

# Capitolo 1

## 14 gennaio 2008

### 1.1 Interazioni fondamentali e modello standard

Il modello standard è una teoria ideata per descrivere il comportamento delle particelle elementari e il modo in cui esse interagiscono. Ci sono tre tipi di interazioni, elettrodebole, gravitazionale e forte, e uno tra i principali obiettivi teorici è quello di unificarle.

#### 1.1.1 Cenni sulla interazione forte

I mattoni fondamentali, nonché mediatori dell'interazione forte, sono i gluoni; tali mediatori sono di 8 tipi, hanno massa nulla, e tra loro esiste la *forza di colore*. L'intensità della forza aumenta linearmente con la distanza.

#### 1.1.2 Cenni sulla interazione debole

La forza elettrodebole (in seguito utilizzeremo spesso il termine forza come sinonimo di interazione) nasce dall'unificazione di due forze, quella elettromagnetica e quella debole. La forza debole è la forza responsabile del decadimento del neutrone, una particella elementare instabile che ha una vita media di  $\sim 15$  minuti, e che decade in questo modo:

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

Due osservazioni importanti:

- La massa del neutrone è più grande della massa del protone, altrimenti il processo non sarebbe possibile;
- mentre rivelare il protone e l'elettrone è relativamente facile, rivelare l'antineutrino elettronico è piuttosto complicato data la scarsa interazione di quest'ultimo con la materia.

Ci si può chiedere come mai allora si sia postulata l'esistenza dell'antineutrino, e a tal fine ricordiamo brevemente come andò la storia: se supponiamo che il decadimento del neutrone sia a due corpi, ovvero i prodotti di reazione sono solo protone ed elettrone, la conservazione dell'energia e dell'impulso fissano completamente la loro cinematica, il che equivale a dire che l'elettrone uscente dovrebbe essere monocromatico. Gli esperimenti invece mostravano che gli elettroni emessi avevano tutto un loro spettro di energia che si estendeva

dal ... fino al MeV. Una delle (sbagliate) interpretazioni fu che poichè in genere i nuclei non sono isolati, gli elettroni emessi interagissero con l'esterno e perdessero in qualche modo energia; Bohr per disperazione arrivò addirittura a pensare che l'energia o il momento angolare potessero non conservarsi in certi casi.

In realtà la soluzione stava nel *decadimento a tre corpi*: in tal caso gli spettri delle particelle uscenti non erano univocamente determinati, e il terzo partner della reazione doveva soddisfare a certe condizioni:

- doveva essere neutro (per la conservazione della carica elettrica);
- doveva avere massa non troppo grande ( $m_p \simeq m_n$ );
- doveva avere uno spin tale da far conservare il momento angolare.

Infatti, la conservazione del momento angolare è legata all'isotropia dello spazio (invarianza per rotazioni della lagrangiana) e dovervi rinunciare era una cosa dura da digerire, come il fatto che l'interazione tra  $N$  particelle potesse dipendere dall'orientazione del sistema di riferimento. Neutrone, elettrone e protone avevano spin  $\frac{1}{2}$ , dunque affinché il momento angolare del neutrone a riposo si conservasse nello stato finale era necessario che oltre a protone ed elettrone ci fosse una terza particella di spin  $\frac{1}{2}$ .

La teoria debole rimase una teoria a sè stante fino agli anni 70, dopodichè avvenne l'unificazione nella teoria elettrodebole. Tale teoria è una teoria di campo: l'interazione tra due cariche avviene attraverso un *mediatore*, ovvero il quanto del campo che descrive l'interazione; ad esempio, nel caso del campo elettromagnetico due particelle cariche in interazione si scambiano uno o più fotoni. Si parla di mediatori poichè non è possibile considerare interazioni a distanza che violerebbero la relatività ristretta: consideriamo sempre interazioni di tipo *locale*, ovvero del tipo una particella situata in  $\vec{x}$  che interagisce col campo nel punto  $\vec{x}$  e non altrove.

Il fotone ha massa nulla, così come il **gravitone**, il mediatore dell'interazione gravitazionale; le onde gravitazionali sono generate da un quadrupolo elettrico dipendente dal tempo, allo stesso modo in cui un dipolo oscillante genera onde elettromagnetiche. I mediatori delle interazioni deboli sono i  $W^\pm$  e lo  $Z^0$ , che hanno rispettivamente masse di:

- $m(W^\pm) \simeq 80 GeV$
- $m(Z^0) \simeq 91 GeV$

Vediamo che queste masse sono piuttosto grosse rispetto alla massa del singolo nucleone,  $\simeq 1 GeV$ .  $W^\pm$  e  $Z^0$  hanno spin 1, e sono detti per questo *bosoni vettoriali*.

Una particella è individuata dalla propria massa, tuttavia nel caso di fotone e gravitone sembrerebbe esserci un'ambiguità, data dal fatto che entrambe hanno massa nulla; in realtà esiste un'altra proprietà che le contraddistingue, ovvero l'elicità (che spesso chiameremo impropriamente 'spin'): infatti il fotone ha spin 1, mentre il gravitone ha spin 2. Il problema della definizione dello spin per particelle di massa nulla sta proprio a monte: per definire lo spin di un oggetto con massa, ci si pone nel suo sistema di riferimento di riposo, dopodichè possiamo controllare se esistono direzioni privilegiate e controllare quante di esse sono indipendenti (3 se  $s = 1$ , 5 se  $s = 2$  ecc.). Nel caso di massa nulla non è possibile trovare un sistema di riferimento per fare questo mestiere (cit. Giachetti) dunque si guarda un'altra caratteristica: l'elicità, ovvero l'analogo della proiezione dello spin nella direzione dell'impulso.

A questo punto potrebbe sorgere un **problema concettuale**: se immaginassimo lo spin come rotazione di un oggetto intorno ad un suo asse (è sbagliato, perchè in tal caso dovrebbe assumere valori solo interi e non seminteri, ma è giusto per rendere l'idea), potremmo osservare un fotone che si muove in una certa direzione data dal vettore d'onda  $\vec{k}$  e con una certa proiezione dello spin lungo la direzione di moto. Se cambiassi sistema di riferimento mettendomi in un sistema in cui il fotone viaggia nella direzione opposta, lo spin rimane quel che è ma la direzione di moto si inverte, dunque l'elicità dovrebbe cambiare segno, quindi l'elicità non sarebbe un invariante di Lorentz. Però questo problema è mal posto perchè ancora una volta non si può trovare un sistema di riferimento in cui il moto del fotone sia invertito, dunque *l'elicità è un invariante relativistico*.

Osservazione: mentre per una particella con massa e ad esempio spin 1, tramite una rotazione (ovvero una trasformazione che faccia parte del gruppo di simmetria del sistema) è possibile passare da uno stato di spin  $(0, \pm 1)$  all'altro, nel caso di massa nulla una rotazione non è capace di cambiare l'elicità del fotone. I fotoni possono esistere in stati di polarizzazione circolare destra o sinistra, oppure rettilinea come sovrapposizione delle due.

### 1.1.3 Particelle elementari

Qual'è il significato della parola 'elementare'? Comunemente, pensiamo ad una particella elementare come ad una particella che non sia composta da altre cose, ovvero che non abbia una struttura interna. Per decidere se una particella è elementare o meno, la facciamo interagire con altri oggetti e vediamo se i risultati consentono interpretazioni del tipo 'oggetto puntiforme', oppure si rende necessaria l'introduzione di un fattore di forma. Mentre indagare un atomo è relativamente facile, poichè bersagliandolo con elettroni e osservando lo scattering si riesce a capire che non si tratta di una particella elementare, parlando di *nuclei* il discorso si complica. Ad esempio, fotoni nel visibile neanche vedono un nucleo, date le sue dimensioni ( $\sim fm$ ), e sappiamo che per investigare la struttura di oggetti di dimensione  $\sim r$  è necessario utilizzare radiazione con una lunghezza d'onda adeguata, ovvero  $\lambda \sim r$ . Poichè l'energia di un fotone di frequenza  $\nu$  è data da  $E = h\nu$ ,  $c = \lambda\nu$ , e  $hc \sim 197 MeV \cdot fm$ , si ha che  $E \sim \frac{1 GeV \cdot fm}{\lambda}$ , dunque per investigare un oggetto di 1fm devo avere un'energia di almeno 1 GeV. Se ipoteticamente i fotoni non potessero essere prodotti più energetici di 1 MeV, utilizzandoli per bombardare i nuclei non si potrebbe osservare nessuna struttura interna dunque concluderemmo che il nucleo è una particella elementare. Da questo esempio capiamo che il concetto di 'elementare' non è un concetto assoluto.

Ci poniamo allora il problema se una particella in interazione si comporti o meno da particella elementare, e il modello standard tratta di tutte le particelle che al giorno d'oggi *sembrano* essere elementari.

### 1.1.4 Simmetrie

Partiamo dal presupposto che lo spazio-tempo sia omogeneo e isotropo e valga la relatività ristretta. Da questo punto di vista, ogni teoria che venga creata deve godere di alcune invarianze, ad esempio quella per trasformazioni di Lorentz. Sia  $\Lambda \in \mathcal{L}$ , dove  $\mathcal{L}$  è il *gruppo di Lorentz*. Tale gruppo deve quindi essere il gruppo di simmetria del sistema, tuttavia non basta e dobbiamo postulare anche invarianza per traslazioni. Aggiungendo al gruppo di Lorentz le traslazioni si ottiene il *gruppo di Poincarè*; la generica trasformazione del gruppo di Poincarè si scrive  $(a, \Lambda)$  dove  $a$  è un quadri-vettore e  $\Lambda$  è una matrice di Lorentz. La legge di

composizione di due trasformazioni di Poincarè è la seguente:

$$(a, \Lambda)(b, \Gamma) = (a + \Lambda b, \Lambda \Gamma)$$

### 1.1.5 Rappresentazioni irriducibili

Sappiamo che gli stati di un sistema fisico vivono nello spazio di Hilbert degli stati,  $\mathcal{H}$ . Se prendo una trasformazione del gruppo di Poincarè, che abbiamo imposto essere il gruppo di simmetria del sistema, e la applico a uno stato  $|s\rangle$ , devo riottenere ancora un vettore che stia nello spazio  $\mathcal{H}$ :

$$U(a, \Lambda)|s\rangle = |t\rangle \in \mathcal{H}$$

Alle particelle elementari viene richiesto che comunque scelti uno stato iniziale e uno finale, esista una trasformazione  $U(a, \Lambda)$  che mandi l'uno nell'altro. Per questo motivo si dice anche che lo spazio  $\mathcal{H}$  non ha sottospazi invarianti (a parte il vettore nullo), ovvero una generica trasformazione deve in linea di principio rimescolare tutti gli stati; le trasformazioni del gruppo si dicono allora *rappresentazioni irriducibili*.

Per quanto abbiamo detto finora, ogni stato deve poter essere contrassegnato con due etichette: la massa, e lo spin.

**Osservazione:** l'elettromagnetismo non è soltanto invariante sotto trasformazioni del gruppo di Poincarè; esso gode anche della simmetria per trasformazione di parità, che non appartiene al gruppo di Lorentz (ma appartiene al gruppo di Lorentz *esteso*). In questo caso, le particelle che entrano nell'elettrodinamica devono conservare la parità, ed è questo il motivo per cui non possono esistere fotoni polarizzati soltanto levogiri, ma anche destrogiri, e viceversa. La simmetria di parità viene violata nelle interazioni deboli, e infatti i neutrini esistono solo con una elicità e non con quella opposta.

Un elettrone con spin su o giù è sempre lo stesso elettrone, mentre per quanto abbiamo detto prima non è possibile ottenere un fotone levogiro da uno destrogiro con una trasformazione di Lorentz, dunque un fotone levogiro e uno destrogiro sono necessariamente due fotoni diversi.

## Capitolo 2

15 gennaio 2008

Abbiamo visto che le trasformazioni del gruppo di Poincarè sono la composizione di una traslazione spaziotemporale di un vettore  $a^\mu$ , e di una trasformazione appartenente al gruppo di Lorentz *ortocrono proprio*,  $\mathcal{L}_+ \uparrow$ . Abbiamo inoltre supposto che il nostro spazio di Hilbert non contenga sottospazi invarianti, e che dunque le rappresentazioni del gruppo di Poincarè sullo spazio siano rappresentazioni irriducibili.

Come conseguenza, se troviamo un operatore  $\mathcal{O}$  (supponiamo sia hermitiano) che commuta con tutte le trasformazioni del gruppo, questo deve necessariamente essere un multiplo dell'identità. Supponiamo  $|s\rangle$  autostato di  $\mathcal{O}$  con autovalore  $\lambda$ , si ha infatti:

$$\mathcal{O}|s\rangle = \lambda|s\rangle$$

Sia  $U$  un operatore appartenente a una rappresentazione del gruppo di Poincarè sullo spazio di Hilbert, per ipotesi esso commuta con  $\mathcal{O}$ ; si ha:

$$\mathcal{O}U|s\rangle \equiv U\mathcal{O}|s\rangle = \lambda U|s\rangle$$

dunque  $U|s\rangle$  appartiene allo spazio proprio dell'autovalore  $\lambda$ , quindi lascia invariato tale sottospazio. Ma ancora abbiamo imposto che lo spazio di Hilbert non abbia sottospazi invarianti, allora deduciamo che  $\mathcal{O}$  abbia un solo autovalore  $\lambda$  su tutto lo spazio, e sia dunque un multiplo dell'identità.

Come si possono individuare gli operatori del tipo di  $\mathcal{O}$ ? I gradi di libertà del gruppo di Poincarè sono 4 per le traslazioni, e 6 per rotazioni e boost, quindi 10. Cominciamo a parlare delle traslazioni, ovvero di trasformazioni del tipo (a,I). Gli operatori unitari che effettuano tali trasformazioni sono della forma:

$$T(a^\mu) = e^{ia_\mu p^\mu}$$

dove  $p^\mu$  è il quadrimpulso, generatore delle traslazioni. E' possibile sommare due traslazioni lungo assi diversi poichè  $[p^\mu, p^\nu] = 0$ . Per trasformazioni di Lorentz, del tipo (0, $\Lambda$ ), gli operatori unitari sono della forma:

$$L(\omega_{\mu\nu}) = e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}}$$

dove stavolta i generatori sono contenuti nel tensore  $M^{\mu\nu}$ , completamente antisimmetrico quindi con solo 6 elementi indipendenti, mentre  $\omega_{\mu\nu}$  è una matrice antisimmetrica con elementi reali.

E' chiaro che i  $M^{\mu\nu}$  devono contenere i generatori delle rotazioni, infatti risulta:

$$\vec{J} = (M^{32}, M^{13}, M^{21})$$

mentre il vettore  $\vec{K}$ , generatore dei boost, è dato da:

$$\vec{K} = (M^{01}, M^{02}, M^{03})$$

L'algebra seguita dai generatori è della forma:

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k$$

$$[J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk}K_k$$

$$[K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk}J_k$$

La terza relazione è la più interessante, in quanto dice che boost in direzioni diverse non commutano tra loro, e che effettuare due boost in un certo ordine non è equivalente ad effettuarli in ordine opposto, bensì compare una rotazione (*rotazione di Wigner*). Vediamo le regole di commutazione tra  $M^{\mu\nu}$  e  $p^\rho$ :

$$[M^{\mu\nu}, p^\rho] = i(\delta^{\mu\rho}p^\nu - \delta^{\nu\rho}p^\mu)$$

I dieci operatori  $p^\mu$  e  $M^{\mu\nu}$  costituiscono dunque i generatori del gruppo di Poincaré; vediamo se è possibile trovare degli operatori che commutino con tutti e 10 i generatori.

Il primo operatore che si comporta bene è  $p^\mu p_\mu$ :

1. commuta col quadrimpulso;
2. E' uno scalare di Lorentz e deve quindi commutare con i generatori delle trasformazioni di Lorentz (e quindi con ogni operatore da essi costruito);

$p^\mu p_\mu$  è un operatore hermitiano, ed ha un unico possibile autovalore su uno stato, *nel caso di una particella elementare*: tale autovalore è la massa al quadrato della particella,  $m^2$ . Un altro invariante del gruppo di Poincaré è costruito in base al vettore di Pauli-Lubanski:

$$W_\mu = \epsilon_{\mu\nu\sigma\rho} M^{\nu\sigma} p^\rho$$

dove  $\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho}$  è il tensore di Levi-Civita completamente antisimmetrico 4-dimensionale. L'operatore cercato è  $W_\mu W^\mu$ , e il suo autovalore su uno stato di particella elementare è  $-\frac{1}{2}s(s+1)m^2$ .

Come abbiamo accennato, lo stato  $|1s\rangle$  dell'idrogeno può essere in linea di principio classificato come particella elementare, anche se poi non viene fatto in pratica perchè siamo in un contesto di energia troppo bassa, e la differenza di energia (e quindi massa) tra lo stato  $|1s\rangle$  e il  $|2p\rangle$  è di una decina di eV circa.

Viceversa, prendiamo i pioni,  $\Pi^\pm$  e  $\Pi$ , e consideriamo il  $\Pi^+$ . Sappiamo che esso è costituito da un quark  $u$  e un quark  $\bar{d}$ , che ha spin 0 e una massa di circa 139MeV; esiste un'altra particella, chiamata  $\rho$ , sempre costituita da un quark  $u$  e un quark  $\bar{d}$ , che però ha una massa di 770MeV. In tal caso la differenza di massa è molto più sostanziosa e una differenziazione ha senso.

