. Il campo in generale non è autoaggiunto.

Studieremo adesso il campo scalare corrispondente a particelle di massa  $m$ ; tale campo è descritto da una lagrangiana della forma

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi^\dagger) - m^2 \phi \phi^\dagger$$

da cui derivano le equazioni di moto:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^\dagger)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\dagger} = 0$$

$$\Rightarrow \partial^2 \phi + m^2 \phi = 0 \quad (\text{equazione di Klein-Gordon di massa } m)$$

Diamo adesso una rappresentazione spettrale del campo:

$$\phi(x) = \int \frac{d^3 p}{2E_p (2\pi)^3} \{a(\vec{p})e^{-ipx} + b^\dagger(\vec{p})e^{ipx}\}$$

La trattazione relativistica della particella di massa  $m$  richiede la presenza dell'antiparticella; stavolta non abbiamo più energie negative, in compenso però abbiamo particelle che evolvono con  $e^{-iEt}$  e altre con  $e^{iEt}$ . L'operatore  $a(\vec{p})$  distrugge particelle con energia  $E$  e impulso  $\vec{p}$ , mentre  $b^\dagger(\vec{p})$  distrugge un'antiparticella con stesse caratteristiche.

Per quanto riguarda la covarianza a vista dell'espressione del campo,  $px = p^\mu x_\mu$  è uno scalare di Lorentz, così come l'espressione  $\frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}$ . Definiamo adesso l'algebra degli operatori:

$$\begin{aligned} [a(\vec{p}), a(\vec{q})] &= 0 = [a^\dagger(\vec{p}), a^\dagger(\vec{q})] \\ [b(\vec{p}), b(\vec{q})] &= 0 = [b^\dagger(\vec{p}), b^\dagger(\vec{q})] \\ [a(\vec{p}), a^\dagger(\vec{q})] &= (2\pi)^3 2E_p \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) \\ [b(\vec{p}), b^\dagger(\vec{q})] &= (2\pi)^3 2E_p \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) \end{aligned}$$

**Osservazione:**  $\phi$  risolve l'equazione di Klein-Gordon, che è un'equazione omogenea, dunque  $\phi$  si porta dietro un'arbitrarietà nella moltiplicazione per una costante.

Ci preoccupiamo adesso della normalizzazione; è evidente che sono le regole di commutazione che fissano la normalizzazione delle funzioni d'onda:

$$[a(\vec{p}), a^\dagger(\vec{q})] = (2\pi)^3 2E_p \delta^3(\vec{p} - \vec{q})$$

In che senso si parla di funzioni d'onda e di normalizzazione? Il campo individua ed è individuato dagli operatori  $a$  e  $b$ . Fissare la normalizzazione di  $a^\dagger$  significa che l'operatore  $a^\dagger(\vec{p})$  applicato al vuoto  $|\Omega\rangle$  dà origine a  $|\vec{p}\rangle$ , uno stato ad una particella di impulso  $\vec{p}$ . Tale stato è autostato del quadrimpulso  $p^\mu$  corrispondente a  $\vec{p}$ . Se vogliamo scrivere l'autofunzione di questo stato sulla base delle coordinate, dovremo scrivere:

$$\psi_{\vec{p}}(\vec{x}) = \langle \vec{x} | a^\dagger(\vec{p}) | \Omega \rangle = \langle \vec{x} | \vec{p} \rangle$$

Ci aspettiamo che tale funzione d'onda sia proporzionale a  $e^{-ipx}$ :

$$\psi_{\vec{p}}(\vec{x}) = K_{\vec{p}} e^{-ipx}$$

Siamo in grado di fissare la costante  $K_{\vec{p}}$ ? Supponiamo di voler calcolare il prodotto scalare tra due stati  $|\vec{q}\rangle$  e  $|\vec{p}\rangle$ , utilizzando l'espressione  $\langle \vec{x} | \vec{p} \rangle$ :

$$\langle \vec{q} | \vec{p} \rangle = \langle \Omega | a(\vec{q}) a^\dagger(\vec{p}) | \Omega \rangle$$

Poichè gli operatori di distruzione annichilano il vuoto, possiamo sostituire  $a(\vec{q}) a^\dagger(\vec{p})$  con il commutatore  $[a(\vec{q}), a^\dagger(\vec{p})]$ :

$$= \langle \Omega | [a(\vec{q}), a^\dagger(\vec{p})] | \Omega \rangle = (2\pi)^3 2E_p \delta^3(\vec{p} - \vec{q})$$

L'espressione appena trovata deve coincidere con l'espressione derivante dal prodotto scalare associato all'equazione di Klein-Gordon:

$$\begin{aligned} \langle \psi_{\vec{p}}, \psi_{\vec{q}} \rangle &= i \int d^3x [\psi_{\vec{q}}^* \partial^0 \psi_{\vec{p}} - (\partial^0 \psi_{\vec{q}}^*) \psi_{\vec{p}}] = K_{\vec{q}}^* K_{\vec{p}} (2\pi)^3 2E_p \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) = |K_{\vec{p}}|^2 (2\pi)^3 2E_p \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) \\ &\Rightarrow |K_{\vec{p}}|^2 = 1 \end{aligned}$$

quindi  $K_{\vec{p}}$  è soltanto una fase, e la regola di commutazione impone che

$$\langle \vec{x} | \vec{p} \rangle = e^{-ipx}$$

## Martedì 11 novembre

Consideriamo adesso le proprietà di trasformazione degli operatori di creazione e distruzione; chiameremo indistintamente  $a, b \equiv c$  e  $a^\dagger, b^\dagger = c^\dagger$ :

$$\begin{aligned} U(a, \Lambda) c(\vec{p}) U^{-1}(a, \Lambda) &= e^{-ia(\Lambda p)} c(\vec{\Lambda p}) \\ U(a, \Lambda) c^\dagger(\vec{p}) U^{-1}(a, \Lambda) &= e^{ia(\Lambda p)} c^\dagger(\vec{\Lambda p}) \\ U^{-1}(a, \Lambda) c(\vec{p}) U(a, \Lambda) &= e^{iap} c(\Lambda^{-1} p) \\ U^{-1}(a, \Lambda) c^\dagger(\vec{p}) U(a, \Lambda) &= e^{-iap} c^\dagger(\Lambda^{-1} p) \end{aligned}$$

Per quanto riguarda il prodotto scalare che abbiamo utilizzato in precedenza, esso trae origine dall'equazione di Klein-Gordon stessa. Il motivo per cui non si prende come norma di una funzione d'onda (soluzione dell'equazione di Klein-Gordon) l'espressione  $|\psi(\vec{x}, t)|^2$  è che essa non rimane costante al passare del tempo, quindi con l'evoluzione dello stato. Un prodotto scalare per essere ben definito deve però avere la proprietà di essere conservato dalla dinamica, nel tempo, e una maniera per definirlo è partire da una quantità conservata che conosciamo, ovvero l'integrale spaziale della componente temporale di una densità di quadricorrente conservata:

$$\begin{aligned} J^\mu \rightarrow \partial_\mu J^\mu &= 0 \\ \int d^3x \partial_0 J^0 + \nabla \cdot \vec{J} &= 0 \Rightarrow \partial_0 \int d^3x J^0 = 0 \end{aligned}$$

assumendo per le correnti andamento regolare all'infinito. Le correnti conservate nascono da simmetrie, e sappiamo che la lagrangiana di Klein-Gordon è invariante per trasformazioni di gauge di prima specie:

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x' = x \\ \phi &\rightarrow \phi' = e^{i\alpha} \phi \\ \phi^\dagger &\rightarrow e^{-i\alpha} \phi'^\dagger \end{aligned}$$

Essendo la lagrangiana invariante, sappiamo che esiste una corrente conservata associata a questa simmetria, data da

$$J^\mu = i \left[ -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\dagger)} \phi^\dagger \right] = i [(\partial_\mu \phi) \phi^\dagger - (\partial_\mu \phi^\dagger) \phi]$$

Avendo assunto  $\phi$  e  $\phi^\dagger$  come indipendenti, ed essendo la trattazione finora seguita del tutto classica, possiamo pensare al posto di  $\phi$  e  $\phi^\dagger$  due funzioni  $\psi_1$  e  $\psi_2$  entrambe soluzioni dell'equazione di Klein-Gordon. Allora, un prodotto scalare costante nel tempo è definito prendendo la componente temporale di  $J^\mu$ :

$$i \int d^3x [\psi_1^* (\partial^0 \psi_2) - (\partial^0 \psi_1^*) \psi_2]$$

Il valore di questa espressione è indipendente dal tempo, ma non ha segno definito, per questo Dirac si mise alla ricerca di una soluzione alternativa che fosse sia relativisticamente covariante, che a norma positiva.

**Osservazione:** la funzione d'onda da noi definita,  $\psi_{\vec{p}}(\vec{x}) = e^{-ipx}$ , non è normalizzata. Se vogliamo sapere cosa rappresenta dobbiamo chiederci quale sia la densità di particelle ad essa associata. Infatti se la integriamo su tutto lo spazio otteniamo chiaramente un risultato divergente, ma questo in primo luogo perchè



stiamo integrando su un volume infinito. La corrente  $J^\mu$  dà la corrente di probabilità, quindi ci permette di scrivere

$$J^\mu i[\psi_{\vec{p}}^*(\partial^\mu \psi_{\vec{p}}) - (\partial^\mu \psi_{\vec{p}}^*)\psi_{\vec{p}}] = i[-ip^\mu - ip^\mu]$$

Poichè  $J^\mu = (\rho, \vec{J})$ , possiamo dire

$$J^0 = \rho = 2p^0$$

Allora, interpretando  $\rho$  come densità di particelle, che la densità associata a  $\psi_{\vec{p}}$  è  $2p^0$ .

Vediamo quali sono le conseguenze delle regole di commutazione degli operatori di creazione e distruzione sui campi. Già nel caso classico i campi vengono introdotti come generalizzazione delle coordinate lagrangiane. Se pensiamo a  $\phi(x)$  come ad una coordinata lagrangiana generalizzata ci aspettiamo che  $[\phi(x), \phi(y)] = 0$  perchè di solito le coordinate commutano tra loro, e di conseguenza anche  $[\phi^\dagger(x), \phi^\dagger(y)] = 0$ . Questa nostra aspettativa è confermata, infatti

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} (a(\vec{p})e^{-ipx} + b^\dagger(\vec{p})e^{ipx})$$

Il commutatore tra  $\phi(x)$  e  $\phi(y)$ , così come quello tra  $\phi^\dagger(x)$  e  $\phi^\dagger(y)$ , coinvolge commutatori della forma  $[a, a]$ ,  $[a, b^\dagger]$ ,  $[b^\dagger, a]$ ,  $[b^\dagger, b^\dagger]$  e i loro hermitiani coniugati, che sono tutti nulli per le regole che abbiamo definito. Viceversa, in generale il commutatore  $[\phi(x), \phi^\dagger(y)]$  in generale conterrà commutatori non nulli. Cosa ci dobbiamo aspettare in questo caso? La risposta ancora una volta ce lo dà l'analogo classico, infatti se  $\phi(x)$  è una coordinata avrà associato il suo momento coniugato: partendo dalla lagrangiana, questo momento sarà dato da

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \partial^0 \phi^\dagger(x) \equiv \dot{\phi}^\dagger(x)$$

Se usiamo l'analogia classica, ci aspettiamo che il commutatore  $[\phi(\vec{x}, t), \pi(\vec{y}, t)]$  faccia qualcosa di proporzionale a  $i$  quando  $\vec{x} = \vec{y}$  ( $\hbar = 1$ ), e si annulli quando  $\vec{x} \neq \vec{y}$ , dunque

$$[\phi(\vec{x}, t), \pi(\vec{y}, t)] = [\phi(\vec{x}, t), \dot{\phi}^\dagger(\vec{y}, t)] i \delta^3(\vec{x} - \vec{y})$$

Perchè prendiamo i tempi uguali? Principalmente perchè nella lagrangiana classica non si confrontano variabili e momenti a tempi diversi, inoltre se  $t \neq t'$  si presuppone che uno dei due operatori sia evoluto nel tempo, e a tutt'ora non conosciamo le modalità di evoluzione. Si calcola quindi

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3} \left\{ e^{-ipx} (iq^0) e^{iqy} [a(\vec{p}), a^\dagger(\vec{q})] - e^{ipx} (-iq^0) e^{-iqy} [b^\dagger(\vec{p}), b(\vec{q})] \right\} = \\ & = \int d^3p \int \frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3} (iq^0) \{ e^{-ipx} e^{iqy} + c.c. \} \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) = \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} ip^0 (e^{-ip(x-y)} + e^{ip(x-y)}) \end{aligned}$$

Ricordando che stiamo calcolando il commutatore a tempi uguali, quindi  $t_x = t_y$ , si ha

$$= i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} (e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} + e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}}) = i \delta^3(\vec{x} - \vec{y})$$

Abbiamo verificato quindi che le regole di commutazione canoniche sono compatibili con le regole di commutazione che abbiamo scelto per gli operatori di creazione e distruzione. Visto il trucco, è immediato calcolare anche il commutatore  $[\phi(x), \phi^\dagger(y)]$ :

$$[\phi(x), \phi^\dagger(y)] = \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \left\{ e^{-ip(x-y)} - e^{ip(x-y)} \right\}$$

Cambiamo adesso la struttura dell'elemento di volume:

$$\frac{d^3p}{2E_p} = d^4p \delta(p^2 - m^2) \theta(p^0)$$

$$\Rightarrow \int d^4p \delta(p^2 - m^2) \theta(p^0) \left\{ e^{-ip(x-y)} - e^{ip(x-y)} \right\} = \int d^4p \delta(p^2 - m^2) \theta(p^0) e^{-ip(x-y)} - \int d^4p \delta(p^2 - m^2) \theta(p^0) e^{ip(x-y)}$$

Se adesso nel secondo addendo mandiamo  $p^\mu \rightarrow -p^\mu$ , abbiamo

$$\begin{aligned} &= \int d^4p \delta(p^2 - m^2) \theta(p^0) e^{-ip(x-y)} - \int d^4p \delta(p^2 - m^2) \theta(-p^0) e^{-ip(x-y)} = \\ &= \int d^4p \delta(p^2 - m^2) e^{-ip(x-y)} (\theta(p^0) - \theta(-p^0)) = i\Delta(x-y; m) \end{aligned}$$

dove la funzione  $\Delta$  è definita da questa relazione.

**Proprietà della  $\Delta$ :** La  $i$  è messa in modo che la  $\Delta$  risulti essere una funzione reale. Infatti, se prendiamo il complesso coniugato dell'integrale, otteniamo la stessa espressione cambiata di segno, il che equivale a dire che  $i\Delta$  è una quantità immaginaria pura, quindi possiamo fattorizzarne la parte reale in  $\Delta$ . Inoltre fare il complesso coniugato di  $i\Delta$  equivale a fare il complesso coniugato del commutatore, il che restituisce

$$[\phi(x), \phi^\dagger(y)]^\dagger = [\phi(y), \phi^\dagger(x)]$$

ma di nuovo questo sarà uguale a  $i\Delta(y-x; m)$ , dunque  $\Delta(x-y; m) = -\Delta(y-x; m)$ .

Se il vettore  $x-y$  è di tipo spazio, i due punti sono sconnessi causalmente, e per questo motivo gli operatori definiti in  $x$  devono necessariamente commutare con quelli in  $y$ . Effettivamente questo accade perchè se  $x-y$  è di tipo tempo è possibile trovare un sistema di riferimento dove  $t_x - t_y = 0$  mentre  $\vec{x} \neq \vec{y}$ , in tal caso abbiamo

$$[\phi(x), \phi^\dagger(y)] = \int d^4p \delta(p^2 - m^2) e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} (\theta(p^0) - \theta(-p^0)) = (2\pi)^3 \int dp^0 \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) (\theta(p^0) - \theta(-p^0)) = 0 \quad (\vec{x} \neq \vec{y})$$

Questo risultato è significativo in quanto ribadisce il fatto che pur non essendo osservabili,  $\phi$  e  $\phi^\dagger$  in punti disconnessi causalmente non devono parlarsi.

Infine, la  $\Delta$  soddisfa l'equazione di Klein-Gordon, come si vede applicando l'operatore di Klein-Gordon

$$(\partial_x^2 - m^2)[\phi(x), \phi^\dagger(y)] = [(\partial_x^2 - m^2)\phi(x), \phi^\dagger(y)] = [0, \phi(y)] = 0$$

## Mercoledì 12 novembre

La funzione d'onda di singola particella con impulso  $\vec{p}$  si può scrivere in questo modo:

$$\psi_{\vec{p}}(\vec{x}) = \langle \Omega | \phi(x) a^\dagger(\vec{p}) | \Omega \rangle$$

dove come al solito

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{2E_p (2\pi)^3} \left\{ a(\vec{p}) e^{-ipx} + b^\dagger(\vec{p}) e^{ipx} \right\}$$

$$\phi^\dagger(x) = \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \left\{ b(\vec{p})e^{-ipx} + a^\dagger(\vec{p})e^{ipx} \right\}$$

mentre la corrente conservata si ottiene da

$$J^\mu(x) = i \left( -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)\phi} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\dagger)\phi^\dagger} \right)$$

Vedremo adesso l'analogo di seconda quantizzazione degli operatori  $P$ ,  $C$  e  $T$ .

### Coniugazione di carica $C$

Per ottenere la corrente di carica elettrica a partire dalla  $J^\mu$  sopra definita, è sufficiente moltiplicare per la carica elementare  $q$ :

$$J^\mu(x) = iq(-(\partial^\mu \phi^\dagger)\phi - (\partial^\mu \phi)\phi^\dagger)$$

La decisione su chi sia la particella e chi l'antiparticella si prende al momento in cui si definiscono i campi  $\phi$  e  $\phi^\dagger$ :  $\phi$  è definito come il campo che distrugge la particella e crea l'antiparticella,  $\phi^\dagger$  viceversa. Nel caso dell'elettrone non abbiamo neanche dubbi sul dargli la dignità di particella, data la sua abbondanza in natura rispetto al positrone, mentre nel caso del pione carico la discussione potrebbe essere più controversa.

Osserviamo inoltre che la carica  $q$  che abbiamo introdotto è un numero reale, dunque un eventuale operatore di carica non avrebbe la minima azione su di esso. Consideriamo ad esempio l'operatore di creazione di una particella di impulso  $\vec{p}$ : sappiamo che

$$a^\dagger(\vec{p})|\Omega\rangle = |\text{particella di impulso } \vec{p}\rangle$$

Se applichiamo l'operatore  $C$  allo stato  $a^\dagger(\vec{p})|\Omega\rangle$ , per prima cosa ci dobbiamo chiedere cosa ci aspettiamo che faccia: vorremmo che uno stato di particella di impulso  $\vec{p}$  fosse mandato, a meno di eventuali fattori di fase, in uno stato di antiparticella, sempre di impulso  $\vec{p}$ :

$$C|\text{particella di impulso } \vec{p}\rangle = |\text{antiparticella di impulso } \vec{p}\rangle = e^{i\eta}b^\dagger(\vec{p})|\Omega\rangle$$

A questo punto abbiamo un'idea per definire come è ragionevole che  $C$  agisca sugli operatori:

$$Ca^\dagger(\vec{p})|\Omega\rangle = Ca^\dagger(\vec{p})C^{-1}C|\Omega\rangle =$$

Per definizione, il vuoto è lo stato di minima energi, e nelle teorie di campo più elementari, esso è non degenere e si fa l'assunzione che le simmetrie discrete lo lascino invariato, dunque  $C|\Omega\rangle = |\Omega\rangle$ :

$$\begin{aligned} &= Ca^\dagger(\vec{p})C^{-1}|\Omega\rangle = e^{i\eta}b^\dagger(\vec{p})|\Omega\rangle \\ &\Rightarrow Ca^\dagger(\vec{p})C^{-1} = e^{i\eta}b^\dagger(\vec{p}) \end{aligned}$$

Ovvero  $C$  agisce sugli operatori di particella trasformandoli negli operatori di antiparticella. Se imponiamo che  $C$  sia una simmetria unitaria, otteniamo facilmente l'azione su  $C$  su  $a$

$$Ca(\vec{p})C^{-1} = e^{-i\eta}b(\vec{p})$$

Se moltiplichiamo a destra per  $C$  e a sinistra per  $C^{-1}$ :

$$C^2 a(\vec{p})(C^{-1})^2 = e^{-i\eta} C b(\vec{p}) C^{-1}$$

Se imponiamo anche che  $C^2 = 1$  (e di conseguenza  $(C^{-1})^2 = 1$ , abbiamo che

$$C b(\vec{p}) C^{-1} = e^{i\eta} a(\vec{p})$$

$$C b^\dagger(\vec{p}) C^{-1} = e^{-i\eta} a^\dagger(\vec{p})$$

Date queste quattro relazioni, cosa succede ai campi:

$$C \phi(x) C^{-1} = \int \frac{d^3 p}{2E_p (2\pi)^3} \left\{ e^{-ipx} e^{-i\eta} b(\vec{p}) + e^{ipx} e^{-i\eta} a^\dagger(\vec{p}) \right\} = e^{-i\eta} \phi^\dagger(x)$$

$$C \phi^\dagger(x) C^{-1} = e^{i\eta} \phi(x)$$

### Osservazioni:

1.  $\phi$  e  $\phi^\dagger$  non sono funzioni d'onda, dunque non confondiamo l'azione di  $C$  in prima quantizzazione, che sostanzialmente restituiva il complesso coniugato della funzione d'onda iniziale, con l'azione sugli operatori;
2. a questo punto ci possiamo porre il problema se  $C$  così definito fa quello che vorremmo. Intanto, sotto coniugazione di carica, ci aspettiamo che la corrente  $J^\mu$  cambi segno; in effetti l'azione di  $C$  manda  $\phi$  in  $\phi^\dagger$  e la corrente è antisimmetrica per questo scambio, quindi

$$C J^\mu(x) C^{-1} = -J^\mu(x)$$

Osserviamo inoltre che nella scrittura  $C \phi^\dagger(x) C^{-1} = e^{i\eta} \phi(x)$  la coordinata  $x$  non cambia da un membro all'altro.

### Parità P

Viceversa, la parità dovrà agire sulle coordinate. Anche stavolta ci chiediamo quale azione vorremmo per l'operatore  $P$ : se applicato ad uno stato di particella con impulso  $\vec{p}$ , dovrà produrre uno stato sempre di particella con impulso  $-\vec{p}$ ; per gli stessi motivi detti prima,  $P|\Omega\rangle = |\Omega\rangle$ :

$$\begin{aligned} P a^\dagger(\vec{p}) P^{-1} |\Omega\rangle &= P a^\dagger(\vec{p}) P^{-1} P |\Omega\rangle = P a^\dagger(\vec{p}) |\Omega\rangle = P |\text{particella con impulso } \vec{p}\rangle = \\ &= e^{i\eta_p} |\text{particella con impulso } -\vec{p}\rangle = e^{i\eta_p} a^\dagger(-\vec{p}) |\Omega\rangle \end{aligned}$$

Generalizzando, si ha che per definizione

$$P a^\dagger(\vec{p}) P^{-1} = e^{i\eta_p} a^\dagger(-\vec{p})$$

Stavolta però la parità non mescola particelle e antiparticelle, e anche se avremo

$$P a(\vec{p}) P^{-1} = e^{-i\eta_p} a(-\vec{p})$$

dovremo ridefinire indipendentemente le regole di trasformazione per  $b$  e  $b^\dagger$ .

Come prima conseguenza di questa differenza, mentre il fattore  $e^{i\eta_c}$  può assumere qualunque valore (in virtù del fatto che  $C^2 = 1$ ), stavolta se vogliamo che  $P^2 = 1$ , dobbiamo imporre che  $e^{2i\eta_p} = 1$ , da cui  $e^{i\eta_p} = \pm 1$ , dunque  $\eta_p$  non è arbitrario ma può essere solo  $0, \pi$  (modulo  $2\pi$ ). Lo stesso discorso riguarda i  $b$ .

A priori, guardando separatamente gli operatori di particella e di antiparticella, potremmo pensare che  $\eta_p$  cambi nei due casi, ma è un'ipotesi folle, soprattutto se vogliamo che l'azione sui campi sia semplice e il fattore di fase sia fattorizzabile, dunque definiremo:

$$Pb^\dagger(\vec{p})P^{-1} = e^{-i\eta_p}b^\dagger(-\vec{p})$$

$$Pb(\vec{p})P^{-1} = e^{i\eta_p}b(-\vec{p})$$

Sotto parità, cosa succede a  $\phi$ : se definiamo  $x = (t, \vec{x})$ , avremo  $Px = (t, -\vec{x})$ , dunque avremo

$$P\phi(x)P^{-1} = e^{-i\eta_p} \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \{a(\vec{p})e^{-ipx} + b^\dagger(-\vec{p})e^{ipx}\}$$

Consideriamo  $px = tE_p - \vec{p} \cdot \vec{x}$ , e cambiamo variabile d'integrazione:  $-\vec{p} \rightarrow \vec{q}$

$$\begin{aligned} &= e^{-i\eta_p} \int \frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3} \{a(\vec{q})e^{-i(E_q t + \vec{q} \cdot \vec{x})} + b^\dagger(\vec{q})e^{i(E_q t + \vec{q} \cdot \vec{x})}\} = \\ &= e^{-i\eta_p} \int \frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3} \{a(\vec{q})e^{-iq \cdot (Px)} + b^\dagger(\vec{q})e^{iq \cdot (Px)}\} = e^{-i\eta_p} \phi(Px) \end{aligned}$$

Analogamente  $P\phi^\dagger(x)P^{-1} = e^{i\eta_p}\phi^\dagger(Px)$ . **Osservazione:** Se  $e^{i\eta_p} = 1$ , la particella si dice scalare, se -1 si dice pseudoscalare.

Che succede alla corrente? Per parità ci aspetteremmo che  $J^\mu(J^0, \vec{J})$  vada in  $PJ^\mu = (J^0, -\vec{J})$ . In effetti questo succede, e anche stavolta sono assenti i fattori di fase: questo è ragionevole da un lato perchè la corrente è hermitiana, dall'altro perchè  $J$  è quadratica in  $\phi$  e  $\phi^\dagger$  quindi le fasi si elidono. Vediamo che per la componente 0:

$$J^0 = i[(\partial^0 \phi(x))\phi^\dagger(x) - (\partial^0 \phi^\dagger(x))\phi(x)]$$

$$PJ^0(x)P^{-1} = i[(\partial^0 \phi(Px))\phi^\dagger(Px) - (\partial^0 \phi^\dagger(Px))\phi(Px)]$$

Vediamo che  $\partial^0$  non è influenzata dall'azione di  $P$ , perchè  $t \rightarrow t$ . Per le altre componenti invece:

$$J^i = i[(\partial^i \phi(x))\phi^\dagger(x) - (\partial^i \phi^\dagger(x))\phi(x)]$$

$$PJ^i(x)P^{-1} = i[(\partial^i \phi(Px))\phi^\dagger(Px) - (\partial^i \phi^\dagger(Px))\phi(Px)]$$

Viceversa, stavolta si fa sentire l'inversione di coordinate, e poichè le  $\partial^i$  sono derivate fatte rispetto alle vecchie coordinate  $\vec{x}$ , abbiamo un meno davanti ad ogni addendo, e complessivamente

$$PJ^i(x)P^{-1} = -J^i(Px) = J_i(Px)$$

$$\Rightarrow PJ^\mu(x)P^{-1} = J_\mu(Px)$$

## Time reversal T

Se applichiamo l'operatore di time reversal ad uno stato di impulso  $\vec{p}$ , dobbiamo ottenere uno stato con impulso cambiato di segno:

$$T a^\dagger(\vec{p})|\Omega\rangle = e^{i\eta_T} a^\dagger(-\vec{p})|\Omega\rangle$$

Definiamo allora

$$T a^\dagger(\vec{p})T^{-1} = e^{i\eta_T} a^\dagger(-\vec{p})$$

$$T a(\vec{p})T^{-1} = e^{-i\eta_T} a(-\vec{p})$$

$$T b^\dagger(\vec{p})T^{-1} = e^{-i\eta_T} b^\dagger(-\vec{p})$$

$$T b(\vec{p})T^{-1} = e^{i\eta_T} b(-\vec{p})$$

Queste sono le stesse leggi di definizione di  $P$ , ma  $T$  è antiunitario. Consideriamo l'azione sul campo:

$$T\phi T^{-1} = e^{-i\eta_T} \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \{a(-\vec{p})e^{ipx} + b^\dagger(-\vec{p})e^{-ipx}\}$$

Definiamo  $Tx = (-t, \vec{x})$ , da cui

$$px = E_p t - \vec{p} \cdot \vec{x} = E_q t + \vec{q} \cdot \vec{x} = -(E(-t) - \vec{q} \cdot \vec{x}) = -q \cdot (Tx)$$

$$\Rightarrow e^{-i\eta_T} \int \frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3} \{a(\vec{q})e^{-iq(Tx)} + b^\dagger(\vec{q})e^{iq(Tx)}\}$$

$$\Rightarrow T\phi(x)T^{-1} = e^{-i\eta_T} \phi(Tx)$$

Sappiamo che  $T^2$  ha comportamenti diversi a seconda dello spin del sistema: ha autovalori +1 per spin intero, e -1 per spin semintero. Se applichiamo  $T$  e  $T^{-1}$  alla precedente relazione:

$$\Rightarrow T^2\phi(x)(T^{-1})^2 = T e^{-i\eta_T} \phi(Tx)T^{-1} = e^{i\eta_T} T\phi(Tx)T^{-1} = e^{i\eta_T} e^{-i\eta_T} \phi(x) = \phi(x)$$

Dunque  $T^2$  su  $\phi$  riproduce  $\phi$ , e ce lo aspettavamo perchè la particella di Klein-Gordon ha spin 0. Anche in questo caso, come per la coniugazione di carica, la fase è arbitraria.

Per quanto riguarda la corrente abbiamo un comportamento identico rispetto a quello della parità: le derivate spaziali stavolta non generano segni -, mentre è la derivata temporale ad avere questa caratteristica, tuttavia essendo  $T$  antiunitario, passando attraverso l'unità immaginaria a fattore le fa cambiare segno, quindi

$$T J^\mu(x)T^{-1} = J_\mu(Tx)$$

## Lunedì 17 novembre

Ci sono tre tipi di campi che possiamo incontrare: il campo scalare, il campo vettoriale e il campo di Dirac.