Consideriamo adesso il problema della relazione fra instabilità ed 'elementarità' di una particella. Abbiamo visto che il neutrone decade in un protone, un elettrone ed un antineutrino, quindi ci potremmo porre il dubbio se questa instabilità in qualche modo possa darci indizi sul fatto che il neutrone possa non essere una particella elementare. In realtà questo non è vero: alla luce di quello che sappiamo oggi, il neutrone è

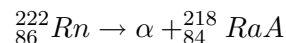
anch'esso formato da quark, dunque non è una particella elementare, tuttavia al momento del suo decadimento questi costituenti intimi non prendono parte alla reazione, dunque non ne abbiamo esperienza. Se volessimo affermare in base al decadimento del neutrone che esso non è una particella elementare, il neutrone stesso dovrebbe essere una specie di 'sacchetto' che contiene un protone, un elettrone e un neutrino, quando però questo è chiaramente falso poichè sappiamo che un neutrino interagisce pochissimo e non c'è verso di ingabbiarlo, e l'elettrone si forma al momento del decadimento (similmente a quello che avviene nella transizione  $2p \rightarrow 1s$ , in cui si crea un fotone dal nulla).

## 2.1 Cenni storici

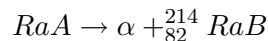
**1896:** nasce l'elettrone, dagli studi di Thomson sui raggi catodici. Dei filamenti riscaldati sottovuoto emettevano dei raggi che si osservavano essere deviati sia da campi elettrici che magnetici. Thomson concluse che erano oggetti carichi, e cercò di calcolarne il rapporto tra carica e massa. Conoscendo la forza di Lorentz  $F = qvB$ , e la forza coulombiana  $F = qE$ , regolando i campi  $E$  e  $B$  in modo che producessero deviazioni uguali riusciva a calcolare la velocità delle cariche; successivamente, conoscendo la differenza di potenziale che le accelerava,  $qV$ , e quindi l'energia cinetica  $\frac{1}{2}mv^2$ , deduceva il rapporto  $\frac{q}{m}$ , accorgendosi che esso era una costante universale uguale per tutti i materiali. A tale oggetto venne dato il nome di elettrone, e la sua scoperta condusse al modello di Thomson dell'atomo, che poi si rivelò sbagliato.

**1913:** due studenti di Rutherford, Geiger e Marsden, stavano effettuando un esperimento assegnato loro dal professore, che consisteva nel vedere se bombardando con particelle  $\alpha$  un metallo, si osservavano particelle scatterate all'indietro. Ovviamente col modello dell'atomo di Thomson, in cui il nucleo era diffuso nella sfera di raggio  $\sim 1\text{\AA}$ , la previsione era che oggetti massivi come un' $\alpha$  passassero indisturbati all'interno e quindi non si dovesse osservare nulla. Invece qualcosa si osservò, e il merito di Rutherford fu nel dare l'interpretazione del risultato, ovvero che il nucleo non era come un panettone in cui gli elettroni erano in canditi, bensì era piuttosto puntiforme e concentrato al centro della sfera atomica.

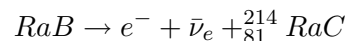
Le particelle  $\alpha$  erano prodotte dalle cosiddette 'emanazioni del radon' (?):



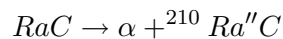
dove il  $\text{RaA}$  o radio A è l'attuale polonio. Le energie delle  $\alpha$  emesse sono di circa 5MeV, e tale processo avviene con una vita media di circa 4 giorni. Successivamente si ha:



dove il  $\text{RaB}$  è l'odierno piombo e il processo avviene con vita media di circa 3 minuti. A questo punto il piombo ha aumentato il suo rapporto  $\frac{Z}{A}$ , e il decadimento successivo non è più  $\alpha$  ma  $\beta^-$ :



dove il  $\text{RaC}$  è il bismuto, e la vita media è di 28 minuti. Infine, il  $\text{RaC}$  decade di nuovo  $\alpha$ :



dove  $\text{Ra}''\text{C}$  è il tallio, e la vita media è di circa 15ms.

Nel costruire i bersagli si cercava di soddisfare due esigenze:

- Massimizzare il numero atomico dell'elemento usato, (come si scoprì più avanti, è  $Z$  piuttosto che il numero di massa ad influire maggiormente nello scattering)
- Ottenere lamine bersaglio più sottili possibile;

il materiale più adatto per questi scopi era l'oro, e si fecero delle misure per vedere quanto influiva lo spessore sul numero di particelle  $\alpha$  che tornavano indietro. Si scoprì che la misura giusta era il micron: andando a lamine più spesse si saturava il flusso di particelle  $\alpha$  all'indietro, anche se questo in realtà non aveva niente a che vedere con lo scattering Rutherford, bensì alla perdita di energia delle  $\alpha$  al passaggio nella materia. Lo spessore della lamina quindi era fondamentale, non doveva essere troppo elevato perchè

- l'urto non deve avvenire troppo in profondità, ovvero quando la particella ha perso gran parte della sua energia
- l'energia che il nucleo colpito restituisce deve essere sufficiente all' $\alpha$  per uscire dalla lamina ed essere rivelata.

Il modello di Rutherford quindi risolse il problema della particelle all'indietro, ma in compenso introdusse quello dell'instabilità dell'atomo.



## Capitolo 3

16 gennaio 2008

Il parametro che ci serve per capire cosa aspettarci dagli esperimenti di scattering è la **sezione d'urto**  $\sigma$ , o la sezione d'urto *differenziale*  $\frac{\partial\sigma}{\partial\Omega}$ . Nel caso dell'esperimento di Rutherford, siamo interessati in particolare alla sezione d'urto di *back-scattering*,  $\sigma_{BK}$ .

Cos'è una sezione d'urto? La definiremo così: supponiamo di avere un centro di scattering immobile (nel quale poniamo l'origine del nostro sistema di riferimento), investito da un flusso di particelle per unità di tempo e superficie, che indicheremo con  $I$ . Assumeremo tale flusso monocromatico (ovvero con energia cinetica assegnata) e diretto in una particolare direzione (diciamo l'asse  $z$ ).

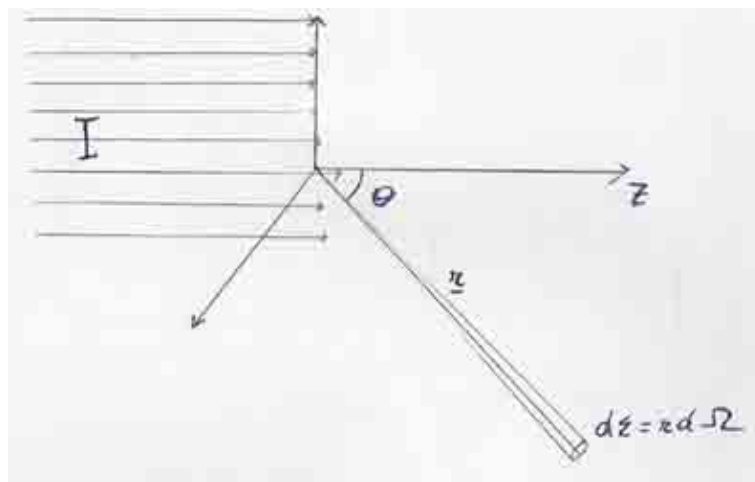


Figura 3.1: Flusso di particelle lungo l'asse  $z$ .

Ci poniamo a grande distanza dal centro di scattering, dove supporremo che l'interazione sia pressoché cessata e le particelle abbiano ripreso ad avere un moto rettilineo uniforme, e osserviamo il numero di particelle che nell'unità di tempo attraversano l'elemento di superficie  $dS$  nella direzione individuata dall'angolo solido  $d\Omega$ . Tale numero sarà proporzionale all'intensità del flusso iniziale, all'angolo solido  $d\Omega$ , e a un fattore che chiameremo **sezione d'urto differenziale** e indicheremo con  $\frac{\partial\sigma}{\partial\Omega}$ :

$$\frac{dn}{dt} = I \frac{\partial\sigma}{\partial\Omega} d\Omega$$

Poichè il flusso  $I$  ha le dimensioni dell'inverso di un tempo per l'inverso di una superficie, la sezione d'urto differenziale ha le dimensioni di una superficie; essa stabilisce la capacità di fare scattering del centro di forze. Vediamo come possiamo legare la sezione d'urto a parametri noti, e introduciamo un ulteriore parametro: l'angolo di scattering  $\theta$ .

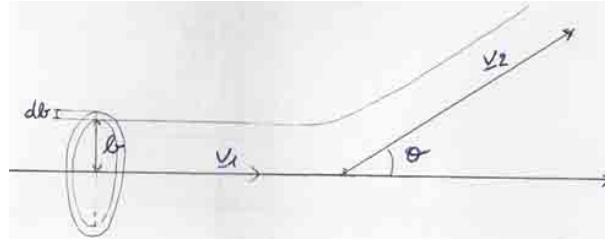


Figura 3.2: Parametro d'urto  $b$  e angolo di scattering  $\theta$ .

Consideriamo una particella con un certo parametro d'urto  $b$ ; tale parametro è collegato col momento angolare iniziale della particella. Se conosco l'interazione posso prevedere quale sarà la traiettoria, e faremo un'ipotesi: lo scattering è effettuato da un potenziale centrale, ovvero del tipo  $V(r)$ , dove  $r$  è il modulo della distanza della particella dal centro di forze. In questa ipotesi, il momento angolare si conserva, l'energia cinetica pure (scattering elastico), mentre non si conserva l'impulso (il sistema non è isolato).

Utilizzeremo coordinate sferiche rispetto all'origine, e poichè il momento angolare si conserva, l'angolo azimutale  $\phi$  per una particella non cambia (scattering piano). La sezione d'urto si calcola considerando le particelle che attraversano la superficie infinitesima  $d\Sigma = b d\phi db$ , e quelle che attraversano la superficie  $dS$  nella direzione dell'angolo solido  $d\Omega$ . L'intensità di particelle è data da:

$$\frac{dn}{dt} = I b d\phi db$$

e per la conservazione del numero di particelle (ricordando che l'angolo azimutale non cambia), deve essere uguale al numero di particelle che attraversano  $dS$ :

$$I b d\phi db = \frac{dn}{dt} = I \frac{\partial \sigma}{\partial \Omega} d\Omega = I \frac{\partial \sigma}{\partial \Omega} \sin(\theta) d\theta d\phi$$

da cui

$$b db = \frac{\partial \sigma}{\partial \Omega} d(-\cos(\theta)) \Rightarrow \frac{1}{2} d(b^2) = \frac{\partial \sigma}{\partial \Omega} d(-\cos(\theta))$$

infine si ottiene l'espressione generale per la sezione d'urto:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \Omega} = \frac{1}{2} \left| \frac{d(b^2)}{d(-\cos(\theta))} \right|$$

dove si è messo il modulo perchè la sezione d'urto deve essere positiva, e il segno della derivata dice solo come varia  $b$  al variare di  $\theta$ . In realtà è causalmente più corretto calcolare come varia  $\theta$  al variare di  $b$ , ma anche se ottenessimo una relazione per  $b = b(\theta)$ , basterebbe invertirla.

Integrando la sezione d'urto differenziale su tutto l'angolo solido si ottiene la sezione d'urto totale  $\sigma_{tot}$ , mentre integrando soltanto per  $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$  si ottiene la sezione d'urto di back-scattering  $\sigma_{BK}$ .

Per quanto riguarda il nostro processo, ovvero scontro di particelle  $\alpha$  su nuclei, è lecito assumere che il centro di forze resti fermo dopo l'urto? Come sappiamo è possibile passare alle coordinate relative, in cui si osserva il moto di una particella con massa uguale alla massa ridotta del sistema  $\alpha$ -nucleo:  $\mu = \frac{m_\alpha M_n}{m_\alpha + M_n}$ . Nel nostro caso la differenza di massa è piuttosto rilevante e l'approssimazione è lecita.

Il potenziale diventa allora funzione delle coordinate relative, e se consideriamo il caso specifico del potenziale coulombiano abbiamo che:

$$V(r) = \frac{z_\alpha Z_n e^2}{r}$$

Poichè il momento angolare si conserva, il moto avviene in un piano e dalle tre coordinate che in linea di principio servono a descrivere un moto spaziale possiamo passare a due: in coordinate polari  $(r, \theta)$ . Abbiamo allora

$$\vec{r} = r(\cos(\theta), \sin(\theta))$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}(\cos(\theta), \sin(\theta)) + r\dot{\theta}(-\sin(\theta), \cos(\theta))$$

Dalla conservazione del momento angolare otteniamo una relazione che ci permette di legare  $\dot{\theta}$  ed  $r$ :

$$l = \mu r^2 \dot{\theta} = \text{costante} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{l}{\mu r^2}$$

Dalla conservazione dell'energia si ha:

$$E = \text{costante} = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{z_\alpha Z_n e^2}{r}$$

che utilizzando la relazione precedente si riscrive:

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\mu r^2 \frac{l^2}{\mu^2 r^4} + \frac{z_\alpha Z_n e^2}{r} = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} + \frac{z_\alpha Z_n e^2}{r} \equiv \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \tilde{V}(r)$$

e vediamo che il moto si riduce a un moto unidimensionale. Consideriamo i due casi in cui  $zZ > 0$  (forza repulsiva) oppure  $zZ < 0$  (forza attrattiva). Nel primo caso,  $\tilde{V}$  è sempre positivo, si annulla per  $r \rightarrow \infty$  e diverge per  $r \rightarrow 0$ .

In questo caso l'energia è sempre positiva, dunque non possono esistere stati legati. Partendo da una certa energia iniziale finita, non ci si può avvicinare indefinitamente al centro di forza, ma ci si deve fermare ad un certo  $r_{min}$ .

Se invece  $zZ < 0$  c'è attrazione, il potenziale ha gli stessi andamenti a zero e all'infinito ma il grafico non è più un'iperbole.

Osserviamo che il potenziale ha un minimo in  $r = -\frac{l^2}{\mu z Z e^2}$  che vale  $\tilde{V}_{min} = -\frac{\mu}{2}(\frac{z Z e^2}{l})^2$ . Vediamo le diverse possibilità:

- Se  $E > 0$  siamo nel caso dello scattering;
- se  $E < 0$  abbiamo stati legati;
- se  $E < \tilde{V}_{min}$  non ci sono soluzioni.

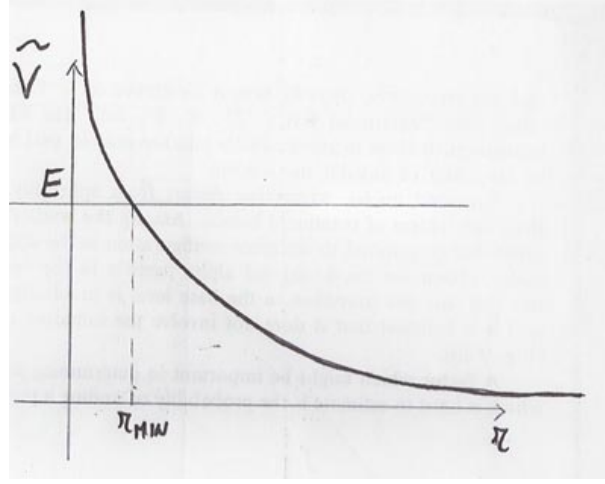


Figura 3.3: Potenziale efficace nel caso  $zZ > 0$ .

Per trovare la traiettoria della particella devo cercare di esprimere  $\theta$  in funzione di  $r$  o viceversa. Uso la conservazione dell'energia::

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \tilde{V}(r) \Rightarrow \dot{r}^2 = \frac{2}{\mu}(E - \tilde{V}) \Rightarrow \dot{r} = \sqrt{\frac{2}{\mu}(E - \tilde{V})}$$

dove ovviamente  $E > \tilde{V}$ , e del momento angolare

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \frac{l}{mr^2} \\ \Rightarrow \frac{d\theta}{dr} &= \frac{l}{\mu r^2 \sqrt{\frac{2}{\mu}(E - \tilde{V})}} \end{aligned}$$

Separando le variabili e integrando la precedente espressione si ottiene:

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_0 + \int^r \frac{dx}{\frac{x^2}{l} \sqrt{2\mu(E - \tilde{V})}} = \theta_0 + \int^r \frac{dx}{x^2 \sqrt{\frac{2\mu}{l^2}(E - \tilde{V})}} = \\ &= \theta_0 + \int^r \frac{dx}{x^2 \sqrt{\frac{2\mu}{l^2}E - \frac{2\mu}{l^2}\frac{l^2}{2\mu x^2} - \frac{2\mu}{l^2}\frac{zZe^2}{x}}} = \theta_0 + \int^r \frac{dx}{x^2 \sqrt{\frac{2\mu}{l^2}E - \frac{1}{x^2} - \frac{2\mu}{l^2}\frac{zZe^2}{x}}} \end{aligned}$$

Introduciamo la variabile  $\xi = \frac{1}{x}$ , con  $d\xi = -\frac{dx}{x^2}$ :

$$= \theta_0 - \int^{\frac{1}{r}} \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{2\mu}{l^2}E - \xi^2 - \frac{2\mu}{l^2}zZe^2\xi}}$$

Adesso definiamo una nuova variabile  $\eta$ , tale che  $\xi = \eta - \xi_0$ ;  $\xi_0$  è un parametro da determinare in maniera opportuna, in modo da far scomparire i termini lineari nell'argomento della radice:

$$\frac{2\mu E}{l^2} - (\eta^2 + \xi_0^2 - 2\mu\xi_0) - \frac{2\mu zZe^2}{l^2}(\eta - \xi_0)$$

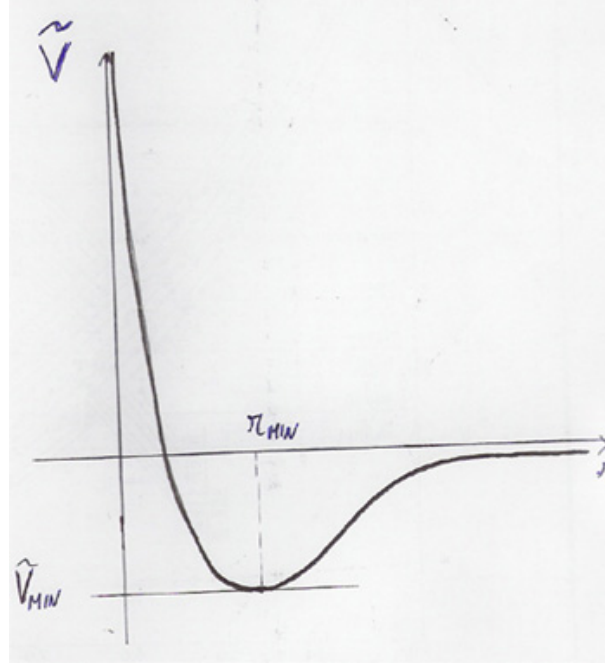


Figura 3.4: Potenziale efficace nel caso  $zZ < 0$ .

Deve essere  $2\eta\xi_0 - 2\eta(\frac{\mu z Z e^2}{l^2}) = 0$ , definisco allora  $\xi_0 = (\frac{\mu z Z e^2}{l^2})$ . Sotto radice resta allora

$$\frac{2\mu E}{l^2} - \eta^2 - \xi_0^2 + 2\xi_0^2 = \frac{2\mu E}{l^2} - \eta^2 + \xi_0^2$$

Definendo la costante  $A = \sqrt{\frac{2\mu E}{l^2} + \xi_0^2}$ , riscriviamo  $\theta(r)$  come:

$$\theta(r) = \theta_0 - \int^{\frac{1}{r} + \xi_0} \frac{d\eta}{\sqrt{A^2 - \eta^2}} = \theta_0 - \int^{\frac{1}{r} + \xi_0} \frac{d\eta}{A\sqrt{a - \frac{\eta^2}{A^2}}}$$

Definiamo l'ennesima nuova variabile  $y = \frac{\eta}{A}$ , e otteniamo finalmente:

$$\theta - \theta_0 = \arccos\left(\frac{\frac{1}{r} + \xi_0}{A}\right) \Rightarrow \cos(\theta - \theta_0) = \frac{\frac{1}{r} + \xi_0}{A} \Rightarrow \frac{1}{r} = A \cos(\theta - \theta_0) - \xi_0$$

l'ultima espressione è l'equazione per un ramo d'iperbole, la cui falda contiene o non contiene il fuoco a seconda che  $\xi_0$  sia positivo o negativo. Vediamo inoltre che  $\frac{1}{r}$  ha un massimo a sinistra quando  $r = r_{min}$ , e a destra quando il coseno fa 1, quindi se scegliamo opportunamente l'origine dei  $\theta$  possiamo prendere  $\theta_0 = \theta(r_{min}) = 0$ . Riscriviamo allora

$$\frac{1}{r} = -\xi_0 + A \cos(\theta)$$

### 3.1 Generalità sulle coniche

Per definire una conica nel piano ho bisogno di un punto (detto *fuoco*) e di una retta (la *generatrice*). Preso un generico punto P sulla curva, si definisce l'**eccentricità**  $\epsilon$  come il rapporto tra la distanza punto-fuoco

e la distanza punto-generatrice:

$$\epsilon = \frac{PF}{PH} = \begin{cases} > 1, & \text{iperbole;} \\ = 1, & \text{parabola;} \\ < 1, & \text{ellisse;} \\ = 0, & \text{cerchio.} \end{cases}$$

Consideriamo il caso in cui il fuoco sia interno all'iperbole:

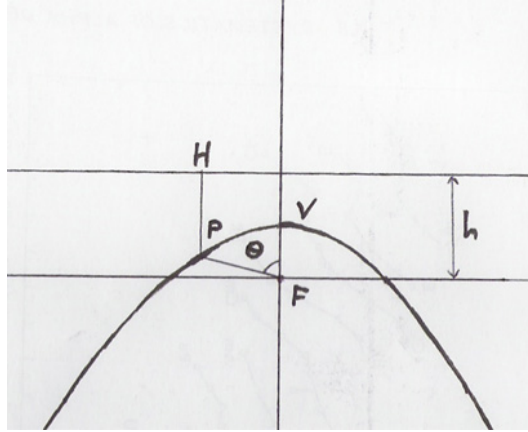


Figura 3.5: Traiettoria iperbolica con fuoco interno.

Il fuoco  $F$  è preso come origine del sistema di riferimento, quindi  $PF = r$ ; se  $h$  è la distanza tra l'asse  $x$  e la direttrice, risulta  $PH = h - r \cos(\theta)$ , da cui l'eccentricità è:

$$\epsilon = \frac{PH}{PF} = \frac{r}{h - r \cos(\theta)} \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{1}{h\epsilon} + \frac{1}{h} \cos(\theta)$$

Ricordando il risultato precedente  $\frac{1}{r} = -\xi_0 + A \cos(\theta)$ , possiamo identificare  $A$  con  $\frac{1}{h}$  e  $-\xi_0$  con  $\frac{1}{h\epsilon}$ ; tuttavia sia  $h$  che  $\epsilon$  sono quantità positive, quindi deve essere necessariamente  $-\xi_0 > 0$ , ovvero  $zZ < 0$ . Concludiamo che nel caso di cariche discordi, e quindi di forza attrattiva, la traiettoria è iperbolica con fuoco interno.

Se invece il fuoco è esterno alla falda, possiamo scrivere analogamente

$$PF = r$$

$$PH = r \cos(\theta) - h$$

$$\Rightarrow \epsilon = \frac{r}{r \cos(\theta) - h}$$

Osserviamo che quest'ultima condizione è analoga a quella precedente, se mandiamo  $\epsilon$  in  $-\epsilon$ . Il risultato dunque sarà semplicemente:

$$\frac{1}{r} = -\frac{1}{h\epsilon} + \frac{1}{h} \cos(\theta)$$

Con le stesse identificazioni di prima, concludiamo che se è  $zZ > 0$ , ovvero l'interazione è repulsiva, la traiettoria è ancora un ramo d'iperbole ma con fuoco esterno alla falda.

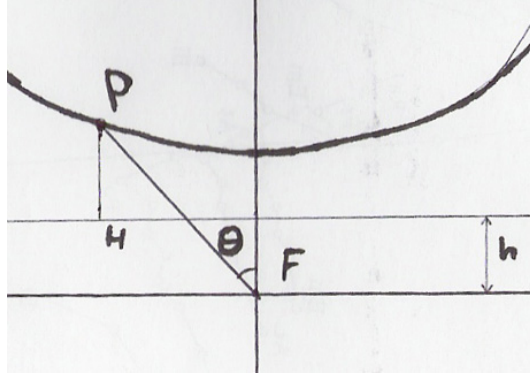


Figura 3.6: Traettoria iperbolica con fuoco esterno.

Osserviamo che per costruzione  $A > |\xi_0|$ , per questo la traiettoria è iperbolica. Nel limite  $A = \xi_0$  (ovvero  $E = 0$ , la traiettoria è parabolica.

Non tutti i  $\theta$  sono possibili: la condizione  $A \cos(\theta) - \xi_0 \geq 0$  impone che  $\cos(\theta) \geq \frac{\xi_0}{A}$ , dunque  $|\theta| \leq \arccos(\frac{\xi_0}{A}) = \theta_{max}$ . Vediamo che quest'angolo corrisponde alla traiettoria asintotica della particella:

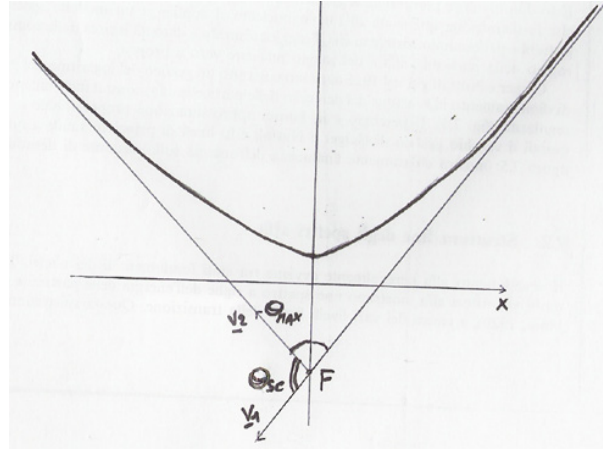


Figura 3.7:  $\theta_{max}$  nel caso di fuoco esterno.

L'angolo di deviazione massima ci permette di calcolare l'angolo di scattering  $\theta_{sc}$ ; infatti si ha  $\theta_{sc} = \pi - 2\theta_{max}$  nel caso di fuoco esterno alla falda, e  $\theta_{sc} = \pi - 2(\pi - \theta_{max}) = 2\theta_{max} - \pi$  nel caso di fuoco interno.

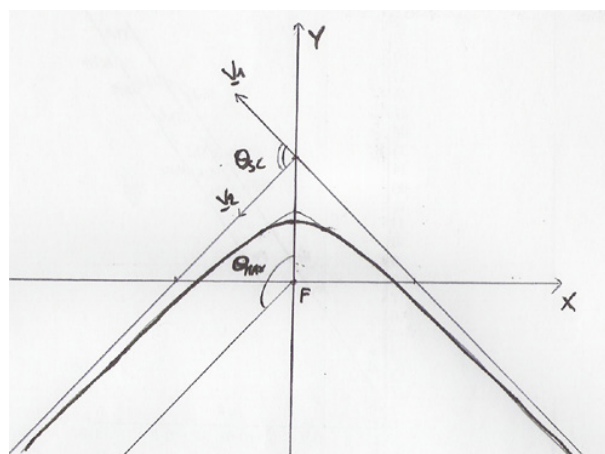


Figura 3.8:  $\theta_{max}$  nel caso di fuoco interno.



## Capitolo 4

Lunedì 21 gennaio 2008

Vogliamo arrivare a determinare la sezione d'urto differenziale in base alla relazione:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} \left| \frac{db^2}{d(\cos(\theta_{sc}))} \right|$$

Riassumiamo brevemente i risultati ottenuti per quanto riguarda l'angolo di scattering:

$$\begin{cases} \theta_{sc} = \pi - 2\theta_{max}, & \xi_0 > 0; \\ \theta_{sc} = -\pi + 2\theta_{max}, & \xi_0 < 0. \end{cases}$$

Introduciamo l'angolo  $\alpha$ , definito da:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{|\xi_0|}{A}\right)$$

Se  $\xi_0 > 0$ ,  $\theta_{max} \equiv \alpha$ , mentre se  $\xi_0 < 0$ ,  $\theta_{max} = \arccos(-\frac{|\xi_0|}{A}) = \pi - \alpha$ . Dunque l'angolo di scattering si scrive come  $\theta_{sc} = \pi - 2\alpha$ , sia per  $\xi_0 > 0$  che per  $\xi_0 < 0$ . D'ora in poi scriveremo sempre  $\theta$  intendendo  $\theta_{sc}$ .

Dobbiamo trovare il legame tra l'angolo di scattering e la cinematica del problema. Ottenuto  $\theta$ , calcoliamo  $\cos(\theta)$ :

$$\cos(\theta) = \cos(\pi - 2\alpha) = -\cos(2\alpha) = -\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1 - 2\cos^2(\alpha)$$

ma  $\cos(\alpha) = \frac{|\xi_0|}{A}$ , quindi:

$$\begin{aligned} \cos(\theta) &= 1 - 2\frac{|\xi_0|^2}{A^2} = 1 - 2\frac{\xi_0^2}{\xi_0^2(1 + \frac{2\mu E}{\xi_0^2 l^2})} = 1 - \frac{2}{1 + \frac{2\mu E}{l^2} \frac{l^4}{\mu z Z e^2}} = 1 - \frac{2}{1 + \frac{2El^2}{\mu(zZe^2)^2}} = 1 - \frac{2\mu(zZe^2)^2}{2\mu(zZe^2)^2 + 2El^2} = \\ &= \frac{2El^2 - 2\mu(zZe^2)^2}{2\mu(zZe^2)^2 + 2El^2} \end{aligned}$$

$E$  è l'energia cinetica della particella quando ancora è lontana e si suppone l'interazione non sia ancora partita, mentre  $l$  è il suo momento angolare:

$$2E = \mu v^2$$

$$l = \mu v b$$

$$\Rightarrow 2El^2 = 2E\mu^2 v^2 b^2 = (2E)^2 \mu b^2$$

$$\Rightarrow \cos(\theta) = \frac{\mu(2E)^2 b^2 - \mu(zZe^2)^2}{\mu(2E)^2 b^2 + \mu(zZe^2)^2} = \frac{(2E)^2 b^2 - (zZe^2)^2}{(2E)^2 b^2 + (zZe^2)^2} \equiv \frac{\beta - \gamma}{\beta + \gamma}$$

Posso invertire la relazione e ottenere  $b$  in funzione di  $\cos(\theta)$ :

$$\beta = \gamma \frac{1 + \cos(\theta)}{1 - \cos(\theta)}$$

$$\Rightarrow (2E)^2 b^2 = (zZe^2)^2 \frac{1 + \cos(\theta)}{1 - \cos(\theta)} \Rightarrow b^2 = \frac{(zZe^2)^2}{(2E)^2} \frac{1 + \cos(\theta)}{1 - \cos(\theta)}$$

E' immediato calcolare la derivata  $\frac{db^2}{d(\cos(\theta))}$ :

$$\frac{db^2}{d(\cos(\theta))} = \frac{(zZe^2)^2}{(2E)^2} \left( \frac{1 - \cos(\theta) + 1 + \cos(\theta)}{(1 - \cos(\theta))^2} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(zZe^2)^2}{(2E)^2} \frac{1}{(1 - \cos(\theta))^2} \equiv \frac{(zZe^2)^2}{(2E)^2} \frac{1}{4 \sin^2(\frac{\theta}{2})}$$

Osserviamo subito che l'espressione appena ricavata ha una 'patologia' per  $\theta = 0$ , ma ci torneremo in seguito. Cerchiamo adesso la sezione d'urto di back-scattering (FIGURA):

$$\sigma_{BK} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{d\sigma}{d\Omega} (\sin(\theta)) d\theta = 2\pi \frac{(zZe^2)^2}{(2E)^2} \int_0^{-1} \frac{1}{(1 - \cos(\theta))^2} d(\cos(\theta)) = \pi \frac{(zZe^2)^2}{(2E)^2}$$

Sostituendo i valori numerici per lo scattering  $\alpha - Au$  si ottiene:

$$\sigma_{BK}^{Au} = \pi \left( \frac{2 \cdot 79(4,8 \cdot 10^{-10})^2 \text{erg} \cdot \text{cm}}{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-5} \text{erg}} \right)^2 \simeq 1430 \cdot 10^{-26} \text{cm}^2 = 14,30 \text{barn}$$

Il risultato è una sezione d'urto piuttosto grossa, infatti Geiger e Marsden avevano osservato un numero considerevole di particelle che scatteravano all'indietro. Per l'alluminio, con  $Z = 26$ , ci aspetteremmo una sezione d'urto di back-scattering circa 36 volte più piccola di quella dell'oro, o 38 nel caso del piombo ( $Z = 80$ ); in realtà risulta che la sezione d'urto sperimentale è un pò più piccola di quella teorica. Questo è dovuto al fatto che la nostra schematizzazione prevede un potenziale coulombiano puro, mentre nella realtà sono presenti effetti di schermo dovuti agli elettroni del nucleo e al fatto che la dipendenza da  $Z$  non è così forte come nella formula di Rutherford.

Se avessimo considerato la sezione d'urto di forward-scattering, con calcoli analoghi avremmo ottenuto una formula di una sezione d'urto che però diverge. Anche questo è il riflesso della schematizzazione di potenziale coulombiano puro, che come sappiamo ha range infinito: dalla definizione stessa di sezione d'urto, prendiamo un flusso monocromatico di particelle tutte con la stessa velocità e nella stessa direzione, questo entra in interazione col centro di forze, guardiamo in un preciso angolo solido, contiamo il numero di particelle deflesse in quell'angolo, e otteniamo la sezione d'urto. Ma se consideriamo un processo classico, pensiamo il flusso di particelle come esteso indefinitamente nello spazio, e andiamo a controllare le particelle deflesse a piccoli angoli  $\theta_{sc} \sim 0$ , qualunque particella, anche quella più lontana dal centro di forze, verrà minimamente deflessa e contribuirà al conteggio. Poichè il range dell'interazione è infinito, sarà infinita anche l'area efficace di interazione tra il centro di scattering e le particelle del flusso.

Nella realtà si dovrà tenere conto degli effetti di schermo; se il braccio della particella è minore o uguale di una certa lunghezza, che possiamo prendere all'incirca uguale al raggio atomico, allora l'interazione è di tipo coulombiano. Possiamo altresì assumere ragionevolmente che da una certa distanza in poi l'interazione sia nulla, ad esempio per  $b > R_{max}$ . In queste condizioni, la sezione d'urto assume il valore  $\pi R_{max}^2$ , ed è evidente il suo significato di area efficace attorno al centro di scattering entro la quale le particelle proiettile risentono dell'interazione.(FIGURA)

## 4.1 Potenza irradiata e instabilità dell'atomo

Sappiamo che una carica in moto accelerato in un sistema inerziale irradia con una potenza per angolo solido data dall'espressione (dovuta a **Larmor**):

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{4\pi} \frac{e^2}{c^3} |\vec{a}|^2 \sin^2(\theta)$$

Tale espressione è del tutto classica, nel senso che

- non è quantistica;
- vale per velocità  $v \ll c$ , quindi non è relativistica.