## Campo vettoriale

Il campo vettoriale è un oggetto che diversamente dal campo scalare ha 4 componenti:

$$W^\mu$$

Assumiamo anche stavolta, così come  $\phi \neq \phi^\dagger$ , che anche il campo vettoriale sia diverso dal suo aggiunto:

$$W^\mu \neq W^{\mu\dagger}$$

Con la dicitura "campo vettoriale" si vuole intendere la classificazione del campo in termini delle sue proprietà di trasformazione sotto il gruppo di Poincarè:

$$(a, \Lambda) : x \rightarrow x' = \Lambda x + a$$

$$W^\mu(x) \rightarrow W'^\mu(x') = \Lambda^\mu{}_\nu W^\nu(x)$$

Per il campo scalare avevamo  $\phi'(x') = \phi(x)$ , ma adesso il campo nel nuovo punto sarà in generale un mescolamento delle componenti del vecchio campo, regolato da una matrice di Lorentz. Stessa sorte per il campo coniugato.

Ci possiamo porre il problema di cosa accade al campo visto come operatore in termini della trasformazione unitaria che descrive  $(a, \Lambda)$  sullo spazio degli stati:

$$U^{-1}(a, \Lambda) W^\mu(x) U(a, \Lambda) = W'^\mu(x) \quad (\text{descrizione attiva})$$

$$U^{-1}(a, \Lambda) W^\mu(x) U(a, \Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu W'^\nu(\Lambda^{-1}(x - a)) \quad (\text{descrizione passiva})$$

Questa stessa relazione può essere vista al contrario:

$$U(a, \Lambda) W^\mu(x) U^{-1}(a, \Lambda) = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu W^\nu(a + \Lambda x)$$

## Campo vettoriale di massa $m$

Per arrivare all'equazione di moto si parte da una lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^\dagger - m^2 W^\mu W_\mu^\dagger$$

dove

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu W^\nu - \partial^\nu W^\mu$$

Le equazioni del moto sono:

$$\begin{aligned} & \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu W_\nu^\dagger)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial W_\nu^\dagger} \\ & \Rightarrow \partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 W^\nu = 0 \\ & \Rightarrow \square W^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu W^\mu) + m^2 W^\nu \end{aligned}$$

Vediamo che le stesse equazioni del moto decretano che la quadridivergenza del campo è nulla, infatti applicando l'operatore di quadridivergenza alle equazioni del moto abbiamo:

$$\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 \partial_\nu W^\nu = m^2 \partial_\nu W^\nu = 0$$

dato che  $m \neq 0$  per ipotesi. Allora le equazioni del moto si possono riscrivere come

$$\begin{cases} \square W^\mu + m^2 W^\mu = 0 \\ \partial_\mu W^\mu = 0 \end{cases}$$

**Osservazione:** Abbiamo detto che  $W^\mu$  si trasforma come un quadrivettore, ma inizialmente abbiamo parlato di campo "vettoriale"; è semplicemente una abbreviazione di comodo oppure c'è differenza tra le due cose? Le interazioni deboli come sappiamo sono mediate dai bosoni  $W^\pm$  e  $Z^0$ , che sono bosoni *vettori*, e ci possiamo chiedere se questa sia una abbreviazione di "bosoni quadrivettori". La risposta è no, infatti i  $W^\pm$  hanno spin 1. Lo spin ha a che fare con il sottogruppo del gruppo di Lorentz corrispondente alle rotazioni. Quando tale sottogruppo agisce sullo spazio dei quadrivettori, dal punto di vista dello spin abbiamo che le componenti spaziali vengono ruotate, mentre quella temporale viene lasciata invariata. Quindi, quando trattiamo dei gradi di libertà di un campo quadrivettoriale, dal punto di vista dello spin abbiamo due componenti, una di spin 0 e una di spin 1:

$$W^\mu = \begin{pmatrix} W^0 \\ \vec{W} \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow 0 \\ \rightarrow 1 \end{matrix}$$

Il campo che abbiamo definito poco fa, dal punto di vista dello spin, come si comporta? La condizione di quadridivergenza nulla elimina un grado di libertà del campo, che corrisponde proprio allo spin 0 (non può essere altrimenti perchè se eliminasse una componente spaziale, tramite rotazione questa potrebbe essere rigenerata), dunque  $W^\mu$  ha soltanto lo spin 1.

Dal punto di vista dello sviluppo in termini di operatori di creazione e distruzione, ci aspettiamo che ci siano delle novità dovute alla caratteristica di quadrivettorialità, e alla presenza di spin, infatti:

$$W^\mu(x) = \sum_{s=1}^3 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} \left\{ A(s, \vec{p}) \epsilon^\mu(s, \vec{p}) e^{-ipx} + B^\dagger(s, \vec{p}) \epsilon^{*\mu}(s, \vec{p}) e^{ipx} \right\}$$

Oltre alla dipendenza spazio-temporale, abbiamo aggiunto un quadrivettore  $\epsilon^\mu(s, \vec{p})$ , che descrive le proprietà del campo per quanto riguarda la parte di spin. Dobbiamo capire come esprimere tali quadrivettori, affinché descrivano correttamente le proprietà di trasformazione del campo sotto il gruppo di Lorentz. Il generico stato di particella con impulso  $\vec{p}$  e spin  $s$  sarà stavolta:

$$A^\dagger(s, \vec{p})|\Omega\rangle = \epsilon^\mu(s, \vec{p})e^{-ipx}$$

Gli  $\epsilon^\mu$  sono detti vettori di polarizzazione, e ci devono garantire che stiamo considerando soltanto i gradi di libertà corrispondenti allo spin 1 e non quelli relativi allo spin 0, in altre parole devono garantire che  $\partial_\mu W^\mu = 0$ . Il vincolo che nasce è

$$\epsilon^\mu(s, \vec{p})p_\mu \equiv 0$$



La definizione degli  $\epsilon$  dovrà tenere conto di questa proprietà, e possiamo partire dal caso più semplice, ovvero dal sistema di riposo, in cui

$$p^\mu = (m, 0, 0, 0)$$

Allora per  $\epsilon^\mu(s, \vec{0})$  dobbiamo avere necessariamente

$$\epsilon^\mu(s, \vec{0}) = (0, \vec{\epsilon}_s)$$

dove  $\vec{\epsilon}_s$  a priori è un qualsiasi vettore di  $\mathbb{R}^3$ , dunque possiamo scegliere una terna di vettori indipendenti di questa forma:

$$\vec{\epsilon}_1 = (1, 0, 0)$$

$$\vec{\epsilon}_2 = (0, 1, 0)$$

$$\vec{\epsilon}_3 = (0, 0, 1)$$

Questa è una scelta lecita, ed è la cosiddetta scelta cartesiana reale. C'è anche la possibilità di scegliere polarizzazioni sferiche:

$$\epsilon_+ = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\epsilon}_1 + i\vec{\epsilon}_2)$$

$$\epsilon_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\epsilon}_1 - i\vec{\epsilon}_2)$$

$$\epsilon_0 = \vec{\epsilon}_3$$

Dal punto di vista della comprensione dello sviluppo non abbiamo fatto molti passi avanti, dato che conosciamo  $\epsilon^\mu$  solo quando  $\vec{p} = 0$ . Tuttavia, la regola che ci guida è che

$$p_\mu \epsilon^\mu(s, \vec{p}) = 0$$

ed essendo un prodotto di Lorentz, è uno scalare per trasformazioni di Lorentz. Possiamo definire allora

$$\epsilon^\mu(s, \vec{p}) = \hat{\Lambda}^\mu{}_\nu \epsilon^\nu(s, \vec{0})$$

Dato un quadrimpulso  $\hat{p}$ , esisterà una trasformazione di Lorentz che lo manda nel quadrimpulso  $p$ :

$$\hat{p} = (m, 0, 0, 0)$$

$$\Lambda(\vec{p})\hat{p} = p$$

Poichè conosciamo  $\epsilon$  quando  $p = \hat{p}$ , basterà che prendiamo

$$\epsilon^\mu(s, \vec{p}) = \Lambda(\vec{p})\epsilon^\mu(s, \vec{0})$$

In tal modo

$$\hat{p}_\mu \epsilon^\mu(s, \vec{0}) = 0$$

ma anche

$$p_\mu \epsilon^\mu(s, \vec{p}) = 0$$

Questa è una idea ragionevole ma va discussa un attimo perchè ha un problema: infatti, non è detto che esista una sola  $\Lambda(\vec{p})$  tale che  $\Lambda(\vec{p})\hat{p} = p$ . Se consideriamo una rotazione pura, e la applichiamo a  $\hat{p}$ , vediamo che questa non cambia la parte spaziale del quadrimpulso, ma in compenso agisce sulle polarizzazioni, quindi abbiamo introdotto una arbitrarietà sulla scelta degli  $\vec{\epsilon}$  di tipo  $\propto^2$  (gli angoli  $\theta$  e  $\phi$ ). Possiamo ridurre questa arbitrarietà se imponiamo che la nostra trasformazione non ruoti gli assi, sia quindi un puro boost di Lorentz: con questo vincolo, la matrice  $\Lambda$  è unica e si scrive così

$$\begin{pmatrix} \frac{E}{m} & \frac{p_x}{m} & \frac{p_y}{m} & \frac{p_z}{m} \\ \frac{p_x}{m} & 1 + \frac{p_x p_x}{m(E+m)} & \frac{p_x p_y}{m(E+m)} & \frac{p_x p_z}{m(E+m)} \\ \frac{p_y}{m} & \frac{p_y p_x}{m(E+m)} & 1 + \frac{p_y p_y}{m(E+m)} & \frac{p_y p_z}{m(E+m)} \\ \frac{p_z}{m} & \frac{p_z p_x}{m(E+m)} & \frac{p_z p_y}{m(E+m)} & 1 + \frac{p_z p_z}{m(E+m)} \end{pmatrix}$$

Possiamo quindi passare a definire la polarizzazione per un impulso spaziale  $\vec{p}$  arbitrario:

$$\epsilon^\mu(s, \vec{p}) = \left( \frac{p_s}{m}, \delta_{si} + \frac{p_s p_i}{m(E+m)} \right)$$

$\epsilon^\mu$  è un quadrivettore reale, ed ha alcune caratteristiche che emergono dalla sua definizione:

$$\epsilon^\mu(s, -\vec{p}) = \left( -\frac{p_s}{m}, \delta_{si} + \frac{p_s p_i}{m(E+m)} \right) = -\epsilon_\mu(s, \vec{p})$$

Un'altra cosa importante è che

$$\epsilon^\mu(s, \vec{p}) \epsilon_\mu^*(r, \vec{p}) = [\Lambda(\vec{p})\epsilon(s, \vec{0})]^\mu [\Lambda(\vec{p})\epsilon(r, \vec{0})]_\mu^* = \epsilon^\mu(s, \vec{0}) \epsilon_\mu(r, \vec{0}) = -\delta_{sr}$$

Vediamo adesso di capire cosa abbiamo costruito. Per gli operatori di creazione e distruzione abbiamo le solite regole di commutazione, con la differenza che adesso dovrà comparire la variabile di spin:

$$[A(r, \vec{p}), A^\dagger(s, \vec{q})] (2\pi)^3 2E_p \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) \delta_{rs}$$

$$[B(r, \vec{p}), B^\dagger(s, \vec{q})] (2\pi)^3 2E_p \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) \delta_{rs}$$

La prima cosa che ci serve adesso è capire la normalizzazione delle funzioni d'onda; vale la stessa definizione usata per il campo scalare:

$$\psi^\mu(s, \vec{p}; x) = \langle \Omega | W^\mu(x) A^\dagger(s, \vec{p}) | \Omega \rangle = \epsilon^\mu(s, \vec{p}) e^{-ipx}$$

Sempre in analogia con il campo scalare, chiediamoci qual'è la densità di particelle che questa funzione d'onda descrive; per questo, dobbiamo poter conoscere l'espressione della corrente di probabilità associata al campo. La lagrangiana è ancora invariante sotto trasformazioni di gauge di prima specie:

$$W \rightarrow e^{i\alpha} W$$

$$W^\dagger \rightarrow e^{-i\alpha} W^\dagger$$

dunque esisterà una corrente conservata:

$$J^\mu = i \left( -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu W_\nu)} W_\nu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu W_\nu^\dagger)} W_\nu^\dagger \right) = i(-F^{\mu\nu\dagger} W_\nu + F^{\mu\nu} W_\nu^\dagger) =$$

$$= i((\partial^\mu W^\nu - \partial^\nu W^\mu)W_\nu^\dagger - (\partial^\mu W^{\nu\dagger} - \partial^\nu W^{\mu\dagger})W_\nu) =$$

Se pensiamo a  $W$  e a  $W^\dagger$  come a funzioni soluzioni dell'equazione di moto per il campo, (e quindi  $W^\dagger \rightarrow W^*$ ) abbiamo:

$$\begin{aligned} &= i\{W_\nu^*(\partial^\mu W^\nu) - \partial^\nu(W^\mu W_\nu) + W^\mu(\partial^\nu W_\nu^*) - (\partial^\mu W^{\nu*})W_\nu + \partial^\nu(W^{\mu*}W_\nu)\} = \\ &= i\{W_\nu^*(\partial^\mu W^\nu) - (\partial^\mu W^\nu)W_\nu\} + i[\partial^\nu(W^{\mu*}W_\nu - W^\nu W_\nu^*)] \end{aligned}$$

Abbiamo quindi separato la corrente in due parti; sappiamo che la corrente è conservata, ma niente vieta che le due parti separatamente possano non essere conservate. Per la seconda parte non ci sono dubbi, poichè prendendone la quadridivergenza abbiamo di nuovo la saturazione di una derivata doppia con una parte antisimmetrica. Di conseguenza anche la prima sarà conservata.

Vediamo se possiamo scordarci del secondo pezzo, ovvero se per funzioni d'onda qualunque esso non contribuisce:

$$i \int d^3x \partial^0(W^{0*}W_0 - W^0W_0^*) - i\partial^i(W^{0*}W_i - W^0W_i^*) = 0$$

perchè la parte temporale si annulla identicamente e la parte spaziale è l'integrale di una divergenza che si annulla per i soliti motivi. Dunque possiamo prendere come corrente la seguente

$$J^\mu = -i\{W_\nu^*(\partial^\mu W^\nu) - (\partial^\mu W^{\nu*})W_\nu\}$$

Se calcoliamo la corrente per  $W^\nu = \psi^\nu = \epsilon^\nu(s, \vec{p})e^{-ipx}$

$$J^0 = -i\{\epsilon_\nu^*(s, \vec{p})e^{ipx}(-ip^0)\epsilon^\nu(s, \vec{p})e^{-ipx} - (ip^0)\epsilon^{\nu*}(s, \vec{p})e^{ipx}\epsilon_\nu(s, \vec{p})e^{-ipx}\} = -2p^0\epsilon_\nu^*(s, \vec{p})\epsilon^\nu(s, \vec{p}) = 2p^0$$

## Martedì 18 novembre

Vogliamo sapere come cambiano sotto trasformazioni di Lorentz gli operatori di creazione e distruzione

$$U(a, \Lambda)A(s, \vec{p})U^{-1}(a, \Lambda) = ?$$

La legge di trasformazione deve essere compatibile con la legge di trasformazione del campo che abbiamo definito poco fa:

$$U(a, \Lambda)W^\mu(x)U^{-1}(a, \Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu W^\nu(a + \Lambda x)$$

Nel caso del campo scalare avevamo semplicemente che

$$U(a, \Lambda)a(\vec{p})U^{-1}(a, \Lambda) = e^{-ia(\Lambda p)}a(\vec{\Lambda p})$$

ma stavolta c'è una complicazione in più dovuta allo spin. Vediamo prima di tutto come cambia la polarizzazione  $\epsilon^\mu$ ; in un sistema generico si ha che la polarizzazione si scrive in funzione della polarizzazione nel sistema di riposo in questo modo:

$$\epsilon^\mu(s, \vec{p}) = \Lambda(\vec{p})^\mu{}_\nu \epsilon^\nu(s, \vec{0})$$

ma  $\epsilon^\mu(s, \vec{0}) = (0, \delta_{is})$ . Cerchiamo quindi di capire come si trasforma la componente di spin di  $\epsilon^\mu$  sotto una generica trasformazione di Lorentz:

$$\Lambda\epsilon(s, \vec{p}) = ?$$

Potremmo pensare semplicemente che  $\Lambda\epsilon(s, \vec{p}) = \epsilon(s, \Lambda\vec{p})$  ma questo è falso, perchè in generale sotto trasformazioni di Lorentz qualunque le componenti di spin si devono rimescolare in modo appropriato, quindi in generale avremo:

$$\Lambda\epsilon(s, \vec{p}) = M_{rs}\epsilon(r, \Lambda\vec{p})$$

Per capire meglio il funzionamento, riesprimiamo tutto in termini delle polarizzazioni nel sistema del centro di massa:

$$\Lambda\Lambda(\vec{p})\epsilon(s, \vec{0}) = M_{rs}\Lambda(\Lambda\vec{p})\epsilon(r, 0)$$

**Osservazione:** l'indice  $r$  non ha niente a che vedere con gli indici di Lorentz di  $\epsilon$ , questo significa che  $M_{rs}$  commuta con tutti gli altri operatori presenti nella formula. Moltiplichiamo quindi a sinistra per  $\Lambda^{-1}(\Lambda\vec{p})$ :

$$\Lambda^{-1}(\Lambda\vec{p})\Lambda\Lambda(\vec{p})\epsilon(s, \vec{0}) = M_{rs}\epsilon(r, 0)$$

Questo ci fa capire se la nostra ipotesi ha soluzioni, dato che l'unica incognita adesso è  $M_{rs}$ . La matrice  $\Lambda^{-1}(\Lambda\vec{p})\Lambda\Lambda(\vec{p})$  viene detta rotazione di Wigner:

$$\Lambda^{-1}(\Lambda\vec{p})\Lambda\Lambda(\vec{p}) = R(\Lambda, \vec{p})$$

Vediamo che è una rotazione applicandola a  $\hat{p} = (m, \vec{0})$ :

$$\hat{p} \rightarrow \Lambda(\vec{p})\hat{p} = p \rightarrow \Lambda\Lambda(\vec{p})\hat{p} = \Lambda p \rightarrow \Lambda^{-1}(\Lambda\vec{p})\Lambda\Lambda(\vec{p})\hat{p} \equiv \hat{p}$$

dunque  $\hat{p}$  viene mandato in se stesso dalla rotazione di Wigner, il che implica che per come è fatto  $\hat{p}$ , la rotazione di Wigner è una rotazione pura. Possiamo quindi scrivere  $R(\Lambda, p)$  come:

$$R(\Lambda, p) = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0} \\ \vec{0} & R_{ij} \end{pmatrix}$$

La matrice  $R_{ij}$  è ortogonale. Cerchiamo di capire com'è legata a  $M_{rs}$ : supponiamo di applicare  $R$  a  $\epsilon(s, \vec{0})$

$$\begin{pmatrix} 1 & \vec{0} \\ \vec{0} & R_{ij} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_{js} \end{pmatrix}$$

Allora  $R_{ij}\delta_{js} = \begin{pmatrix} 0 \\ R_{is} \end{pmatrix}$  ma

$$\begin{pmatrix} 0 \\ R_{is} \end{pmatrix} = R_{is}\epsilon(i, \vec{0})$$

allora

$$R_{is}\epsilon(i, \vec{0}) = M_{rs}\epsilon(r, \vec{0})$$

$$\Rightarrow R \equiv M$$

$$\Rightarrow \Lambda\epsilon(s, \vec{p}) = M_{rs}\epsilon(r, \Lambda\vec{p})$$

Se moltiplichiamo per  $R_{st}^{-1}$ :

$$R_{st}^{-1}\Lambda\epsilon(s, \vec{p}) = R_{rs}R_{st}^{-1}\epsilon(r, \Lambda\vec{p}) = \epsilon(t, \Lambda\vec{p})$$

Ma  $R$  è ortogonale quindi  $R_{st}^{-1} = R_{ts}$ :

$$\begin{aligned} R_{ts}\Lambda\epsilon(s, \vec{p}) &= \epsilon(t, \vec{\Lambda p}) \\ \Rightarrow \epsilon(t, \vec{\Lambda p}) &= R_{ts}\Lambda\epsilon(s, \vec{p}) \end{aligned}$$

e abbiamo un legame tra la polarizzazione per impulso generico e quella per l'impulso iniziale.

La rotazione di Wigner descrive questo fatto:

1. Nel sistema di riferimento iniziale, la particella è ferma;
2. facciamo un boost  $\vec{\Lambda p}$  senza ruotare gli assi, la particella acquista un impulso  $\vec{p}$ ;
3. applichiamo una  $\Lambda$  che in generale può anche ruotare gli assi, la particella acquista un impulso  $\vec{\Lambda p}$  in un sistema ruotato;
4. se applichiamo  $\Lambda^{-1}(\vec{\Lambda p})$ , questa è un boost che riporta la particella nel sistema di riposo senza ruotare gli assi, quindi il sistema di riferimento iniziale e quello finale possono non coincidere.

A questo punto possiamo definire la regola di trasformazione degli operatori di creazione e distruzione:

$$\begin{aligned} U(a, \Lambda)A(s, \vec{p})U^{-1}(a, \Lambda) &= e^{-ia(\Lambda p)} R_{rs}A(r, \vec{\Lambda p}) \\ U(a, \Lambda)A^\dagger(s, \vec{p})U^{-1}(a, \Lambda) &= e^{ia(\Lambda p)} R_{rs}A^\dagger(r, \vec{\Lambda p}) \\ U(a, \Lambda)B(s, \vec{p})U^{-1}(a, \Lambda) &= e^{ia(\Lambda p)} R_{rs}B(r, \vec{\Lambda p}) \\ U(a, \Lambda)B^\dagger(s, \vec{p})U^{-1}(a, \Lambda) &= e^{-ia(\Lambda p)} R_{rs}B^\dagger(r, \vec{\Lambda p}) \end{aligned}$$

$R_{rs}$  non cambia perchè è un numero reale. Verifichiamo adesso che da queste definizioni segue automaticamente la regola di trasformazione del campo:

$$U(a, \Lambda)W^\mu(x)U^{-1}(a, \Lambda) = \sum_s \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \left\{ e^{-ia(\Lambda p)} \sum_r R_{rs}A(r, \vec{\Lambda p})\epsilon^\mu(s, \vec{p})e^{-ipx} + \dots \right\}$$

Effettuiamo un cambio di variabile:

$$\begin{aligned} \Lambda p &= q \\ \Rightarrow \sum_{r,s} \int \frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3} \left\{ e^{-iaq} R_{rs}A(r, \vec{q})\epsilon^\mu(s, \Lambda^{-1}q)e^{-i(\Lambda^{-1}q)x} + \dots \right\} &= \\ = \sum_{rs} \int \frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3} \left\{ e^{-iq(a+\Lambda x)} A(r, \vec{q}) R_{rs}\epsilon^\mu(s, \Lambda^{-1}q) + \dots \right\} \end{aligned}$$

ma sappiamo che

$$R_{rs}\epsilon^\mu(s, \Lambda^{-1}q) = R_{rs}\hat{R}_{sj}\Lambda^{-1\mu}{}_\nu\epsilon^\nu(j, \vec{q})$$

Chi è  $\hat{R}$ ?

$$\hat{R}(\Lambda^{-1}, q) = \Lambda^{-1}(\Lambda^{-1}q)\Lambda^{-1}\Lambda(\vec{q}) = \Lambda^{-1}(\vec{p})\Lambda^{-1}\Lambda(\Lambda p) = [\Lambda^{-1}(\vec{\Lambda p})\Lambda(\vec{p})]^{-1} \equiv (R(\Lambda, p))^{-1}$$

$$\Rightarrow R_{rs}\hat{R}_{sj} = \delta_{rs}$$

$$\Rightarrow R_{rs}\epsilon(s, \Lambda^{-1}q) = \Lambda^{-1}\epsilon(r, \vec{q})$$

$$\Rightarrow U(a, \Lambda)W^\mu(x)U^{-1}(a, \Lambda) = \Lambda^{-1\mu}{}_\nu \sum_r \int \frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3} \left\{ e^{-iq(a+\Lambda x)} A(r, \vec{q})\epsilon^\nu(r, q) + \dots \right\} = \Lambda^\mu{}_\nu W^\nu(a + \Lambda x)$$

Vediamo adesso che succede a  $A$  e  $B^\dagger$  sotto le simmetrie discrete:

## Coniugazione di carica - C

Ci aspettiamo che sotto coniugazione di carica il campo si trasformi nel suo coniugato, cioè

$$CW^\mu(x)C^{-1} = e^{-i\eta_c}W^{\mu\dagger}(x)$$

Osserviamo che la coniugazione di carica non ha niente a che fare con la variabile spaziotemporale e con gli indici di Lorentz. In base alla nostra richiesta definiamo l'azione di  $C$  su  $A$  e  $B^\dagger$  come segue:

$$CAC^{-1} = e^{-i\eta_c}B$$

$$CB^\dagger C^{-1} = e^{-i\eta_c}A^\dagger$$

## Parità - P

Vogliamo che succeda una cosa di questo genere:

$$PW^\mu(x)P^{-1} = e^{-i\eta_p}W_\mu(Px)$$

Potrebbe sembrare ragionevole definire

$$PA(s, \vec{p})P^{-1} = e^{-i\eta_p}A(s, -\vec{p})$$

ma manca roba; infatti nel caso del campo vettoriale  $A(s, \vec{p})$  non è scollegato del tutto da  $\epsilon^\mu(s, \vec{p})$ , e dobbiamo introdurre un segno (-):

$$PA(s, \vec{p})P^{-1} = -e^{-i\eta_p}A(s, -\vec{p})$$

Infatti se andiamo a vedere come è fatto del vettore di polarizzazione:

$$\epsilon^\mu(s, \vec{p}) = \left(\frac{p_s}{m}, \delta_{is} + \frac{p_s p_i}{m(m+E)}\right)$$

vediamo che se mandiamo  $\vec{p}$  in  $-\vec{p}$ , si ha

$$\epsilon^\mu(s, -\vec{p}) = -\epsilon_\mu(s, \vec{p})$$

Applicando la parità nel solito modo al campo si ottiene quindi la formula cercata.

## Time reversal - T

Per la time reversal richiediamo ancora

$$TW^\mu(x)T^{-1} = e^{-i\eta_T}W_\mu(Tx)$$

Sugli operatori di creazione e distruzione questo si traduce in

$$TA(s, \vec{p})T^{-1} = -e^{-i\eta_T}A(s, \vec{p})$$

dove osserviamo che la componente di spin è rimasta la stessa, mentre sappiamo che lo spin cambia segno per inversione temporale. Questa apparente contraddizione si spiega dicendo che in realtà abbiamo usato le

componenti cartesiane dello spin, ovvero  $s = 1, 2, 3$ , che corrispondono alla polarizzazione lineare, che a sua volta è legata alle coordinate spaziali cartesiane, non toccate dalla time reversal (??).

Per il campo massivo abbiamo definito anche una corrente  $J^\mu$ :

$$J^\mu(x) = -i[(\partial^\mu W^\nu)W_\nu^\dagger - (\partial^\mu W^{\nu\dagger})W_\nu]$$

applicando  $C, P, T$  succede quello che deve succedere:

$$C J^\mu C^{-1} = -J^\mu$$

$$P J^\mu(x) P^{-1} = J_\mu(Px)$$

$$T J^\mu(x) T^{-1} = J_\mu(Tx)$$

## Mercoledì 19 novembre

### Campo elettromagnetico

Si potrebbe pensare che il campo elettromagnetico si ottenga come limite di massa nulla del campo vettoriale massivo, tuttavia nel caso elettromagnetico abbiamo un analogo classico che ci fornisce le equazioni del moto. La lagrangiana elettromagnetica infatti è simile a quella per il campo massivo ma con alcune differenze:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

La cosa più rilevante è che è scomparso il tensore  $F^{\mu\nu\dagger}$ , e la ragione è che il quadripotenziale elettromagnetico  $A^\mu$  è autoaggiunto:

$$A^\mu = A^{\mu\dagger}$$

e anche questo deriva da considerazioni classiche note, infatti  $F^{\mu\nu}$  è il tensore del campo elettromagnetico, che è un oggetto reale. Un'altra differenza sta nei fattori  $\frac{1}{2}$  e  $\frac{1}{4}$ ; da un certo punto di vista la lagrangiana deve dare le giuste equazioni del moto, ma poichè queste derivano dalle equazioni di Eulero-Lagrange, che sono omogenee nella lagrangiana, questa può essere in linea di principio moltiplicata per una qualunque costante, e le equazioni di moto resterebbero invariate. Tuttavia, in questo caso specifico, la lagrangiana non solo determina le equazioni del moto, ma corrisponde anche alla differenza tra energia cinetica e potenziale di un sistema classico, dunque il fattore  $\frac{1}{4}$  la normalizza in una ben precisa maniera. Se volessimo recuperare il significato di differenza di energia, data la forma di  $F^{\mu\nu}$ , dovremmo cambiare la costante  $\frac{1}{4}$  in  $-\frac{1}{16\pi}$ , in questo modo la densità di energia fornita dal tensore energia-impulso è proprio

$$\frac{\vec{E}^2 + \vec{B}^2}{8\pi}$$

Il segno (-) è dovuto al fatto che  $F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = -2(\vec{E}^2 - \vec{B}^2)$  da cui scaturirebbe una densità di energia negativa. Comunque, nel nostro caso non ci importa molto la costante perchè siamo interessati solo alle equazioni del moto, quindi ci teniamo il  $\frac{1}{4}$ .

Le equazioni del moto per il campo elettromagnetico si scrivono come

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$$

$$\Rightarrow \square A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) = 0$$

In assenza di cariche e sorgenti,  $A^\mu$  soddisfa questa equazione, che è molto simile a quella per il campo massivo  $W^\mu$ . Stavolta però non possiamo più dire che  $\partial_\mu A^\mu \equiv 0$  perchè l'equazione  $\partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} = 0$  è in realtà una identità.