E' possibile trovare una espressione per la potenza irradiata che sia anche relativistica? La risposta è sì, e vedremo in breve come. Per prima cosa determiniamo la potenza totale irradiata in tutto lo spazio, nel limite non relativistico, come:

$$P_{tot} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} |\vec{a}|^2$$

Poichè la relatività ristretta deve coincidere con le conclusioni classiche, se  $v \ll c$ , tale espressione della potenza è relativisticamente valida se considero una particella in un sistema di riferimento **inerziale** in cui essa sia istantaneamente ferma, il **riferimento tangente**. In tale riferimento, la potenza irradiata istante per istante è data dalla formula di Larmor  $P_{tot} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} |\vec{a}|^2$ , tuttavia tale sistema non è interessante perchè non è fisso; siamo allora interessati a determinare l'espressione per la potenza irradiata in un sistema di riferimento qualunque, ad esempio quello fisso del laboratorio. Dimosteremo adesso che la potenza irradiata è uno scalare di Lorentz, ovvero non dipende dal sistema di riferimento: mettiamoci nel riferimento tangente, e consideriamo l'istante  $\bar{t}$  in cui supponiamo di 'fotografare' il sistema, con la particella nella posizione  $\vec{X}(\bar{t})$ . La particella è istantaneamente ferma, dunque se lasciamo passare un intervallo di tempo infinitesimo  $dt$ , al tempo  $\bar{t} + dt$  la particella sarà sempre in  $\vec{X}(\bar{t} + dt)$  perchè al prim'ordine la velocità  $\vec{v}$  è rimasta nulla. Se consideriamo gli eventi di inizio e fine emissione, essi hanno coordinate:

1.  $(\bar{t}, \vec{X}(\bar{t}))$
2.  $(\bar{t} + dt, \vec{X}(\bar{t} + dt)) \equiv (\bar{t} + dt, \vec{X}(\bar{t}))$

Dal punto di vista dell'irraggiamento, si può dire che la variazione nel quadrimpulso della particella tra i due stati 1) e 2) è data da:

$$dW^\mu = (dW, 0)$$

Infatti la distribuzione angolare di potenza è simmetrica in  $\phi$  e pari in  $\theta$ , non ci sono variazioni di velocità nè rinculo, pertanto la variazione di impulso spaziale deve essere necessariamente nulla; la variazione di energia invece è data da  $dW = Pdt$ .

Se vogliamo passare al sistema del laboratorio, lo faremo attraverso una trasformazione di Lorentz rappresentata dalla matrice  $\Lambda$ . In generale l'emissione non sarà più simmetrica come nel caso del riferimento tangente, e la variazione del quadrimpulso tra i due eventi si trasformerà come:

$$dW'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu dW^\nu \Rightarrow dW'^\mu = (\Lambda^0{}_0 dW, \Lambda^i{}_0 dW)$$

Vediamo come sono cambiati i due eventi nel sistema del laboratorio:

1.  $(\Lambda^0{}_0 \bar{t} + \Lambda^0{}_j X^j(\bar{t}), \Lambda^i{}_0 \bar{t} + \Lambda^i{}_j X^j(\bar{t}))$
2.  $(\Lambda^0{}_0 \bar{t} + \Lambda^0{}_j X^j(\bar{t} + dt) + \Lambda^0{}_0 dt, \Lambda^i{}_j X^j(\bar{t} + dt) + \Lambda^i{}_0 \bar{t})$

Osserviamo che nel nuovo sistema la differenza temporale tra i due eventi è data da  $dt' = \Lambda^0{}_0 dt$ , mentre la potenza irradiata è sempre data dalla variazione di energia  $P' = \frac{dW'}{dt'} = \frac{\Lambda^0{}_0 dW}{\Lambda^0{}_0 dt} = \frac{dW}{dt} = P$ , dunque la potenza irradiata è un invariante di Lorentz.

Come è possibile questo? Fisicamente, tutto dipende dal fatto che i due eventi avvengono nello stesso posto, quindi il rimescolamento della componente temporale ha la stessa forma nei due casi. In altre parole, la differenza tra i due eventi nel riferimento tangente è un quadrivettore con la sola componente temporale,  $(dt, 0)$ , così come la variazione di quadrimpulso,  $(dW, 0)$ , pertanto la trasformazione della componente temporale consiste nella moltiplicazione per uno stesso fattore,  $\Lambda^0{}_0$ .

Veniamo adesso alla forma della potenza irradiata, nel caso la particella abbia in un certo riferimento (ad esempio il laboratorio) velocità relativistica:

$$P = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c} \gamma^6 (|\dot{\vec{\beta}}|^2 - |\vec{\beta} \wedge \dot{\vec{\beta}}|^2)$$

Nel modello classico in cui l'elettrone gira in tondo attorno al nucleo, risulta  $\vec{\beta} \perp \dot{\vec{\beta}} = \vec{a}$ , e la potenza si riscrive:

$$P = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c} \gamma^6 |\dot{\vec{\beta}}|^2 (1 - \vec{\beta}^2) = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c} \gamma^4 |\dot{\vec{\beta}}|^2 = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \gamma^4 |\vec{a}|^2$$

La formula appena ricavata e la formula di Larmor sembrerebbero essere in disaccordo, avendo appena dimostrato che la potenza è uno scalare di Lorentz. Tuttavia nelle formule appare l'accelerazione spaziale  $\vec{a}$ , che ovviamente non è un invariante di Lorentz, e sono entrambe valide a patto di considerare  $\vec{a}$  come l'accelerazione nel sistema di riferimento in cui si sta misurando la potenza. In caso di moto circolare avremo in generale:

$$\begin{cases} P = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} |\vec{a}_{tg}|^2, & \text{nel riferimento tangente, dove } v = 0 \rightarrow \gamma = 1; \\ P = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \gamma^4 |\vec{a}_S|^2, & \text{in qualsiasi altro sistema di riferimento S.} \end{cases}$$

## Capitolo 5

22 gennaio 2008

Abbiamo dimostrato che la potenza irradiata è un invariante di Lorentz, dunque deve essere possibile esprimere la formula  $P = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} |\vec{a}|$ , valida nel sistema di riferimento tangente, in forma covariante a vista. Per fare questo dovremo coinvolgere dei prodotti scalari di quadrivettori che abbiano a che fare con la cinematica del problema; la scelta non è troppo vasta, e ci limiteremo a considerare i quadrivettori  $x^\mu$ ,  $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$  e  $a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau}$ , rispettivamente il quadrivettore posizione, la quadrivelocità e la quadriaccelerazione. E' chiaro che la posizione non può essere considerata, non rispettando l'invarianza per traslazioni. Il prodotto scalare  $u^\mu u_\mu$  deve essere scartato poichè contiene soltanto derivate prime. Rimane il prodotto  $u^\mu a_\mu$ , che tuttavia è nullo poichè  $u^\mu u_\mu = 1 \Rightarrow 2 \frac{du^\mu}{d\tau} u_\mu = 0$ , e il prodotto  $a^\mu a_\mu$ .

Consideriamo la quadrivelocità  $u^\mu = \gamma(1, \vec{\beta})$ . Derivando la quadrivelocità rispetto al tempo proprio (e ricordando che  $\frac{dt}{d\tau} = \gamma$ ) si ottiene la quadriaccelerazione; calcoliamo esplicitamente la componente temporale:

$$a^0 = \frac{du^0}{d\tau} = \frac{du^0}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \gamma \dot{\gamma} = \gamma \partial_t \left( \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) = \gamma \left( -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^3}} \cdot (-2\beta \dot{\beta}) \right)$$

Osserviamo che  $a^0$  è proporzionale a  $\beta$ : quindi nel riferimento tangente, dove  $\beta = 0$ , la quadriaccelerazione ha la forma  $a^\mu = (0, \frac{d(\gamma\vec{\beta})}{d\tau})$ . In generale si ha:

$$\frac{d(\gamma\vec{\beta})}{d\tau} = \gamma \frac{d(\gamma\vec{\beta})}{dt} = \gamma(\dot{\gamma}\vec{\beta} + \gamma\dot{\vec{\beta}})$$

ancora, il primo addendo in parentesi è proporzionale a  $\beta$ , dunque nel riferimento tangente la quadriaccelerazione ha la forma ( $\gamma = 1$ ):  $a^\mu = (0, \dot{\vec{\beta}}) = (0, \vec{a}_{tg})$ . Nel riferimento tangente il prodotto  $a_\mu a^\mu = -|\vec{a}|^2$ , e possiamo scrivere per la potenza irradiata:

$$P = -\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} a^\mu a_\mu$$

Ricordiamo che per una particella in moto circolare, l'espressione per la potenza irradiata in un sistema di riferimento in moto con velocità  $\vec{v}$  rispetto al riferimento tangente, la potenza irradiata è data dalla formula  $P = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \gamma^4 |\vec{a}|^2$ . Per un elettrone classico in orbita circolare attorno al nucleo possiamo scrivere:

$$F = ma$$

$$\frac{e^2}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow v^2 = \frac{e^2}{mr}$$

La prima cosa che ci dobbiamo chiedere è se l'elettrone è relativistico: basta dividere la formula della velocità per  $c^2$ :

$$\frac{v^2}{c^2} = \beta^2 = \frac{e^2}{mc^2} \frac{1}{r} = r_c \frac{1}{r}$$

dove  $r_c$  è il raggio classico dell'elettrone ( $\sim 2,8 \cdot 10^{-13} \text{cm}$ ). Allora  $\beta^2 \sim \frac{r_c}{r}$ ; come valore approssimativo di  $r$  possiamo prendere il raggio di Bohr  $R_B = \frac{\hbar^2}{me^2} = (\frac{\hbar c}{e^2})^2 \frac{e^2}{mc^2} = \alpha^{-2} r_c$ . Dunque  $\beta^2 = \alpha^2$ , quindi possiamo considerare l'elettrone non relativistico. Ovviamente il valore di  $\beta$  dipende dalla distanza dell'elettrone dal nucleo, ma poichè perchè  $\beta$  arrivi a valori vicini all'unità bisogna che l'elettrone arrivi a distanze dell'ordine del fermi, potremo supporre il calcolo sempre classico. Allora la potenza si riscrive:

$$P = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \left( \frac{v^2}{r} \right)^2 = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \frac{v^4}{r^2}$$

Dobbiamo vedere come la perdita di energia si riflette sulla traiettoria; per il teorema del viriale possiamo scrivere:

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{e^2}{r} = -\frac{1}{2} m v^2 = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{r}$$

La variazione di energia per unità di tempo, cambiata di segno, deve essere uguale alla potenza irradiata, per la conservazione dell'energia:

$$\begin{aligned} \frac{e^2}{2r^2} \dot{r} + \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \frac{v^4}{r^2} &= 0 \\ \dot{r} = -\frac{4}{3} \frac{v^4}{c^3} &= -\frac{4}{3} \frac{1}{c^3} \left( \frac{e^2}{mr} \right)^2 = -\frac{4}{3} c \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{1}{r^2} = -\frac{4}{3} c \frac{r_c^2}{r^2} \\ \Rightarrow \dot{r} = -\frac{4}{3} c \frac{r_c^2}{r^2} &\Rightarrow drr^2 = -\frac{4}{3} cr_c^2 dt \\ \Rightarrow \frac{1}{3} r^3 &= -\frac{4}{3} cr_c^2 t + K \Rightarrow r^3 = -4cr_c^2 t + K' \end{aligned}$$

A  $t = 0$ , la costante  $K'$  vale  $R_B^3$ :

$$R_B^3 - r^3 = 4cr_c^2 t$$

Possiamo quindi calcolare quanto tempo ci mette l'elettrone a collassare sul nucleo ( $r \sim 0$ ):

$$t \sim \frac{R_B^3}{4cr_c^2} = \frac{(\alpha^{-2} r_c)^3}{4cr_c^2} = \frac{\alpha^{-6} r_c}{4c} \sim 1,6 \cdot 10^{-11} \text{secondi}$$

## 5.1 Cenni storici sul nucleo

Subito dopo la scoperta del nucleo da parte di Rutherford, ci si mise in moto per capire com'era fatto. La prima cosa che fu fatta fu bombardare atomi di idrogeno con particelle  $\alpha$ , e l'effetto di tale bombardamento era una radiazione nuova, incompatibile con quelle già conosciute come le  $\alpha$  per quanto riguardava il range. Le particelle prodotte dal bombardamento dell'idrogeno viaggiavano infatti parecchio prima di perdere la loro energia, e Rutherford le battezzò *H-particles*, interpretandole come costituenti del nucleo dell'idrogeno.

Marsden dal canto suo si accorse che le H-particles comparivano anche quando le  $\alpha$  si propagavano in aria, ma a questo punto l'ipotesi di Rutherford era incompatibile con la scarsità di idrogeno nell'aria.

Poi ci fu la prima guerra mondiale, Rutherford e i suoi allievi abbandonarono temporaneamente gli studi sull'argomento, per riprenderli a guerra finita, ed accorgersi che bombardando sostanze di varia natura (anche sprovviste di idrogeno), queste H-particles facevano la loro apparizione. Conclusero che tali particelle dovessero essere in realtà dei costituenti di qualsiasi nucleo, e così nacque il *protone*.

**1920:** Rutherford, in una delle sue lezioni, per spiegare la massa dell'elio buttò lì l'ipotesi che all'interno del nucleo ci dovessero essere anche altre particelle come il protone, ma scariche. A quei tempi però si cercava di fare tutto col minimo numero di particelle possibile (al tempo elettroni, protoni e fotoni), e l'idea di dover introdurre una nuova particella venne inizialmente osteggiata. L'ipotesi più accreditata, viceversa, era che nel nucleo oltre a quattro protoni ci dovessero essere anche due elettroni (*elettroni nucleari*) per ottenere carica nucleare +2.

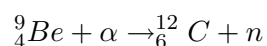
**1930:** Bethe e Becquerel (?) scoprono che bombardando atomi di berillio con le particelle  $\alpha$  provenienti dal decadimento del Polonio, si otteneva una radiazione sicuramente neutra (non veniva deviata da campi elettrici o magnetici), estremamente penetrante, in grado persino di spaccare altri nuclei. Inizialmente si spiegò tale fenomeno pensando a dei fotoni di altissima energia, Ilene Curie col marito studiarono il fenomeno usando idrogeno e altri gas. Si accorsero che usando sostanze idrogenate come la paraffina, la radiazione era in grado di estrarre protoni con energia piuttosto elevata. Addirittura, con sostanze non idrogenate la radiazione riusciva a sbalzare fuori degli ioni. Tuttavia, studiando la cinematica del problema per due diversi materiali, l'ipotesi del fotone fu scartata perchè portava a risultati inconsistenti. **Chadwick** infatti osservò le velocità di rinculo delle particelle estratte dalla radiazione. Misurando la velocità iniziale dei bersagli appena sbalzati, e ipotizzando che il proiettile fosse una particella di massa  $m$  e velocità  $\vec{v}$ , riuscì a dare una stima della massa di questa nuova particella: l'impulso iniziale della particella proiettile è  $m\vec{v}$ , mentre la massa totale (proiettile+bersaglio) è  $M_{tot} = m + M$ . La velocità del baricentro risulta:

$$\vec{v}_b = \frac{m\vec{v}}{M + m}$$

Nel sistema del baricentro gli impulsi delle particelle proiettile e bersaglio sono uguali e opposti; se l'urto è elastico i loro moduli si conservano anche se può cambiare la direzione. Se la particella bersaglio è inizialmente ferma, dopo l'urto acquisisce una velocità:

$$\vec{v}_M = 2\vec{v}_b = \frac{2m\vec{v}_{max}}{m + M}$$

dove  $\vec{v}_{max}$  è la velocità massima della particella proiettile. Utilizzando come bersagli in un caso protoni, in un altro azoto, riuscì a dare una stima della massa della particella proiettile, trovando che doveva essere circa 0,9 volte la massa del protone. In realtà la reazione completa era:



**1931:** nasce ufficialmente il neutrone. Il 1932 è un anno d'oro, dal punto di vista della semplicità del quadro delle particelle elementari: si conoscevano gli atomi, i protoni, gli elettroni e i neutroni, e stop, e da un punto di vista ideale era tutto perfetto. C'era in realtà anche una quarta particella, il fotone; tuttavia, anche se nel 1905, con il suo lavoro sull'effetto fotoelettrico, Einstein ne aveva già postulato l'esistenza, la

sua affermazione nella comunità scientifica fu lenta e sofferta, tant'è che Einstein stesso ricevette il Nobel soltanto nel 1921; ciononostante c'era ancora qualcuno che mugugnava, e ci volle la scoperta dell'effetto Compton nel 1923 per dipanare ogni dubbio.

Perchè tutta questa avversione? Accettare il fotone come particella era una grave rottura con l'elettromagnetismo classico. Ormai ci eravamo abituati al fatto che assorbimento ed emissione da parte dei nuclei dovessero avvenire in pacchetti quantizzati di energia, ma almeno la propagazione della radiazione doveva avvenire in modo classico. Per spiegare l'effetto Compton invece una trattazione classica non era adeguata, e bisognava necessariamente ipotizzare una interazione tra un elettrone e una particella di massa nulla, dotata di energia  $E$  ed impulso  $\vec{p}$ .

Classicamente si sapeva calcolare l'interazione tra la radiazione elettromagnetica ed elettroni liberi, ma ciò che non poteva assolutamente cambiare era la frequenza della radiazione scatterata: consideriamo infatti un'onda piana monocromatica che investe un elettrone. (FIGURA)

L'equazione di moto per l'elettrone (supposto inizialmente fermo) si scrive come:

$$m\ddot{\vec{x}} = e\vec{E}(t, \vec{x})$$

Se l'onda è piana tale equazione si riscrive:

$$\ddot{\vec{x}} = \frac{e}{m}\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$$

che è l'equazione di un moto armonico. Già con questa scrittura abbiamo tacitamente fatto una approssimazione: abbiamo infatti trascurato l'effetto sul moto del campo magnetico che necessariamente accompagna quello elettrico in un'onda elettromagnetica. Vediamo che nel nostro caso questa approssimazione non è brutale poichè la velocità massima che l'elettrone può assumere è:

$$v_{max} = \frac{eE_0}{m\omega} = \frac{eE_0}{m2\pi} \frac{\lambda}{c} = c \frac{eE_0}{mc^2} \frac{\lambda}{2\pi} \equiv c\beta$$

Dunque perchè gli effetti dovuti al campo magnetico diventino importanti deve essere  $\beta \sim 1$ . Possiamo rileggere questa condizione in questo modo: per poter trascurare gli effetti magnetici è necessario il lavoro fatto dalla forza coulombiana per un tratto pari alla lunghezza d'onda della radiazione incidente sia trascurabile rispetto alla massa dell'elettrone. Questo di solito è ben verificato a meno di usare campi elettrici mostruosi.