Sappiamo però che la lagrangiana è invariante sotto la trasformazione

$$A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \chi$$

detta trasformazione di gauge:  $A^\mu$  è determinato a meno del gradiente di una funzione qualsiasi. Rispetto al campo massivo quindi abbiamo qualcosa in meno per quanto riguarda le equazioni di moto, ma abbiamo anche qualcosa in più grazie all'arbitrarietà di gauge. Vedremo però rapidamente che quello che abbiamo guadagnato supera quello che abbiamo perso, infatti l'arbitrarietà di gauge consente di scegliere un  $A^\mu$  che soddisfa la cosiddetta gauge di Lorentz:

$$A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \chi$$

$$\partial_\mu A'^\mu = \partial_\mu A^\mu + \square \chi$$

Allora affinché  $\partial_\mu A'^\mu = 0$  è sufficiente che scegliamo una funzione  $\chi$  tale che  $\square \chi = -\partial_\mu A^\mu$ . In tal caso, si ha che il nuovo campo  $A^\mu$  soddisfa all'equazione di moto

$$\square A^\mu = 0$$

e abbiamo recuperato anche la condizione di quadridivergenza nulla, che era automatica nel caso massivo.

Tuttavia, la condizione  $\square \chi = -\partial_\mu A^\mu$  non individua completamente  $\chi$  nel senso che la soluzione è determinata soltanto a meno di una soluzione dell'equazione omogenea  $\square \chi = 0$ . Per questo, una volta entrati in gauge di Lorentz, abbiamo ancora la possibilità di effettuare una nuova trasformazione di gauge con una funzione  $\Lambda$  a patto che questa abbia d'alambertiano nullo:

$$\square \Lambda = 0$$

Per il campo massivo, la condizione di quadridivergenza nulla eliminava un grado di libertà, cioè passavamo da una condizione con uno spin 0 e uno spin, ad una nuova situazione con soltanto uno spin 1. Adesso si ripresenta una situazione del genere: per la condizione di Lorentz scompare uno dei 4 gradi di libertà di  $A^\mu$  e si va a 3. Tuttavia sappiamo che il fotone ha soltanto due gradi di libertà, quindi c'è ancora un grado di libertà di troppo.

A differenza del campo massivo, che descrive particelle con massa, non si può andare nel sistema di riposo. Avevamo detto che le particelle con massa nulla possono essere caratterizzate non da stati di spin ma da stati di elicità; nel caso del campo elettromagnetico e gravitazionale abbiamo due stati di elicità (essendo elettromagnetismo e gravitazione delle teorie invarianti per parità), anche se non si può passare da uno all'altro mediante una trasformazione di Lorentz.

Con queste premesse, stavolta non è corretto dire che la condizione  $\partial_\mu A^\mu$  elimina uno spin 0 e lascia uno spin 1, proprio perchè non è corretto parlare di spin. In ogni caso, il terzo grado di libertà viene eliminato in questo modo: supponiamo di aver scritto per il quadripotenziale una soluzione di tipo onda piana:

$$A^\mu = N \epsilon^\mu e^{-ipx}$$



L'unica cosa che sappiamo è che  $p^\mu \epsilon_\mu = 0$ , e a questo punto sfruttiamo l'invarianza di gauge per funzioni con  $\square \chi = 0$ :

$$A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \chi$$

dove

$$\begin{aligned} \chi &= N e^{-ipx} \\ \Rightarrow \partial^\mu \chi &= -i N p^\mu e^{-ipx} \Rightarrow A^\mu = N e^{-ipx} (\epsilon^\mu + p^\mu) \end{aligned}$$

Più in generale, possiamo introdurre un parametro  $a$  in  $\chi$ , per cui

$$A^\mu = N e^{-ipx} (\epsilon^\mu + a p^\mu)$$

Ci accorgiamo subito che questo cambio di gauge non viola la condizione di Lorentz, in quanto  $p^\mu p_\mu = m^2 = 0$ .

La polarizzazione  $\epsilon^\mu$  avrà un forma del tipo

$$\epsilon^\mu = (\epsilon^0, \vec{\epsilon})$$

mentre  $p^\mu = (|\vec{p}|, \vec{p})$  avrà l'importante caratteristica che  $|\vec{p}|$  non può mai annullarsi, altrimenti saremmo in una condizione di energia e impulso nulli, ovvero una soluzione banale dell'equazione delle onde  $\square A^\mu = 0$ , che non ci interessa. Allora possiamo fare in modo che

$$\begin{aligned} a|\vec{p}| &= -\epsilon^0 \Rightarrow a = -\frac{\epsilon^0}{|\vec{p}|} \\ \Rightarrow \epsilon'^\mu &= \epsilon^\mu + a p^\mu = (0, \vec{\epsilon}) \end{aligned}$$

Dunque, sfruttando l'arbitrarietà di gauge residua possiamo fare sempre in modo che  $\epsilon^\mu$  non abbia la componente temporale. A questo punto la condizione di Lorentz si traduce su  $\vec{\epsilon}$  in:

$$\vec{\epsilon} \cdot \vec{p} = 0$$

ovvero la polarizzazione deve essere trasversa rispetto alla direzione di propagazione dell'onda. Questa gauge si dice per questo gauge trasversa o gauge di Coulomb, ed è comoda perchè mostra chiaramente che i gradi di libertà effettivi del capo elettromagnetico sono soltanto due, ma ha il difetto di non essere covariante a vista: infatti,  $\epsilon^\mu$  non ha la parte temporale, ma questa verrà in generale ricreata se si cambia sistema di riferimento con una trasformazione di Lorentz. Per questo, se vogliamo rimanere nella gauge di Coulomb anche dopo aver cambiato sistema di riferimento, dobbiamo fare una ulteriore trasformazione di gauge per eliminare la componente temporale del nuovo  $\epsilon^\mu$ .

La condizione  $\vec{\epsilon} \cdot \vec{p} = 0$  ci dice che  $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ . Se usiamo questa relazione nell'equazione di moto, risulta che in presenza di sorgenti la parte temporale di  $A^\mu$ ,  $A^0 \equiv V$  soddisfa all'equazione

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Questo corrisponde formalmente ad avere un potenziale determinato dalla densità in tutto lo spazio con velocità di propagazione infinita, senza ritardo, a differenza di quanto accade per i potenziali ritardati e

anticipati della parte vettoriale di  $A^\mu$ . Questo potrebbe portare a dei dubbi riguardo alla compatibilità con la relatività ristretta, ma in realtà l'ambiguità viene superata riconoscendo che la quantità osservabile sono i campi  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  (e quindi il tensore  $F^{\mu\nu}$ ), che sono invarianti sotto tutte queste scelte di gauge. Quindi, anche se  $V$  soddisfa all'equazione dell'elettrostatica, questo non influenza la propagazione dell'onda elettromagnetica.

Descriviamo adesso l'onda elettromagnetica, in caso di assenza di sorgenti, e in termini unicamente del potenziale vettore. Supponiamo l'impulso diretto lungo l'asse  $\hat{z}$ : le polarizzazioni che ci servono possono essere soltanto nel piano  $xy$ , e sceglieremo

$$\vec{\epsilon}_z(1) = (1, 0, 0)$$

$$\vec{\epsilon}_z(2) = (0, 1, 0)$$

Così abbiamo descritto soltanto il caso lungo  $z$ , e dobbiamo essere in grado di definire le polarizzazioni in tutte le direzioni. Se  $\epsilon^\mu = (0, \vec{\epsilon})$ , sceglieremo le due polarizzazioni trasverse in modo che formino con la direzione dell'impulso una terna destrorsa. Per definire le polarizzazioni nel caso in cui l'onda si propaghi lungo l'asse  $z$  negativo, dobbiamo cambiare le polarizzazioni: per essere sicuri di mantenere il riferimento destrorso, manderemo  $z$  in  $-z$  con una rotazione, ad esempio ruoteremo il sistema di  $180^\circ$  attorno all'asse  $y$ :

$$\vec{\epsilon}_{-z}(1) = (-1, 0, 0) = -\vec{\epsilon}_z(1)$$

$$\vec{\epsilon}_{-z}(2) = (0, 1, 0) = \vec{\epsilon}_z(2)$$

Abbiamo finora utilizzato polarizzazioni lineari, ma i fotoni per loro natura sono ben descritti da polarizzazioni circolari, avremo dunque:

$$\vec{\epsilon}_z(+) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\epsilon}_z(1) + i\vec{\epsilon}_z(2)) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1, i, 0)$$

$$\vec{\epsilon}_z(-) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\epsilon}_z(1) - i\vec{\epsilon}_z(2)) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -i, 0)$$

$$\vec{\epsilon}_z^*(\pm) = -\vec{\epsilon}_z(\mp)$$

$$\vec{\epsilon}_{-z}(-) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(-1, i, 0) = \vec{\epsilon}_z(-)$$

$$\vec{\epsilon}_{-z}(+) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, -i, 0) = \vec{\epsilon}_z(+)$$

$$\Rightarrow \vec{\epsilon}_{-z}(\pm) = \vec{\epsilon}_z(\mp)$$

dunque il passaggio da  $z$  a  $-z$  scambia tra loro gli stati di polarizzazione.

Abbiamo visto il caso in cui l'onda si propaga lungo  $z$ , ovvero lungo la direzione  $\hat{z} = (0, 0, 1)$ , ma se in generale abbiamo un vettore d'onda della forma

$$\hat{k} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$$

dobbiamo trovare una rotazione che ruoti il vettore  $\hat{z}$  fino a farlo coincidere con  $\vec{k}$ , e applicare la stessa rotazione anche alle due polarizzazioni. Una generica rotazione si scrive come

$$e^{-i\vec{\alpha} \cdot \vec{L}}$$

dove le componenti di  $\vec{L}$  sono i generatori delle rotazioni:

$$(L_i)_{jk} = -i\epsilon_{ijk}$$

$\vec{\alpha}$  invece definisce l'angolo di rotazione. Se  $\theta$  è lo zenit e  $\phi$  è l'azimut, una generica rotazione che faccia coincidere l'asse  $z$  del nuovo sistema di riferimento con un vettore  $\hat{k}$  assegnato, può essere scritta come

$$R = e^{-i\phi L_3} e^{-i\theta L_2} e^{i\phi L_3}$$

ovvero prima ruotiamo il piano  $xy$  di un angolo  $\phi$  attorno a  $z$ , fino a che l'asse  $y$  non risulta perpendicolare alla direzione  $\hat{k}$ , dopodichè effettuiamo una rotazione di  $\theta$  attorno all'asse  $y$  per far coincidere  $z$  con  $\hat{k}$ . Infine effettuiamo una nuova rotazione di  $-\phi$  attorno a  $z$ .

In generale  $Re^{-i\vec{\alpha}\cdot\vec{L}}R^{-1} = e^{-i\vec{\alpha}\cdot R\vec{L}R^{-1}}$ , ma essendo  $\vec{L}$  un vettore le sue componenti trasformano sotto rotazioni in questo modo:

$$R^T L_i R = R_{ij} L_j$$

$$\Rightarrow RL_i R^T = R_{ij}^T L_j \equiv R_{ji} L_j$$

Ma nel prodotto scalare  $\vec{\alpha} \cdot (R^T \vec{L}) = \alpha_i R_{ji} L_j$ , al posto di considerare  $L$  ruotato da  $R^T$ , possiamo pensare che  $R$  agisca su  $\vec{\alpha}$ :

$$e^{-i\vec{\alpha}\cdot(R^T \vec{L})} = e^{-i\alpha_i R_{ji} L_j} = e^{-i(R\vec{\alpha})\cdot\vec{L}}$$

Avremo per  $e^{i\phi L_3}$ :

$$e^{i\phi L_3} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mentre per

$$e^{-i\theta L_2} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}$$

## Lunedì 24 novembre

Abbiamo definito la polarizzazione in una direzione qualsiasi come

$$\vec{\epsilon}_{\vec{k}}(s) = R_{\vec{k}} \vec{\epsilon}_z(s)$$

dove  $s = \pm$  e se  $\vec{k} = k(\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$

$$R_{\vec{k}} = e^{-i\phi L_3} e^{-i\theta L_2} e^{i\phi L_3}$$

Questo è sempre valido, a parte quando  $\theta = \pi$ , perchè in tal caso  $\phi$  non è definito. In ogni caso,  $\theta = \pi$  corrisponde a muoversi lungo l'asse  $-z$ , dunque poichè abbiamo già definito le polarizzazioni in tale direzione, vediamo che tutto è coerente con lo scegliere corrispondentemente  $\theta = 0$ .

Ricordiamo la definizione di  $\epsilon^\mu$ :

$$\epsilon^\mu(\vec{k}, s) = (0, \vec{\epsilon}_k(s))$$

Se prendiamo il complesso coniugato:

$$\begin{aligned}\vec{\epsilon}_k(s) &= R_k \vec{\epsilon}_z(s) \\ \Rightarrow \vec{\epsilon}_k^*(s) &= R_k \vec{\epsilon}_z^*(s)\end{aligned}$$

ma

$$\begin{aligned}\vec{\epsilon}_z^*(\pm) &= -\vec{\epsilon}_z(\mp) \\ \Rightarrow \vec{\epsilon}_k^*(s) &= -\vec{\epsilon}_k(-s) \\ \Rightarrow \epsilon^\mu(\vec{k}, \pm)^* &= (0, -\vec{\epsilon}_k(\mp)) = -\epsilon^\mu(\vec{k}, \mp) = \epsilon_\mu(\vec{k}, \mp)\end{aligned}$$

Analogamente, se mandiamo  $\vec{k}$  in  $-\vec{k}$ :

$$\epsilon^\mu(-\vec{k}, \pm) = (0, \vec{\epsilon}_{-\vec{k}}(\pm)) = (0, \vec{\epsilon}_k(\mp)) = -\epsilon_\mu(\vec{k}, \mp)$$

Possiamo quindi scrivere l'espressione del campo del fotone:

$$A^\mu(x) = \sum_s \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} \{a(\vec{p}, s) \epsilon^\mu(\vec{p}, s) e^{-ipx} + h.c.\}$$

dove  $E_p \equiv |\vec{p}|$ . Questa espressione differisce da quella del campo massivo perchè stavolta il campo elettromagnetico è autoaggiunto. In fisica classica infatti,  $A^\mu$  definisce i campi  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  che sono reali. Manca quindi in questo caso la distinzione tra particella e antiparticella, il che equivale a dire che il fotone è antiparticella di se stesso.

La questione di particelle e antiparticelle è legata al discorso della coniugazione di carica:  $C$  è il tipico operatore che scambia gli operatori di creazione e distruzione di particelle e antiparticelle, e possiamo domandarci che azione abbia stavolta sul campo  $A^\mu$ :

$$CA^\mu(X)C^{-1} = ?$$

La coniugazione di carica deve essere una simmetria esatta per l'interazione elettromagnetica, dunque il termine di interazione della lagrangiana deve risultare invariante sotto  $C$ :

$$CJ^\mu(x)A_\mu(x)C^{-1} = J^\mu(x)A_\mu(x)$$

Sappiamo quello che succede a  $J^\mu$  sotto coniugazione di carica:

$$CJ^\mu(x)C^{-1} = -J^\mu(x)$$

dunque affinché il termine di interazione sia invariante è necessario che anche  $A^\mu$  cambi di segno sotto coniugazione di carica:

$$CA^\mu(x)C^{-1} = -A^\mu(x)$$

ovvero  $A^\mu$  deve essere dispari sotto coniugazione di carica.

Sempre parlando di carica, questa nasce da una invarianza della lagrangiana sotto trasformazioni di gauge di prima specie. La lagrangiana elettromagnetica tuttavia non è invariante sotto tale trasformazione, e questo è anche conseguenza del fatto che  $A^\mu$  è reale e deve rimanerlo, quindi non abbiamo la libertà di moltiplicarlo per una fase arbitraria.

Vediamo adesso come si traduce la disparità di  $A^\mu$  sugli operatori di creazione e distruzione:

$$Ca(\vec{p}, s)C^{-1} = -a(\vec{p}, s)$$

$$Ca^\dagger(\vec{p}, s)C^{-1} = -a^\dagger(\vec{p}, s)$$

La seconda relazione ha un'altra conseguenza: se consideriamo uno stato a un fotone

$$|\vec{p}, s\rangle = a^\dagger(\vec{p}, s)|\Omega\rangle$$

e ci applichiamo l'operatore di coniugazione

$$C|\vec{p}, s\rangle = Ca^\dagger(\vec{p}, s)|\Omega\rangle = Ca^\dagger(\vec{p}, s)C^{-1}C|\Omega\rangle = Ca^\dagger(\vec{p}, s)C^{-1}|\Omega\rangle = -|\vec{p}, s\rangle$$

dunque lo stato di fotone è autostato della coniugazione di carica con autovalore -1. Questo fatto ha come conseguenza importante il cosiddetto teorema di Furry:  $\langle \gamma_1, \dots, \gamma_n | A^\mu | \tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_m \rangle$  può essere soltanto se  $n$  e  $m$  hanno parità opposta. In particolare il campo elettromagnetico ha valore di aspettazione nullo sul vuoto.

Per investigare le proprietà di  $A^\mu$  sotto parità, usiamo lo stesso criterio; vogliamo che il campo si comporti nel seguente modo

$$PA^\mu(x)P^{-1} = A_\mu(Px)$$

essendo un quadrivettore come il campo massivo. Per questo, definiamo l'azione sugli operatori di creazione e distruzione come

$$Pa(\vec{p}, \pm)P^{-1} = -a(-\vec{p}, \mp)$$

Osserviamo che cambia anche l'elicità, non essendo il momento angolare bensì la sua proiezione nella direzione dell'impulso. Infatti

$$PA^\mu P^{-1} = \sum_\lambda \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} \{ -a(-\vec{p}, -\lambda) \epsilon^\mu(\vec{p}, \lambda) e^{-ipx} + h.c. \}$$

Cambiamo variabile  $\vec{q} \rightarrow -\vec{p}$ , da cui  $px \rightarrow q(Px)$ ; inoltre ricordiamo che  $\epsilon^\mu(\vec{p}, \lambda) = -\epsilon_\mu(-\vec{p}, -\lambda)$

$$\Rightarrow \sum_\lambda \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2E_q} \{ -a(\vec{q}, -\lambda) \epsilon_\mu(\vec{q}, -\lambda) e^{-iq \cdot (Px)} + h.c. \} = A_\mu(Px)$$

Sullo stato di singolo fotone si ha stavolta

$$P|\vec{p}, s\rangle = -|-\vec{p}, -s\rangle$$

Per quanto riguarda l'inversione temporale, ci aspettiamo sempre che

$$TA^\mu(x)T^{-1} = A_\mu(Tx)$$

Allora definiamo

$$T a(\vec{p}, \pm) T^{-1} = a(-\vec{p}, \pm)$$

infatti

$$T A^\mu T^{-1} = \sum_\lambda \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E_p} \{ a(-\vec{p}, \lambda) \epsilon^{\mu*}(\vec{p}, \lambda) e^{ipx} + h.c. \}$$

Ancora  $\vec{q} = -\vec{p}$  e  $px = -q(Tx)$

$$\Rightarrow \sum_\lambda \in \frac{d^3 q}{(2\pi)^3 2E_q} \{ a(\vec{q}, \lambda) \epsilon_\mu(-\vec{q}, -\lambda) e^{-iq \cdot (Tx)} + h.c. \} = \sum_\lambda \in \frac{d^3 q}{(2\pi)^3 2E_q} \{ a(\vec{q}, \lambda) \epsilon_\mu(\vec{q}, \lambda) e^{-iq \cdot (Tx)} + h.c. \} = A_\mu(Tx)$$

Infine, applichiamo  $T^2$  a  $a(\vec{p}, \pm)$ :

$$T^2 a(\vec{p}, \pm) (T^{-1})^2 = T a(-\vec{p}, \pm) T^{-1} = a(\vec{p}, \pm)$$

da cui  $T^2$  ha autovalore +1 su stati di fotone, come ci aspettavamo dal fatto che il fotone è un bosone.

**Applicazione:** Decadimento del  $\pi^0$ . Il  $\pi^0$  ha un canale di decadimento privilegiato

$$\pi^0 \rightarrow 2\gamma$$

Esistono anche due canali di decadimento secondari, con BR  $\frac{1}{100}$  e  $\frac{1}{10000}$ :

$$\pi^0 \rightarrow \gamma + e^+ e^-$$

$$\pi^0 \rightarrow 2e^+ e^-$$

Cominciamo a considerare la coniugazione di carica: risulta che

$$C|\pi^0\rangle = +|\pi^0\rangle$$

ovvero lo stato di  $\pi^0$  è autovettore della coniugazione di carica con autovalore 1. Questo perchè il decadimento è a due fotoni, e avviene per via elettromagnetica quindi conserva la coniugazione di carica; allora l'autovalore dello stato iniziale deve essere lo stesso dello stato finale: poichè lo stato iniziale è a due fotoni, ha autovalore +1.

Riguardo alla parità, oggi sappiamo che il  $\pi^0$  è una particella pseudoscalare, ovvero ha parità intrinseca -1. Questo fatto si ottiene sperimentalmente, andando a studiare i due fotoni di decadimento. Il pione neutro fa parte di un tripletto di isospin ( $\tau = 1$ ), costituito da  $\pi^0, \pi^\pm$  che sono autovettori di  $\tau$  con  $\tau_3 = 0, \pm 1$  rispettivamente. L'isospin è una simmetria che non ha nulla a che vedere con la parità, dunque ci possiamo aspettare che la parità intrinseca determinata per un membro qualunque del tripletto sia la stessa anche per tutti gli altri. Un discorso analogo si può fare per lo spin.

Per quanto riguarda lo spin dei pioni, questo è stato determinato studiando il processo

$$\pi^+ + d \rightarrow p + p$$

Dal confronto (ovvero dallo studio delle sezioni d'urto) tra questa reazione e quella opposta si è riusciti, noti gli spin del deutone e del protone, a determinare lo spin di  $\pi^+$ , trovando 0.

Viceversa, per la parità si è studiata una reazione simile:

$$\pi + d \rightarrow n + n$$

L'interazione è di tipo forte, quindi siamo sicuri che la parità viene conservata dallo stato iniziale e da quello finale. Rallentiamo dei  $\pi^-$  in atmosfera di deuterio: il  $\pi^-$  (massa  $280m_e$ ) va a sostituire nel deuterio l'elettrone, poichè lo stato legato  $\pi^-d$  ha energia più bassa del sistema  $e^-d$ . Il  $\pi^-$  quindi viene catturato elettromagneticamente quindi si ha un elettrone sostanzialmente libero. Il  $\pi^-$  fa una cascata elettromagnetica fino ad arrivare nel fondamentale, che è uno stato di onda  $s$ : a questo punto c'è una forte sovrapposizione tra le funzioni d'onda del pione e del deutone, e siccome l'interazione forte è a corto range può avvenire la reazione

$$\pi + d \rightarrow n + n$$

A questo punto usiamo tutte le leggi di conservazione che abbiamo. Cerchiamo prima di tutto la parità del sistema  $\pi^-d$ : essa sarà il prodotto di

$$(-1)^L$$

dovuto alla parte orbitale, dove  $L$  è il momento angolare orbitale.

$$P(\pi^-)$$

ovvero la parità intrinseca del pione, che vogliamo determinare e indicheremo con  $x$

$$P(d)$$

ovvero la parità del deutone, che avendo  $J^P = 1^+$  sarà quindi  $+1$ . La ragione di questo  $+1$  è che il deutone è uno stato legato di protone e neutrone, quasi tutto in onda  $s$  ma con un  $3-4\%$  di contaminazione di onda  $d$ , dunque il contributo orbitale è  $+1$ . Resta dunque la parità intrinseca di protone e neutrone, ma essendo due particelle fermioni, per convenzione le loro parità intrinseche sono fissate a  $+1$ , dunque complessivamente  $P(d) = +1$ .

Dunque,  $P(\pi^-d) = (-1)^L \cdot x \cdot (-1) = x$ . Per i due neutroni, questi sono non relativistici, e si può pensare di trattarli mediante l'equazione di Schroedinger e quella di Pauli. Per quanto riguarda la parte di momento angolare e di spin, il sistema dei due neutroni deve avere  $J = 1$ , perchè il deutone ha  $J = 1$  mentre il  $\pi^-$  ha spin  $0$  in virtù del fatto che  $\pi^+$  ha spin  $0$  (cosa da dimostrare, ma ci si crede). Siccome la cattura è in onda  $s$ , c'è soltanto il  $J$  del deutone. Allora  $J = 1$  per il sistema  $nn$  si può ottenere con  $S = 0$  e  $L = 1$ , oppure con  $S = 1$ , e  $L = 0, 1, 2$ . Tuttavia ci ricordiamo che la funzione d'onda dei due neutroni, essendo particelle fermioniche identiche, deve essere dispari per scambio; tale funzione dipenderà dalla variabile relativa e dalla variabile di spin, dunque se lo stato ha momento angolare  $L$ , si ha che la parità complessiva

$$(-1)^L (-1)^{s+1}$$

deve fare  $-1$ , il che equivale a dire che  $L + S$  deve essere pari. Resta quindi un'unica possibilità, che è  $L = 1$  e  $S = 1$ . Lo stato finale ha parità  $-1$ , dunque anche quello iniziale, e  $x = P(\pi^-) = -1$ .

Il  $\pi^0$  decade in due fotoni, e si può scoprire anche la sua parità da quella dei due fotoni, in questo modo: ci mettiamo nel sistema di riferimento del pione in quiete, e le funzioni d'onda dei fotoni saranno della forma

$$|k, +\rangle | -k, +\rangle$$

Il motivo di questo è che i due fotoni viaggiano in direzioni opposte, ma avendo il pione spin 0, le due polarizzazioni devono essere concordi affinché lo spin totale sia nullo. Analogamente avremmo potuto scrivere  $|k, -\rangle| -k, -\rangle$ .

Tuttavia lo stato di 2 fotoni è bosonico, quindi pari per scambio, per questo dobbiamo simmetrizzarlo:

$$|A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|k, +\rangle| -k, +\rangle + | -k, +\rangle|k, +\rangle)$$

$$|B\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|k, -\rangle| -k, -\rangle + | -k, -\rangle|k, -\rangle)$$

Il decadimento del pione è elettromagnetico, e sappiamo che per questo conserva la parità, dunque lo stato iniziale e quello finale avranno la stessa parità. Tuttavia gli stati  $|A\rangle$  e  $|B\rangle$  non hanno parità definita, in quanto

$$P|p, \pm\rangle = -| -p, \mp\rangle$$

$$\Rightarrow P|A\rangle = |B\rangle$$

$$P|B\rangle = |A\rangle$$

Prendiamo allora una combinazione di questi due stati:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|A\rangle - |B\rangle)$$

e si verifica facilmente che è dispari per parità. Allora nasce uno stato di fotone di questo tipo:

$$|2\gamma \text{ dal } \pi^0\rangle = \frac{1}{2} \left\{ \underbrace{|k, +\rangle| -k, +\rangle}_{(1)} + \underbrace{| -k, +\rangle|k, +\rangle}_{(2)} - \underbrace{|k, -\rangle| -k, -\rangle}_{(3)} - \underbrace{| -k, -\rangle|k, -\rangle}_{(4)} \right\}$$

Mettiamoci allora in direzione  $k$  e osserviamo l'elicità del fotone: supponiamo di averla misurata e di aver trovato  $\lambda = +1$ ; allora soltanto i termini (1) e (2) daranno un contributo, e ci dicono soltanto che il fotone nell'altra direzione dovrà avere polarizzazione  $+1$  e viaggiare in direzione  $-k$ , ma questo lo sapevamo già.

Per osservare la parità quindi non ci occuperemo delle polarizzazioni circolari, bensì di quelle lineari: supponiamo di voler osservare la polarizzazione lungo  $x$ :

$$\vec{\epsilon}_k(1) = \frac{\vec{\epsilon}_k(-) + \vec{\epsilon}_k(+)}{\sqrt{2}}$$

Se usiamo questa polarizzazione per proiettare lo stato otteniamo:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}(-2| -k, -\rangle - 2| -k, +\rangle)$$

I due segni - all'interno dell'espressione hanno origini diverse: il primo nasce dalla parità dello stato dei due fotoni, mentre il secondo ha a che fare con la definizione di polarizzazione lungo  $x$ ; se invece di prendere lo stato con parità dispari avessimo preso quello con parità pari  $|A\rangle + |B\rangle$ , il sarebbe cambiato il primo segno ma il secondo sarebbe rimasto invariato. Allora abbiamo

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}[| -k, -\rangle + | -k, +\rangle]$$



che è una polarizzazione di tipo  $y$ :

$$\vec{\epsilon}_{\vec{k}}(2) \simeq \vec{\epsilon}_{-\vec{k}}(+) + \vec{\epsilon}_{-\vec{k}}(-)$$

Allora se il primo fotone è polarizzato lungo  $x$ , per avere parità  $-1$  il secondo deve risultare polarizzato lungo  $y$ . Se il pione fosse stato una particella scalare, avremmo avuto entrambi polarizzati lungo  $x$ .

## Materdì 25 novembre

### Il campo di Dirac

Per il campo di Dirac abbiamo una lagrangiana di questa forma:

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} [\bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu \psi) - (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi] - m \bar{\psi} \psi$$

Anche stavolta assumeremo i campi  $\psi$  e  $\bar{\psi}$  come indipendenti. Rispetto alle lagrangiane che abbiamo visto finora, stavolta abbiamo degli oggetti nuovi, le  $\gamma^\mu$ , che sono matrici  $4 \times 4$ , definite a meno di una trasformazione di base dalle loro proprietà di anticommutazione:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\delta^{\mu\nu} I$$

Esistono varie rappresentazioni, che dipendono dalle applicazioni, quella che useremo noi è la cosiddetta rappresentazione di Pauli:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & O \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

$$\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

Esiste anche una quinta matrice, che si costruisce a partire dalle prime 4:

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

Tale matrice scambia le componenti alte e basse nello spinore a cui viene applicata.

Le matrici  $\gamma$  sono tutte reali a parte la  $\gamma^2$ , che coinvolge la  $\sigma_2$ . Inoltre,  $\gamma_0$  e  $\gamma_5$  sono hermitiane, mentre le restanti sono antihermitiane. Inoltre,  $\gamma$  diverse anticommutano tra loro, per cui si ha che:

$$\gamma_0(\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 = \gamma^\mu$$

### Equazioni del moto

Le equazioni del moto si ottengono alla solita maniera:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = 0$$

$$\Rightarrow \partial_\mu [-\frac{i}{2} \gamma^\mu \psi] + m\psi - \frac{i}{2} \gamma^\mu (\partial_\mu \psi) = 0$$

$$\Rightarrow (i\partial_\mu \gamma^\mu - m)\psi = 0$$

Per il campo  $\bar{\psi}$  si trova invece:

$$i(\partial_\mu \bar{\psi})\gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0$$

A volte si usa un'altra lagrangiana per il campo di Dirac:

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi$$

ma si può mostrare che le due differiscono per una divergenza totale.

Una delle prime cose da controllare è la modalità di trasformazione dei campi sotto il gruppo di Poincarè. Prima il campo era quadrivettoriale, ma adesso  $\psi$  ha sempre quattro componenti, ma di tipo spinoriale. Avremo in generale:

$$(\Lambda, a) : x \rightarrow x' = a + \Lambda x$$

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x)$$

dove  $S(\Lambda)$  è la rappresentazione del gruppo di Lorentz sullo spazio degli spinori. Per il campo vettoriale avevamo una espressione analoga, ma in quel caso  $S(\Lambda)$  coincideva con la rappresentazione naturale quadrivettoriale  $\Lambda$ . Abbiamo per i campi:

$$U^{-1}(a, \Lambda)\psi(x)U(a, \Lambda) = \psi'(x) = S(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}(x - a))$$

$$U(a, \Lambda)\psi(x)U^{-1}(a, \Lambda) = S(\Lambda^{-1})\psi(a + \Lambda x)$$

In generale, una trasformazione di Lorentz finita si può esprimere in forma esponenziale:

$$e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}}$$

dove  $M^{\mu\nu}$  sono i generatori del gruppo di Lorentz. Nel caso della rappresentazione spinoriale avremo analogamente

$$S(\Lambda) = e^{\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}}$$

dove  $\sigma^{\mu\nu} := -\frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ . I  $\sigma^{\mu\nu}$  devono soddisfare le stesse regole di commutazione dei generatori  $M^{\mu\nu}$ , e si può mostrare che questo accade.

Possiamo vedere che forma ha  $S(\Lambda)$  in qualche caso particolare: ad esempio per le rotazioni, queste sono caratterizzate da un asse di rotazione  $\vec{n}$  e un angolo  $\theta$ , in modo che  $\vec{\theta} = \vec{n}\theta$ . Prenderemo i  $\sigma^{ij}$ , e avremo

$$S(rot) = e^{-\frac{i}{2}\vec{\theta} \cdot \vec{\Sigma}}$$

dove

$$\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\sigma^{jk}$$

Ma dallo sviluppo in serie e dalle proprietà delle matrici di Pauli, si ha

$$e^{\frac{i}{2}\theta(\vec{n} \cdot \vec{\Sigma})} = \cos \frac{\theta}{2} I - i \sin \frac{\theta}{2} (\vec{n} \cdot \vec{\Sigma})$$

per cui la struttura della matrice corrispondente è di questo tipo:

$$\begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} I - i \sin \frac{\theta}{2} (n \cdot \sigma) & 0 \\ 0 & \cos \frac{\theta}{2} I - i \sin \frac{\theta}{2} (n \cdot \sigma) \end{pmatrix}$$

Dunque osserviamo che le rotazioni pure non mescolano componenti alte e basse.

Viceversa, i boost sono definiti attraverso un versore  $\vec{n}$  della velocità relativa tra i due sistemi, e una rapidità  $y = \tanh^{-1} \beta$ . Nel caso classico si aveva  $e^{-\frac{i}{2} y (\vec{n} \cdot \vec{K})}$ , adesso invece

$$S(\text{boost}) = e^{-\frac{1}{2} y \vec{n} \cdot \vec{\alpha}}$$

dove

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

Stavolta la trasformazione mescola alte e basse componenti. Lo sviluppo in serie dà origine a delle funzioni iperboliche:

$$\cosh \frac{y}{2} I + \sinh \frac{y}{2} (\vec{n} \cdot \vec{\alpha})$$

Osserviamo dall'espressione dei boost, che la rappresentazione spinoriale non è unitaria. Questo è necessario perchè il gruppo di Lorentz non è compatto, e non ammette per questo rappresentazioni unitarie finito-dimensionali. La non unitarietà è descritta dal fatto che

$$S^\dagger(\Lambda) \neq S(\Lambda)^{-1}$$

infatti si ha che

$$S^\dagger(\Lambda) = e^{-\frac{i}{4} \omega_{\mu\nu} (\sigma^{\mu\nu})^\dagger}$$

ma

$$(\sigma^{\mu\nu})^\dagger = \frac{i}{2} [\gamma^{\nu\dagger}, \gamma^{\mu\dagger}] = -\frac{i}{2} [\gamma^{\mu\dagger}, \gamma^{\nu\dagger}]$$

Ma se moltiplichiamo a destra e sinistra per  $\gamma^0$ , abbiamo che

$$\gamma^0 (\sigma^{\mu\nu})^\dagger \gamma^0 = \sigma^{\mu\nu}$$

Invertendo la relazione, abbiamo che

$$S^\dagger(\Lambda) = e^{-\frac{i}{4} \omega_{\mu\nu} (\sigma^{\mu\nu})^\dagger} = e^{-\frac{i}{4} \omega_{\mu\nu} \gamma^0 \sigma^{\mu\nu} \gamma^0} = \gamma^0 e^{-\frac{i}{4} \omega_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu}} \gamma^0 = \gamma^0 S(\Lambda)^{-1} \gamma^0$$

Si trova che le  $\gamma^\mu$  si comportano come dei quadrivettori nella rappresentazione spinoriale:

$$S^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu S(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu$$

e questo è necessario affinché l'equazione di Dirac sia covariante a vista.

Viceversa, la  $\gamma_5$  ha delle proprietà di trasformazione sotto Lorentz di questa forma

$$S(\Lambda) \gamma_5 S(\Lambda) = \gamma_5$$

ovvero è uno scalare. Per dimostrarlo possiamo dimostrare che  $\gamma_5 S(\Lambda) \gamma_5 = S(\Lambda)$ , ma:

$$\gamma_5 S(\Lambda) \gamma_5 = e^{\frac{i}{4} \omega_{\mu\nu} \gamma_5 \sigma^{\mu\nu}} \gamma_5 = e^{\frac{i}{4} \omega_{\mu\nu} \gamma_5 \sigma^{\mu\nu} \gamma_5}$$

ma  $\gamma_5$  anticommuta con le  $\gamma^\mu$ , dunque commuta con prodotti di numeri pari di  $\gamma^\mu$ :

$$= e^{\frac{i}{4} \omega_{\mu\nu} \gamma_5 \sigma^{\mu\nu}} = e^{\frac{i}{4} \omega_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu}}$$

poichè  $\gamma_5^2 = I$ .

## Soluzioni piane dell'equazione di Dirac

Cerchiamo soluzioni dell'equazione di Dirac della forma  $e^{\pm ipx}$ . Se imponiamo che la parte spazio-temporale abbia la forma  $e^{-ipx}$ , l'equazione di Dirac restituirà

$$[i\gamma^\mu(-ip_\mu) - m]u(\vec{p})e^{-ipx} = 0$$

$$\Rightarrow (\not{p} - m)u(\vec{p})e^{-ipx} = 0$$

Per essere soddisfatta, è necessario che  $(\not{p} - m) = 0$ . Viceversa, se la dipendenza è di tipo  $e^{ipx}$ , si ha

$$(\not{p} + m)v(\vec{p})$$

dove in generale  $u(\vec{p})$  e  $v(\vec{p})$  saranno diversi.  $u(\vec{p})$  e  $v(\vec{p})$  si dicono spinori di Dirac, e sono associati rispettivamente alle soluzioni ad energia positiva e negativa. Infatti, l'equazione che determina l'autovalore dell'energia è  $i\partial_t$ :

$$i\partial_t e^{-ipx} = p_0 e^{-ipx}$$

$$i\partial_t e^{ipx} = -p_0 e^{ipx}$$

Per capire meglio il significato di  $u(\vec{p})$  e  $v(\vec{p})$ , facciamo un parallelo col caso del campo vettoriale: adesso,  $u(\vec{p})$  e  $v(\vec{p})$  giocano lo stesso ruolo che giocavano i vettori di polarizzazione  $\epsilon^\mu$ , con la differenza che adesso  $u(\vec{p})$  e  $v(\vec{p})$  rappresentano gli stati di spin. Per questo motivo, è verosimile che  $u(\vec{p})$  e  $v(\vec{p})$  necessitino di un ulteriore parametro: scriveremo

$$u^{(r)}(\vec{p}) = \frac{m + \not{p}}{\sqrt{m + E}} u_0^{(r)}$$

dove

$$u_0^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad u_0^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

analogamente per  $v^{(r)}(\vec{p})$ :

$$v^{(r)}(\vec{p}) = \frac{m - \not{p}}{\sqrt{m + E}} v_0^{(r)}$$

dove

$$v_0^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad v_0^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dobbiamo adesso verificare che  $u$  e  $v$  così definiti soddisfano l'equazione di Dirac. Introduciamo a tal fine i proiettori ad energia positiva e negativa:

$$\Lambda_+ = \frac{m + \not{p}}{2m}$$

$$\Lambda_- = \frac{m - \not{p}}{2m}$$

Si verifica facilmente che

$$\Lambda_{\pm}^2 = \Lambda_{\pm}$$

Infatti

$$\frac{m \pm \not{p}}{2m} \frac{m \pm \not{p}}{2m} = \frac{m^2 \pm 2m \not{p} + \not{p}^2}{4m^2} = \frac{2m^2 \pm 2m \not{p}}{4m^2} = \frac{m \pm \not{p}}{2m}$$

poichè  $\not{p}^2 = \gamma^\mu \gamma^\nu p_\mu p_\nu = \frac{1}{2} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} p_\mu p_\nu = p_\mu p^\mu$ .

$$\Lambda_{\pm} \Lambda_{\mp} = 0$$

Infatti

$$\frac{m + \not{p}}{2m} \frac{m - \not{p}}{2m} = \frac{m^2 - \not{p}^2}{4m^2} = 0$$

$$\Lambda_+ + \Lambda_- = I$$

Allora risulta ovvio che  $u(\vec{p})$  e  $v(\vec{p})$  soddisfano l'equazione di Dirac, che corrisponde all'applicazione sugli spinori dell'operatore  $(\not{p} - m)$  (energia positiva) e  $(\not{p} + m)$  (energia negativa).

Possiamo identificare i due spinori  $u^{(1)}$  e  $u^{(2)}$  mediante uno spinore a due componenti,  $W^{(r)}$ , tale che

$$W^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad W^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Possiamo anche scrivere esplicitamente l'operatore  $(m + \not{p})$ :

$$\begin{pmatrix} (m + E)I & -\vec{p} \cdot \vec{\sigma} \\ \vec{p} \cdot \vec{\sigma} & (m - E)I \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow u^{(r)}(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{m + E}} \begin{pmatrix} (m + E)I & -\vec{p} \cdot \vec{\sigma} \\ \vec{p} \cdot \vec{\sigma} & (m - E)I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^{(r)} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{m + E}} \begin{pmatrix} (m + E)W^{(r)} \\ \vec{p} \cdot \vec{\sigma} W^{(r)} \end{pmatrix}$$

**Osservazione:**  $\vec{p} = p\vec{n} = \sqrt{E^2 - m^2}\vec{n}$ , quindi possiamo riscrivere

$$u^{(r)}(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \sqrt{E + m}W^{(r)} \\ \sqrt{E - m}\vec{n} \cdot \vec{\sigma} W^{(r)} \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{(grandi componenti)} \\ \text{(piccole componenti)} \end{matrix}$$

Questa espressione dà l'andamento relativistico delle  $u$ : se siamo fermi, ovvero  $E = m$ , si ha che

$$u^{(r)}(0) = \begin{pmatrix} \sqrt{2m}W^{(r)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Per le  $v$  vale un risultato analogo:

$$v^{(r)}(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \sqrt{E - m}(\vec{n} \cdot \vec{\sigma})\tilde{W}^{(r)} \\ \sqrt{E + m}\tilde{W}^{(r)} \end{pmatrix}$$

dove stavolta  $\tilde{W}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  e  $\tilde{W}^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

## Mercoledì 26 novembre

Il motivo per cui le  $\gamma^\mu$  devono soddisfare regole di anticommutazione della forma

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\delta^{\mu\nu}$$

sta in questo fatto: supponiamo che il campo  $\psi$  soddisfi l'equazione di Dirac, allora moltiplichiamo a sinistra per l'operatore  $(i\gamma^\mu\partial_\mu + m)$

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu + m)(i\gamma^\nu\partial_\nu - m)\psi(x) = (i^2\gamma^\mu\gamma^\nu\partial_\mu\partial_\nu - m^2)\psi(x) = 0$$

Allora la  $\psi(x)$  soddisfa anche all'equazione

$$(\gamma^\mu\gamma^\nu\partial_\mu\partial_\nu + m^2)\psi(x) = (\frac{1}{2}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}\partial_\mu\partial_\nu + m^2)\psi(x) = 0$$

che somiglia molto a  $(\square + m^2)\phi(x) = 0$ , l'equazione di Klein-Gordon per la particella scalare libera. Affinchè le soluzioni dell'equazione di Dirac soddisfino anche all'equazione di Klein-Gordon, quindi, è necessario ricreare il d'alambertiano, da cui la necessità di  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\delta^{\mu\nu}$ .

Tuttavia, rispetto all'equazione di Dirac la richiesta di  $(\square + m^2)\psi = 0$  è più debole perchè abbiamo raddoppiato le soluzioni: infatti, essendo una equazione scalare, essa vale per ognuna delle 4 componenti, e per ognuna fornisce due soluzioni, una ad energia positiva e una ad energia negativa, per un totale di 8 soluzioni indipendenti. Nel caso di Dirac, invece, i gradi di libertà indipendenti sono soltanto 4, due per l'energia positiva e due per l'energia negativa.

Per le  $u$  deve valere

$$(\not{p} - m)u^{(r)}(\vec{p}) = 0$$

Calcoliamo  $p_\mu\gamma^\mu$  nel sistema di riposo della particella:

$$\begin{aligned}\not{p} &\rightarrow \gamma^0 m \\ \Rightarrow m(\gamma^0 - I)u^{(r)}(\vec{p}) &= 0 \\ \Rightarrow m \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \times \end{pmatrix} & \end{aligned}$$

Vediamo dunque che affinchè l'equazione di Dirac sia soddisfatta, le due componenti basse devono essere necessariamente nulle, per cui le soluzioni ad energia positiva hanno soltanto due gradi di libertà. Analogamente per le  $v$ :

$$\begin{aligned}(\not{p} + m)v &= m \begin{pmatrix} 2I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \times \\ \tilde{v} \end{pmatrix} \\ m \begin{pmatrix} 2I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \times \\ \tilde{v} \end{pmatrix} & \end{aligned}$$

Abbiamo detto che gli spinori giocano adesso lo stesso ruolo che giocavano le polarizzazioni per il campo vettoriale. Tuttavia, per le polarizzazioni il procedimento è stato diverso: abbiamo definito  $\epsilon^\mu$  nel sistema di riposo, dopodichè la definizione in un sistema di riferimento generico era legata direttamente alla richiesta

$\epsilon^\mu p_\mu = 0$ . Adesso invece abbiamo dato direttamente la definizione, verificandone poi la consistenza, ma si può mostrare che l'altra procedura avrebbe portato allo stesso risultato.

Ci aspettiamo di poter legare gli spinori  $u$  e  $v$  tra diversi sistemi di riferimento mediante delle opportune  $S(\Lambda)$ . Il punto fondamentale da cui partire per poter fare il parallelo è:

$$\Lambda(\vec{p})\hat{p} = p$$

$$\epsilon^\mu(s, \vec{p}) = \Lambda^\mu{}_\nu(\vec{p})\epsilon^\nu(s, \vec{0})$$

Consideriamo allora

$$u^{(s)}(\hat{p})$$

Ci aspettiamo che in un sistema qualunque valga una relazione del tipo

$$u^{(s)}(\vec{p}) = S(\Lambda)u^{(s)}(\hat{p})$$

Si ha:

$$\frac{mI + m\gamma_0}{\sqrt{2m}}u_0^{(s)} = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0^{(s)} \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{2m}u_0^{(s)}$$

$$\Rightarrow u^{(s)}(\hat{p}) = \sqrt{2m}u_0^{(s)}$$

Sappiamo che nel caso di un boost di Lorentz, la rappresentazione dipende da  $\vec{n}$ ,  $v$  (in unità  $c = 1$ ), e  $y = \tanh^{-1} \beta$ , e ha la seguente forma:

$$S(\Lambda) = e^{\frac{1}{2}y(\vec{n} \cdot \vec{\alpha})} = \cosh \frac{y}{2} I + \sinh \frac{y}{2} (\vec{n} \cdot \vec{\alpha})$$

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow S(\Lambda) = \begin{pmatrix} I \cosh \frac{y}{2} & (\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) \sinh \frac{y}{2} \\ (\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) \sinh \frac{y}{2} & I \cosh \frac{y}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow S(\Lambda)u^{(s)}(\hat{p}) = \begin{pmatrix} I \cosh \frac{y}{2} & (\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) \sinh \frac{y}{2} \\ (\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) \sinh \frac{y}{2} & I \cosh \frac{y}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^{(s)} \\ 0 \end{pmatrix} \sqrt{2m} = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} \cosh \frac{y}{2} W^{(s)} \\ \sinh \frac{y}{2} \vec{n} \cdot \vec{\sigma} W^{(s)} \end{pmatrix}$$

Dobbiamo allora esplicitare  $\cosh \frac{y}{2}$  e  $\sinh \frac{y}{2}$ : sappiamo che

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

da cui

$$\cosh 2x = 2 \cosh^2 x - 1$$

$$\Rightarrow \cosh \frac{y}{2} = \sqrt{\frac{\cosh y + 1}{2}}$$

$$\Rightarrow \sinh \frac{y}{2} = \sqrt{\frac{\cosh y - 1}{2}}$$

A noi interessa costruire la tangente iperbolica:

$$\cosh y = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 y}}$$

ma  $y = \tanh^{-1} v$  da cui

$$\cosh y = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} = \gamma$$

Ma  $\gamma$  per una particella con massa equivale al rapporto  $\frac{E}{m}$ , per cui

$$\cosh \frac{y}{2} = \sqrt{\frac{E+m}{2m}}$$

$$\sinh \frac{y}{2} = \sqrt{\frac{E-m}{2m}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2m} \begin{pmatrix} \cosh \frac{y}{2} W^{(s)} \\ \sinh \frac{y}{2} \vec{n} \cdot \vec{\sigma} W^{(s)} \end{pmatrix} = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{E+m}{2m}} W^{(s)} \\ \sqrt{\frac{E-m}{2m}} \vec{n} \cdot \vec{\sigma} W^{(s)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{E+m} W^{(s)} \\ \sqrt{E-m} \vec{n} \cdot \vec{\sigma} W^{(s)} \end{pmatrix}$$

che è lo stesso risultato ottenuto con l'altra definizione. Per le  $v$  si ottiene un risultato analogo.

Allora riassumiamo i risultati con:

$$u^{(s)}(\vec{p}) = S(\Lambda(\vec{p}))u^{(s)}(\hat{p}) = \frac{m + \not{p}}{\sqrt{E+m}}u_0^{(s)}$$

$$v^{(s)}(\vec{p}) = S(\Lambda(\vec{p}))v^{(s)}(\hat{p}) = \frac{m - \not{p}}{\sqrt{E+m}}v_0^{(s)}$$

Vediamo adesso cosa succede a  $\bar{u}$  e  $\bar{v}$ .  $\bar{u}^{(s)}(\vec{p})$  è definito in base alla definizione generale:

$$\psi \rightarrow \bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$$

$$\bar{u}^{(s)}(\vec{p}) = u_0^{(s)} \frac{(m + \not{p})^\dagger}{\sqrt{E+m}} \gamma^0 = u_0^{(s)} \gamma^0 \gamma^0 \frac{(m + \not{p})^\dagger}{\sqrt{E+m}} \gamma^0 = \bar{u}_0^{(s)} \frac{m + \not{p}}{\sqrt{E+m}}$$

Se usiamo l'altra definizione abbiamo:

$$\bar{u}^{(s)}(\vec{p}) = u^{(s)\dagger}(\hat{p}) S^\dagger(\Lambda(\vec{p})) \gamma^0 = u^{(s)\dagger}(\hat{p}) \gamma^0 \gamma^0 S^\dagger(\Lambda(\vec{p})) \gamma^0 = \bar{u}^{(s)}(\hat{p}) S^{-1}(\Lambda(\vec{p}))$$

Analogamente per  $v$  si avrà

$$\bar{v}^{(s)}(\vec{p}) = \bar{v}_0^{(s)} \frac{m - \not{p}}{\sqrt{E+m}}$$

$$\bar{v}^{(s)}(\vec{p}) = \bar{v}^{(s)}(\hat{p}) S^{-1}(\Lambda(\vec{p}))$$

La presenza di  $S^{-1}(\Lambda)$  nella definizione di  $\bar{u}$  e  $\bar{v}$  ci permette di costruire degli invarianti, infatti:

$$\bar{u}^{(s)}(\vec{p}) u^{(r)}(\vec{p}) = 2m \delta_{rs}$$



essendo la contrazione di uno spinore "riga" e uno spinore "colonna", è un numero, ed è scalare per trasformazioni di Lorentz, infatti:

$$\bar{u}^{(s)}(\vec{p})u^{(r)}(\vec{p}) = \bar{u}^{(s)}(\hat{p})S^{-1}(\Lambda(\vec{p}))S(\Lambda(\vec{p}))u^{(r)}(\hat{p}) = \bar{u}^{(s)}(\hat{p})u^{(r)}(\hat{p})$$

ma  $u^{(r)}(\vec{p}) = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} W^{(r)} \\ 0 \end{pmatrix}$ . Per le  $v$  si ha un risultato simile:

$$\bar{v}^{(s)}(\vec{p})v^{(r)}(\vec{p}) = \bar{v}^{(s)}(\hat{p})v^{(r)}(\hat{p}) = -2m\delta_{rs}$$

Le quantità invarianti che possiamo costruire non si limitano agli scalari, infatti è possibile costruire quantità che trasformano come quadrivettori:

$$\bar{u}^{(s)}(\vec{p})\gamma^\mu u^{(r)}(\vec{p}) = 2p^\mu\delta_{rs}$$

infatti

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(s)}(\hat{p})S^{-1}(\Lambda(\vec{p}))\gamma^\mu S(\Lambda(\vec{p}))u^{(r)}(\hat{p}) &= \bar{u}^{(s)}(\hat{p})\Lambda^\mu{}_\nu(\vec{p})\gamma^\nu u^{(r)}(\hat{p}) \\ \Rightarrow \bar{u}^{(s)}(\vec{p})\gamma^\mu u^{(r)}(\vec{p}) &= \Lambda^\mu{}_\nu(\vec{p})\bar{u}^{(s)}(\hat{p})\gamma^\nu u^{(r)}(\hat{p}) \end{aligned}$$

Per  $\nu = 0$  si ha

$$\bar{u}^{(s)}(\hat{p})\gamma^0 u^{(r)}(\hat{p}) = u^{(s)\dagger}(\hat{p})u^{(r)}(\hat{p}) = \delta_{rs}2m$$

mentre per  $\nu = i$  si ha identicamente zero, perchè le  $\gamma^i$  sono off diagonal quindi scambiano le componenti alte dello spinore  $u$  con quelle basse (nulle), dunque il prodotto con  $\bar{u}$  si annulla. Dunque nel sistema di riposo abbiamo che  $\bar{u}^{(s)}(\hat{p})\gamma^\mu u^{(r)}(\hat{p}) = 2\delta_{rs}(m, 0, 0, 0) = 2\delta_{rs}\hat{p}$ , e poichè per definizione  $\Lambda(\vec{p})\hat{p} = p$ , si ha il risultato.

Per  $\bar{v}^{(s)}(\hat{p})\gamma^\mu v^{(r)}(\hat{p})$  si ha lo stesso risultato, senza segni (-) perchè  $\bar{v}^{(s)}(\hat{p})\gamma^0 v^{(r)}(\hat{p}) = v^{(s)\dagger}(\hat{p})v^{(r)}(\hat{p}) = 2m\delta_{rs}$ .

Supponiamo adesso di essere in un sistema di riferimento con quadrimpulso  $p$  e di voler andare in un sistema con quadrimpulso  $\Gamma p$ . Che legame c'è tra  $u^{(s)}(\vec{p})$  e  $u^{(r)}(\Gamma\vec{p})$ ? Appliciamo una trasformazione di Lorentz  $S(\Gamma)$  a  $u^{(s)}(\vec{p})$ :

$$\begin{aligned} S(\Gamma)u^{(s)}(\vec{p}) &= S(\Gamma)S(\Lambda(\vec{p}))u^{(s)}(\hat{p}) = S(\Lambda(\vec{\Gamma p}))S^{-1}(\Lambda(\vec{\Gamma p}))S(\Gamma)S(\Lambda(\vec{p}))u^{(s)}(\hat{p}) = \\ &= S(\Lambda(\vec{\Gamma p}))[S^{-1}(\Lambda(\vec{\Gamma p}))S(\Gamma)S(\Lambda(\vec{p}))]u^{(s)}(\hat{p}) = S(\Lambda(\vec{\Gamma p}))[S(\Lambda^{-1}(\vec{\Gamma p})\Gamma\Lambda(\vec{p}))]u^{(s)}(\hat{p}) \end{aligned}$$

ma  $\Lambda^{-1}(\vec{\Gamma p})\Gamma\Lambda(\vec{p}) \equiv R(\Gamma, p)$  è la rappresentazione di una rotazione di Wigner, quindi una rotazione pura. Una rotazione pura è diagonale nelle grandi e nelle piccole componenti:

$$R(\Gamma, p) = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$$

mentre lo spinore  $u^{(s)}(\hat{p}) = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} W^{(s)} \\ 0 \end{pmatrix}$ , dunque

$$S(\Gamma)u^{(s)}(\vec{p}) = S(\Lambda(\vec{\Gamma p}))R_{ks}u^{(k)}(\hat{p}) = R_{ks}u^{(k)}(\Gamma p)$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo sfruttato il fatto che gli indici di  $R_{ks}$  non hanno niente a che vedere con gli indici spinoriali di  $S(\Lambda(\vec{\Gamma}p))$ , quindi possiamo commutare (ma son numeri, commutavano uguale!!). Per  $v$  abbiamo un risultato simile, che commenteremo più avanti:

$$S(\Gamma)v^{(s)}(\vec{p}) = R_{ks}^*v^{(k)}(\Gamma p)$$

Vediamo quindi che cambiando sistema di riferimento con una trasformazione di Lorentz che non sia un puro boost, le componenti di spin si rimescolano tra loro. Per quanto riguarda  $\bar{u}$  e  $\bar{v}$ , abbiamo

$$\begin{aligned}\overline{S(\Gamma)u^{(s)}(\vec{p})} &= u^{(s)\dagger}(\vec{p})S^\dagger(\Gamma)\gamma^0 = R_{ks}^*u^{(k)\dagger}(\vec{\Gamma}p)\gamma^0 \\ \Rightarrow \bar{u}^{(s)}(\vec{p})S^{-1}(\Gamma) &= R_{ks}^*\bar{u}^{(k)}(\vec{\Gamma}p)\end{aligned}$$

Il teorema di Casimir (?) ci permette di rappresentare i proiettori ad energia positiva e negativa in ogni sistema di riferimento:

$$\begin{aligned}\Lambda_+ &= \frac{1}{2m} \sum_r u^r(\vec{p})\bar{u}^{(r)}(\vec{p}) = \frac{1}{2m} \frac{1}{E+m} \sum_r (m+\not{p})u_0^r\bar{u}_0^{(r)}(m+\not{p}) = \frac{1}{2m(E+m)}(m+\not{p}) \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (m+\not{p}) = \\ &= \frac{1}{2m(E+m)}(m+\not{p}) \frac{I+\gamma_0}{2} (m+\not{p}) = \frac{1}{2m(E+m)} \left[ \frac{1}{2}(m+\not{p})^2 + \frac{1}{2}(m+\not{p})(m-\not{p})\gamma^0 + \frac{1}{2}(m+\not{p})2\delta^{0\mu}p_\mu \right] = \\ &= \frac{1}{2m(E+m)} \frac{1}{2} [(m+\not{p})2m + (m+\not{p})2E] = \frac{1}{4m(E+m)} [(m+\not{p})(2m+2E\gamma^0)] = \frac{m+\not{p}}{2m}\end{aligned}$$

## Mercoledì 3 dicembre

Abbiamo detto che per gli spinori di tipo  $v$  non vale la stessa legge di trasformazione che vale per gli  $u$ . Questo è dovuto al fatto che la base su cui vengono descritti i due spinori è diversa, infatti

$$\begin{aligned}W^{(r)} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \tilde{W}^{(r)} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Se ci occupiamo della trasformazione per i  $v$ , evidentemente avremo a che fare con la stessa matrice  $R$ , ma cambierà la base di vettori sulla quale essa è applicata: se  $T$  è la matrice di cambio di base tale che  $\tilde{W}^r = T_{sr}W^s$ , l'operatore che dovremo considerare sarà

$$R \rightarrow TRT^{-1}$$

Si vede facilmente che la matrice di cambio di base da  $W$  a  $\tilde{W}$  è data da  $T = -i\sigma_2$ , con  $T^{-1} = -T$ :

$$\tilde{W}^{(2)} = (-i\sigma_2)_{21}W^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{W}^{(1)} = (-i\sigma_2)_{12} W^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

da cui

$$S(\Gamma)v^{(s)}(\vec{p}) = [(-i\sigma_2)R(i\sigma_2)]_{rs} v^{(r)}(\vec{\Gamma p})$$