Fatte le dovute precisazioni, ci ricordiamo che una carica elettrica accelerata irraggia; poichè il moto dell'elettrone avviene a frequenza  $\omega$ , la radiazione sarà emessa a frequenza  $\omega$ , la stessa della radiazione incidente (scattering Thomson). Compton invece scoprì che la frequenza di emissione dipendeva dall'angolo di scattering, dunque l'elettromagnetismo classico falliva nello spiegare il fenomeno.



## Capitolo 6

### Mercoledì 23 gennaio

La potenza irradiata per unità di angolo solido da un elettrone investito da un'onda piana monocromatica di frequenza  $\omega$  è espressa da:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{4\pi} \frac{e^2}{c^3} \left| \frac{e\vec{E}(t)}{m} \right|^2 \sin^2(\theta)$$

In tale scrittura c'è sia l'approssimazione di assenza di campo magnetico che quella di indipendenza dalla posizione: l'elettrone in queste condizioni effettua un moto trasversale alla direzione di propagazione dell'onda,  $\vec{k}$ , e parallelo al campo  $\vec{E}$ . Se consideriamo anche il campo magnetico, abbiamo già accennato che ci dovrà essere una forza di Lorentz  $\vec{F}_L$  che tenderà a far spostare l'elettrone lungo  $\vec{k}$ . Inoltre, il campo elettrico dipende anche dalla posizione  $\vec{x}$  dell'elettrone, e il moto potrebbe essere in generale più complicato di una semplice oscillazione di frequenza  $\omega$ . Questo avviene perchè l'onda piana è descritta da un'espressione del tipo  $e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$ , dove è chiaramente presente anche la posizione; tuttavia, se l'ampiezza delle oscillazioni dell'elettrone è molto minore della lunghezza d'onda della radiazione, si ha:

$$e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} = e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} e^{-i\omega t} = e^{i2\pi\hat{n}\cdot\hat{x}\frac{|\vec{x}|}{\lambda}} e^{-i\omega t} \cdot e^{-i\omega t}$$

e l'approssimazione di indipendenza dalla posizione è lecita. Vediamo che la condizione  $|\vec{x}| \ll \lambda$  è equivalente a quella di elettrone non relativistico. All'ordine zero, infatti, l'ampiezza dell'oscillazione è data da  $\frac{eE_0}{m\omega^2}$ , quindi:

$$\frac{eE_0}{m\omega^2} \ll \lambda \Rightarrow \frac{eE_0\lambda^2}{m(2\pi)^2c^2} \ll \lambda \Rightarrow \frac{eE_0\lambda}{mc^2} \ll 2\pi \sim 1$$

Prendendo la media temporale dell'espressione della potenza per unità di angolo solido:

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \frac{1}{4\pi} \frac{e^2}{c^3} \frac{e^2}{m^2} \frac{E_0^2}{2} \sin^2(\theta) = \frac{1}{8\pi} \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 c E_0^2 \sin^2(\theta) = \frac{c}{8\pi} E_0^2 r_c^2 \sin^2(\theta)$$

Riconosciamo nell'espressione  $\frac{c}{8\pi} E_0^2$  il valor medio del vettore di Poynting  $\vec{S} = c \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{4\pi}$ . Ricordiamo che la sezione d'urto è stata definita come numero di particelle scatterate nell'angolo solido  $d\Omega$ , divise per il flusso di particelle incidente: adesso definiremo la sezione d'urto Thomson differenziale come l'energia irradiata nell'angolo solido, diviso il flusso di energia incidente:

$$\frac{d\sigma_{Th}}{d\Omega} = \frac{\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle}{I} = r_c^2 \sin^2(\theta)$$

Integrando sull'angolo solido si ottiene:

$$\sigma_{Th} = 2\pi \cdot \frac{4}{3}r_c^2 = \frac{8\pi}{3}r_c^2 \simeq 0,6barn$$

**Osservazione:** ovviamente il raggio classico dell'elettrone non ha nessun collegamento fisico con le reali dimensioni dell'elettrone, è soltanto una quantità con le dimensioni di una lunghezza, introdotta uguagliando il potenziale elettrostatico di una sferetta conduttrice con carica superficiale  $e$ , con la massa dell'elettrone. Niente quindi ci vieterebbe di andare a sondare l'elettrone a dimensioni minori del raggio classico dell'elettrone, ma finora non si è mai trovato niente.

Tornando all'effetto Compton, si può spiegare la variazione di lunghezza d'onda della radiazione uscente in termini di un processo d'urto tra due particelle relativistiche. Considereremo urti elastici, il che equivale a dire che se prima dell'urto ho un fotone ed un elettrone, avrò un fotone ed un elettrone (quest'ultimo non eccitato, e quindi con la stessa massa) anche dopo. Per il fotone necessariamente applicheremo la meccanica relativistica:

$$k^\mu = (k, \vec{k})$$

mentre per l'elettrone:

$$p^\mu = mu^\mu = m(\gamma, \gamma\vec{\beta})$$

Per il fotone vale la relazione di dispersione  $E^2 - p^2 = 0$ , e poichè oltre a  $c$  anche  $\hbar = 1$ , identificheremo impulso, energia e vettore d'onda. Prima dell'urto, abbiamo:

$$P_0^\mu = (mc, \vec{0})$$

$$K_0^\mu = (k, 0, 0, 0, k) \quad (k = \frac{h\nu}{c})$$

Il quadrimpulso totale del sistema è allora:

$$P^\mu = (mc + k, k\vec{n}) \quad (\vec{n} = (0, 0, 1))$$

La parte spaziale del quadrimpulso può essere uguale a zero; il fatto che sia diversa da zero in questo caso significa che prima (e anche dopo) dell'urto il sistema del laboratorio *non* è il sistema del centro di massa. Tuttavia, un processo di scattering elastico si descrive naturalmente nel sistema del centro di massa.

**Problema:** qual'è la velocità del centro di massa rispetto al sistema del laboratorio?

Riprendiamo il quadrimpulso totale  $P^\mu = (mc + k, k\vec{n})$ ;  $P^\mu$  si conserva, essendo il sistema isolato, allora posso prenderne il modulo quadro:

$$P_\mu P^\mu = k_\mu k^\mu + p_\mu p^\mu + 2k_\mu p^\mu = (mc)^2 + 2kmc \equiv s$$

Poichè il quadrimpulso totale è un quadrivettore, il suo modulo quadro è invariante di Lorentz, e prende il nome di **massa invariante del sistema**. Dimenticando per un attimo com'è fatto il sistema,  $\sqrt{s}$  rappresenta l'energia complessiva del sistema, sia quella a riposo che quella cinetica. Nel sistema del centro di massa, dove non c'è impulso spaziale, la componente temporale vale proprio  $\sqrt{s}$ ; una volta introdotto  $s$ , il quadrimpulso totale assume in ogni sistema la forma di un generico quadrimpulso, e potremo scrivere:

$$P^\mu = \sqrt{s}(\gamma, \gamma\vec{\beta})$$

dove  $\vec{\beta}$  è la velocità che la particella descritta da  $P^\mu$  avrebbe nel laboratorio, ovvero la velocità del centro di massa. Se vogliamo conoscere la velocità del centro di massa quindi, basta fare il rapporto tra la parte spaziale e la parte temporale:

$$\begin{aligned} P^\mu &= \sqrt{s}(\gamma, \gamma\vec{\beta}) \Rightarrow \beta^i = \frac{P^i}{P^0} \\ &\Rightarrow \vec{\beta}_{cm} = \frac{k\vec{n}}{mc + k} \\ &\Rightarrow \beta = \frac{k}{mc + k} \Rightarrow 1 - \beta = \frac{mc}{mc + k} \quad ; \quad 1 + \beta = \frac{mc + 2k}{mc + k} \end{aligned}$$

Conviene introdurre adesso il  $\gamma$  della trasformazione:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\beta^2}{(mc+k)^2}}} = \frac{mc + k}{\sqrt{mc^2 + 2mck}} = \frac{mc + k}{\sqrt{s}}$$

Facciamo adesso un boost di Lorentz, che ci porti dal sistema del laboratorio in un sistema che si muova con la stessa velocità del centro di massa rispetto al laboratorio:

$$\Lambda \equiv \Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

**Osservazione:** Come si fa a capire se c'è il  $-\beta\gamma$  oppure il  $\beta\gamma$ ? Ci rendiamo conto che ci vuole il  $-$  perchè se consideriamo il sistema S fermo, il sistema S' in moto rispetto ad S con velocità  $\vec{\beta}$  diretta verso destra (FIGURA). Prendendo un punto fisso in S, ad esempio l'origine  $(t, \vec{0})$ , questo punto viene visto in S' come:

$$\Lambda \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (\gamma t, 0, 0 - \beta\gamma t)$$

ovvero S' vede l'origine allontanarsi verso sinistra come ci aspettiamo che accada, e dunque capiamo che si deve usare  $-\gamma\beta$ .

Vogliamo adesso capire qual'è l'impulso del fotone nel sistema del centro di massa. Poichè nel sistema del laboratorio si ha  $k^\mu = (k, 0, 0, k)$ , ci aspettiamo che nel sistema del centro di massa il quadrimpulso abbia questa stessa forma, dato che il fotone ha massa nulla. In linea di principio potremmo avere un impulso della forma  $k_{cm}^\mu = (k_{cm}, 0, 0, \pm k_{cm})$ , ma il segno  $-$  è da scartare, poichè dovremmo andare in un sistema che viaggia con velocità maggiore di quella del fotone. Dunque

$$\begin{aligned} k_{cm}'^\mu &= \Lambda^\mu{}_\nu k^\nu = (k_{cm}, 0, 0, k_{cm}) = (\gamma k(1 - \beta), 0, 0, \gamma k(1 - \beta)) \\ &\Rightarrow \gamma k(1 - \beta) = k \frac{(mc + k)}{\sqrt{s}} (1 - \beta) = k \frac{(mc + k)}{\sqrt{s}} \frac{mc}{(mc + k)} = k \frac{mc}{\sqrt{s}} \end{aligned}$$

Adesso faremo avvenire l'urto nel centro di massa, poi torneremo nel sistema del laboratorio ritrovando l'impulso del fotone. Siamo nel sistema del centro di massa, il sistema è isolato, l'energia si conserva, dunque l'energia del fotone è sempre  $k_{cm}$ . Il quadrimpulso si scrive come:

$$k'_{cm} = k_{cm}(1, \sin(\theta) \cos(\phi), \sin(\theta) \sin(\phi), \cos(\theta))$$

Vogliamo riottenere l'energia del fotone nel laboratorio dopo l'urto, applichiamo allora  $\Lambda^{-1}$ :

$$k_1^\mu = k_{cm}(\gamma + \beta\gamma \cos(\theta_{cm}), \sin(\theta_{cm}) \cos(\phi_{cm}), \sin(\theta_{cm}) \sin(\phi_{cm}), \beta\gamma + \gamma \cos(\theta_{cm}))$$

Dunque l'energia del fotone nel lab è data da:

$$k_1^0 \equiv E_{lab} = k_{cm}\gamma(1 + \beta \cos(\theta_{cm}))$$

Mentre la componente dell'impulso spaziale parallela all'impulso del vecchio fotone è:

$$k'_\parallel \equiv k_1^3 = k_{cm}\gamma(\beta + \cos(\theta_{cm}))$$

Vogliamo conoscere  $k' - k$ :

$$\begin{aligned} k' &= \frac{mc + k}{\sqrt{s}} \frac{kmc}{\sqrt{s}} \underbrace{(1 + \beta \cos(\theta_{cm}))}_{1 + \beta - \beta + \beta \cos(\theta_{cm})} = \frac{kmc(mc + k)}{s} \left( \frac{mc + 2k}{mc + k} - \beta(1 - \cos(\theta_{cm})) \right) = \\ &= kmc \frac{(mc + 2k)}{s} - kmc \frac{(mc + k)}{s} \frac{k}{(mc + k)} (1 - \cos(\theta_{cm})) = k - \frac{k^2 mc}{s} (1 - \cos(\theta_{cm})) \\ &\Rightarrow k - k' = \frac{k^2 mc}{s} (1 - \cos(\theta_{cm})) = \frac{k^2}{mc + 2k} (1 - \cos(\theta_{cm})) \end{aligned}$$

Abbiamo quindi un'espressione per  $k - k'$ , ma questa è ancora legata all'angolo di scattering nel sistema del centro di massa. Utilizziamo allora la componente dell'impulso parallela al vecchio impulso:

$$k'_\parallel = k' \cos(\theta_{lab})$$

Da una parte sappiamo che

$$k' - k'_\parallel = k'(1 - \cos(\theta_{lab}))$$

mentre dall'altra:

$$\begin{aligned} k' - k'_\parallel &= \gamma k_{cm}(1 - \beta)(1 - \cos(\theta_{cm})) = \frac{mc + k}{\sqrt{s}} \frac{kmc}{\sqrt{s}} \frac{mc}{mc + k} (1 - \cos(\theta_{cm})) = \frac{kmc}{mc + 2k} (1 - \cos(\theta_{cm})) \\ &\Rightarrow k - k' = \frac{k}{mc} \frac{kmc}{mc + 2k} (1 - \cos(\theta_{cm})) = \frac{k}{mc} k'(1 - \cos(\theta_{lab})) \end{aligned}$$

Allora, poichè  $k = \frac{h\nu}{c}$  e  $k' = \frac{h\nu'}{c}$ , si ha:

$$\begin{aligned} (\nu - \nu') &= \frac{1}{mc} \left( \frac{h}{c} \right) \nu \nu' (1 - \cos(\theta_{lab})) \\ &\Rightarrow c \left( \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda' \lambda} \right) = \frac{h}{mc^2} \frac{c^2}{\lambda' \lambda} (1 - \cos(\theta_{lab})) \\ &\Rightarrow \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos(\theta_{lab})) = \lambda_c (1 - \cos(\theta_{lab})) \end{aligned}$$

## Capitolo 7

# Lunedì 28 gennaio

### 7.1 Stabilità del nucleo

Abbiamo detto che il panorama particellare negli anni '30 si limitava ad elettroni, protoni, neutroni e fotoni. C'era un problema da risolvere: come faceva il nucleo ad essere stabile? Al suo interno c'erano protoni e neutroni, ed entrambi presentavano dei problemi:

- Il neutrone era neutro, chi ce lo teneva lì?
- Il protone è carico, e si respinge con altri protoni, anche a lui chi glielo fa fare di stare nel nucleo?

Nel nucleo dunque doveva esistere una ulteriore forza, la cosiddetta forza *forte*, che tenesse uniti i nucleoni; la forza forte trae il suo nome dal fatto che doveva per l'appunto essere più forte della forza elettromagnetica repulsiva tra i protoni, inoltre doveva agire anche sui neutroni, ed essere a corto range poichè macroscopicamente non si aveva esperienza dell'interazione forte. Oltre a queste condizioni necessarie al tempo non si avevano molte altre idee, finchè nel **1934** Yukawa azzardò una teoria: egli immaginò che l'analogo del fotone e del gravitone (entrambi a massa nulla) in elettromagnetismo e in gravitazione, fosse per l'interazione forte un mediatore dotato di massa non nulla. In che modo una massa diversa da zero poteva aiutare nella riduzione del range dell'interazione? La ragione per cui il potenziale coulombiano ha range infinito sta proprio nella massa nulla del fotone, dunque Yukawa ipotizzò che il potenziale responsabile dell'interazione forte fosse di tipo centrale e della forma:

$$V(r) = A \frac{e^{-\frac{r}{\lambda_c}}}{r}$$

dove  $\lambda_c = \frac{\hbar}{mc}$  è la lunghezza d'onda Compton della particella in questione. Il fattore esponenziale significa che la scala caratteristica (ovvero il raggio di azione della forza) nel caso del potenziale di Yukawa è data proprio dalla lunghezza d'onda Compton: allontanandosi di qualche multiplo di  $\lambda_c$  significa ridurre quasi a zero il suo effetto. L'altra idea di Yukawa era di usare come mediatore un oggetto con lunghezza d'onda Compton dell'ordine del raggio del nucleo; di conseguenza la sua massa si calcolava facilmente in questo modo:

$$\lambda_c = \frac{\hbar}{mc} = \frac{\hbar c}{mc^2} \simeq \frac{197 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{mc^2} \sim 2 \text{ fm}$$

dunque la massa del mediatore dell'interazione forte doveva essere circa 100 MeV, cioè circa 200 volte la massa dell'elettrone. Questa particella al tempo fu chiamata *mesone*, poichè si conosceva soltanto l'elettrone, con

massa di circa mezzo MeV, e i costituenti del nucleo, protone e neutrone, con masse dell'ordine del GeV, e la massa del mediatore di Yukawa si collocava con i suoi 100MeV all'incirca a metà. La nomenclatura del tempo annoverava gli elettroni tra i *leptoni* (dal greco 'lepton'=leggero) e i nucleoni tra i *barioni*, riferendosi alla massa; oggi invece si preferisce una classificazione non in base alla massa ma alla capacità di fare interazione: vengono chiamate **leptoni** quelle particelle che interagiscono elettromagnetico o debole, e tale categoria comprende elettroni, neutrini elettronici, il leptone  $\tau$ , ecc. Le particelle che viceversa interagiscono anche forte vengono chiamate **adroni**. A loro volta gli adroni si dividono in **mesoni** (sistemi legati quark-antiquark) e barioni (sistemi a tre corpi, formati stavolta solo da quark).

## 7.2 La teoria di Yukawa

Yukawa sviluppò la sua teoria in analogia con quella del campo elettromagnetico. Quest'ultimo si descrive in termini del potenziale scalare  $V$  e del potenziale vettore  $\vec{A}$ . Tali potenziali soddisfano alle equazioni:

$$\square V = 4\pi\rho$$

$$\square \vec{A} = 4\pi \frac{\vec{J}}{c}$$

Vale la condizione di gauge di Lorentz, secondo cui:

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \nabla \cdot \vec{A} = 0$$

Il campo elettromagnetico ha origine dalle sorgenti; in assenza di sorgenti, i potenziali soddisfano alle equazioni omogenee:

$$\square V = 0$$

$$\square \vec{A} = 0$$

Considerando cariche ferme, l'equazione per il potenziale scalare si riscrive:

$$\nabla^2 V = -4\pi\rho$$

**Osservazione:** se si vuole scrivere l'equazione in forma covariante a vista si costruisce il quadrivettore  $A^\mu = (V, \vec{A})$  e le equazioni si riscrivono come:

$$\square A^\mu = 4\pi J^\mu$$

$$\partial_\mu A^\mu = 0$$

L'elettrone è descritto da un campo di Dirac  $\Psi$ , e la corrente si scrive come  $J^\mu = e\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$ , in particolare  $J^0 = e\bar{\Psi}\gamma^0\Psi = e\Psi^\dagger\Psi$ . La corrente nel caso del campo elettromagnetico è un quadrivettore, nel caso di Yukawa *non è così*.

Si arriva alla soluzione generale per il caso statico partendo dall'equazione  $\nabla^2 V = -4\pi\rho$ ; cerchiamo allora la funzione di Green dell'operatore  $\nabla^2$ , essa è una funzione  $G(\vec{x})$  che soddisfa a:

$$\nabla^2 G(\vec{x}) = \delta^3(\vec{x})$$

E' importante determinare tale funzione, poichè supponendo di conoscere la densità  $\rho(\vec{y}, t)$ , la soluzione è data dal prodotto di convoluzione di  $G$  con  $\rho$ :

$$V(\vec{x}) = \int d^3y G(\vec{x} - \vec{y}) \rho(\vec{y})$$

Nel caso del campo elettromagnetico la funzione di Green è data da:

$$G(r) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{r}$$

Calcoliamo il gradiente di tale funzione:

$$\vec{f} = \nabla(G) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r^2} \hat{r}$$

e adesso calcoliamo il flusso di  $\vec{f}$  attraverso una superficie sferica di raggio  $R$  centrata nell'origine:

$$\int_{\partial\mathcal{O}} \vec{f} \cdot d\vec{\Sigma} = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{R^2} \int_{\partial\mathcal{O}} \hat{r} \cdot \hat{r} R^2 d\Omega = 1 \quad (\forall R)$$

Tuttavia, per il teorema della divergenza noi sappiamo che l'integrale del flusso di  $\vec{f}$  attraverso la superficie sferica è uguale all'integrale della divergenza di  $\vec{f}$  sul volume della sfera:

$$1 = \int_{\partial\mathcal{O}} \vec{f} \cdot d\vec{\Sigma} = \int_{\mathcal{O}} d^3x \nabla \cdot \nabla(G) = \int_{\mathcal{O}} d^3x \nabla^2 G$$

$G$  è funzione solo del raggio, per cui il laplaciano si scrive semplicemente come  $\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial}{\partial r})$ . Evidentemente il laplaciano di  $G$  è zero ovunque eccetto in  $r = 0$ , poichè  $r^2 \frac{dG}{dr} = \text{cost}$ ; tuttavia, noi sappiamo che l'integrale di  $\nabla^2 G$  sul volume sferico deve fare 1, quindi deve necessariamente essere  $\nabla^2 G = \delta^3(\vec{x})$ .

Nel caso di Yukawa, chi è la sorgente del campo? Yukawa sfruttò l'idea di Heisenberg, il quale ipotizzava che neutrone e protone potessero essere due stati di una stessa particella, data la somiglianza tra le loro masse. Heisenberg attribuì tale differenza alla carica del protone, che avrebbe attribuito allo stesso una sorta di 'massa elettromagnetica' che lo rendeva più pesante del neutrone; questa ipotesi è errata, in primo luogo perchè oggi sappiamo che in realtà è il neutrone ad essere più massivo del protone, e in secondo luogo perchè tale differenza di massa dovuta alla carica avrebbe dovuto essere dell'ordine di mezzo MeV, mentre sappiamo che è dell'ordine di  $1,2 \text{ MeV}$ . Tuttavia, per quanto errata, questa ipotesi fu estremamente fertile poichè indusse Heisenberg a formulare nel **1932** la sua teoria dello spin isotopico. Possiamo scrivere lo stato generico di nucleone come

$$\mathcal{N} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \Psi_p + \beta \Psi_n$$

Yukawa scrisse la sorgente come:

$$4\pi\rho_Y = g\bar{\mathcal{N}}\left(\frac{I_1 + iI_2}{2}\right)\mathcal{N}$$

dove  $g$  è una quantità reale, mentre  $I_1$  e  $I_2$  sono due dei tre operatori di isospin che generano il gruppo  $SU(2)$  delle rotazioni di isospin.

**1936:** attraverso la simmetria di isospin si descrive il meccanismo della indipendenza dalla carica dell'interazione forte. Si era osservato infatti che le sezioni d'urto protone-protone e protone-neutrone erano

sostanzialmente uguali, e che gli stati nucleari di atomi con lo stesso numero di nucleoni come  ${}^{12}_5B$ ,  ${}^{12}_6C$ ,  ${}^{12}_7N$  avevano livelli molto simili. L'idea era che la forza nucleare fosse invariante sotto 'rotazioni' nello spazio degli stati  $|n\rangle$  e  $|p\rangle$  (autovettori dell'operatore  $I_3$  con autovalori  $\pm\frac{1}{2}$ ), effettuate dagli operatori del gruppo  $SU(2)$  di isospin; in altre parole, l'interazione nucleare doveva essere uno *scalare di isospin*.

La parola isospin, o spin isotopico, non deve trarre in errore:

- 'spin' significa rotazione, ma in realtà non c'è niente di fisico che ruota. Si chiama spin solo perchè il gruppo di simmetria è isomorfo al gruppo delle rotazioni di spin;
- la parola 'isotopico' in realtà è scorretta, poichè per isotopi si intende atomi di uno stesso elemento, ma con numero di massa diverso, mentre la simmetria di isospin riguarda atomi con *stesso* numero di massa, e differente numero atomico. Più corretto sarebbe stato chiamarlo spin 'isobarico', ma ormai è andata così.

$SU(2)$  ha tre generatori; nella sua rappresentazione con  $J = \frac{1}{2}$  come suoi generatori possiamo prendere le tre matrici di Pauli, cosicchè l'operatore  $\frac{I_1+iI_2}{2}$  nella sorgente assume la forma:

$$\frac{I_1 + iI_2}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$I_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$I_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Avendo scritto lo stato di nucleone come  $\mathcal{N} = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$ , si ha:

$$\bar{\mathcal{N}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{N} = (\bar{p}, \bar{n}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} = \bar{p}n$$

In termini di campi di Dirac la sorgente si scrive:

$$4\pi\rho_Y = g\bar{\Psi}_p\Psi_n$$

Vediamo alcune differenze con la corrente elettromagnetica  $J^\mu = e\bar{\Psi}_e\gamma^\mu\Psi_e$ :

- nel caso di Yukawa il prodotto è tra campi diversi;
- nel caso elettromagnetico inoltre  $J^\mu$  è un quadrivettore, mentre per Yukawa è uno scalare di Lorentz.

Il fatto che i campi siano diversi fa sorgere un problema, infatti la sorgente non è hermitiana:

$$4\pi\rho_Y^\dagger = (\bar{\Psi}_p\Psi_n)^\dagger = \Psi^\dagger\gamma^0\Psi_p = \bar{\Psi}_n\Psi_p \neq \bar{\Psi}_p\Psi_n$$

Le interazioni che vogliamo descrivere devono soddisfare ad alcuni 'dogmi':



- l'interazione (quindi la lagrangiana) deve essere globalmente uno scalare sotto il gruppo di Lorentz; per l'elettromagnetismo questo accade (termine  $J^\mu A_\mu$ ), mentre per Yukawa dovremo trovare un campo  $V$  da accoppiare con il termine  $g\bar{\Psi}_p\Psi_n$ , che sia scalare.
- in generale non ce la possiamo cavare con un termine solo: l'hamiltoniana deve essere hermitiana così il termine di interazione dovrà contenere la somma  $\bar{\Psi}_p\Psi_n + \bar{\Psi}_n\Psi_p$ .

Date le caratteristiche della sorgente, il campo stavolta non sarà hermitiano. Poichè è un campo con massa, soddisferà all'equazione di Klein-Gordon:

$$(\square + m^2)\Phi_Y = g\bar{\Psi}_p\Psi_n = 4\pi\rho_Y$$

Il suo hermitiano coniugato soddisferà all'equazione analoga:

$$(\square + m^2)\Phi_Y^\dagger = g\bar{\Psi}_n\Psi_p = 4\pi\rho_Y^\dagger$$

Come abbiamo già osservato, la *densità di carica barionica*  $\rho_Y$  non è hermitiana, il che equivale a dire che il campo di Yukawa è un campo carico (?).

Il potenziale di Yukawa si determina ancora una volta supponendo di conoscere  $\rho_Y$ ; studiamo le equazioni nel caso statico:

$$\begin{aligned} (-\nabla^2 + m^2)\Phi &= 4\pi\rho_Y \\ \Rightarrow (m^2 - \nabla^2)\Phi &= -4\pi\rho_Y \end{aligned}$$

Cerchiamo la funzione di Green dell'operatore  $\nabla^2 - m^2$ :

$$(\nabla^2 - m^2)G(\vec{x}) = \delta^3(\vec{x})$$

dimostriamo che la funzione  $G(r) = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{-mr}}{r}$  soddisfa alla richiesta: prima cosa calcoliamo il gradiente di  $G$ :

$$\nabla(G) = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{mre^{-mr} + e^{-mr}}{r^2} \right) \hat{r} = \frac{1}{4\pi} e^{-mr} \left( \frac{1+mr}{r^2} \right) \hat{r}$$

Calcoliamo il flusso di  $\nabla(G)$  attraverso una superficie sferica di raggio  $R$ :

$$\int_{\bigcirc} \nabla(G) \cdot d\vec{\Sigma} = \frac{1}{4\pi} e^{-mR} \frac{1+mR}{R^2} R^2 4\pi = (1+mR)e^{-mR}$$

Osserviamo che se  $m = 0$  ritroviamo il risultato ottenuto con la funzione di Green per il potenziale coulombiano.

Il teorema della divergenza ci dice di nuovo che deve risultare:

$$(1+mR)e^{-mR} = \int_{\bigcirc} \nabla^2 G d^3x$$

Ancora,  $G$  dipende solo dalla variabile radiale e il laplaciano è  $\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial}{\partial r})$ , quindi:

$$\int_{\bigcirc} d^3x (\nabla^2 - m^2)G = (1+mR)e^{-mR} + \frac{1}{4\pi} m^2 \int_0^R \frac{e^{-mr}}{r} r^2 dr d\Omega = (1+mR)e^{-mR} + m^2 \left(-\frac{1}{m}\right) e^{-mR} R + m^2 \int_0^R \frac{e^{-mr}}{m} dr =$$

$$= (1 + mR)e^{-mR} - mRe^{-mR} + (-e^{-mr})|_0^R = e^{-mR} - e^{-mR} + 1 = 1$$

dunque  $(\nabla^2 - m^2)G(r)$  non può che essere la  $\delta^3(\vec{x})$ . Poichè l'equazione di partenza era  $(\nabla^2 - m^2)\Phi = -4\pi\rho_Y$ , il campo di Yukawa si scrive come:

$$\Phi(\vec{x}) = -4\pi \int d^3y G(\vec{x} - \vec{y}) \rho_Y(\vec{y}) = \int d^3y \frac{e^{-m|\vec{x}-\vec{y}|}}{|\vec{x} - \vec{y}|} \rho_Y(\vec{y})$$

Nel caso di densità di carica puntiforme,  $\rho_Y = g\delta^3(\vec{y})$ , si ha che  $G(r) = g\frac{e^{-mr}}{r}$ .

## Capitolo 8

### martedì 29 gennaio

**1936:** Anderson e Neddermeyer osservano in camera di Wilson tracce di particelle cariche che dal modo in cui ionizzavano dovevano avere massa intorno ai 100 Mev. Inizialmente si pensò che si trattasse del mesone di Yukawa, ma oggi sappiamo che non è così, e che tale particella era il **muone**, il quale non fa interazione forte. Era sbagliata anche la definizione di *mesone* mu, poichè con la nomenclatura attuale i mesoni sono formati da un quark e un antiquark, e interagiscono forte, cosa che non accade per il muone che è infatti un leptone, come l'elettrone e il tauone (nome brutto per dire leptone tau).

Dopo la scoperta di Anderson si iniziò a studiare le proprietà dell'odierno muone, battezzato per l'occasione *particella di Anderson*, e si cercò di capire come si comportava tale particella in presenza di materia. Innanzitutto esistevano sia muoni positivi che muoni negativi, e ci si rese conto che la particella di Anderson *libera* decadeva emettendo un elettrone (o un positrone).

Il muone negativo, opportunamente rallentato e termalizzato, si comporta in modo simile ad un elettrone. In un atomo qualunque, per esempio l'idrogeno, il muone negativo può sostituire un elettrone atomico poichè il nucleo tende a preferire una particella carica più massiva (il Rydberg è proporzionale alla massa ridotta del sistema protone-elettrone). Un elettrone viene allora espulso dall'atomo, che avendo un muone nella sua nuvola elettronica prende il nome di atomo **mesico** o **esotico**. Il muone negativo, nel suo livello fondamentale di onda s, avrà una probabilità non nulla di trovarsi all'interno del nucleo, ci sarà quindi sovrapposizione tra la sua funzione d'onda e quella del protone: se il muone era realmente la particella di Yukawa che doveva mediare l'interazione forte, avrebbe dovuto far transire il nucleo verso un altro stato in un tempo piuttosto breve (ipotesi di *Tomonaga*). Il muone positivo viceversa non si lega ai nuclei, ed interagisce poco con la materia.

**1946:** secondo stadio dell'esperimento di Conversi, Pancini e Piccioni. L'apparato sperimentale era costituito da due blocchi di ferro magnetizzati che servivano a focalizzare il flusso di particelle di Anderson di un certo segno, e a defocalizzare quelle di segno opposto. Dei contatori a gas prima e dopo tali blocchi (A e B) segnalavano il passaggio di una particella carica. Un assorbitore era posto subito dopo i blocchi magnetizzati, dopo di esso erano posti altri contatori (C), quindi una lastra di piombo spessa circa un centimetro, infine un'ultima serie di contatori (D). L'esperimento era volto a mostrare se esistevano differenze di comportamento tra particelle di Anderson positive e negative. Il campo magnetico all'interno dei blocchi era di circa  $15\text{kgauss}$ .

L'arrivo della particella veniva osservato tramite una serie di coincidenze tra cui prima di tutto il pas-

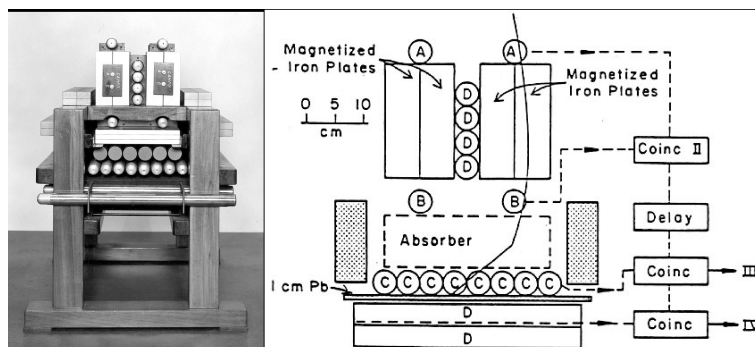


Figura 8.1: Apparato sperimentale dell'esperimento

saggio attraverso i contatori A e B. L'assorbitore era costituito di un materiale particolare, grafite nel primo stadio dell'esperimento, ferro nel secondo, ed aveva lo scopo di rallentare le particelle che lo attraversavano: una parte di esse si fermava, dopo un certo tempo decadeva ed emetteva un elettrone che faceva scattare i contatori di tipo C. Ovviamente erano persi tutti i decadimenti che avvenivano all'indietro.

Per osservare un decadimento era necessario osservare la sequenza  $A \oplus B \oplus C_{rit}$ , ma niente permetteva di distinguere se tale sequenza era generata da un muone decaduto in elettrone oppure da un muone di alta energia che attraversava tutto l'apparato, dunque si utilizzò questa procedura: dalla statistica venivano eliminati tutti gli eventi in cui oltre alla sequenza  $A \oplus B \oplus C_{rit}$  si osservava anche il passaggio di una particella nel contatore D, supponendo che l'unica particella in grado di fare un percorso così lungo fosse quella di Anderson. La lastra di piombo dopo i rivelatori C serviva proprio a fermare del tutto gli elettroni di decadimento.

Le previsioni sperimentali erano queste: per le particelle negative, interagendo e sostituendosi agli elettroni nucleari queste non dovevano restare libere abbastanza a lungo da avere la possibilità di decadere, quindi non si sarebbe dovuto osservare nulla. Per le particelle positive invece la difficoltà di interazione si sarebbe dovuta trasformare in un numero maggiore di conteggi rispetto al caso della particella negativa.

In realtà nella prima fase dell'esperimento (con la grafite) non si riscontrò una significativa differenza tra particelle positive e negative, nei limiti degli errori sperimentali, tanto che si pensò di aver sbagliato tutto. Soltanto successivamente, utilizzando il ferro come assorbitore, scomparivano i segnali dovuti alle particelle negative. Nonostante questo parziale successo, le particelle di Anderson e quelle di Yukawa non potevano essere la stessa cosa, anche se rimaneva da scoprire perchè i comportamenti in ferro o in grafite fossero diversi.

**1947:** Perkins utilizza emulsioni fotografiche (nitrato d'argento) per immortalare le tracce delle particelle cariche, che ionizzano lungo la traiettoria. Gli esperimenti erano fatti mediante palloni aerostatici, nell'alta atmosfera.