Ma la  $R$  è una rotazione di  $SU(2)$ , quindi possiamo scrivere

$$R = e^{-\frac{i}{2}\theta\vec{n}\cdot\vec{\sigma}} = \cos\frac{\theta}{2}I - i\sin\frac{\theta}{2}(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})$$

Ci interessa allora valutare il prodotto

$$\sigma_2 R \sigma_2$$

Per come è costruita  $R$ , essa contiene un termine proporzionale all'identità che rimane invariato. Viceversa, verificheremo adesso che  $\sigma_2 R \sigma_2 = R^*$ , ovvero la complessa coniugata della matrice  $R$ . Osserviamo che alla ovvia differenza formale tra  $R^*$  e  $R^\dagger$  si aggiunge anche la differenza dal punto di vista delle rappresentazioni del gruppo delle rotazioni: infatti, una rappresentazione per definizione è un omomorfismo da  $SU(2)$  sullo spazio degli spinori, ovvero ha la proprietà

$$R(g_1 g_2) = R(g_1) R(g_2)$$

e mentre  $R^*$  è ancora una rappresentazione,  $R^\dagger$  non lo è più, infatti:

$$(R(g_1 g_2))^\dagger = (R(g_1) R(g_2))^\dagger = R^\dagger(g_2) R^\dagger(g_1) \neq R^\dagger(g_1) R^\dagger(g_2)$$

Per quanto riguarda il comportamento delle matrici di Pauli sotto coniugazione complessa, si ha

$$\sigma_1^* = \sigma_1$$

$$\sigma_2^* = -\sigma_2$$

$$\sigma_3^* = \sigma_3$$

Poichè le  $\sigma$  anticommutano, il prodotto  $\sigma_2 R \sigma_2$  si può scrivere come:

$$\begin{aligned} \sigma_2 R \sigma_2 &= \left(\cos\frac{\theta}{2}\right) I - \left(i\sin\frac{\theta}{2}\right) \sigma_2 (n_1 \sigma_1 + n_2 \sigma_2 + n_3 \sigma_3) \sigma_2 = \\ &= \left(\cos\frac{\theta}{2}\right) I - \left(i\sin\frac{\theta}{2}\right) (-n_1 \sigma_1 + n_2 \sigma_2 - n_3 \sigma_3) = \left(\cos\frac{\theta}{2}\right) I + \left(i\sin\frac{\theta}{2}\right) (n_1 \sigma_1 - n_2 \sigma_2 + n_3 \sigma_3) \sigma_2 \end{aligned}$$

ovvero l'azione di  $\sigma_2$  su  $R$  ha un effetto equivalente a quello della coniugazione complessa, quindi possiamo affermare che

$$\sigma_2 R \sigma_2 = R^*$$

e per gli spinori  $v$  la regola di trasformazione si scrive come

$$S(\Gamma)v^{(s)}(\vec{p}) = R_{rs}^* v^{(r)}(\vec{\Gamma p})$$

## Spin per particelle di Dirac

Abbiamo visto che per la selezione degli stati possiamo introdurre i proiettori di energia:

$$\Lambda_{\pm} = \frac{m \pm \not{p}}{2m}$$

e nel sistema del centro di massa tali proiettori avevano la forma

$$\Lambda_+ = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

ovvero non selezionano in nessun modo lo spin. Vediamo se è possibile costruire roba che selezioni anche la polarizzazione degli stati; richiederemo inoltre che  $\Lambda_{\pm}$  commutino con questi operatori che andiamo a definire. Se chiamiamo i proiettori di spin come  $\Pi_{\pm}$ , possiamo selezionare uno stato qualsiasi mediante una opportuna combinazione di  $\Lambda_{\pm}$  e  $\Pi_{\pm}$ . Se fossimo sempre nel sistema del centro di massa, oppure se al posto della relatività speciale valesse la relatività galileiana, i proiettori avrebbero la seguente forma:

$$(\Pi_{\pm})_{cm} = \frac{1 \pm \vec{n} \cdot \vec{\sigma}}{2}$$

Se  $\vec{n} = \hat{z}$  si ha

$$\Pi_+ \frac{1 + \sigma_3}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Applicato ad uno spinore di Pauli, il proiettore così definito proietterà sullo spin up. Tuttavia adesso siamo in una situazione a 4 componenti, e vogliamo mantenere la coerenza con la relatività ristretta, dunque ci accorgiamo subito che la direzione della polarizzazione nel sistema del centro di massa dovrà essere fornita da un versore (con due gradi di libertà), e tale oggetto non potrà più essere un vettore bensì un quadrivettore. L'analogo di  $\vec{n}$  sarà allora un  $n^{\mu}$ , o quadrivettore di spin.

Tuttavia non abbiamo ancora dimostrato che questo oggetto, così definito, sia davvero un quadrivettore, ovvero trasformi come un quadrivettore continuando a mantenere le sue proprietà definitorie da un sistema all'altro. Inizialmente richiederemo a  $n^{\mu}$  di trasformare come un quadrivettore dal sistema del laboratorio a quello del centro di massa (e viceversa).

Supponiamo di avere nel laboratorio una combinazione  $\alpha_s u^{(s)}(\vec{p})$  degli spinori ad energia positiva, con versore di polarizzazione  $n^{\mu}$ . Guardando questi stati nel sistema del centro di massa, ci aspettiamo di ottenere in concomitanza un nuovo versore di polarizzazione  $\tilde{n}^{\mu}$  che richiediamo essere il trasformato secondo Lorentz di  $n^{\mu}$ .

### Caratteristiche di $n^{\mu}$

Nel sistema del centro di massa,  $n^{\mu}$  deve individuare una direzione, ovvero

$$n^{\mu} = (0, \vec{n})$$

questo ha due conseguenze immediate

$$n^\mu n_\mu = -1$$

$$n^\mu p_\mu = 0 \quad (\hat{p} = (m, 0, 0, 0))$$

Pretendendo che  $\tilde{n}^\mu$  nel laboratorio sia il trasformato di  $n^\mu$  ci assicuriamo che queste due proprietà continuino a valere; inoltre, essendo sottoposto a due vincoli, dei quattro gradi di libertà di  $n^\mu$  ne sopravvivono soltanto due. Resta una ambiguità di segno ma non è un problema, in quando  $n^\mu$  definisce soltanto la direzione dello spin, dunque  $\Pi_{pm}(n) \equiv \Pi_-(-n)$ .

Definiamo infine i proiettori di spin come

$$\Pi_\pm = \frac{1 \pm \gamma_5 \not{n}}{2}$$

dove  $\not{n} = \gamma_\mu n^\mu$  e  $n^\mu$  soddisfa le due proprietà sopra. Nel sistema del centro di massa, questi proiettori devono dare qualcosa di familiare:

$$n_{cm}^\mu = (0, \vec{n})$$

$$\not{n} = -\vec{n} \cdot \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & -\vec{n} \cdot \vec{\sigma} \\ \vec{n} \cdot \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \Pi_\pm = \begin{pmatrix} \frac{1 \pm \vec{n} \cdot \vec{\sigma}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1 \mp \vec{n} \cdot \vec{\sigma}}{2} \end{pmatrix}$$

Nella parte superiore c'è il proiettore di Pauli 2-dimensionale, in quella inferiore il suo opposto. Se  $\vec{n} = \hat{z}$ , si ha

$$\Pi_+ = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\Pi_- = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Ovvero  $\Pi_+$ , nel sistema del centro di massa, prende uno spinore e lo proietta su uno spinore della forma

$$\begin{pmatrix} \times \\ 0 \\ 0 \\ \times \end{pmatrix}$$

Viceversa,  $\Pi_-$  proietta su spinori del tipo

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \times \\ \times \\ 0 \end{pmatrix}$$

e questo è coerente con la definizione degli spinori a due componenti  $W$  e  $\tilde{W}$ .

In questa definizione abbiamo assunto che dal sistema del centro di massa a quello del laboratorio,  $n^\mu$  possa essere trasformato come un quadrivettore e continui ad avere la funzione di descrivere la polarizzazione della particella a cui si riferisce. Dimostriamo prima di tutto che  $\Pi_\pm$  sono effettivamente dei proiettori, ovvero che:

$$\begin{aligned}\Pi_\pm^2 &= \Pi_\pm \\ \Pi_\pm \Pi_\mp &= 0 \\ \Pi_\pm + \Pi_\mp &= I\end{aligned}$$

La terza proprietà è ovvia dalla definizione. Per le altre si ha:

$$\frac{1 \pm \gamma_5 \not{n}}{2} \frac{1 \pm \gamma_5 \not{n}}{2} = \frac{1 \pm 2\gamma_5 \not{n} + \gamma_5 \not{n} \gamma_5 \not{n}}{2}$$

ma

$$\begin{aligned}\gamma_5 \not{n} \gamma_5 \not{n} &= -(\gamma_5)^2 \not{n} \not{n} = -n^2 = 1 \\ \Rightarrow &= \frac{1 \pm 2\gamma_5 \not{n} + 1}{4} = \frac{1 \pm \gamma_5 \not{n}}{2}\end{aligned}$$

Con un calcolo analogo si mostra che  $\Pi_\pm \Pi_\mp = 0$ . Verifichiamo adesso che

$$\begin{aligned}[\Pi_\pm, \Lambda_\pm] &= 0 \\ \left[ \frac{1 \pm \gamma_5 \not{n}}{2}, \frac{m \pm \not{p}}{2m} \right]\end{aligned}$$

Il calcolo si riduce a considerare il commutatore

$$[\gamma_5 \not{n}, \not{p}] = \gamma_5 \not{n} \not{p} - \not{p} \gamma_5 \not{n} = \gamma_5 (\not{n} \not{p} - \not{p} \not{n}) \gamma_5 p_\mu n_\nu (\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}) = 2\gamma_5 p_\mu n^\mu = 0$$

allora i due tipi di proiettore commutano.

Passiamo adesso alla verifica. Prendiamo uno stato ad energia positiva

$$\alpha_s u^{(s)}(\vec{p})$$

e supponiamo che sia autostato del proiettore di spin con autovalore  $+1$ :

$$\Pi_+ \alpha_s u^{(s)}(\vec{p}) = \alpha_s u^{(s)}(\vec{p})$$

Vogliamo vedere cosa succede nel centro di massa: sappiamo che per gli spinori vale

$$\Pi_+ \alpha_s u^{(s)}(\vec{p}) = \Pi_+ \alpha_s S(\Lambda_{\vec{p}}) u^{(s)}(\hat{p})$$

dunque riscrivendo l'equazione per lo stato  $\alpha_s u^{(s)}(\vec{p})$  si ha che

$$\Pi_+ S(\Lambda_{\vec{p}}) \alpha_s u^{(s)}(\hat{p}) = \alpha_s S(\Lambda_{\vec{p}}) u^{(s)}(\hat{p})$$

Moltiplicando a sinistra per  $S^{-1}(\Lambda_{\vec{p}})$  si ottiene

$$S^{-1}(\Lambda_{\vec{p}}) \Pi_+ S(\Lambda_{\vec{p}}) \alpha_s u^{(s)}(\hat{p}) = u^{(s)}(\hat{p})$$

Questo significa che l'operatore  $S^{-1}(\Lambda_{\vec{p}})\Pi_+S(\Lambda_{\vec{p}})$  manda lo stato  $\alpha_s u^{(s)}(\vec{p})$  in se stesso. Ma:

$$S^{-1}(\Lambda_{\vec{p}})\Pi_+S(\Lambda_{\vec{p}}) = S^{-1}(\Lambda_{\vec{p}})\frac{1+\gamma_5}{2}\not{n}S(\Lambda_{\vec{p}}) = \frac{1}{2}\left[1 + S^{-1}(\Lambda_{\vec{p}})\gamma_5\not{n}S(\Lambda_{\vec{p}})\right]$$

ma sappiamo che  $\gamma_5$  è un operatore scalare sotto la rappresentazione di Lorentz spinoriale, quindi commuta con le  $S(\Lambda)$ :

$$= \frac{1}{2}\left[1 + \gamma_5 S^{-1}(\Lambda_{\vec{p}})\not{n}S(\Lambda_{\vec{p}})\right] = \frac{1}{2}\left[1 + \gamma_5 S^{-1}(\Lambda_{\vec{p}})\gamma^\mu n_\mu S(\Lambda_{\vec{p}})\right] = \frac{1}{2}\left[1 + \gamma_5 \gamma^\nu \Lambda_{\vec{p}}^\mu{}_\nu n_\mu\right]$$

Adesso, poichè le matrici di Lorentz soddisfano la proprietà

$$g\Lambda^T g = \Lambda^{-1}$$

abbiamo che

$$\Lambda^\mu{}_\nu = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu$$

da cui

$$S^{-1}(\Lambda_{\vec{p}})\Pi_+S(\Lambda_{\vec{p}}) = \frac{1}{2}\left[1 + \gamma_5 \gamma^\nu (\Lambda_{\vec{p}}^{-1})^\mu{}_\nu n_\mu\right] = \frac{1}{2}\left[1 + \gamma_5 \gamma^\nu n'_\nu\right]$$

dove  $n'$  è esattamente il versore  $n$  nel sistema del laboratorio, trasformato secondo l'inversa della matrice  $\Lambda_{\vec{p}}$ . Abbiamo dimostrato che se definiamo  $\Pi_+$  come sopra, usando un oggetto con le proprietà

$$n^\mu n_\mu = -1$$

$$n^\mu p_\mu = 0$$

allora l'operatore di proiezione di spin nel laboratorio ha una azione sugli stati che è la stessa dell'operatore  $S^{-1}(\Lambda_{\vec{p}})\Pi_+S(\Lambda_{\vec{p}})$ , ovvero il trasformato secondo la rappresentazione spinoriale, sugli stati nel centro di massa, anch'essi trasformati secondo la medesima rappresentazione. Dal punto di vista fisico questo cosa significa: sappiamo definire lo spin nel sistema del centro di massa, dunque determiniamo la direzione dello spin nel laboratorio andando a vedere che forma assume nel sistema del centro di massa.

Questa descrizione è relativisticamente covariante soltanto passando dal centro di massa al laboratorio e viceversa, infatti se supponiamo di andare da un sistema in cui si ha un impulso e uno spin  $(p^\mu, n^\mu)$  ad un altro in cui l'impulso è legato a quello del primo sistema da una matrice di Lorentz  $\Gamma$  generica, possiamo chiederci se il versore di polarizzazione  $n'$  in questo secondo sistema trasforma anch'esso con la stessa matrice (in altre parole, se è un quadrivettore).

Nel sistema del centro di massa abbiamo che

$$\Lambda_{\vec{p}}^{-1}n = n_{cm}$$

ma anche

$$\begin{aligned}\Lambda_{\vec{p}}^{-1}n' &= n_{cm} \\ \Rightarrow n' &= \Lambda_{\vec{p}}\Lambda_{\vec{p}}^{-1}n\end{aligned}$$

Consideriamo la trasformazione  $\Gamma^{-1}\Lambda_{\vec{p}}\Lambda_{\vec{p}}^{-1}$  applicata a  $p$ :

$$\Gamma^{-1}\Lambda_{\vec{p}}\Lambda_{\vec{p}}^{-1}p = \Gamma^{-1}\Lambda_{\vec{p}}\hat{p} = \Gamma^{-1}\Gamma p = p$$

dunque

$$\begin{aligned}\Gamma^{-1}\Lambda_{\vec{\Gamma}p}\Lambda_{\vec{p}}^{-1}\Lambda_{\vec{p}}\hat{p} &= \Lambda_{\vec{p}}\hat{p} \\ \Rightarrow \hat{p} &= \Lambda_{\vec{\Gamma}p}^{-1}\Gamma\Lambda_{\vec{p}}\hat{p}\end{aligned}$$

E riconosciamo in  $\Lambda_{\vec{\Gamma}p}^{-1}\Gamma\Lambda_{\vec{p}}$  la rotazione di Wigner  $R(\Gamma, p)$ .

## Martedì 9 dicembre

Possiamo scrivere il versore di polarizzazione come combinazione di due quadrivettori, il quadrimpulso e un quadrivettore di tipo luce arbitrario:

$$n^\mu = \alpha p^\mu + \beta k^\mu$$

Poichè  $n^\mu$  deve soddisfare alle richieste

$$\begin{aligned}n^2 &= -1 \\ np &= 0\end{aligned}$$

si possono determinare i coefficienti:

$$\begin{aligned}\alpha^2 m^2 + \beta^2 k^2 + 2(kp)\alpha\beta &= -1 \\ \alpha m^2 + \beta(kp) = 0 &\Rightarrow \beta = -\frac{\alpha m^2}{(kp)} \\ \Rightarrow \alpha^2 m^2 - 2\alpha^2 m^2 = -1 &\rightarrow \alpha^2 = \frac{1}{m^2} \rightarrow \alpha = \pm \frac{1}{m}\end{aligned}$$

Allora si ha

$$n^\mu = \pm \frac{1}{m} \left( p^\mu - \frac{m^2}{(kp)} k^\mu \right)$$

ma per convenzione si preferisce scrivere

$$n^\mu = \pm \frac{1}{m} \left( -p^\mu + \frac{m^2}{(kp)} k^\mu \right)$$

### Osservazione:

- $k^\mu$  definisce la direzione del versore  $n^\mu$ ; inoltre poichè  $\frac{k^\mu}{(kp)}$  non dipende dal modulo di  $k$ , stesso avviene per  $n^\mu$ . Per vedere qual'è la direzione definita da  $k^\mu$ , prendiamo un  $n^\mu$  generico e andiamo a vedere che forma ha nel centro di massa.
- Abbiamo visto che  $\Pi_\pm = \frac{1 \pm \gamma_5 \not{n}}{2}$ . Il fatto di aver cercato  $n^\mu$  come combinazione di  $p^\mu$  e  $k^\mu$  ci ha portato a delle soluzioni, anche se con una ambiguità di segno. Tuttavia sapevamo già che le condizioni imposte su  $n^\mu$  non ne stabiliscono il segno; questo può sembrare ridondante ma non lo è, infatti come avevamo già osservato  $n^\mu$  definisce la direzione, mentre i proiettori  $\Pi_+$  e  $\Pi_-$  proiettano rispettivamente nella direzione e in quella opposta. Se anzichè prendere  $n$  prendessimo  $-n$ , questo si tradurrebbe semplicemente nello scambiare i proiettori, perchè adesso  $\Pi_+$  è sempre concorde con la direzione scelta, ma questa è opposta a quella precedente, per cui

$$\Pi_\pm(n) = \Pi_\mp(-n)$$



Prendiamo le soluzioni positive:

$$n^\mu = \frac{1}{m}(-p^\mu + \frac{m^2}{(kp)}k^\mu)$$

Allora si ha:

$$\Lambda_{\vec{p}}^{-1}(-\frac{1}{m}p^\mu) = -\frac{1}{m}(m, 0, 0, 0) = (-1, \vec{0})$$

mentre

$$\Lambda_{\vec{p}}^{-1}(\frac{m}{(kp)}k^\mu) = \frac{m}{(kp)}\hat{k}^\mu$$

dove  $\hat{k}^\mu$  rappresenta  $k^\mu$  nel sistema del centro di massa. Il prodotto scalare  $(kp)$  lo calcoliamo anch'esso nel sistema del centro di massa:

$$kp = m\hat{k}^0$$

da cui

$$\frac{m}{m\hat{k}^0}(\hat{k}^0, \hat{k}^0\vec{\eta}) = (1, \eta)$$

e quindi

$$n^\mu = (0, \vec{\eta})$$

Questo ci dice che se prendiamo la soluzione positiva per  $n$ , la direzione definita da  $n$  stesso è individuata nel sistema del centro di massa dal quadrivettore di tipo luce usato nella definizione. Essendo  $k$  arbitrario, possiamo descrivere qualunque polarizzazione.

$n^\mu$  soluzione positiva definisce un proiettore  $\Pi_+$  che proietta nella direzione  $\vec{\eta}$ . Per costruirlo, partiamo da un  $k^\mu$  che nel centro di massa ha la forma  $(1, \vec{\eta})$ :

$$\hat{k}^\mu = (1, \vec{\eta})$$

Dopodichè effettuiamo la trasformazione di Lorentz, e nel sistema del laboratorio avremo ovviamente

$$n^\mu = \frac{1}{m} \left( -p^\mu + \frac{m^2}{(kp)}k^\mu \right)$$

Supponiamo adesso di voler descrivere la proiezione dello spin nella direzione opposta; sappiamo già che la polarizzazione opposta si ottiene mandando  $n$  in  $-n$ , e vogliamo vedere se questo è equivalente a mandare  $\vec{\eta}$  in  $-\vec{\eta}$ :

$$\begin{aligned} \hat{k}^\mu = (1, \vec{\eta}) &\rightarrow \hat{k}'^\mu = (1, -\vec{\eta}) \\ n^\mu = \frac{1}{m}(-p^\mu + \frac{m^2}{(kp)}k^\mu) &\rightarrow n'^\mu = \frac{1}{m}(-p^\mu + \frac{m^2}{(kp)}k'^\mu) \end{aligned}$$

Se invece

$$n^\mu \rightarrow n'^\mu = \frac{1}{m}(p^\mu - \frac{m^2}{(kp)}k^\mu)$$

Ci possiamo chiedere se in generale vale

$$k'^\mu - \frac{1}{m}p^\mu = -k^\mu + \frac{1}{m}p^\mu$$

Nel sistema del centro di massa abbiamo

$$\hat{k}^\mu + \hat{k}'^\mu = (2, \vec{0})$$

Ma  $(2, \vec{0})$  è anche  $\frac{2}{m}\hat{p}$ , quindi almeno nel sistema del centro di massa l'uguaglianza è verificata. Essendo quadrivettori, l'uguaglianza resta verificata in ogni altro sistema di riferimento collegato al centro di massa mediante una trasformazione di Lorentz.

### Forma di alcuni proiettori di spin: i proiettori di elicità

Supponiamo di avere un sistema di riferimento con  $p^\mu = (E, p\vec{n})$ . Il proiettore di elicità per definizione *proietta nella direzione che nel laboratorio è  $\vec{n}$* :

$$\Sigma_\pm = \frac{1 \pm \gamma_5(0, \vec{n})\gamma_\mu}{2}$$

ovvero il versore di polarizzazione nel centro di massa ha la forma

$$\hat{n}^\mu = (0, \vec{n})$$

Abbiamo visto che il quadrivettore  $k^\mu$  definisce la direzione di polarizzazione, e che tutto è indipendente dal suo modulo, possiamo allora sceglierlo della forma

$$k^\mu = (p, p\vec{n})$$

Verifichiamo che questa scelta porta al risultato voluto:

$$n^\mu = \frac{1}{m} \left( \frac{m^2}{(pk)} k^\mu - p^\mu \right)$$

Stavolta abbiamo

$$\begin{aligned} pk &= (E, p\vec{n})(p, p\vec{n}) = Ep - p^2 = p(E - p) = p \frac{(E - p)(E + p)}{(E + p)} = \frac{pm^2}{E + p} \\ \Rightarrow n^\mu &= \frac{1}{m} \left[ \frac{m^2}{pm^2} (E + p) k^\mu - p^\mu \right] = \frac{1}{m} [(E + p, (E + p)\vec{n}) - (E, p\vec{n})] = \frac{1}{m} (p, E\vec{n}) \end{aligned}$$

Per sapere cosa succede nel centro di massa:

$$p \rightarrow 0, \quad E \rightarrow m$$

$$\Rightarrow n^\mu \rightarrow (0, \vec{n})$$

Prendiamo adesso

$$n^\mu = \frac{1}{m} \left[ \frac{E + p}{p} k^\mu - p^\mu \right]$$

e applichiamo  $\Lambda_{\vec{p}}^{-1}$ ; vorremmo infatti che  $(n^\mu)_{cm}$  fosse proprio  $(0, \vec{n})$ :

$$\Lambda_{\vec{p}}^{-1} n^\mu = \frac{1}{m} \left[ \frac{E + p}{p} \Lambda_{\vec{p}}^{-1} k^\mu - \Lambda_{\vec{p}}^{-1} p^\mu \right]$$

$k^\mu$  per definizione è  $(p, p\vec{n})$ , lo possiamo riscrivere come

$$k^\mu = p^\mu - (E - p, \vec{0}) = p^\mu - (E - p)(1, \vec{0})$$

Nel sistema del centro di massa, abbiamo che

$$p^\mu \rightarrow (m, \vec{0})$$

mentre

$$\Lambda_{\vec{p}}^{-1}(1, \vec{0}) = \begin{pmatrix} \frac{E}{m} & -\frac{p_x}{m} & -\frac{p_y}{m} & -\frac{p_z}{m} \\ -\frac{p_x}{m} & 1 + \frac{p_x p_x}{m(E+m)} & \frac{p_x p_y}{m(E+m)} & \frac{p_x p_z}{m(E+m)} \\ -\frac{p_y}{m} & \frac{p_y p_x}{m(E+m)} & 1 + \frac{p_y p_y}{m(E+m)} & \frac{p_y p_z}{m(E+m)} \\ -\frac{p_z}{m} & \frac{p_z p_x}{m(E+m)} & \frac{p_z p_y}{m(E+m)} & 1 + \frac{p_z p_z}{m(E+m)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E}{m} \\ -\frac{p_x}{m} \\ -\frac{p_y}{m} \\ -\frac{p_z}{m} \end{pmatrix} = \frac{1}{m}(E, -\vec{p})$$

$$\Rightarrow \Lambda_{\vec{p}}^{-1} k^\mu = (m, \vec{0}) - (E - p) \frac{1}{m}(E, -\vec{p})$$

$$\Rightarrow (n^\mu)_{cm} = \frac{E+p}{mp}(m, \vec{0}) - \frac{E+p}{mp} \frac{E-p}{m}(E, -\vec{p}) - (1, \vec{0}) = \left( \frac{E+p}{p} - \frac{E}{p} - 1, \vec{0} + \vec{n} - \vec{0} \right) = (0, \vec{n}) \quad OK$$

In conclusione, se partiamo da  $n^\mu = (p, E\vec{n})$ , questo definisce come proiettore di spin i proiettore di elicità  $\Sigma_\pm$ .

Vediamo come agiscono questi proiettori sugli spinori:

$$kp = \frac{m^2 p}{E+p}$$

$$\Rightarrow n^\mu = \frac{1}{m} \left[ \frac{m^2}{m^2 p} (E+p) k^\mu - p^\mu \right] = \frac{1}{m} \left[ \frac{E+p}{p} k^\mu - p^\mu \right]$$

Per capire l'azione di  $\Sigma_\pm$  sugli spinori serve capire come agisce  $\not{n}$  su  $u^{(s)}(\vec{p})$ :

$$n^\mu = \frac{1}{m} \left[ \frac{E+p}{p} p^\mu - p^\mu - \frac{E+p}{p} (E-p)(1, \vec{0}) \right] = \frac{1}{m} \left[ \frac{E}{p} p^\mu - \frac{m^2}{p} (1, \vec{0}) \right]$$

$$\Rightarrow \not{n} = \frac{1}{m} \left[ \frac{E}{p} \not{p} - \frac{m^2}{p} \gamma^0 \right]$$

Sappiamo che per spinori di tipo  $u$  si ha

$$(\not{p} - m)u^{(s)}(\vec{p}) = 0$$

$$\Rightarrow \not{p}u^{(s)}(\vec{p}) = mu^{(s)}(\vec{p})$$

$$\Rightarrow \not{n}u^{(s)}(\vec{p}) = \frac{1}{m} \left[ \frac{E}{p} m - \frac{m^2}{p} \gamma^0 \right] u^{(s)}(\vec{p}) = \left[ \frac{E}{p} - \frac{m}{p} \gamma^0 \right] u^{(s)}(\vec{p})$$

allora l'azione di  $\Sigma_\pm$  su  $u^{(s)}(\vec{p})$  si può anche scrivere come:

$$\Sigma_\pm u^{(s)}(\vec{p}) = \frac{1}{2} \left( 1 \pm \gamma_5 \left( \frac{E}{p} - \frac{m}{p} \gamma^0 \right) \right) u^{(s)}(\vec{p})$$

Se consideriamo una situazione ad alta energia ( $E \gg m$ ) si ha che  $\frac{E}{p} \rightarrow 1$  e  $\frac{m}{p} \rightarrow 0$ , allora

$$\Sigma_{\pm} u^{(s)}(\vec{p}) \rightarrow \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5) u^{(s)}(\vec{p})$$

ovvero l'azione del proiettore di elicità  $\Sigma_{\pm}$  tende ad avere nel limite di alte energie la stessa azione del proiettore di chiralità  $\chi_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)$ . Per spinori di tipo  $v$  si ha invece:

$$\begin{aligned} \not{p}v &= -mv \\ \not{p}v^{(s)}(\vec{p}) &= \frac{1}{m} \left[ -\frac{E}{p}m - \frac{m^2}{p}\gamma^0 \right] v^{(s)}(\vec{p}) \\ \Rightarrow \Sigma_{\pm} v^{(s)}(\vec{p}) &= \frac{1}{2} \left[ 1 \pm \gamma_5 \left( -\frac{E}{p} - \frac{m}{p}\gamma^0 \right) \right] v^{(s)}(\vec{p}) \rightarrow \frac{1}{2}(1 \mp \gamma_5) v^{(s)}(\vec{p}) \end{aligned}$$

ovvero per spinori di tipo  $v$   $\Sigma_{\pm}$  tende ad avere la stessa azione di  $\chi_{\mp}$ .

## Il caso dei neutrini

Il neutrino risulta dagli esperimenti avere prevalentemente elicità negativa, ovvero l'interazione debole seleziona la sua componente di elicità negativa, mentre per il neutrino viene selezionata quella positiva. L'operatore  $\Sigma_{\pm}$ , come  $\Pi_{\pm}$ , commuta con i proiettori di energia  $\Lambda_{\pm}$ , e questa proprietà di commutazione significa che i  $\Pi_{\pm}$  commutano con l'evoluzione della dinamica (cioè con l'equazione di Dirac): la dinamica è compatibile con gli stati proiettati.