Perkins trovò tracce di una particella che sembrava poter essere la particella di Yukawa; essa si fermava nell'emulsione, probabilmente assorbita da un nucleo leggero dell'emulsione, (carbonio, azoto o ossigeno), dopodichè questo si spaccava in tre frammenti, due protoni e un trizio.

La soluzione arrivò da un gruppo di ricercatori di Bristol, Lattes, Occhialini e Powell. Costoro effettuarono nuovamente esperimenti con palloni in alta atmosfera e osservarono il seguente fatto: in alta atmosfera venivano prodotte sia la particella di Yukawa che quella di Anderson, e avevano vite medie molto

diverse, di circa un fattore 100. Nell'emulsione fotografica si osservava la traiettoria di una particella (quella di Yukawa), che dopo un tempo medio di circa  $10^{-8}$  secondi deviava bruscamente. La cuspid di cambio traiettoria viene quindi associata al decadimento della particella di Yukawa in una particella di Anderson e in un neutrino, ma quest'ultimo essendo scarico non veniva rivelato dall'emulsione. La vita media delle particelle di Yukawa non consente loro di percorrere tratti troppo lunghi, per questo negli esperimenti a terra quello che veniva osservato era sostanzialmente un flusso di muoni.

La particella di Anderson invece ha una vita media di  $2,2\mu s$ ; facendo un calcolo grossolano che non considera gli effetti relativistici, potremmo affermare che se la particella di Anderson e quella di Yukawa si muovessero alla velocità della luce, nel tempo di una loro vita media percorrerebbero rispettivamente circa 660 e 3 metri. Con tali valori sarebbe impensabile che tali particelle possano attraversare l'atmosfera (alta circa 10 chilometri in media) e arrivare fino a noi; in realtà, ipotizzando energie per le particelle di circa  $10GeV$ , masse di circa  $100MeV$ , e calcolando il  $\gamma = \frac{E}{m} \sim 100$ , si ottengono valori più corretti delle distanze effettivamente percorse:

$$\Delta x_\mu \sim 66Km$$

$$\Delta x_\pi \sim 300m$$

Per i pioni c'è ancora poca speranza, mentre per i muoni è più che sufficiente. **Osservazione:** la vita media di una particella è un invariante relativistico, e si misura nel sistema di riposo della particella. Per calcolare il tempo effettivo che vive la particella per noi nel sistema del laboratorio si usa la formula  $\tau_{lab} = \gamma\tau$ .

**Problema:** dopo aver verificato con gli esperimenti di Bristol l'esistenza di quelle particelle che verranno chiamate **pioni**  $\pi^\pm$ , e che decadevano in  $\mu^\pm + \nu(\bar{\nu})$ , si rese necessario mettersi in moto per verificare l'esistenza anche del terzo partner dei pioni, quello neutro  $\pi^0$ . La necessità della sua esistenza fu evidenziata già nel 1938 da (...), il quale affermava che se davvero il mesone di Yukawa era il mediatore dell'interazione forte, e questa era invariante per rotazione di isospin, allora oltre ai due pioni positivo e negativo doveva esistere anche quello neutro. Infatti l'analogo della densità di carica elettromagnetica abbiamo visto essere:

$$\rho = g\bar{\Psi}_p\Psi_n$$

$$\rho^\dagger = g\bar{\Psi}_n\Psi_p$$

Il termine  $\bar{\Psi}_p\Psi_n$  è il responsabile della transizione da neutrone a protone tramite lo scambio di un  $\pi^+$  (per la conservazione della carica), mentre il termine  $\bar{\Psi}_n\Psi_p$  effettuava la transizione inversa da protone a neutrone con scambio di  $\pi^-$ . Neutrone e protone, visti nell'ambito della simmetria di isospin, sono autovettori per  $I_3$  con autovalori  $\frac{1}{2}$  (protone) e  $-\frac{1}{2}$  (neutrone), dunque una transizione  $n \rightarrow p$  o  $p \rightarrow n$  comporta  $\Delta I_3 = \pm 1$ , analogamente alle transizioni della terza componente del momento angolare nel caso di emissione di dipolo.

Fermandosi a questo punto, non c'è modo di collegare tra loro due protoni o due neutroni; tuttavia, il fatto che le interazioni forti siano simmetriche di isospin significa che sono mediate da una entità con spin isotopico pari a 1, dunque oltre alle già citate transizioni  $\Delta I_3 = \pm 1$  deve essere possibile creare anche transizioni con  $\Delta I_3 = 0$ . Ad oggi sappiamo che il  $\pi^0$  ha massa simile ma non uguale ai  $\pi^\pm$  ( $\sim 135MeV$ ), e decade in due fotoni. Una buona evidenza sperimentale della sua esistenza c'era già nel **1948**, quando si studiava la manifestazione e la propagazione dei raggi cosmici, e si era individuata una produzione anomala di raggi gamma non spiegabile da una semplice radiazione di Brehmstraalung (irraggiamento dovuto a brusche accelerazioni di particelle). Tale radiazione anomala fu interpretata come il decadimento in due fotoni del

pioni neutri, e nel **1950** al protociclotrone di Berkeley si riuscì a riprodurre tale anomalia: facendo scattering di protoni su protoni, con energie tra i 175 e i 230 MeV, si riscontrava una produzione anomala di fotoni con energie di circa 60MeV. La reazione che stava avvenendo era la seguente:

$$p + p \rightarrow p + p + \pi^0$$

E' interessante vedere qual'è l'energia minima perchè tale reazione avvenga: la produzione si osservava in un range di energie abbastanza più elevato dei 135 MeV della massa del  $\pi^0$ , e il divario di energia è dovuto al fatto che il protone bersagliato è fermo. Il sistema del centro di massa è in moto rispetto al sistema del laboratorio, e le tre particelle prodotte devono mantenere tale moto dopo anche la reazione. Il modo più economico di creare le tre particelle, è farle muovere tutte e tre nella stessa direzione, e con la stessa velocità del centro di massa prima dell'urto; l'energia necessaria per compiere tale operazione è proprio l'energia di soglia.

Indichiamo con  $P^\mu$  il quadrimpulso dei due protoni iniziali; essendo il sistema isolato,  $P^\mu$  non cambia in seguito all'urto. Possiamo costruire la massa invariante del sistema,  $\sqrt{s} = \sqrt{P_\mu P^\mu}$ ; prima dell'urto, nel sistema del laboratorio, si ha che  $P^\mu = M_p(\gamma, \gamma\vec{\beta}) + (M_p, \vec{0}) = M_p(1 + \gamma, \gamma\vec{\beta})$ , da cui la massa invariante:

$$s = P_\mu P^\mu = M_p^2 + M_p^2 + 2M_p^2\gamma = 2M_p^2(1 + \gamma)$$

Nello stato finale, mettiamoci nel sistema del centro di massa e determiniamo  $s$ ; fornendo solo l'energia di soglia, le tre particelle risultano tutte e tre ferme, e l'impulso spaziale totale è nullo:

$$P_{cm}^\mu = (M_p + M_p + M_\pi, \vec{0})$$

Osserviamo che fornendo più energia alle particelle aumenta la componente temporale del quadrimpulso, mentre quella spaziale continua a restare nulla per definizione di sistema del centro di massa.

La componente temporale del quadrimpulso è  $P^0 = 2M_p + M_\pi$ , da cui nel sistema del centro di massa  $s = P_\mu P^\mu = 4M_p^2 + M_\pi^2 + 4M_p M_\pi$ . Uguagliando il valore dell'invariante nei due casi otteniamo:

$$2M_p^2(1 + \gamma) = 4M_p^2 + 4M_p M_\pi + M_\pi^2$$

$$\Rightarrow \gamma = 1 + 2\frac{M_\pi}{M_p} + \frac{1}{2}\frac{M_\pi^2}{M_p^2}$$

Se sostituiamo le masse del protone e del pione neutro troviamo che il  $\gamma$  della reazione deve essere circa  $\gamma = 1,298$ , da cui l'energia che dobbiamo fornire al protone oltre la sua massa a riposo è data da  $\gamma^{-1}M_p \sim 280MeV$ . Questo risultato è inconsistente con le misure osservate, che si mantenevano in un range tra i 175 e i 230 MeV; qual'è il mistero? La cinematica appena descritta è corretta se si fanno scontrare protoni su protoni in atomi leggeri come l'idrogeno; se si fanno avvenire gli urti in un metallo, i protoni del nucleo non sono fermi poichè subiscono l'agitazione di Fermi: tale agitazione è legata al principio di indeterminazione, per cui  $\Delta x \Delta p \sim \hbar$ , e poichè i protoni sono vincolati nel nucleo che ha dimensioni all'incirca di qualche fermi abbiamo una indeterminazione sull'impulso di un centinaio di  $\frac{MeV}{c}$ . Se l'impulso del protone bersaglio dovuto all'agitazione di Fermi ha una componente diretta in verso opposto alla velocità del protone proiettile, aumenta l'energia con cui i due protoni si scontrano ed è possibile ottenere formazione di  $\pi^0$  anche sotto soglia.

## Capitolo 9

### Mercoledì 30 gennaio

Sempre a Berkeley, e sempre nel 1950, Panowski osservò la fotoproduzione del  $\pi^0$  bersagliando dei protoni con fotoni da  $350\text{MeV}$ . La reazione era la seguente:

$$\gamma + p \rightarrow p + \pi^0$$

A posteriori si vide che gli esperimenti erano effettuati con energie molto sopra la soglia di produzione, tuttavia ci si pose il problema di quale fosse tale soglia. La cinematica del problema è questa: c'è un fotone di quadrimpulso  $(k, \vec{k})$  e un protone (fermo) di quadrimpulso  $(M_p, \vec{0})$ . Possiamo costruire la massa invariante al quadrato del sistema:

$$s = M_p^2 + 2M_p k$$

e affinché la reazione possa avvenire l'energia del fotone deve essere almeno tale da risultare:

$$M_p^2 + 2M_p k = (M_p + m_{\pi^0})^2 = M_p^2 + m_{\pi^0}^2 + 2M_p m_{\pi^0} \Rightarrow k_{min} = m + \frac{m_{\pi^0}^2}{2M_p} = m(1 + \frac{m_{\pi^0}}{2M_p})$$

L'energia minima necessaria è allora pari alla massa di riposo del  $\pi^0$  più una frazione di essa, pari al rapporto  $\frac{m_{\pi^0}}{2M_p}$ ; conoscendo entrambe le masse, possiamo dire che l'energia di soglia è intorno ai  $150\text{MeV}$ , molto più piccola dei  $350\text{MeV}$  usati nell'esperimento.

Analizzando la distribuzione angolare e la distribuzione in energia dei fotoni emessi nella reazione, si osservò che tali distribuzioni erano compatibili con l'emissione da parte di una particella con  $\beta \simeq 0,8$ , e questo cancellava ogni dubbio sul fatto che la radiazione anomala potesse provenire dalla diseccitazione di nuclei eccitati dal bombardamento. Infatti i nuclei possono raggiungere masse di svariate decine di GeV, e con  $350\text{MeV}$  era impossibile che potessero assumere  $\beta = 0,8$ , dunque si doveva trattare di una particella leggera.

Come potevano fare però a verificare l'esistenza del  $\pi^0$ , quindi ad osservare una particella neutra? Il  $\pi^0$  non rallenta attraversando la materia, prima di tutto perchè è neutro, inoltre perchè la sua vita media è talmente breve che pur potendo interagire forte non ha il tempo di farlo. Se il  $\pi^0$  venisse creato da fermo, osservando la distribuzione di fotoni questa avrebbe una qualche regolarità, poichè le direzioni di emissione dipenderebbero soltanto da un eventuale spin del pione (che però è 0, ma allora non lo sapevano). Tuttavia in genere viene creato con un certo impulso e questo influenzerà la distribuzione.

Mettiamoci nel sistema del centro di massa, dove il  $\pi^0$  è fermo; i due fotoni di decadimento possono essere emessi soltanto in un modo, ovvero con impulsi uguali e opposti, lungo una direzione arbitraria. (FIGURA) Poichè si deve conservare il quadrimpulso iniziale del  $\pi^0$ ,  $(m_{\pi^0}, \vec{0})$ , i due fotoni avranno ciascuno energia  $\frac{m_{\pi^0}}{2}$ . Poichè la direzione di emissione non è prevedibile, per osservare i  $\gamma$  emessi la cosa migliore sarebbe utilizzare dei rivelatori cosiddetti 'a  $4\pi$ ', ovvero in grado di rivelare fotoni in qualunque direzione. Nella pratica questi rivelatori sono molto difficili e costosi da realizzare, allora supponendo che il  $\pi^0$  venga davvero creato da fermo, si può porre due rivelatori in due punti antipodali rispetto al centro di creazione, e osservare i fotoni rivelati. (FIGURA) Si definisce *accettanza* di un rivelatore la sua probabilità di osservare eventi, ad esempio se costruisco un rivelatore 'a  $2\pi$ ', ovvero che copre soltanto metà dell'angolo solido, escludendo ogni altro fattore di disturbo tale rivelatore in media si prenderà soltanto la metà dei fotoni emessi, ed avrà accettanza 0,5.

**Osservazione:** se il pione è fermo, tutte le direzioni dello spazio sono equiprobabili per il decadimento, dunque la distribuzione di fotoni è isotropa. Potremmo essere erroneamente portati a pensare che riscontrare una distribuzione isotropa sia in qualche modo collegato allo spin nullo del  $\pi^0$ , ma questo in generale non è vero: una particella con spin ha sì una direzione privilegiata, e tenderà ad emettere radiazione in una ben precisa direzione, tuttavia se non sappiamo quale sia tale direzione privilegiata non siamo in grado di distinguere, avendo come dati soltanto l'emissione isotropa, un  $\pi^0$  con spin 0 da un ipotetico  $\pi^0$  con spin  $\frac{1}{2}$  ma creato ogni volta con lo spin diretto in una direzione casuale.

Con i rivelatori andremo a misurare l'energia di due fotoni *simultanei*, ma questo non basta: la somma delle energie dei due fotoni nel sistema del centro di massa è pari all'energia del  $\pi^0$ , ma questa coincide con la sua massa soltanto se il  $\pi^0$  è creato fermo. Costruiamo allora la massa invariante del sistema dei due fotoni (FIGURA: rivelatore, punto 1 e punto 2)

Il fotone 1 e il fotone 2 arrivano in punti del rivelatore, che dovrà essere abbastanza preciso da fornire indicazioni non solo sull'energia, ma anche sulla posizione di arrivo dei fotoni; in questo modo possiamo ricostruire le direzioni di volo dei fotoni, e scrivere il loro quadrimpulso come:

$$k_1^\mu = E_1(1, \vec{n}_1)$$

$$k_2^\mu = E_2(1, \vec{n}_2)$$

Se i due fotoni sono prodotti dal decadimento di un  $\pi^0$ , la somma dei due quadrimpulsi deve dare il quadrimpulso del  $\pi^0$ . Costruisco la massa invariante del sistema di fotoni:

$$s = (k_1^\mu + k_2^\mu)^2 = 2E_1E_2(1 - \cos(\theta))$$

e questo deve essere uguale alla massa invariante del pione  $p_{\pi^0}^2 = m_{\pi^0}^2$ . Dalla statistica di rivelazioni di fotoni dovrò quindi ottenere un grafico di questo tipo: (FIGURA gaussiana col picco su  $m_{\pi^0}$ )

**Osservazioni:**

- La massa di un fotone è nulla, così come la sua massa invariante; la massa di due fotoni invece è nulla, ma non è nulla in generale la loro massa invariante, a meno che i due fotoni non si propaghino nella stessa direzione e lungo la stessa retta, ma a quel punto sono indistinguibili da un unico fotone;
- Nel sistema del centro di massa i due fotoni hanno energia uguale e pari a  $\frac{m_{\pi^0}}{2}$ , ma nel sistema del laboratorio questo non è più vero, e le energie  $E_1$  ed  $E_2$  rivelate saranno in generale diverse. Questo



perchè siamo nel centro di massa, e il  $\pi^0$  si starà muovendo in una qualche direzione: (FIGURA)

$$k_1^\mu = \frac{m_{\pi^0}}{2}(1, 0, \sin(\theta_{cm}), \cos(\theta_{cm}))$$

$$k_2^\mu = \frac{m}{2}(1, 0, -\sin(\theta_{cm}), -\cos(\theta_{cm}))$$

Noi osserviamo le energie di questi due fotoni nel laboratorio, ed esisterà una trasformazione di Lorentz che connette i due sistemi:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

Allora le energie dei due fotoni nel laboratorio sono date da:

$$E_1^{lab} = \frac{m_{\pi^0}}{2}\gamma(1 - \beta \cos(\theta_{cm}))$$

$$E_2^{lab} = \frac{m_{\pi^0}}{2}\gamma(1 + \beta \cos(\theta_{cm}))$$

dunque risulta che le due energie sono shiftate per effetto Doppler. In ogni caso, la somma delle due energie è uguale all'energia complessiva del  $\pi^0$ ,  $m_{\pi^0}\gamma$ .

L'energia del primo fotone può stare tra un valore minimo,  $\frac{m_{\pi^0}}{2}\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$ , e un valore massimo,  $\frac{m_{\pi^0}}{2}\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$ , dunque se  $\beta \simeq 1$  l'energia del pione se la prende quasi tutta il fotone 1.