Tuttavia, l'operatore chirale **non** ha questa proprietà, o meglio ce l'ha soltanto nel caso di massa nulla, infatti:

$$\{\gamma_5, \gamma^{\mu}\} = 0$$

allora se abbiamo

$$(\not{p} - m)\psi = 0$$

ovvero  $\psi$  soddisfa l'equazione di Dirac ad energia positiva, applicando  $\gamma_5$  si ha:

$$\begin{aligned} \gamma_5(\not{p} - m)\psi &= 0 \\ \Rightarrow -(\not{p} + m)\gamma_5\psi &= 0 \end{aligned}$$

ovvero  $\gamma_5\psi$  soddisfa l'equazione di Dirac per energia negativa. Ovviamente questa distinzione scompare nel limite di massa nulla. Nella fraseologia si usa dire che i neutrini sono in un autostato di chiralità: però questo non è corretto, perchè avendo massa, l'evoluzione libera di Dirac non conserva la chiralità. Il fatto è che alle energie di laboratorio il neutrino è largamente favorito ad assumere elicità negativa, ma esiste anche una piccola componente di elicità negativa.

Per studiare la reale natura del neutrino, ovvero capire se il neutrino è una particella di Dirac oppure una particella di Majorana (cioè "autoconiugato", ovvero c'è un legame tra  $\psi$  e  $C\psi$ ), esiste l'esperimento del doppio  $\beta$  senza neutrini: un nucleo decade due volte per decadimento  $\beta$ , emettendo due elettroni ma nessun neutrino. Dopo il primo decadimento, viene emesso un elettrone ed un antineutrino: se il neutrino

è antiparticella di se stesso, e quindi non si parla più di neutrino con  $\chi = -1$  e di antineutrino con  $\chi = +1$ , ma di una unica particella in combinazione di elicità:

$$\nu_{maj} = \alpha|\nu, -\rangle + \alpha|\nu, +\rangle$$

A questo punto la componente piccola ma non nulla di elicità negativa (che nella vecchia terminologia corrispondeva al neutrino), può reagire di nuovo col nucleo e dare origine ad un altro decadimento  $\beta$ :

$$N \rightarrow N' + e^- + \nu(\alpha(+) + \beta(-))$$

$$N' + \nu(\alpha(+) + \beta(-)) \rightarrow N'' + e^-$$

Se il neutrino invece è una particella di Dirac, questo non può avvenire perchè il secondo decadimento può avvenire soltanto con un neutrino mentre il primo decadimento produce degli antineutrini, anche se in combinazione di elicità.

## Sviluppo in modi propri

Il campo di Dirac si può sviluppare come

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \sum_{s=1,2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} \left( a^{(s)}(\vec{p}) u^{(s)}(\vec{p}) e^{-ipx} + b^{(s)\dagger}(\vec{p}) v^{(s)}(\vec{p}) e^{ipx} \right) \\ \bar{\psi}(x) &= \sum_{s=1,2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} \left( b^{(s)}(\vec{p}) \bar{v}^{(s)}(\vec{p}) e^{-ipx} + a^{(s)\dagger}(\vec{p}) \bar{u}^{(s)}(\vec{p}) e^{ipx} \right)\end{aligned}$$

dove gli operatori di creazione e distruzione stavolta hanno la proprietà di anticommutazione:

$$\{a^{(r)}(\vec{p}), a^{(s)\dagger}(\vec{q})\} = (2\pi)^3 2E_p \delta(\vec{p} - \vec{q}) \delta_{rs}$$

$$\{b^{(r)}(\vec{p}), b^{(s)\dagger}(\vec{q})\} = (2\pi)^3 2E_p \delta(\vec{p} - \vec{q}) \delta_{rs}$$

$$\{a^{(r)}(\vec{p}), a^{(s)}(\vec{q})\} = \{b^{(r)}(\vec{p}), b^{(s)}(\vec{q})\} = 0$$

Inoltre l'azione degli operatori di Poincarè sui campi è data da:

$$U(a, \Lambda) a^{(s)}(\vec{p}) U^{-1}(a, \Lambda) = e^{-ia(\Lambda p)} R_{rs} a^{(r)}(\vec{\Lambda p})$$

$$U(a, \Lambda) b^{(s)}(\vec{p}) U^{-1}(a, \Lambda) = e^{-ia(\Lambda p)} R_{rs} b^{(r)}(\vec{\Lambda p})$$

$$U(a, \Lambda) a^{(s)\dagger}(\vec{p}) U^{-1}(a, \Lambda) = e^{ia(\Lambda p)} R_{rs}^* a^{(r)\dagger}(\vec{\Lambda p})$$

$$U(a, \Lambda) b^{(s)\dagger}(\vec{p}) U^{-1}(a, \Lambda) = e^{ia(\Lambda p)} R_{rs}^* b^{(r)\dagger}(\vec{\Lambda p})$$

## Lunedì 15 dicembre

Ricordiamo lo sviluppo del campo di Dirac:

$$\psi(x) = \sum_{s=1,2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} \{a(\vec{p}, s)u(\vec{p}, s)e^{-ipx} + b^\dagger(\vec{p}, s)v(\vec{p}, s)e^{ipx}\}$$
$$\bar{\psi}(x) = \sum_{s=1,2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} \{b(\vec{p}, s)\bar{v}(\vec{p}, s)e^{-ipx} + a^\dagger(\vec{p}, s)\bar{u}(\vec{p}, s)e^{ipx}\}$$

Vogliamo vedere adesso la normalizzazione dello stato creato dall'azione dell'operatore  $a^\dagger(p, s)$  sul vuoto:

$$\psi_{\vec{p}}^{(s)}(x) = \langle \Omega | \psi(x) a^\dagger(\vec{p}, s) | \Omega \rangle = u(\vec{p}, s) e^{-ipx}$$

La corrente conservata nel caso di Dirac è la seguente:

$$J^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \Rightarrow J^0 = \rho = \psi^\dagger \psi$$

ma secondo le nostre normalizzazioni,

$$\psi_{\vec{p}}^{(s)\dagger}(x) \psi_{\vec{p}}^{(s)}(x) = u^\dagger(\vec{p}, s) u(\vec{p}, s) = 2E_p$$

Le regole di anticommutazione ci garantiscono che con questa normalizzazione la  $\psi_{\vec{p}}^{(s)}$  descriva una densità di  $2E$  particelle per unità di volume.

**Problema:** abbiamo detto che la  $\psi_{\vec{p}}^{(s)}(x)$  è la funzione d'onda di un elettrone con impulso  $\vec{p}$ . È evidente che la funzione d'onda del positrone avrà a che fare con l'operatore di creazione  $b^\dagger$ ; dobbiamo soltanto capire che legame c'è tra le soluzioni ad energia negativa e l'antiparticella. Torniamo quindi alla teoria classica di prima quantizzazione, per cercare di definire qualcosa che sia in grado di descrivere la coniugazione di carica. Come facciamo a renderci conto che l'operatore di coniugazione di carica fa proprio quello che vogliamo? La prima cosa da fare è introdurre l'interazione elettromagnetica e vedere se esiste una trasformazione della funzione d'onda  $\psi$  che ci faccia passare da una descrizione di carica  $e$  ad una descrizione di carica  $-e$ . Nell'equazione di Dirac è possibile introdurre l'interazione elettromagnetica mediante la sostituzione minimale:

$$p^\mu \rightarrow p^\mu - \frac{e}{c} A^\mu$$
$$\Rightarrow i\partial^\mu \rightarrow i\partial^\mu - \frac{e}{c} A^\mu$$

allora

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - \frac{e}{c} \gamma^\mu A_\mu - m)\psi = 0$$

Supponiamo che  $\psi$  sia soluzione dell'equazione di Dirac, dopo la sostituzione minimale, quindi con carica  $e$ . Dimosteremo adesso che la funzione

$$\psi_c = \mathcal{C}^{-1} \bar{\psi}^T$$

soddisfa la stessa equazione ma con carica  $-e$ .  $\mathcal{C}$  è una matrice:

$$\mathcal{C} = i\gamma^0 \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e risulta

$$\mathcal{C}^{-1} = -\mathcal{C} = \mathcal{C}^T$$

con la proprietà

$$\mathcal{C}\gamma^\mu\mathcal{C}^{-1} = -(\gamma^\mu)^T$$

Per dimostrare che  $\psi_c$  soddisfa tale equazione prendiamo per prima cosa l'hermitiana coniugata di quella di partenza:

$$\begin{aligned} 0 &= -i\partial_\mu\psi^\dagger(\gamma^\mu)^\dagger - e\psi^\dagger(\gamma^\mu)^\dagger A_\mu - m\psi^\dagger = -i\partial_\mu\psi^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 - e\psi^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 A_\mu - m\psi^\dagger = \\ &= (-i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu - e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu - m\bar{\psi})\gamma^0 \\ &\Rightarrow -i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu - e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu - m\bar{\psi} = 0 \end{aligned}$$

e trasponendo

$$\begin{aligned} -i(\gamma^\mu)^T\partial_\mu\bar{\psi}^T - e(\gamma^\mu)^T\bar{\psi}^T A_\mu - m\bar{\psi}^T &= 0 \\ i\mathcal{C}\gamma^\mu\mathcal{C}^{-1}\partial_\mu\bar{\psi}^T + e\mathcal{C}\gamma^\mu\mathcal{C}^{-1}\bar{\psi}^T A_\mu - m\mathcal{C}\mathcal{C}^{-1}\bar{\psi}^T &= 0 \\ i\gamma^\mu\mathcal{C}^{-1}\partial_\mu\bar{\psi}^T + e\gamma^\mu\mathcal{C}^{-1}\bar{\psi}^T A_\mu - m\mathcal{C}^{-1}\bar{\psi}^T &= 0 \\ i\gamma^\mu\psi_c + e\gamma^\mu\psi_c A_\mu - m\psi_c &= 0 \end{aligned}$$

Allora l'equazione per  $\psi_c$  è uguale a quella per  $\psi$  però con la carica cambiata di segno; questo significa che se  $\psi$  è soluzione dell'equazione di Dirac con carica  $e$ ,  $\psi_c$  è soluzione dell'equazione di Dirac con carica  $-e$ .  $\psi_c$  si dice soluzione coniugata di carica di  $\psi$ .

In seconda quantizzazione si definisce lo stato dell'antiparticella sostituendo a  $\psi$  il campo coniugato di carica  $\psi_c$ :

$$\begin{aligned} e^- &\rightarrow \langle\Omega|\psi(x)a^{\dagger(s)}(\vec{q})|\Omega\rangle = u^{(s)}(\vec{q})e^{-iqx} \\ e^+ &\rightarrow \langle\Omega|\psi_c(x)b^{\dagger(s)}(\vec{q})|\Omega\rangle = \mathcal{C}^{-1}\bar{v}^{(s)T}(\vec{q})e^{-iqx} \end{aligned}$$

Vediamo adesso come possiamo riscrivere l'espressione  $\mathcal{C}^{-1}\bar{v}^{(s)T}(\vec{q})$ :

(conto)

Allora vediamo che

$$\psi_c(\vec{q}, s)\langle\Omega|\psi_c(x)b^{\dagger}(\vec{q})^{(s)}|\Omega\rangle = u^{(s)}(\vec{p})e^{-iqx}$$

cioè la funzione d'onda per la particella con carica  $-e$  di massa  $m$ , impulso  $\vec{p}$  e spin  $s$  ha la stessa espressione di quella per carica  $e$ , ma questo non ci sorprende in quanto elettrone e positrone sono entrambi particelle di Dirac con stessa massa e stesso spin. Vediamo adesso le proprietà di trasformazione del campo di Dirac sotto coniugazione di carica. Partendo dagli operatori di creazione e distruzione, si ha che

$$Ca^{(r)}(\vec{p})C^{-1} = e^{-i\eta_c}b^{(r)}(\vec{p})$$

dove nel calcolo precedente abbiamo assunto che nella trasformazione di  $\psi$  e  $\bar{\psi}$  non ci fossero fattori di fase. In base a questa definizione, avremo

$$C\psi(x)C^{-1} = e^{-i\eta_c}\mathcal{C}^{-1}\bar{\psi}^T$$

$$C\bar{\psi}(x)C^{-1} = e^{i\eta_c}\psi^T C^{-1}$$

Verifichiamo adesso che questo risultato rende un risultato compatibile con quello che ci aspettiamo per la corrente:

$$CJ^\mu C^{-1} = C\bar{\psi}C^{-1}\gamma^\mu C\psi C^{-1} = \psi^T C^{-1}\gamma^\mu C^{-1}\bar{\psi}^T = \psi^T(\gamma^\mu)^T\bar{\psi}^T = -(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)^T$$

dove il  $-$  è stato aggiunto perchè essendo il campo di Dirac un campo fermionico, gli operatori di creazione e distruzione anticommutano anzichè commutare, e se si vuole scambiarli di posto si deve pagare pegno. Tuttavia questo non è l'unico problema concettuale di questa corrente:  $J^\mu$  così definita ha infatti valore di aspettazione non nullo sul vuoto, mentre dovrebbe averlo in virtù del fatto che la corrente elettromagnetica è  $C$ -dispari. Questo valore di aspettazione diverso da zero dà luogo a degli infiniti, allora quando questo può creare problemi si definisce e si utilizza la seguente quantità, il prodotto n-ordinato di  $J^\mu$ :

$$J^\mu = \frac{1}{2}[\bar{\psi}, \gamma^\mu\psi] = \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu\psi - (\gamma^\mu\psi)^T\bar{\psi}^T$$

Data questa corrente, si può vedere che stavolta il valore di aspettazione sul vuoto è nullo, e mandando  $\psi \rightarrow \psi_c$  il segno cambia segno automaticamente senza dover invocare le regole di anticommutazione. In ogni caso, quando è possibile trascurare il problema, si preferisce usare la vecchia  $J^\mu$ , di più semplice scrittura.

Vediamo che succede con la corrente debole:

$$J^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu(1 + \gamma_5)\psi$$

$$\Rightarrow \psi^T C^{-1}\gamma^\mu(1 - \gamma_5)C^{-1}\bar{\psi}^T = \psi^T C^{-1}\gamma^\mu C^{-1}(1 - \gamma_5)\bar{\psi}^T = \psi^T(\gamma^\mu)^T(1 - \gamma_5)^T\bar{\psi}^T = -\bar{\psi}(1 - \gamma_5)\gamma^\mu\psi = -\bar{\psi}\gamma^\mu(1 + \gamma_5)\psi$$

allora vediamo che la corrente debole non è invariante sotto coniugazione di carica, anzi in questo caso si dice che l'invarianza per coniugazione di carica è violata massimamente.

Per parità, il campo di Dirac si modifica in questo modo:

$$Pa^{(r)}(\vec{p})P^{-1} = e^{-i\eta_p}a^{(r)}(-\vec{p})$$

$$Pb^{(r)}(\vec{p})P^{-1} = -e^{i\eta_p}b^{(r)}(-\vec{p})$$

dove tra gli operatori dei due tipi c'è un segno relativo, poichè per convenzione si attribuisce a particella e ad antiparticella parità intrinseche opposte, questo fa sì che

$$P\psi(x)P^{-1} = e^{-i\eta_p}\gamma^0\psi(Px)$$

$$P\bar{\psi}(x)P^{-1} = e^{i\eta_p}\bar{\psi}(Px)\gamma^0$$

Alla corrente debole per parità succede qualcosa di simile alla coniugazione di carica:

$$J^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu(1 - \gamma_5)\psi$$

$$PJ^\mu P^{-1} = \bar{\psi}(Px)\gamma^0\gamma^\mu(1 - \gamma_5)\gamma^0\psi(Px) = \bar{\psi}(Px)\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0(1 + \gamma_5)\psi(Px) = \bar{\psi}(Px)\gamma_\mu(1 + \gamma_5)\psi(Px)$$

Se  $\gamma_5$  non c'è, come nel caso elettromagnetico,  $J^\mu(x) \rightarrow J_\mu(Px)$  come deve, mentre nel caso della corrente debole, l'invarianza sotto parità è di nuovo violata massimamente.

Sotto time reversal:

$$Ta^{(r)}(\vec{p})T^{-1} = e^{-i\eta_t}f_r a^{(\bar{r})}(-\vec{p})$$



$$Tb^{(r)}(\vec{p})T^{-1} = e^{i\eta_t} f_r b^{(\bar{r})}(-\vec{p})$$

dove

$$f_r : \begin{cases} f_1 = 1, & \bar{1} = 2; \\ f_2 = -1, & \bar{2} = 1. \end{cases}$$

ovvero vediamo che mentre la parità mantiene lo stato di spin, la time reversal lo cambia. Per il campo:

$$T\psi(x)T^{-1} = e^{-i\eta_t} \gamma^1 \gamma^3 \psi(Tx)$$

$$T\bar{\psi}(x)T^{-1} = e^{i\eta_t} \bar{\psi}(Tx) \gamma^3 \gamma^1$$

$\gamma^1 \gamma^3$  è l'analogo di  $\mathcal{C}$  per la coniugazione di carica, e si ha

$$\gamma^3 \gamma^1 (\gamma^\mu)^* \gamma^1 \gamma^3 = \gamma^\mu$$

Per la corrente debole:

$$J^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi$$

$$TJ^\mu T^{-1} = \bar{\psi}(Tx) \gamma^3 \gamma^1 (\gamma^\mu)^* (1 - \gamma_5) \gamma^1 \gamma^3 \psi(Tx) = \bar{\psi}(Tx) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \psi(Tx)$$

Allora  $J^\mu$  sotto time reversal trasforma come si deve, infatti le interazioni deboli violano  $C$  e  $P$  ma non  $T$ .

### Esempio: il decadimento del positronio

Il positronio è un sistema legato  $e^+e^-$ ; esso è instabile, e decade in fotoni con vita media dell'ordine di  $10^{-7}s$  oppure  $10^{-10}s$ , a seconda del suo stato di spin. Lo stato fondamentale del positronio è uno stato  $L = 0$ , del tutto simile a quello dell'idrogeno, a parte il fatto che variando la massa ridotta del sistema, varieranno sia il raggio di Bohr che il Rydberg.

Per quanto riguarda lo spin del sistema, questo può essere 0 oppure 1. In entrambi i casi il positronio non ha effetto Zeeman al pim'ordine, indipendentemente dallo stato orbitale. Questo perchè elettrone e positrone col loro moto danno luogo a due correnti uguali ed opposte che si annullano quindi non c'è momento magnetico orbitale. Per quanto riguarda il momento magnetico di spin, questo è dato dalla formula

$$\mu_z = \mu_B g_s S_z$$

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2mc}$$

quindi sarà nullo nei casi  $(s, s_z) = (0, 0), (1, 0)$ , mentre nei casi  $(1, 1)$  e  $(1, -1)$ , elettrone e positrone hanno spin allineati, ma poichè  $\mu_B$  dipende dalla carica elettrica, le due particelle daranno origine a due momenti magnetici opposti che quindi si annullano. I due casi  $S = 1$  e  $S = 0$  prendono il nome di **ortopositronio** e **parapositronio**, e decadono come abbiamo detto con vite medie diversissime, una circa  $\frac{1}{1000}$  dell'altra. Poichè il decadimento  $e^+e^- \rightarrow n\gamma$  è di tipo elettromagnetico, la simmetria di coniugazione di carica è conservata da tale interazione, ed entrambi gli stati del positronio sono quindi autostati della coniugazione di carica, ma con autovalori 1 (parapositronio) e -1 (ortopositronio); questo fa sì che il primo sia costretto a decadere in un numero pari di fotoni, il secondo in un numero dispari, nella maggior parte dei casi rispettivamente 2 e 3. Per capire perchè i due casi hanno simili autovalori della coniugazione di carica, consideriamo il generico stato di positronio, nel formalismo di Dirac:

$$|positr\rangle = a_1^\dagger b_2^\dagger |\Omega\rangle = -b_2^\dagger a_1^\dagger |\Omega\rangle$$

ovvero gli stati  $|1^+, 2^-\rangle$  e  $|2^-, 1^+\rangle$  sono opposti perchè gli operatori di creazione anticommutano. Supponiamo allora di applicare  $C$ :

$$C|positr\rangle = Ca_1^\dagger b_2^\dagger |\Omega\rangle = Ca_1^\dagger C^{-1} C b_2^\dagger C^{-1} C |\Omega\rangle = b_1^\dagger a_2^\dagger |\Omega\rangle = -a_2^\dagger b_1^\dagger |\Omega\rangle$$

allora la coniugazione di carica equivale all'operatore di scambio delle particelle, cambiato di segno; ma l'operatore di scambio agendo su una funzione d'onda la moltiplica per un fattore dipendente dal momento angolare orbitale e dallo spin:

$$\mathcal{S}|L, S, m_l, m_s\rangle = (-1)^L (-1)^{S+1}$$

perchè gli stati di momento angolare pari (dispari) sono simmetrici (antisimmetrici) per scambio mentre per lo spin avviene l'inverso (ad esempio lo stato  $s = 0$  dell'idrogeno è antisimmetrico per scambio). In definitiva per l'operatore di carica si ha

$$C|positr\rangle = -(-1)^L (-1)^{S+1} |positr\rangle$$

Dunque vediamo (siamo in  $L = 0$ ) che nei due casi abbiamo

$$\begin{cases} S = 1, & \Rightarrow C = -1, \text{ ortopositronio, 3 fotoni;} \\ S = 0, & \Rightarrow C = 1, \text{ parapositronio, 2 fotoni;} \end{cases}$$

Possiamo stimare la vita media per il parapositronio, in base a considerazioni sulla probabilità di decadimento per unità di tempo. Intanto poichè il processo avviene ad energie non relativistiche possiamo pensare di utilizzare la sezione d'urto Thomson (anche se non è propriamente un processo di scattering fotone/particella); inoltre, poichè il decadimento avviene in onda  $s$ , la probabilità risulterà proporzionale alla probabilità che elettrone e positrone si sovrappongano, quindi al modulo quadro della funzione d'onda del parapositronio calcolata nell'origine:

$$\lambda_{2\gamma} = \sigma_T |\psi(0)| \mathcal{K}$$

dove  $\mathcal{K}$  è una costante che dà le giuste dimensioni a  $\lambda_{2\gamma}$ . La forma delle funzioni d'onda del positronio è analoga a quelle dell'idrogeno, a patto di cambiare opportunamente il raggio di Bohr: poichè la massa ridotta del sistema, anzichè essere  $\simeq m_e$  nel caso dell'idrogeno, è per il positronio  $\frac{m_e}{2}$ , il raggio dell'orbita più interna  $a_0 \simeq a_0^{(H)} = \frac{1}{\alpha} \frac{\hbar}{m_p c} + \frac{1}{\alpha} \frac{\hbar}{m_e c} = \frac{1}{\alpha} \frac{\hbar}{\mu_{Hc}}$  diventa  $a_0^{(P)} = \frac{1}{\alpha} \frac{\hbar}{m_e c} + \frac{1}{\alpha} \frac{\hbar}{m_e c} = \frac{1}{\alpha} \frac{\hbar}{\mu_{Pc}} = 2a_0^{(H)}$ ; dunque, la funzione d'onda nell'origine vale:

$$|\psi(0)|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{4\pi}} 2(a_0^{(P)})^{-\frac{3}{2}} e^{-r/a_0^{(P)}} \right|_{r=0}^2 = \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{a_0^{(P)}} \right)^3 = \frac{1}{8\pi} \left( \frac{\alpha}{\lambda_c} \right)^3$$

dove  $\lambda_c$  è la lunghezza d'onda Compton dell'elettrone. Allora risulta

$$\lambda_{2\gamma} = \frac{1}{2} \alpha^5 m c^2 \simeq 1,24 \cdot 10^{-10} s$$

La differenza col caso a 3 fotoni sta in un fattore  $\frac{1}{4\pi} \left(\frac{4}{3}\right)^3 (\pi^2 - 9) \alpha$ , dunque si avrà

$$\lambda_{3\gamma} = 1,38 \cdot 10^{-7} s$$

Studiamo adesso la parità del parapositronio ( $C = 1$ ): il contributo orbitale è 1 perchè siamo in onda  $s$ , mentre le parità intrinseche di elettrone e positrone sono opposte quindi il risultato netto è che  $P_{para} = 1 \cdot 1 \cdot -1 = -1$ . Il parapositronio è quindi  $P$ -dispari e  $C$ -pari, esattamente come il  $\pi^0$ , questo non è un caso perchè entrambi sono sistemi composti da coppie particella-antiparticella, che decadono in fotoni nello stato  $L = 0$ . Anche stavolta i due fotoni di emissione per il parapositronio risulteranno polarizzati a  $90^\circ$ .

**Martedì 16 dicembre**

### **La matrice di scattering**

Supponiamo di avere un sistema descritto da una hamiltoniana scomponibile  $H = H_0 + H'$ , dove i due addendi sono entrambi indipendenti dal tempo, dunque l'energia si conserva. Inoltre, in questo caso l'operatore di evoluzione temporale si ottiene risolvendo formalmente l'equazione di Schroedinger

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\psi, t\rangle = H |\psi, t\rangle$$
$$\Rightarrow |\psi, t\rangle = U(t) |\psi, 0\rangle = e^{-iHt} |\psi, 0\rangle$$

Come ben sappiamo, esistono due rappresentazioni, che si equivalgono per quanto riguarda i valori di aspettazione delle osservabili, ovvero la rappresentazione di Schroedinger, in cui evolvono gli stati e non gli operatori:

$$|\psi, t\rangle_S = U(t) |\psi, 0\rangle$$
$$A_S = A$$
$$\langle A \rangle_S = \langle \psi, t | A_S | \psi, t \rangle_S$$

e la rappresentazione di Heisenberg, in cui accade il contrario:

$$|\psi\rangle_H = |\psi, 0\rangle$$
$$A_H = A_H(t) = e^{iHt} A e^{-iHt}$$
$$\langle A \rangle_H = \langle \psi | A_H | \psi \rangle_H$$

È evidente che i due valori di aspettazione  $\langle A \rangle_S$  e  $\langle A \rangle_H$  sono gli stessi, e che al tempo  $t = 0$  gli stati in rappresentazione di Heisenberg o Schroedinger coincidono.

Assumiamo adesso che esistano due tempi  $-t$  e  $t'$ , che definiscono rispettivamente inizio e fine di un intervallo temporale in cui viene "accesa" l'hamiltoniana di interazione  $H'$ , ovvero prima di  $-t$  e dopo  $t'$  la dinamica del sistema è descritta esclusivamente da  $H_0$ . Supponiamo di avere due stati  $|\alpha\rangle$  e  $|\beta\rangle$  (in rappresentazione di Heisenberg) del nostro sistema, non necessariamente autostati di  $H_0$ . Vogliamo conoscere l'ampiezza di transizione da  $\alpha$  a  $\beta$ , ovvero la quantità

$$A_{\beta \leftarrow \alpha}$$

Formalmente scriveremo tale quantità come

$$A_{\beta \leftarrow \alpha} = \langle \beta | S | \alpha \rangle$$

dove  $S$  è proprio la matrice di scattering. Per arrivare a scrivere  $S$ , pensiamo per comodità ad  $\alpha$  e  $\beta$  come ad autostati di  $H_0$  (anche se non è necessario).  $|\alpha\rangle$  e  $|\beta\rangle$  sono descritti nella rappresentazione di Heisenberg relativa ad  $H_0$ , quindi in assenza di interazione; se pensiamo ad  $|\alpha\rangle_H$  come a  $|\alpha, 0\rangle_S$ , possiamo pensare di far evolvere **liberamente**  $\alpha$  dal tempo 0 al tempo  $-t$ , utilizzando quindi l'operatore di evoluzione relativo ad  $H_0$ ,  $U_0(t) = e^{-iH_0 t}$ :

$$|\alpha, -t, lib\rangle_S = U_0(-t) |\alpha, 0\rangle_S \equiv U_0(-t) |\alpha\rangle_H$$

Per lo stato  $\beta$  possiamo fare un discorso analogo:

$$|\beta, t', lib\rangle_S = U_0(t')|\beta, 0\rangle_S \equiv U_0(t')|\beta\rangle_H$$

Avremo dunque che la probabilità di transizione mediante l'hamiltoniana completa  $H$  dallo stato *libero*  $\alpha$  allo stato libero  $\beta$  sarà

$$A_{\alpha,\beta}(t', -t) = {}_S\langle\beta, t', lib|U(t', -t)|\alpha, -t, lib\rangle_S$$

per come abbiamo definito gli stati, si ha che questo equivale a scrivere

$$A_{\alpha,\beta}(t', -t) = {}_H\langle\beta|U_0(t')U(t', -t)U(-t)|\alpha\rangle_H$$

Se definiamo adesso la cosiddetta rappresentazione di interazione, in cui

$$|\psi, t\rangle_I = U_0^{-1}(t)U(t)|\psi\rangle_H$$

$$A_I(t) = U_0^{-1}(t)A_SU_0(t)$$

si può riscrivere l'ampiezza di probabilità come

$$A_{\alpha,\beta}(t', -t) = {}_H\langle\beta|U_0(t')U(t', -t)U(-t)|\alpha\rangle_H = \langle\beta|U^{-1}(t', -t)_I|\alpha\rangle$$

Possiamo allora identificare la matrice  $S$  con l'operatore  $U(t', -t)_I$  una volta che si sia fatto il limite per  $t, t' \rightarrow \infty$ . Inoltre, si può verificare che se  $U = U_0$  la matrice  $S$  è l'identità.

La matrice  $S$ , per come è definita, è intrinsecamente un oggetto unitario (anche se stiamo supponendo che mantenga le proprietà di unitarietà anche nel limite di tempi infiniti). Si può dimostrare che la matrice  $S$  si può scrivere come

$$S = \mathcal{T} \left( e^{-i \int H'_I(t) dt} \right)$$

dove  $H'_I(t) = U_0^{-1}(t)H'U(t)$ , e la lettera  $\mathcal{T}$  davanti all'esponenziale significa che stiamo prendendo il prodotto  $T$ -ordinato dell'operatore tra parentesi: sviluppando in serie l'esponenziale, otteniamo

$$e^{-i \int H'_I(t) dt} = I + (-i) \int H'_I(t) dt + (-i)^2 \int \int H'_I(t_1) H'_I(t_2) dt_1 dt_2 + \dots$$

dove per prodotto  $T$ -ordinato si intende che gli operatori del termine  $n$ -esimo dello sviluppo,  $H'_I(t_1)H'_I(t_2)\dots H'_I(t_n)$  devono essere ordinati in modo che  $t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_n$ .

**Osservazione:** normalmente si cerca di usare il meno possibile l'hamiltoniana, bensì si preferisce la lagrangiana: questo è dovuto alle proprietà di trasformazione sotto il gruppo di Poincarè, infatti per la lagrangiana si richiede la scalarità mentre l'hamiltoniana si comporta sostanzialmente come l'energia. Tuttavia, se gli accoppiamenti sono non derivativi la hamiltoniana e la lagrangiana di interazione sono legate dalla relazione

$$H_I(t) = -L_I(t)$$

ma si può dimostrare che anche in caso di accoppiamenti derivativi vale la seguente scrittura:

$$S = \mathcal{T} \left( e^{i \int \mathcal{L}(x) d^4x} \right)$$

dove abbiamo introdotto la densità di lagrangiana  $\mathcal{L}$ , tale che  $\int d^3x \mathcal{L} = L$ .

Di solito la matrice  $S$  si scrive nella forma  $I + R$ , ovvero si isola da  $S$  il primo termine dello sviluppo, che essendo la matrice identità è in grado di descrivere soltanto transizioni banali, quando lo stato iniziale e finale coincidono. Poichè in generale sarà  $\alpha \neq \beta$ , ci interesserà soltanto  $R$ ; se ci possiamo fermare al prim'ordine nel descrivere l'interazione, avremo

$$R = i \int \mathcal{L}(x) d^4x$$

Supponiamo di voler calcolare  $A_{\beta \leftarrow \alpha} = \langle \beta | i \int \mathcal{L}(x) d^4x | \alpha \rangle$ , faremo adesso delle ipotesi su  $\alpha$  e  $\beta$ : intanto richiederemo che siano autostati dell'impulso, e poichè l'impulso genera le traslazioni spaziotemporali (mediante l'operatore  $U(a) = e^{-iaP}$ ), abbiamo parallelamente che

$$U^{-1}(a)\phi(x)U(a) = \phi(x+a)$$

ma questo discorso vale in particolare per la lagrangiana, quindi

$$\mathcal{L}(x) = U^{-1}(x)\mathcal{L}(0)U(x)$$

allora

$$A_{\beta \leftarrow \alpha} = i \int \langle \beta | U^{-1}(x)\mathcal{L}(0)U(x) | \alpha \rangle d^4x = i \int e^{ip_\beta x} e^{-ip_\alpha x} \langle \beta | \mathcal{L}(0) | \alpha \rangle d^4x$$

Osserviamo che  $\langle \beta | \mathcal{L}(0) | \alpha \rangle \equiv \mathcal{M}_{\beta\alpha}$  non dipende più dalle coordinate, è quindi invariante di Lorentz e gli possiamo dare il nome di *elemento di matrice invariante della transizione*. Si ha alla fine

$$A_{\beta \leftarrow \alpha} = i(2\pi)^4 \delta(p_f - p_i) \mathcal{M}_{\beta\alpha}$$

Generalmente non si è interessati tanto all'ampiezza di probabilità, quando alla probabilità stessa, ovvero il modulo quadro della precedente espressione:

$$W_{\beta\alpha} = |\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2$$

ma questo significa che dobbiamo calcolare il "quadrato" della delta di Dirac: essendo una distribuzione, calcolarne il quadrato può avere risvolti poco simpatici, quindi partiamo dalla definizione di delta di Dirac:

$$\delta(p_f - p_i) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4x e^{i(p_f - p_i)x}$$

$$\delta(p_f - p_i)^2 = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4x e^{i(p_f - p_i)x} \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4y e^{i(p_f - p_i)y}$$

il primo integrale dà luogo ad una delta, che forza gli impulsi del secondo integrale ad essere uguali, quindi si avrebbe

$$= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4x e^0$$

ovvero l'integrale restituisce il volume dello spazio-tempo a disposizione, dunque supporremo che il sistema sia confinato in un box cubico di volume  $VT$ , dove  $V$  è il volume spaziale e  $T$  l'ampiezza dell'intervallo temporale. Alla fine del calcolo prenderemo il limite di volume infinito. Risulta allora che  $\delta^4(p_f - p_i)^2 = \delta^4(p_f - p_i)(2\pi)^4 VT$ .

Inoltre, lo stato finale in generale apparterrà al continuo, dunque saremo interessati più che alla probabilità di transizione verso un singolo stato  $\beta$ , alla probabilità di transizione verso un volumetto infinitesimo nello spazio delle fasi di stati vicini a  $\beta$ . La regola aurea di Fermi ci dice quindi che è sufficiente moltiplicare  $W_{\beta\alpha}$  per il volume dello spazio delle fasi corrispondente:

$$d\mathcal{W} = \prod_{i=1}^n \frac{d^3 p_i V}{h^3} \quad (\hbar = 1 \Rightarrow h = 2\pi)$$

allora

$$dW = (2\pi)^4 \delta(p_f - p_i) VT \prod_{i=1}^n \frac{d^3 p_i V}{h^3} |\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2$$

**Osservazione:** questa formula è corretta solo se gli stati iniziali e finali sono normalizzati, ma essendo stati appartenenti al continuo non sono normalizzati e dobbiamo dividere per la normalizzazione.  $\alpha$  rappresenta una densità  $\rho$  di particelle per unità di volume, allora divideremo per  $\rho V$ , il numero di particelle nello stato iniziale, ed analogamente per  $\beta$ ; in entrambi i casi, la densità di particelle per unità di volume è  $2E$  (per questo abbiamo sempre normalizzato i campi scalare, vettoriale e di Dirac in modo da ottenere questo risultato):

$$dW = \frac{1}{\prod_{j=1}^k 2E_j} (2\pi)^4 \delta(p_f - p_i) VT \prod_{i=1}^n \frac{d^3 p_i V}{h^3} \frac{1}{\prod_{i=1}^n 2E_i} |\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2$$

Inoltre, poichè siamo interessati ad una probabilità di transizione *per unità di tempo*, divideremo anche per l'intervallo temporale  $T$ , per cui

$$\frac{dW}{dt} = \frac{1}{\prod_{j=1}^k 2E_j} (2\pi)^4 \delta(p_f - p_i) V \prod_{i=1}^n \frac{d^3 p_i V}{h^3} \frac{1}{\prod_{i=1}^n 2E_i} |\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2$$

Osserviamo che nonostante la scrittura,  $\frac{dW}{dt}$  è ancora un differenziale perchè contiene l'elemento infinitesimo di spazio delle fasi.

Questo risultato finale può essere fattorizzato in tre contributi:

1.  $\frac{V}{\prod_{j=1}^k (2E_j V)}$ , che ha a che fare con lo stato iniziale o meglio col flusso di particelle iniziale; lo chiameremo  $\frac{1}{\mathcal{F}}$ .
2.  $(2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) \prod_{i=1}^n \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i}$ , che ha a che fare con lo spazio delle fasi finale, lo chiameremo  $d\phi$ .
3. il modulo quadro dell'elemento di matrice invariante  $M_{\beta\alpha}$ .

Allora

$$\frac{dW}{dt} = \frac{1}{\mathcal{F}} d\phi |M_{\beta\alpha}|^2$$

Specializzeremo adesso il risultato ai due casi che ci interessano:

1. Il decadimento:

$$A \rightarrow B + C + \dots$$

In questo caso si ha

$$\frac{1}{\mathcal{F}} = \frac{V}{2EV}$$

Definiamo quindi la larghezza di decadimento come

$$d\Gamma = \frac{1}{2E} d\phi |\mathcal{M}|^2$$

dove  $E$  è l'energia della particella iniziale nel sistema di riferimento in cui ci troviamo. Se supponiamo di calcolare la larghezza di decadimento nel centro di massa, avremo che

$$d\Gamma_{cm} = \frac{1}{2M} d\phi |\mathcal{M}|^2$$

Allora, poichè  $\frac{E}{M} = \gamma$ , si ha che  $\frac{\Gamma_{cm}}{\Gamma_{lab}} = \gamma$ , da cui per la vita media (definita come l'inverso della larghezza) si ha  $\tau_{lab} = \gamma \tau_{cm}$ .

In tutta la trattazione per adesso abbiamo sempre trascurato lo spin. Se vogliamo introdurlo (perchè c'è), possiamo iniziare per semplicità pensando ad uno stato iniziale non polarizzato, e ad uno stato finale con polarizzazione qualunque: in questo caso dovremo **mediare** sugli stati iniziali (perchè la larghezza corrisponderà a tutti le possibili proiezioni della particella iniziale), e sommare su quelli finali (perchè ogni canale è indipendente e ci interessano tutti indistintamente). Si avrà allora

$$d\Gamma_{n.p.} = \frac{1}{2s1} \frac{1}{2E} d\phi \overline{|\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2}$$

## 2. Lo scattering:

$$A + B \rightarrow C + D$$

Nello stato iniziale ci sono due particelle, inoltre quando si parla di scattering non si considera la larghezza di decadimento bensì la sezione d'urto differenziale, ossia il rapporto tra il numero di particelle diffuse nell'unità di tempo in una certa direzione definita dall'angolo solido infinitesimo  $d\Omega$  (possiamo pensare ad un particolare stato finale  $\beta$ ), e il flusso di particelle incidenti. Chiaramente si ha che la probabilità di diffusione per unità di tempo sarà il prodotto della sezione d'urto per il flusso, quindi

$$d\sigma J = \frac{dW}{dt}$$

Allora, se vogliamo calcolare l'elemento di sezione d'urto, basterà dividere la  $\frac{dW}{dt}$  per il flusso, che è relativo allo stato iniziale:

$$d\sigma = \frac{\frac{V}{2E_1 V 2E_2 V}}{J} d\phi |\mathcal{M}|^2$$

**Achtung:** stiamo assumendo che una delle due particelle sia ferma, e l'altra gli batte addosso, quindi avremo ad esempio  $E_1 = M_1$ . In questo modo, il flusso è dato semplicemente da

$$J = \frac{v}{V}$$

dove  $v$  è la velocità della particella incidente. Allora il termine di flusso totale si scrive come

$$\frac{V}{2M_1 2E_2 V^2} V = \frac{1}{4M_1 E_2 v}$$

Poichè sappiamo che la sezione d'urto è un invariante relativistico, ci aspettiamo di poter riscrivere in forma covariante a vista la precedente formula:

$$\frac{1}{4M_1V_2v}$$

Consideriamo  $M_1E_2v$ :

$$(p_1 \cdot p_2)^2 - M_1^2 M_2^2 = M_1 E_2 - M_1^2 M_2^2 = M_1^2 (E_2^2 - M_2^2) = M_1^2 |\vec{p}_2|^2 = M_1^2 E_2^2 v^2$$

poichè  $v = \frac{|\vec{p}|}{E}$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow M_1 E_2 v &= \sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - M_1^2 M_2^2} \\ \Rightarrow d\sigma &= \frac{1}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - M_1^2 M_2^2}} d\phi |\mathcal{M}|^2 \end{aligned}$$

Se vogliamo considerare anche lo spin, dobbiamo sostituire ad  $|\mathcal{M}|^2$  la somma sugli spin dello stato finale, e mediare sugli spin dello stato iniziale:

$$d\sigma = \frac{1}{(2s_1 + 1)(2s_2 + 1)} \frac{1}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - M_1^2 M_2^2}} d\phi |\overline{\mathcal{M}}|^2$$

Ricordiamo la massa invariante del sistema:

$$s = (p_1 + p_2)^2 = M_1^2 + M_2^2 + 2p_1 \cdot p_2 \Rightarrow (4p_1 \cdot p_2)^2 = (s - M_1^2 - M_2^2)^2$$

allora

$$d\sigma = \frac{1}{(2s_1 + 1)(2s_2 + 1)} \frac{1}{2\sqrt{(s - M_1^2 - M_2^2)^2 - 4M_1^2 M_2^2}} d\phi |\overline{\mathcal{M}}|^2$$

La cosa interessante è che se abbiamo un processo di urto nel centro di massa, ci ricordiamo che possiamo scrivere l'impulso delle particelle iniziali come

$$|\vec{p}| = a = \frac{\sqrt{(s - M_1^2 - M_2^2)^2 - 4M_1^2 M_2^2}}{2\sqrt{s}}$$

allora

$$d\sigma = \frac{1}{(2s_1 + 1)(2s_2 + 1)} \frac{1}{4a\sqrt{s}} d\phi |\overline{\mathcal{M}}|^2$$

Consideriamo un primo esempio di scattering: due particelle  $A$  e  $B$  nello stato finale. Per quanto riguarda lo spazio delle fasi si ha

$$d\phi = \frac{d^3 p d^3 q}{(2\pi)^6 2E_p 2E_q} (2\pi)^4 \delta^4(p + q - P)$$

dove  $P$  è l'impulso totale dello stato iniziale. Possiamo semplificare l'espressione integrando sulla delta spaziale:

$$d\phi = \frac{1}{16\pi^2} \delta(E_p + \hat{E} - \mathcal{E}) \frac{d^3 p}{E_p \hat{E}}$$



dove  $\hat{E} = \sqrt{M_B^2 + |\vec{P} - \vec{p}|^2}$ . Adesso, scriviamo in coordinate polari il  $d^3p$ :

$$d\phi = \frac{1}{16\pi^2} \delta(E_p + \hat{E} - \mathcal{E}) \frac{p^2 dp d\Omega}{E_p \hat{E}}$$

Adesso, poichè  $E_p^2 = p^2 + M_A^2$ , si ha che  $E_p dE_p = p dp$ , quindi

$$d\phi = \frac{1}{16\pi^2} \delta(E_p + \hat{E} - \mathcal{E}) \frac{p E_p dE_p d\Omega}{E_p \hat{E}} = \frac{1}{16\pi^2} \delta(E_p + \hat{E} - \mathcal{E}) \frac{p dE_p d\Omega}{\hat{E}}$$

Fin qui non abbiamo mai specificato il sistema di riferimento, quindi questa scrittura è corretta in qualunque sistema. Tuttavia è utile adesso andare nel centro di massa, in cui  $\vec{p} = -\vec{q}$ , dunque  $|\vec{p}| = |\vec{q}| = b$ , e si ha:

$$E_p^2 = M_A^2 + b^2$$

$$E_q^2 = M_B^2 + b^2$$

$$\Rightarrow b db = E_q dE_q = E_p dE_p$$

Introduciamo l'energia complessiva

$$W = E_p + E_q$$

$$dW = dE_p + dE_q = \frac{bdb}{E_p} + \frac{bdb}{E_q} = bdb \left( \frac{E_p + E_q}{E_p E_q} \right) = bdb \frac{W}{E_p E_q} = E_p dE_p \frac{W}{E_p E_q} = W \frac{dE_p}{E_q}$$

$$\frac{dW}{W} = \frac{dE_p}{E_q}$$

da cui

$$d\phi_{cm} = \frac{1}{16\pi^2} \delta(W - \mathcal{E}) p \frac{dW}{W} d\Omega_{cm}$$

$$\Rightarrow d\phi_{cm} = \frac{1}{16\pi^2} \frac{b}{\mathcal{E}} d\Omega_{cm}$$

### Esempio: lo spin del pione

Consideriamo lo scattering

$$\pi^- + d \rightarrow n + n$$

Studieremo lo spin con il metodo del **bilancio dettagliato**, confrontando le sezioni d'urto delle reazioni

$$p + p \rightarrow \pi^+ + d \quad (\rightarrow)$$

$$\pi^+ + d \rightarrow p + p \quad (\leftarrow)$$

Per l'elemento di matrice invariante, possiamo supporre che l'hamiltoniana di interazione sia invariante sotto time reversal, questo significa che

$$T(U_0^{-1}(t)U(t, -t)U_0(-t))T^{-1} = (U_0^{-1}(-t)U(-t, t)U_0(t)) = S^\dagger$$

Dunque per l'ampiezza di probabilità si avrà

$$\langle \beta | S | \alpha \rangle = A_{\beta \leftarrow \alpha}$$

$$\Rightarrow \langle T^{-1}T\beta|ST^{-1}T\alpha\rangle = \langle T\beta|TST^{-1}T\alpha\rangle^* = \langle S^\dagger T\alpha|T\beta\rangle =$$

ma poichè  $S^\dagger$  è unitario si ha

$$= \langle T\alpha|S|T\beta\rangle$$

allora, se l'interazione è invariante sotto time reversal, le ampiezze di probabilità  $A_{\beta \leftarrow \alpha}$  e  $A_{T\alpha \leftarrow T\beta}$  danno origine allo stesso elemento di matrice.

Confronteremo adesso (**importante:** alla stessa energia nel centro di massa in modo che  $s$  sia lo stesso!) le sezioni d'urto per la reazione diretta e quella inversa:

$$d\sigma_{\rightarrow} = \frac{1}{(2s_p + 1)(2s_\pi + 1)} \frac{1}{4a\sqrt{s}} \frac{1}{16\pi^2} \frac{b}{\sqrt{s}} d\Omega_{cm} |\mathcal{M}_{\rightarrow}|^2$$

$$d\sigma_{\leftarrow} = \frac{1}{(2s_\pi + 1)(2s_d + 1)} \frac{1}{4b\sqrt{s}} \frac{1}{16\pi^2} \frac{a}{\sqrt{s}} d\Omega_{cm} |\mathcal{M}_{\leftarrow}|^2$$

dove  $a = |\vec{p}_p|$ , e  $b = |\vec{p}_\pi|$ . Per il rapporto, dobbiamo considerare un fattore 2 dovuto al fatto che nel caso dei due protoni, per il principio di Pauli integriamo soltanto su mezzo spazio delle fasi, quindi

$$\frac{d\sigma_{\rightarrow}}{d\sigma_{\leftarrow}} = \frac{(2s_d + 1)(2s_\pi + 1)}{(2s_p + 1)(2s_p + 1)} \left( \frac{p_\pi}{p_p} \right)^2$$

Negli anni 50 furono misurate le sezioni d'urto per questi processi, con un'energia per il protone di  $341 \text{ MeV}$  (da cui una massa invariante di  $2040 \text{ MeV}$ ) e ottennero

$$\frac{(1,8 \pm 0,6) \cdot 10^{-28} \text{ cm}^2}{(3 \pm 1) \cdot 10^{-27} \text{ cm}^2}$$

da cui risultava che  $2s_\pi + 1 = 1 \pm 0,3$ , quindi  $s_\pi$  risultava compatibile con il valore 0. Questo discorso è stato possibile grazie al fatto che l'interazione forte conserva la time reversal.

## Martedì 17 dicembre

Consideriamo adesso il decadimento a tre corpi di una particella. Lo spazio delle fasi finali sarà stavolta della forma:

$$d\phi = (2\pi)^4 \delta^4(p + q + k - P) \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2E_q} \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E_k}$$

Inizialmente abbiamo quindi 9 variabili indipendenti, le componenti dei vettori  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{k}$ , ma la delta di conservazione ne elimina 4. Dei 5 rimanenti, 3 verranno integrati per dare una forma più significativa al  $d\phi$ , ma mentre per le integrazioni relative alla delta non ci sono complicazioni, dobbiamo stare attenti a integrare altre variabili perchè nell'espressione della larghezza di decadimento potrebbero esserci altre quantità (ad esempio l'elemento di matrice invariante) che da queste variabili dipendano in maniera non banale. Supponiamo infatti di aver integrato con la delta spaziale su  $\vec{k}$ , e di essere rimasti con le variabili libere  $\vec{p}$  e  $\vec{q}$ . Ciascuna di queste ha una direzione e un modulo, ed è evidente che la direzione di  $\vec{p}$  può essere qualunque (se assumiamo isotropia nello spazio), dunque  $\mathcal{M}$  non può dipendere dalla direzione di volo. Siamo inoltre nell'ipotesi di particella senza spin, in ogni caso, anche se la particella in questione avesse uno spin (e quindi una direzione privilegiata) stiamo comunque sommando sugli spin finali. Delle 5 variabili rimaste, dunque,

due definiscono il versore  $\hat{p}$ , dunque non entrano in  $\mathcal{M}$ . Una volta decisa la direzione di  $\vec{p}$ , se ci mettiamo nel centro di massa, i vettori  $\vec{p}, \vec{k}, \vec{q}$  dovranno essere complanari affinché il momento spaziale complessivo si annulli, dunque una volta scelto l'angolo relativo tra  $\vec{p}$  e  $\vec{q}$ , è automaticamente determinato tale piano, anche se rimane la possibilità di ruotare  $\vec{q}$  attorno a  $\vec{p}$  (angolo azimutale).

In definitiva, ci mettiamo nel centro di massa e integriamo la  $\delta^3(\vec{p} + \vec{q} + \vec{k})$  ( $\vec{P} = 0$  nel centro di massa):

$$\frac{(2\pi)^4}{(2\pi)^9} \delta(E_p + E_q + \hat{E}_k - M) \frac{d^3p}{2E_p} \frac{d^3q}{2E_q} \frac{1}{2\hat{E}_k}$$

dove  $M$  è la massa invariante del sistema e  $\hat{E}_k = \sqrt{M_k^2 + |\vec{p} + \vec{q}|^2}$ . Riscriviamo in coordinate polari l'elemento di volume nello spazio dell'impulso per la particella 1 (cioè quella legata a  $\vec{p}$ ):

$$\frac{1}{(2\pi)^5} \delta(E_p + E_q + \hat{E}_k - M) \frac{p^2 dp}{2E_p} \frac{d^3q}{2E_q} \frac{1}{2\hat{E}_k}$$

Adesso, poichè abbiamo visto che la direzione di  $\vec{p}$  non può comparire in  $\mathcal{M}$ , integriamo in  $d\Omega$ :

$$\frac{4\pi}{(2\pi)^5} \delta(E_p + E_q + \hat{E}_k - M) \frac{p^2 dp}{2E_p} \frac{d^3q}{2E_q} \frac{1}{2\hat{E}_k}$$

Adesso abbiamo fissato un sistema di riferimento, e quindi un asse polare.  $\vec{p}$  può stare come gli pare, ma  $\vec{q}$  ha con  $\vec{p}$  una ben precisa relazione angolare:

- Integrare in  $d\Omega$  corrisponde a scegliere arbitrariamente un sistema di riferimento, ma toglie un pò di arbitrarietà a  $\vec{q}$ ;
- una volta fatto questo, usiamo  $\vec{p}$  come asse polare e guardiamo  $\vec{q}$  rispetto a  $\vec{p}$ .

Si ha allora

$$d^3q = q^2 dq \tilde{\Omega} = q^2 dq \sin \theta d\theta d\phi$$

Possiamo dire che rispetto a  $\vec{p}$ ,  $\vec{q}$  formerà un certo angolo  $\theta$ , ma ci aspettiamo che  $\mathcal{M}$  non dipenda da  $\phi$ , per l'arbitrarietà nella scelta del piano  $\vec{p}/\vec{q}/\vec{k}$ , allora integriamo in  $d\phi$ :

$$\Rightarrow d\phi = \frac{8\pi^2}{(2\pi)^5} \delta(E_p + E_q + \hat{E}_k - M) \frac{p^2 dp}{2E_p} \frac{q^2 dq}{2E_q} \frac{d(-\cos \theta)}{2\hat{E}_k}$$

L'angolo  $\theta$  compare nella delta di conservazione dell'energia:

$$\hat{E}_k = \sqrt{M_k^2 + \vec{p}^2 + \vec{q}^2 + 2pq \cos \theta}$$

Ci ricordiamo che per la proprietà della delta di Dirac:

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}$$

dove gli  $x_i$  sono gli zeri di  $f(x)$ , allora:

$$\delta(E_p + E_q + \hat{E}_k - M) = \frac{\delta(-\cos \theta + \cos \bar{\theta})}{\left| \frac{2pq}{2\sqrt{M_k^2 + \vec{p}^2 + \vec{q}^2 + pq \cos \bar{\theta}}} \right|}$$

dove  $\bar{\theta}$  è l'angolo (si può mostrare che è unico) che annulla la funzione nella delta. Per eliminare il segno - di  $d(-\cos\theta)$  abbiamo considerato la funzione  $f(x)$  come funzione di  $-\cos\theta$ .

$$\Rightarrow d\phi = \frac{8\pi^2}{(2\pi)^5} \frac{\delta(-\cos\theta + \cos\bar{\theta})}{\left| \frac{pq}{\hat{E}_k} \right|} \frac{d(\cos\theta)}{2\hat{E}_k} \frac{p^2 dp}{2E_p} \frac{q^2 dq}{2E_q} = \frac{1}{32\pi^3} \frac{pdpq dq}{E_p E_q} = \frac{1}{32\pi^3} \frac{E_p dE_p E_q dE_q}{E_p E_q}$$

dove  $E_p$  ed  $E_q$  sono le energia **nel centro di massa**. Tuttavia sappiamo che lo spazio delle fasi è un invariante relativistico, dunque introdurremo appositamente delle quantità invarianti:

$$s_1 = (P - p_1)^2$$

$$s_2 = (P - p_2)^2$$

$$s_3 = (P - p_3)^2$$

Ad esempio, per  $s_1$ :

$$s_1 = M^2 + m_1^2 - 2Pp_1$$

Ma nel centro di massa si ha che il quadrimpulso totale iniziale è  $(M, \vec{0})$ :

$$\Rightarrow s_1 = M^2 + m_1^2 - 2ME_p \Rightarrow ds_1 = -2MdE_p$$

$$ds_2 = -2MdE_q$$

$$\Rightarrow d\phi = \frac{1}{32\pi^3} \frac{ds_1 ds_2}{4\pi^2}$$

dove  $s_1$  ed  $s_2$  possono essere calcolati nel sistema di riferimento che vogliamo.

Questa scrittura è interessante perchè se guardiamo più decadimenti, si può fare uno scatter plot, ovvero un diagramma cartesiano dove riportiamo in ascissa  $s_1$  ed in ordinata  $s_2$ : la cinematica limiterà la regione in cui possono cadere i punti. Tale plot prende il nome di plot di **Dalitz-Fabri**.

La larghezza completa si scrive come

$$d\Gamma = \frac{1}{2M} |\mathcal{M}|^2 d\phi$$

Se risulta che  $\mathcal{M}$  non dipende da  $s_1$  e  $s_2$ , lo scatter plot dovrà essere uniforme, in quanto il numero di punti in un quadratino infinitesimo attorno al punto  $(s_1, s_2)$  non dipende da  $(s_1, s_2)$  stesso; in questo caso si dice che il decadimento è univocamente determinato dallo spazio delle fasi.

Consideriamo adesso il seguente caso: una particella  $A$  decade in due particelle  $B$  e  $C$ , di cui però  $B$  è una risonanza e decade immediatamente in due particelle  $D$  ed  $E$ . Tale decadimento risulta essere equivalente ad un decadimento a 3 corpi, ma se usiamo nello scatter plot come variabile quella che riguarda  $C$ , questa risulterà completamente determinata dalla cinematica (il decadimento iniziale è a due corpi), e lo scatter plot assumerà una distribuzione a striscia. In questo caso lo scatter plot dipende sia dalla dinamica che dallo spazio delle fasi. Osserviamo comunque che una non uniformità dello scatter plot può essere dovuta anche all'accettanza del rivelatore.

Calcoliamo adesso la larghezza per i due canali di decadimento del pione negativo:

$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$$

$$\pi^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e$$

Questo processo avviene via interazione debole, e possiamo approssimarlo al prim'ordine utilizzando la lagrangiana di Fermi, e senza tirare in ballo i bosoni mediatori. Tuttavia oggi sappiamo che tale decadimento avviene con uno stato iniziale in cui  $\bar{u}$  e  $d$  urtano dando origine ad un  $W^-$  che a sua volta decade in una coppia leptone/antileptone. La lagrangiana di Fermi, in ogni caso, è una buona approssimazione in quanto la massa del  $W$  è di circa 80 GeV mentre questo decadimento avviene ad energie dell'ordine della massa del pione, 139 MeV:

$$\mathcal{L}_W = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} J_\mu^{(lept)\dagger}(x) J_\mu^{(had)}(x) + h.c.$$

dove

$$J_\mu^{(lept)} = \bar{\psi}_l \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi_\nu$$

e per il momento trascuriamo l'espressione della corrente adronica. In ogni caso la corrente leptonica crea il leptone e l'antineutrino leptonico.

Vogliamo la larghezza di decadimento nel sistema di riposo del pione:

$$d\Gamma = \frac{1}{2s_\pi + 1} \frac{1}{2M} |\overline{\mathcal{M}}|^2 \frac{1}{16\pi^2} \frac{\sqrt{(s - m^2 - \mu^2)^2 - 4m^2\mu^2}}{2s} d\Omega_{cm}$$

dove con  $M$  abbiamo indicato la massa del pione, con  $m$  la massa del leptone, e con  $\mu$  la massa del neutrino. Se consideriamo nulla la massa del neutrino l'espressione si semplifica e abbiamo:

$$d\Gamma = \frac{1}{2M} |\overline{\mathcal{M}}|^2 \frac{1}{16\pi^2} \frac{(s - m^2)}{2s} d\Omega_{cm}$$

ma  $s = M^2$  (massa invariante del pione):

$$d\Gamma = \frac{1}{2M} |\overline{\mathcal{M}}|^2 \frac{1}{16\pi^2} \frac{(M^2 - m^2)}{2M^2} d\Omega_{cm}$$

Calcoliamo adesso l'elemento di matrice:

$$\mathcal{M} = \langle f | \mathcal{L}(0) | i \rangle$$

Nel nostro caso lo stato iniziale è lo stato di pione  $|i\rangle = |\pi\rangle$ , e quello finale è  $|f\rangle = |l^-(q, s), \bar{\nu}(k, r)\rangle$ . Introduciamo una relazione di completezza nell'elemento di matrice, ovvero una somma  $\sum_{stati} |\alpha\rangle \langle \alpha| \equiv I$ , dove  $|\alpha\rangle$  sono un set di stati ortonormali e  $I$  è l'identità:

$$\langle f | \mathcal{L}(0) | i \rangle = -\frac{G_f}{\sqrt{2}} \langle f | J_\mu^{(lept)}(0) \sum_{stati} |\alpha\rangle \langle \alpha| J_\mu(0)^{(had)} | i \rangle$$

Vediamo che data la forma delle correnti, l'unico proiettore  $|\alpha\rangle \langle \alpha|$  che non dà contributo nullo è quello del vuoto:

$$\langle f | \mathcal{L}(0) | i \rangle = -\frac{G_f}{\sqrt{2}} \langle f | J_\mu^{(lept)}(0) \sum_{stati} |\Omega\rangle \langle \Omega| J_\mu^{\dagger(had)}(0) | i \rangle$$

Discutiamo adesso l'elemento

$$\langle \Omega | J_\mu^{\dagger(had)}(0) | \pi^- \rangle$$

Poichè  $J_\mu$  trasforma come un quadrivettore, e il pione è una particella pseudoscalare, l'unico quadrivettore che gli possiamo associare è il suo quadrimpulso  $P^\mu$ , pertanto risulterà che

$$\langle \Omega | J_\mu^\dagger(had)(0) | \pi^- \rangle = f_\pi P^\mu \cos \theta_c$$

dove  $f_\pi$  è una costante di proporzionalità, funzione della massa della particella, è l'angolo di Cabibbo salta fuori perchè il  $d$  entra nella corrente debole all'interno del campo  $d_c = d \cos \theta_c + s \sin \theta_c$ .

L'elemento di matrice allora è

$$\mathcal{M} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} f_\pi \cos \theta_c P_\mu (\bar{u}^{(s)}(q) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) v^{(r)}(k))$$

Possiamo semplificare l'espressione, ricordando che il quadrimpulso del pione deve essere uguale alla somma dei quadrimpulsi del leptone e dell'antineutrino:

$$P_\mu = q_\mu + k_\mu$$

$$\Rightarrow (q_\mu + k_\mu) \bar{u}(q)^{(s)} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) v^{(r)}(k) = \bar{u}(q)^{(s)} \not{q} (1 - \gamma_5) v^{(r)}(k) + \bar{u}(q)^{(s)} \not{k} (1 - \gamma_5) v^{(r)}(k)$$

Adesso ci ricordiamo che  $\bar{u}$  e  $v$  sono soluzione dell'equazione di Dirac:

$$\bar{u}(\not{q} - m) = 0$$

$$(\not{k} + \mu)v = 0$$

$$\Rightarrow m \bar{u}^{(s)}(q)(1 - \gamma_5)v^{(r)}(k)$$

$$\Rightarrow \mathcal{M} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} f_\pi \cos \theta_c m \bar{u}^{(s)}(q)(1 - \gamma_5)v^{(r)}(k)$$

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{G_F^2}{2} |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_c m^2 \sum_{r,s} |\bar{u}^{(s)}(q)(1 - \gamma_5)v^{(r)}(k)|^2 =$$

$$= \frac{G_F^2}{2} |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_c m^2 \sum_{r,s} (\bar{u}^{(s)}(q)(1 - \gamma_5)v^{(r)}(k))(\bar{u}^{(s)}(q)(1 - \gamma_5)v^{(r)}(k))^*$$

Osserviamo che  $\bar{u}^{(s)}(q)(1 - \gamma_5)v^{(r)}(k)$  è un numero, e possiamo prenderne equivalentemente il complesso coniugato o l'hermitiano coniugato:

$$= \frac{G_F^2}{2} |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_c m^2 \sum_{r,s} (\bar{u}^{(s)}(q)(1 - \gamma_5)v^{(r)}(k))(\bar{u}^{(s)}(q)(1 - \gamma_5)v^{(r)}(k))^\dagger =$$

$$= \frac{G_F^2}{2} |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_c m^2 \sum_{r,s} (\bar{u}^{(s)}(q)(1 - \gamma_5)v^{(r)}(k))(v^{(r)\dagger}(k)(1 - \gamma_5)^\dagger \bar{u}^{(s)\dagger}(q)) =$$

$$= \frac{G_F^2}{2} |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_c m^2 \sum_{r,s} (\bar{u}^{(s)}(q)(1 - \gamma_5)v^{(r)}(k))(\bar{v}^{(r)}(k)\gamma^0(1 - \gamma_5)^\dagger \gamma^0 u^{(s)\dagger}(q)) =$$

$$= \frac{G_F^2}{2} |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_c m^2 \sum_{r,s} (\bar{u}^{(s)}(q)(1 - \gamma_5)v^{(r)}(k))(\bar{v}^{(r)}(k)(1 + \gamma_5)^\dagger u^{(s)\dagger}(q)) =$$

$$= \frac{G_F^2}{2} |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_c m^2 \sum_{r,s} (\bar{u}^{(s)}(q)(1 - \gamma_5)v^{(r)}(k))(\bar{v}^{(r)}(k)(1 + \gamma_5)^\dagger u^{(s)\dagger}(q))$$

Essendo  $\sum_{r,s} (\bar{u}^{(s)}(q)(1 - \gamma_5)v^{(r)}(k))(\bar{v}^{(r)}(k)(1 + \gamma_5)^\dagger u^{(s)\dagger}(q))$  un numero, esso coincide con la sua traccia:

$$\sum_{r,s} (\bar{u}^{(s)}(q)(1 - \gamma_5)v^{(r)}(k))(\bar{v}^{(r)}(k)(1 + \gamma_5)^\dagger u^{(s)\dagger}(q)) = Tr \left[ \sum_{r,s} (\bar{u}^{(s)}(q)(1 - \gamma_5)v^{(r)}(k))(\bar{v}^{(r)}(k)(1 + \gamma_5)^\dagger u^{(s)\dagger}(q)) \right] =$$

Ma la traccia è ciclica:

$$= Tr \left[ \left( \sum_s u^{(s)\dagger}(q) \bar{u}^{(s)}(q)(1 - \gamma_5) \sum_r v^{(r)}(k) \right) (\bar{v}^{(r)}(k)(1 + \gamma_5)^\dagger) \right] =$$

Ma ricordiamo la definizione dei proiettori ad energia positiva e negativa:

$$\Lambda_+ = \frac{1}{2m} \sum_r u^{(r)}(\vec{p}) \bar{u}^{(r)}(\vec{p}) = \frac{\not{p} + m}{2m}$$

$$\Lambda_- = \frac{1}{2m} \sum_r v^{(r)}(\vec{p}) \bar{v}^{(r)}(\vec{p}) = \frac{\not{p} - m}{2m}$$

$$= Tr \left[ ((\not{q} + m)(1 - \gamma_5) \not{k}(1 + \gamma_5)^\dagger) \right] = Tr \left[ ((\not{q} + m) \not{k}(1 + \gamma_5)^2) \right] = 2Tr \left[ ((\not{q} + m) \not{k}(1 + \gamma_5)) \right]$$

perchè  $(1 + \gamma_5)^2 = 1 + \gamma_5$ . Allora si deve calcolare la seguente traccia:

$$2Tr [m \not{k} + m \not{k} \gamma_5 + \not{q} \not{k} + \not{q} \not{k} \gamma_5]$$

Si hanno le seguenti relazioni per le tracce della matrici  $\gamma$ :

$$Tr \gamma^\mu = 0$$

$$Tr \gamma^\mu \gamma_5 = 0$$

$$Tr \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_5 = 0$$

$$Tr \gamma^\mu \gamma^\nu = 4g^{\mu\nu}$$

Allora tra tutti gli addendi dà contributo soltanto  $2Tr \{ \not{q} \not{k} \} = 2q_\mu k_\nu Tr \gamma^\mu \gamma^\nu = 8(q \cdot k)$ , da cui la larghezza:

$$d\Gamma = \frac{G_F^2}{2} |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_c m^2 \frac{1}{2M} \frac{1}{16\pi^2} \frac{M^2 - m^2}{2M^2} m^2 8q \cdot k d\Omega_{cm}$$

però nel centro di massa si ha che  $(q + k)^2 = M^2$ , da cui

$$M^2 = m^2 + 0 + 2(q \cdot k)$$

$$\Rightarrow d\Gamma = \frac{G_F^2}{2} |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_c m^2 \frac{1}{2M} \frac{1}{16\pi^2} \frac{M^2 - m^2}{2M^2} 4(M^2 - m^2) m^2 d\Omega_{cm}$$

Questo risultato ci dice che  $d\Gamma$  non dipende dall'angolo nello stato finale, e questo ci piace perchè il pione non ha spin, dunque non può avere direzioni privilegiate. La larghezza totale sarà l'integrale di  $d\Gamma$ :

$$\Gamma = \frac{G_F^2}{8\pi} |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_c m^2 \left( \frac{M^2 - m^2}{M^2} \right)^2 M m^2$$

Se vogliamo confrontare le larghezze dei due canali di decadimento, molti termini sono comuni e si semplificano, si ha allora:

$$\frac{\Gamma_{e\bar{\nu}}}{\Gamma_{\mu\bar{\nu}}} = \frac{\left( \frac{M^2 - m_e^2}{M^2} \right)^2 m_e^2}{\left( \frac{M^2 - m_\mu^2}{M^2} \right)^2 m_\mu^2} = \frac{(M^2 - m_e^2)^2 m_e^2}{(M^2 - m_\mu^2)^2 m_\mu^2}$$

Se non conoscessimo la dinamica, potremmo pensare che l'elettrone sia favorito nel decadimento, infatti il rapporto  $\left( \frac{M^2 - m_e^2}{M^2 - m_\mu^2} \right)^2 \simeq 4,3$ , ma il fattore  $\left( \frac{m_e}{m_\mu} \right)^2 \simeq 2,5 \cdot 10^{-5}$  fa sì che il risultato complessivo sia dell'ordine di  $10^{-4}$ . Per il decadimento del  $K^-$  si ha una situazione pressochè analoga, ma il canale di decadimento elettronico è ancor più soppresso, con un fattore  $2 \cdot 10^{-5}$ , questo accade perchè la massa del  $K^-$  è significativamente più grande di quella del muone, più di quanto non lo sia quella del pione rispetto a quella dell'elettrone. Il fattore  $\frac{(M^2 - m_e^2)^2 m_e^2}{(M^2 - m_\mu^2)^2 m_\mu^2}$  viene detto **fattore di soppressione di elicità**.

## Lunedì 22 dicembre

Abbiamo mostrato che le larghezze di decadimento sono diverse e stanno in un rapporto  $\frac{\Gamma_{e\bar{\nu}}}{\Gamma_{\mu\bar{\nu}}} = \frac{(M^2 - m_e^2)^2 m_e^2}{(M^2 - m_\mu^2)^2 m_\mu^2}$ . Il risultato, noto con il nome di soppressione di elicità, nasce dalla struttura *vettoriale* della corrente, e non dalla caratteristica *V-A*. Partiamo infatti da una corrente  $J^\mu$ , che assumiamo comparire per descrivere il problema:

$$J^\mu = \bar{\psi}_a \gamma^\mu \psi_b + h.c.$$

dove  $a$  e  $b$  sono le particelle coinvolte. Supponiamo poi che la corrente  $J^\mu$  compaia in una lagrangiana e sia responsabile di un processo che crea nello stato finale le particelle  $a$  e  $\bar{b}$ ; introduciamo i proiettori chirali:

$$J^\mu = \bar{\psi}_a \gamma^\mu \chi_+ \psi_b + \bar{\psi}_a \gamma^\mu \chi_- \psi_b$$

In quanto proiettori, essi godono della proprietà  $\chi_\pm^2 = \chi_\pm$ :

$$J^\mu = \bar{\psi}_a \gamma^\mu \chi_+^2 \psi_b + \bar{\psi}_a \gamma^\mu \chi_-^2 \psi_b$$

Inoltre, poichè  $\chi_\pm = \frac{1 \pm \gamma_5}{2}$ ,  $\chi_\pm \gamma^\mu = \gamma^\mu \chi_\mp$ , dunque

$$J^\mu = \bar{\psi}_a \chi_- \gamma^\mu \chi_+ \psi_b + \bar{\psi}_a \chi_+ \gamma^\mu \chi_- \psi_b$$

Adesso, definiamo le parti left e right del campo:

$$\psi_L = \chi_- \psi$$

$$\psi_R = \chi_+ \psi$$



$$\begin{aligned}
\bar{\psi}_L &= \psi^\dagger \chi_- \gamma^0 = \bar{\psi} \chi_+ \\
\bar{\psi}_R &= \bar{\psi} \chi_- \\
\Rightarrow J^\mu &= \bar{\psi}_{R,a} \gamma^\mu \psi_{R,b} + \bar{\psi}_{L,a} \gamma^\mu \psi_{L,b}
\end{aligned}$$

quindi la corrente che descrive il processo la possiamo scrivere come somma di due parti: ognuna avrà soltanto proiezioni left o right. Cerchiamo di capire cosa significa questo dal punto di vista delle ampiezze: per il right, nell'ampiezza si ha

$$\bar{u}_{R,a} \gamma^\mu v_{R,b} + \bar{u}_{L,a} \gamma^\mu v_{L,b}$$

dove  $v_{R,b} = \frac{1+\gamma_5}{2} v_b$ . Sappiamo che questa operazione, per alte energie, favorirà lo stato di elicità negativa. Nel centro di massa quindi per la particella  $\bar{b}$  sarà favorita l'elicità  $\Sigma = -1$ , mentre per la particella  $a$  sarà favorita  $\Sigma = +1$  (configurazione  $\bar{b} \rightarrow \cdot \rightarrow a$ ). Supponiamo di dare a questa ampiezza peso 1, questo implica che all'ampiezza in cui l'elicità della particella  $a$  è opposta assegnamo peso  $\frac{m_a}{E_a}$  (configurazione  $\bar{b} \rightarrow \cdot \leftarrow a$ ). Si può fare lo stesso discorso anche con  $b$ , forzando  $b$  ad avere l'elicità opposta, e si ottiene una ampiezza di peso  $\frac{m_b}{E_b}$  (configurazione  $\bar{b} \leftarrow \cdot \rightarrow a$ ). Possiamo pensare anche di forzare entrambi, a questo punto il peso sarà il prodotto dei due,  $\frac{m_a}{E_a} \frac{m_b}{E_b}$  (configurazione  $\bar{b} \leftarrow \cdot \leftarrow a$ ).

Nel caso left si hanno gli stessi ragionamenti, soltanto tutti scambiati. Assumiamo che sia  $a$  che  $b$  abbiano una massa, in questo caso, se non ci sono altri vincoli il termine  $R$  favorirà la configurazione  $\bar{b} \rightarrow \cdot \rightarrow a$ , mentre il termine  $R$  favorirà la configurazione  $\bar{b} \leftarrow \cdot \leftarrow a$ . **Entrambe favoriscono uno spin 1.**

Se la particella iniziale ha spin 0, la conservazione del momento angolare dice che le configurazioni ammissibili sono soltanto quelle  $\bar{b} \leftarrow \cdot \rightarrow a / \bar{b} \rightarrow \cdot \leftarrow a$  per il left, oppure le  $\bar{b} \rightarrow \cdot \leftarrow a / \bar{b} \leftarrow \cdot \rightarrow a$  per il right; *queste 4 configurazioni sono tutte possibili*, se le particelle hanno massa.

Ma avevamo fatto un'ipotesi: la massa di  $\bar{b}$  (l'antineutrino nel nostro caso) è nulla, allora spariscono  $\bar{b} \leftarrow \cdot \rightarrow a$  per il right e  $\bar{b} \rightarrow \cdot \leftarrow a$  per il left, perchè il proiettore seleziona nel caso right l'elicità negativa, e nel caso left quella positiva. Nelle correnti deboli, infine, entra soltanto la corrente left, quindi l'unica configurazione è  $\bar{b} \leftarrow \cdot \rightarrow a$ . Questo ci dice che la ragione della soppressione dell'elicità è legata alla struttura vettoriale della corrente.

## Caso di massa non nulla

Vediamo come si modifica la larghezza nell'ipotesi di massa non nulla per il neutrino:

$$d\Gamma = \frac{1}{2M} |\overline{\mathcal{M}}|^2 \frac{1}{16\pi^2} \frac{b}{M} d\Omega_{cm}$$

I cambiamenti si avranno in  $b$  e in  $|\mathcal{M}|^2$ :

$$b = \frac{\sqrt{(s - m^2 - \mu^2) - 4m^2\mu^2}}{2\sqrt{s}}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} &= -\frac{G_F}{\sqrt{2}} f_\pi \cos \theta_c P_\mu \bar{u}_l^{(s)}(q) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) v_\nu^{(r)}(k) = \\
&= -\frac{G_F}{\sqrt{2}} f_\pi \cos \theta_c (q_\mu + k_\mu) \bar{u}_l^{(s)}(q) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) v_\nu^{(r)}(k) = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} f_\pi \cos \theta_c (\bar{u}_l^{(s)}(q) \not{q} (1 - \gamma_5) v_\nu^{(r)}(k) + \bar{u}_l^{(s)}(q) \not{k} (1 + \gamma_5) v_\nu^{(r)}(k)) =
\end{aligned}$$

$$= -\frac{G_F}{\sqrt{2}} f_\pi \cos \theta_c \bar{u}_l^{(s)}(q) (m(1 - \gamma_5) - (1 + \gamma_5)\mu) v_\nu^{(r)}(k) \equiv -\frac{G_F}{\sqrt{2}} f_\pi \cos \theta_c \bar{u}_l^{(s)}(q) R v_\nu^{(r)}(k)$$

dove  $R = m(1 - \gamma_5) - (1 + \gamma_5)\mu$ . Si ha

$$R = m(1 - \gamma_5) - (1 + \gamma_5)\mu = (m - \mu) - \gamma_5(m + \mu)$$

da cui

$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{M}}|^2 &= \frac{G_F^2}{2} |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_c \text{Tr} \left( \sum_{r,s} (\bar{u}_l^{(s)}(q) R v_\nu^{(r)}(k)) (\bar{u}_l^{(s)}(q) R v_\nu^{(r)}(k))^\dagger \right) = \\ &= \frac{G_F^2}{2} |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_c \text{Tr} \left( \sum_{r,s} (\bar{u}_l^{(s)}(q) R v_\nu^{(r)}(k) \bar{v}_\nu^{(r)}(k) \gamma^0 R^\dagger \gamma^0 u_l^{(s)}(q)) \right) = \frac{G_F^2}{2} |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_c \text{Tr} \left( \sum_s (u_l^{(s)}(q) \bar{u}_l^{(s)}(q) R \sum_r v_\nu^{(r)}(k) \bar{v}_\nu^{(r)}(k)) \right) \end{aligned}$$

dove  $\hat{R} = (m - \mu) + \gamma_5(m + \mu)$ :

$$\begin{aligned} &= \frac{G_F^2}{2} |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_c \text{Tr}((\not{q} + m) R (\not{k} - m) \hat{R}) = \frac{G_F^2}{2} |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_c \left[ \text{Tr}(m R \not{k} \hat{R}) - \text{Tr}(m \mu R \hat{R}) + \text{Tr}(\not{q} R \not{k} \hat{R}) - \text{Tr}(\not{q} R \mu \hat{R}) \right] \\ &= \frac{G_F^2}{2} |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_c \left[ \text{Tr}(\not{q} R \not{k} \hat{R}) - m \mu \text{Tr}(R \hat{R}) \right] \end{aligned}$$

Ma  $R \hat{R} = (m - \mu)^2 - \gamma_5^2(m + \mu)^2 = -4m\mu I$ , da cui

$$\text{Tr}(R \hat{R}) = -16m\mu$$

inoltre

$$\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{Tr}\{\not{q} R \not{k} \hat{R}\} &= \text{Tr}[\not{q}((m - \mu) - \gamma_5(m + \mu)) \not{k}((m - \mu) + \gamma_5(m + \mu))] = \text{Tr}[\not{q} \not{k}(m - \mu)^2 + \not{q} \not{k}(m + \mu)^2] = 4q \cdot k(2m^2 + 2\mu^2) \\ \Rightarrow |\overline{\mathcal{M}}|^2 &= \frac{G_F^2}{2} |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_c 8[q \cdot k(m^2 + \mu^2) + 2m^2\mu^2] \end{aligned}$$

Riscriviamo il risultato in forma più simmetrica rispetto a  $m$  e  $\mu$ :

$$\Rightarrow |\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{G_F^2}{2} |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_c 8[m^2(q \cdot k + \mu^2) + \mu^2(q \cdot k + m^2)]$$

La massa del neutrino fa quindi nascere un termine aggiuntivo, e oltre all'ampiezza  $\bar{\nu} \leftarrow \cdot \rightarrow l$  adesso è possibile anche la  $\bar{\nu} \rightarrow \cdot \leftarrow l$ . Inoltre le due ampiezze sono indipendenti, e non ci sono termini di interferenza.

Osserviamo adesso che  $2q \cdot k = M^2 - m^2 - \mu^2$ , quindi

$$8[m^2(q \cdot k + \mu^2) + \mu^2(q \cdot k + m^2)] = 4[m^2((M^2 - m^2 - \mu^2) + 2\mu^2) + \mu^2((M^2 - m^2 - \mu^2) + 2m^2)] = 4[m^2(M^2 - m^2 + \mu^2) + \mu^2(M^2 - m^2 + \mu^2)]$$

ma ricordando che  $\frac{M^2 - m^2 + \mu^2}{2M}$  è proprio l'energia del neutrino nel centro di massa, possiamo mettere in evidenza un  $2M$ :

$$= (2M)\{m^2 E_\nu + \mu^2 E_l\}$$

Questo risultato di nuovo non dipende dagli angoli, ed è dovuto al fatto che il  $\pi^-$  non ha spin, dunque l'integrazione sull'angolo solido restituirà  $4\pi$ .

## Considerare lo spin

Finora abbiamo fatto l'ipotesi di non considerare lo stato di spin, sommando sugli stati. Il poter sommare ci ha permesso di introdurre i proiettori di energia, e di usare le tracce, ma se fissiamo gli stati di spin in linea di principio questa possibilità ci è negata. In realtà possiamo comunque introdurre formalmente una somma, ma fissiamo lo stato di spin mediante i proiettori di spin.

Supponiamo quindi di voler definire lo stato di spin del leptone: ci mettiamo nel centro di massa, e definiamo

$$\Pi = \frac{1 + \gamma_5}{2} \mathcal{N}$$

dove  $N$  gode della proprietà  $N \cdot q = 0$  e  $N^2 = -1$ .

Se vogliamo l'ampiezza  $\mathcal{M}$ , possiamo ancora considerare gli stati del leptone come tutti quelli possibili, però introducendo anche il proiettore di spin:

$$P_\mu \bar{u} \Pi \gamma^\mu (1 - \gamma_5) v$$

Grazie al proiettore sono liberi gli indici spinoriali, dunque possiamo sommare:

$$= \bar{u} \Pi \not{q} (1 - \gamma_5) v + \bar{u} \Pi (1 + \gamma_5) \not{k} v$$

rimettiamo per comodità la massa del neutrino pari a zero. I proiettori di spin commutano con i proiettori di energia, quindi  $[\not{q}, \Pi] = 0$ :

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \bar{u} \not{q} \Pi (1 - \gamma_5) v = m \bar{u} \Pi (1 - \gamma_5) v \\ \Rightarrow |\overline{\mathcal{M}}|^2 &= \frac{G_F^2}{2} |f_\pi|^2 \cos \theta_c m^2 \sum_{r,s} \left( \bar{u} \Pi (1 - \gamma_5) v \bar{v} \gamma_0 (1 - \gamma_5) \Pi^\dagger \gamma_0 u \right) = \\ &= \frac{G_F^2}{2} |f_\pi|^2 \cos \theta_c m^2 \text{Tr} \left( \sum_s u \bar{u} \Pi (1 - \gamma_5) \sum_r v \bar{v} (1 + \gamma_5) \Pi \right) \end{aligned}$$

dove abbiamo usato il fatto che

$$\gamma^0 \Pi^\dagger \gamma^0 = \frac{1 + \gamma_0}{2} \mathcal{N}^\dagger \gamma_5 \gamma^0 = \frac{1 - \gamma_0}{2} \mathcal{N}^\dagger \gamma_0 \gamma^5 = \frac{1 - \mathcal{N} \gamma^5}{2} = \frac{1 + \gamma_5}{2} \mathcal{N} = \Pi$$

e abbiamo introdotto la traccia. Allora si ha

$$\begin{aligned} &= \frac{G_F^2}{2} |f_\pi|^2 \cos \theta_c m^2 \text{Tr} ((\not{q} + m) \Pi (1 - \gamma_5) \not{k} (1 + \gamma_5) \Pi) = \frac{G_F^2}{2} |f_\pi|^2 \cos \theta_c m^2 \text{Tr} ((\not{q} + m) \Pi (1 - \gamma_5)^2 \not{k} \Pi) = \\ &= \frac{G_F^2}{2} |f_\pi|^2 \cos \theta_c m^2 \text{Tr} ((\not{q} + m) \Pi 2(1 - \gamma_5) \not{k} \Pi) = \frac{G_F^2}{2} |f_\pi|^2 \cos \theta_c m^2 2 \text{Tr} ((\not{q} + m) \Pi (1 - \gamma_5) \not{k} \Pi) = \\ &= \frac{G_F^2}{2} |f_\pi|^2 \cos \theta_c m^2 2 \text{Tr} (\Pi (\not{q} + m) \Pi (1 - \gamma_5) \not{k}) = \frac{G_F^2}{2} |f_\pi|^2 \cos \theta_c m^2 2 \text{Tr} ((\not{q} + m) \Pi (1 - \gamma_5) \not{k}) = \\ &= \frac{G_F^2}{2} |f_\pi|^2 \cos \theta_c m^2 2 \text{Tr} \left( (\not{q} + m) \frac{1 + \gamma_5}{2} \mathcal{N} (1 - \gamma_5) \not{k} \right) = \frac{G_F^2}{2} |f_\pi|^2 \cos \theta_c m^2 \text{Tr} ((\not{q} + m) (1 + \gamma_5) \mathcal{N} (1 - \gamma_5) \not{k}) = \\ &= \frac{G_F^2}{2} |f_\pi|^2 \cos \theta_c m^2 \text{Tr} (m(1 + \gamma_5) \mathcal{N} (1 - \gamma_5) \not{k} + \not{q} [(1 + \gamma_5) \mathcal{N} (1 - \gamma_5) \not{k}]) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{G_F^2}{2} |f_\pi|^2 \cos \theta_c m^2 \text{Tr} (-m \gamma_5 \not{N} \gamma_5 \not{k} + \not{q} \not{k}) &= \frac{G_F^2}{2} |f_\pi|^2 \cos \theta_c m^2 \text{Tr} (m \not{N} \not{k} + \not{q} \not{k}) = \\ &= \frac{G_F^2}{2} |f_\pi|^2 \cos \theta_c m^2 4 (m N \cdot k + q \cdot k) = |\mathcal{M}|^2 \end{aligned}$$

Definiamo adesso il quadrivettore

$$r = mN + q$$

Si verifica immediatamente che  $r$  è di tipo luce:

$$r^2 = -m^2 + q^2 + 2mN \cdot q = -m^2 + m^2 = 0$$

dunque  $N = \frac{1}{m}(r - q)$  è un vettore di polarizzazione della stessa forma che avevamo definito a suo tempo. Si può allora riscrivere il risultato nella forma

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{G_F^2}{2} |f_\pi|^2 \cos \theta_c m^2 (4r \cdot k)$$

Nel caso non polarizzato si aveva soltanto un fattore  $8(q \cdot k)$ , adesso abbiamo solo  $4(q \cdot k)$ , ma il motivo è banale in quanto nel caso non polarizzato sommiamo le larghezze per due polarizzazioni opposte, dunque abbiamo due contributi 4, da cui un 8 finale. Se vogliamo andare a vedere la polarizzazione opposta, (sempre per quanto detto in precedenza) basta mandare  $N$  in  $-N$  e definire un quadrivettore  $r' = q - mN$ . Se andiamo a sommare i due moduli quadri dell'elemento di matrice, relativi a polarizzazioni opposte, ci aspettiamo di riottenere lo stesso risultato del caso non polarizzato, in quanto stiamo effettuando "a mano" la somma sugli stati di polarizzazione, infatti:

$$|\mathcal{M}|_{N+}^2 + |\mathcal{M}|_{-N}^2 = \frac{G_F^2}{2} |f_\pi|^2 \cos \theta_c m^2 (4r \cdot k + 4r' \cdot k) = \frac{G_F^2}{2} |f_\pi|^2 \cos \theta_c m^2 (4(q + mN) \cdot k + 4(q - mN) \cdot k) = \frac{G_F^2}{2} |f_\pi|^2$$

In questo caso, il leptone con elicità negativa è proibito: vediamo infatti che  $r \cdot k = 0$  se prendiamo  $\Sigma = +1$  per il leptone. Il leptone ha (nel sistema del centro di massa del pione) un quadrimpulso della forma  $(E, p\vec{n})$  (per il neutrino avremo ovviamente  $(p, -p\vec{n}) = p(1, -\vec{n})$ ). Il proiettore di elicità per il leptone (sempre nel sistema del centro di massa del pione) si costruisce come sappiamo prendendo di un quadrivettore di polarizzazione  $N$  della forma

$$N = \frac{1}{m}(p, E\vec{n})$$

da cui

$$mN = (p, E\vec{n})$$

Allora  $r = q - mN = (E, p\vec{n}) - (p, E\vec{n}) = (E - p, (p - E)\vec{n}) = (E - p)(1, -\vec{n})$ . Ma questo quadrivettore è proporzionale al quadrimpulso del neutrino, che è light-like, per cui quando facciamo il prodotto scalare otteniamo 0. Come conclusione, non c'è ampiezza di transizione per il leptone ad elicità negativa, a causa del proiettore di spin. Allora, se abbiamo uno stato di polarizzazione che è proibito, o è proibito anche l'altro oppure è l'unico permesso: dunque il leptone è completamente polarizzato. In che senso: in un processo del genere, a priori, diverse ampiezze dipendenti da stati ortogonali possono entrare in gioco. Normalmente lo stato finale non è puro, ma è somma incoerente di stati con numeri quantici diversi. Può quindi succedere che avendo contributi da strade differenti, se ne guardiamo una e trascuriamo le altre, lo stato finale essendo descritto da una miscela statistica di stati sarà non polarizzato. Questo caso ci dimostra che per  $\mu = 0$  e nel caso di corrente  $V - A$ , lo stato finale è puro.

L'ultimo discorso potrebbe non essere mai esistito.