In definitiva, nel sistema del centro di massa i due fotoni sono monocromatici, mentre in un altro sistema hanno uno shift in frequenza. Nel caso del decadimento isotropo ci potremmo chiedere quale sia la distribuzione di energia che si osserva nel laboratorio; risulta che tale distribuzione è 'a cassetta', ovvero piatta tra i valori minimo e massimo appena calcolati (FIGURA: distribuzione piatta tra Emin ed Emax). Questo risultato si ottiene osservando che nel sistema del centro di massa la probabilità di emissione è data da:

$$d\mathcal{P} = \frac{1}{4\pi}2\pi d(-\cos(\theta_{cm})) \Rightarrow \frac{d\mathcal{P}}{d(-\cos(\theta_{cm}))} = \frac{1}{2}$$

Il sistema del centro di massa però non è accessibile, e quello che interessa a noi è la distribuzione di probabilità rispetto all'energia misurata in laboratorio,  $\frac{d\mathcal{P}}{dE_\gamma^{lab}}$ . La legge di trasformazione è data da

$$E = \frac{m_{\pi^0}}{2}\gamma(1 - \beta \cos(\theta_{cm})) \Rightarrow dE = \frac{m_{\pi^0}}{2}\gamma\beta(-d(\cos(\theta_{cm})))$$

$$\frac{d\mathcal{P}}{dE_\gamma^{lab}} = \frac{d\mathcal{P}}{d(-\cos(\theta_{cm}))} \frac{d(-\cos(\theta_{cm}))}{dE_\gamma^{lab}} = \frac{1}{2} \frac{2}{m\gamma\beta} = \frac{1}{m\gamma\beta} = \text{costante}$$

Integrando tale probabilità per unità di energia, tra  $\frac{m_{\pi^0}}{2}\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$  e  $\frac{m_{\pi^0}}{2}\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$  si ottiene ovviamente 1.

**Con che precisione si conoscono le masse dei pioni?**

$$m_{\pi^\pm} = 139,57018(35)MeV \quad ; \quad \tau = 2,6633(5) \cdot 10^{-8}s$$

$$m_{\pi^0} = 134,9766(6)MeV \quad ; \quad \tau = 8,4(0,6) \cdot 10^{-17}s$$

**Come si fa a determinarle?** Le misure più precise per il  $\pi^-$  si ottengono studiando la radiazione X emessa dagli atomi mesici: quando un  $\pi^-$  viene catturato da un nucleo, c'è una cascata elettromagnetica che lo porta ad emettere nella zona dei raggi X, essendo il Rydberg proporzionale alla massa:

$$\frac{1}{\lambda_c} \frac{\alpha^2}{2} = \frac{mc}{\hbar} \frac{\alpha^2}{2}$$

Quindi, misurando la radiazione emessa e conoscendo le costanti fondamentali si può risalire alla massa. Lo stesso processo non è ovviamente applicabile al  $\pi^+$  perchè non viene catturato dai nuclei. E' estremamente importante verificare che la massa del  $\pi^-$  e del  $\pi^+$  siano uguali entro gli errori sperimentali, poichè altrimenti sarebbe violato il teorema CPT, che afferma che le masse della particella e dell'antiparticella devono essere le stesse.

La misura della massa del  $\pi^+$  è effettuata attraverso il suo decadimento:

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu$$

Se si riesce a far decadere il  $\pi^+$  da fermo, il suo quadrimpulso è connesso alla massa del  $\mu^+$  e a quella del neutrino. La massa del muone è ben nota ed è:

$$m_\mu = 105,658389(34) MeV \quad \tau = 2,2 \mu s$$

Per quanto riguarda la massa del  $\pi^0$ , si studiano le reazioni:

$$\pi^- + p \rightarrow n + \pi^0$$

$$\pi^- + p \rightarrow n + \gamma$$

e si va a vedere qual'è la differenza di velocità del neutrone nel caso in cui nasca un  $\pi^0$  e nel caso in cui nasca un  $\gamma$ ; in tal modo si ottiene la differenza di massa tra  $\pi^-$  e  $\pi^0$ .

## 9.1 Cenni storici sui pioni

I pioni erano stati visti per la prima volta nei raggi cosmici. Questi sono stati un mezzo importantissimo per capire quale fosse lo zoo delle particelle elementari, e la loro origine è legata alla radioattività. Le cariche elettriche presenti nei raggi cosmici si muovono attraverso l'aria, ionizzandola, e rendendola debolmente conduttrice. Per misurare tale conducibilità, e quindi la presenza di radiazioni ionizzanti, si usava un elettroscopio a foglie: si osservava infatti che se si poneva un elettroscopio vicino ad una sorgente radioattiva, questo si scaricava in un certo tempo. Si cercarono modi (quindi materiali) per schermare l'elettroscopio il più possibile, ma ci si accorse che più di tanto non si riusciva a fare e l'elettroscopio, inesorabilmente, si scaricava. Si ipotizzò allora che ci fosse una radiazione molto penetrante, e capace di oltrepassare qualunque materiale. **Theodor Wulf** ipotizzò che tale radiazione provenisse da terra, e che in cielo ce ne doveva essere meno, ma si dovette ricredere quando una volta, salendo sulla torre Eiffel, riscontrò che ad alta quota l'elettroscopio si scaricava più velocemente. **Victor Hess** ebbe l'idea di usare palloni aerostatici, salendo fino a 4000-5000 metri, e accorgendosi che oltre i 1000 metri la radiazione cresceva in intensità, e l'elettroscopio si scaricava sempre più velocemente. **Robert Millikan** non ci credeva, e trasformò l'elettroscopio in un

*elettrometro*, ovvero uno strumento capace di prendere misure da solo senza la presenza di un operatore umano; tuttavia le sue misure lo portarono a convincersi che Hess aveva ragione e fu il primo a battezzare la radiazione come '**raggi cosmici**'.

Inizialmente si pensava che i raggi cosmici fosse raggi gamma di altissima energia prodotti dalla sintesi di nuclei di elementi pesanti. Questa possibilità non è del tutto assurda, ma ha senso se l'energia dei gamma è compresa entro il GeV, ovvero il massimo difetto di massa riscontrabile in nucleosintesi; infatti, anche se al tempo ancora non si sapeva, sono stati osservati raggi cosmici con energie fino a  $10^{20} eV$ , paragonabili all'energia cinetica di una pallina da tennis di massa 40g e lanciata a 100Km/h. Tuttora si effettuano studi su tali raggi. Inoltre, era strano che dei fotoni potessero scaricare l'elettroscopio, e si pensò che per effetto Compton potevano sbalzare dai nuclei degli elettroni, che successivamente avrebbero ionizzato l'aria.

Il passo avanti fu fatto con l'introduzione del contatore a gas di Geiger che permise di costruire un 'telescopio'. (FIGURA) Mettendo due contatori a gas lungo una certa direzione si poteva individuare particelle in volo in una ben determinata direzione, poichè avrebbero fatto scattare entrambi i contatori. Nel **1929** due tizi fecero una misura con 2 contatori a gas e una lastra d'oro di 4 cm in mezzo: se fossero stati dei fotoni sarebbero stati assorbiti dalla lastra, ma poichè osservavano comunque delle coincidenze escludono definitivamente tale ipotesi.

Bruno Rossi ebbe l'idea di costruire un telescopio elettronico con 3 contatori non allineati, e osservò delle coincidenze: da questo dedusse che non era una singola particella che proveniva a zig-zag e che li faceva scattare tutti e tre, bensì era uno sciame di particelle. Millikan di nuovo non ci credeva, e chiese al suo allievo Anderson di studiare lo spettro di energia degli elettroni prodotti dai raggi cosmici (che lui pensava fossero raggi  $\gamma$ ) quando interagivano con la materia: si studiò l'impulso di tali elettroni conoscendone il raggio di curvatura, e per puro caso si scoprì l'antimateria.

## Capitolo 10

### Lunedì 4 febbraio

I raggi cosmici si dividono in raggi cosmici **primari**, che arrivano dal cosmo e interagiscono con l'atmosfera, dando origine ai raggi cosmici **secondari**, visibili anche da terra.

Sperimentalmente si osserva che il flusso di raggi cosmici è molto influenzato dall'energia degli stessi: per energie di circa  $10^{11} \text{eV}$  si hanno flussi di circa  $\frac{1}{\text{m}^2 \text{s}}$ , mentre per energie più alte di quattro ordini di grandezza,  $3 \cdot 10^{15} \text{eV}$ , il flusso si riduce a  $\frac{1}{\text{m}^2 \text{anno}}$ ; per energie di  $3 \cdot 10^{18} \text{eV}$  il flusso si riduce ulteriormente a  $\frac{1}{\text{Km}^2 \text{anno}}$ . E' evidente allora quanto sia complicato osservare i raggi cosmici più energetici, data la loro rarità. Lo spettro dei raggi cosmici è di questo tipo: (FIGURA) Possiamo identificare due zone, dette

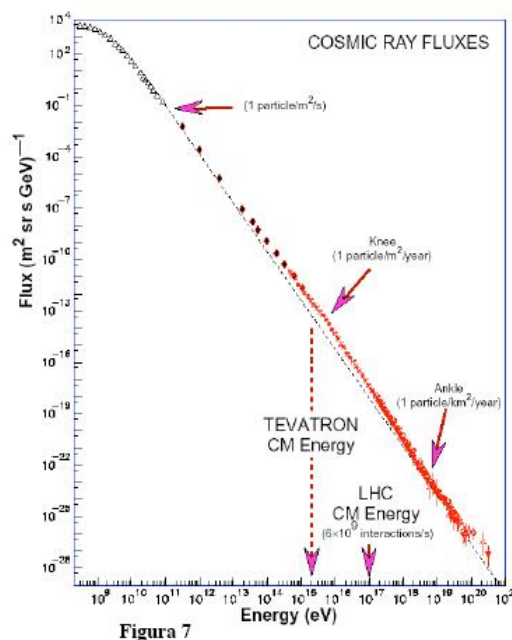


Figura 7

Figura 10.1: Spettro dei raggi cosmici

'ginocchio' (*knee*) e 'caviglia' (*ankle*); per basse energie questi valori sono alterati dagli effetti del vento solare. Introduciamo adesso quello che va sotto il nome di '*cutoff* GZK' dal nome degli scienziati Greisen, Zatsepin e Kuzmin: dato che si riscontravano energie dei raggi cosmici fino a circa  $10^{20} - 10^{21} \text{eV}$ , esiste un

limite alla loro energia massima in relazione al fatto che essi si muovono nello spazio cosmico, permeato per gran parte dalla radiazione di fondo a 3K?

Per la maggior parte i raggi cosmici sono costituiti da protoni, con spolverate di elettroni, positroni e antiprotoni, ed è verosimile che anche quei misteriosi raggi a  $10^{21}eV$  possano essere per lo più protoni. E' verosimile che il protone non perda energia nel suo viaggio interstellare? Se il protone fa scattering con fotoni può avvenire la seguente reazione:

$$p + \gamma \rightarrow p + \pi^0$$

e questo meccanismo in effetti tenderebbe a far perdere energia al protone. Il problema è quello di determinare quale sia la soglia di produzione del  $\pi^0$ , dallo scattering di un protone ultrarelativistico con un fotone della radiazione a 3K: se il protone ha energia sufficiente, si forma il  $\pi^0$ .

Per calcolare la soglia partiamo da un protone con quadrimpulso  $(E, 0, 0, p)$  e da un fotone con quadrimpulso  $(k, 0, 0 - k)$ . Dovranno essere uguali le masse invarianti dei sistemi iniziale e finale, e si avrà dunque:

$$s = M_p^2 + 2k \underbrace{(E + p)}_{\sim 2E} = (M_p + m_{\pi^0})^2 = M_p^2 + m_{\pi^0}^2 + 2m_{\pi^0}M_p$$

$$4Ek = 2mM + m^2 \Rightarrow E_{soglia} = \frac{2mM + m^2}{4k}$$

Quanto vale l'impulso del fotone? Per anticipare il risultato, l'impulso del fotone è all'incirca  $0,7meV$ , ma vediamo come si calcola. Consideriamo per prima cosa la distribuzione in frequenza della densità di energia del corpo nero:

$$\frac{d\rho(\omega)}{d\omega} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3} \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{KT}} - 1}$$

Per  $\hbar \rightarrow 0$   $\rho(\omega) \rightarrow \frac{KT\omega^3}{\pi^2c^3}$ . Vogliamo conoscere l'energia media di un fotone nella distribuzione, e per questo ho bisogno di conoscere sia la densità di energia che la densità numerica di fotoni per unità di volume. Determino la  $\rho_E \equiv \rho$  integrando la distribuzione di energia su tutti i possibili valori della frequenza:

$$\rho = \int_0^\infty \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3} \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{KT}} - 1} d\omega = \frac{(KT)^3}{\pi^2(\hbar c)^3} (KT) \underbrace{\int_0^\infty x^3 \frac{1}{e^x - 1} dx}_{\frac{\pi^4}{15}} = \frac{\pi^2}{15} KT \left(\frac{KT}{\hbar c}\right)^3$$

Per temperature di 3K si ha una densità di energia per unità di volume di circa  $0,38 \frac{eV}{cm^3}$ .

Non ci resta che da determinare la densità di fotoni. Ogni fotone ha energia  $\hbar\omega$ , quindi dividendo la distribuzione in frequenza della densità di energia per  $\hbar\omega$  si ottiene la distribuzione in frequenza della densità di fotoni:

$$\frac{dn(\omega)}{d\omega} = \frac{\omega^2}{\pi^2c^3} \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{KT}} - 1}$$

La densità di fotoni è allora data da:

$$n(\omega) = \int_0^\infty \frac{\omega^2}{\pi^2c^3} \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{KT}} - 1} d\omega$$

Con calcoli analoghi si riesce ad ottenere una densità a 3K di circa  $550\text{cm}^{-3}$ . L'energia media dei fotoni è data dal rapporto tra la densità di energia dei fotoni e la loro densità numerica:

$$\langle k \rangle = \frac{\rho}{n} \simeq 0,7\text{meV}$$

L'energia di soglia risulta allora:

$$E_{soglia} = \frac{2mM + m^2}{4k} \simeq 10^{20}\text{eV}$$

Questo rappresenta l'energia minima che il protone deve avere per produrre  $\pi^0$  satterando coi  $\gamma$ ; effettuando conti più precisi il cutoff è circa  $5 \cdot 10^{19}\text{eV}$ , e intorno a questo valore la reazione può avvenire. Ma questo è solo il primo ostacolo per l'effettivo verificarsi della reazione: c'è infatti da considerare quanto sia alta la probabilità dell'urto tra un protone e un fotone, e quindi il libero cammino medio dei protoni. Se questo libero cammino medio dovesse risultare molto maggiore delle lunghezze caratteristiche del problema, potremo concludere che la reazione non avviene praticamente mai.

Quando si ha scattering di un'onda piana su un centro di scattering, dopo l'urto si genera un'onda sferica, legata a quella piana e al centro di scattering dal tipo di interazione. Il contributo massimo si ha nella direzione iniziale dell'onda piana, infatti a grande distanza dal centro di scattering l'onda piana e l'onda sferica sono sostanzialmente sovrapposte generando interferenza costruttiva, mentre in qualunque altra direzione la media è sostanzialmente nulla e le due onde si neutralizzano. Se è presente un numero elevato di centri di scattering, si ha una interferenza costruttiva nella direzione di propagazione dell'onda che si traduce in un indice di rifrazione: tutto va come se partendo da un'onda piana del tipo  $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ , questa diventi un'onda del tipo  $e^{in\vec{k}\cdot\vec{r}}$ , e la teoria dello scattering ci fornisce quindi una equazione del tipo:

$$k^2 + 4\pi\rho F(k) = n^2k^2$$

dove  $\rho$  è la densità di centri di scattering, e  $F(k)$  è l'ampiezza di scattering.

Torniamo a considerare un solo centro di scattering; l'effetto dell'onda sferica si esplicita nel fatto di rivelare segnali anche in direzioni diverse da quella di propagazione dell'onda piana iniziale. Ma la conservazione del numero di particelle ci dice che se abbiamo un certo flusso lungo la direzione z, le particelle che si osservano lungo altre direzioni vanno tutte a togliere conteggi dalle misure effettuate sempre nella direzione z. Infatti la sezione d'urto è legata alla parte immaginaria della ampiezza di scattering  $F(k)$  dal **teorema ottico**:

$$\sigma = \frac{4\pi}{k} \text{Im}(F(k))$$

Ovvero se c'è un fenomeno di scattering l'ampiezza di scattering deve necessariamente avere una parte immaginaria. Allora possiamo riscrivere:

$$\begin{aligned} k^2 + 4\pi\rho F(k) &= n^2k^2 \\ \Rightarrow k^2(\underbrace{n^2}_{\simeq 1} - 1) &= 4\pi\rho F(k) \Rightarrow (n+1)(n-1)k^2 \simeq 2(n-1)k^2 = 4\pi\rho F(k) \\ \Rightarrow (n-1) &= 2\pi\rho \frac{F(k)}{k^2} \end{aligned}$$

**Punto importante:** se l'ampiezza di scattering ha una parte immaginaria diversa da zero, anche l'indice di rifrazione ha lo stesso destino, e un indice di rifrazione complesso si traduce in una componente di

*assorbimento*, per cui potremo definire una *lunghezza di attenuazione* o *libero cammino medio*. Se scriviamo l'indice di rifrazione come  $n = n_0 + ib$ , si ha allora:

$$\text{Im}(n) \equiv b = \frac{2\pi\rho}{k^2} \text{Im}(F)$$

ma per il teorema ottico:

$$\text{Im}(n) = \frac{2\pi\rho}{k^2} \frac{\sigma k}{4\pi} = \frac{1}{2} \frac{\sigma\rho}{k}$$

e l'onda piana nel mezzo si scrive come:

$$e^{in\vec{k}\cdot\vec{r}} \rightarrow e^{in_0\vec{k}\cdot\vec{r}} e^{-b\vec{k}\cdot\vec{r}} \xrightarrow{\vec{r}\parallel\vec{k}} e^{in_0\vec{k}\cdot\vec{r}} e^{-bkr}$$

Dunque la nuova onda decresce esponenzialmente come  $e^{-bkr}$  nella direzione di propagazione della vecchia onda. Poichè quando si definisce il coefficiente di attenuazione si utilizza il modulo quadro della funzione d'onda, il libero cammino medio si trova osservando l'espressione  $e^{-\frac{r}{\lambda}} = e^{-2bkr} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2bk} = \frac{1}{\rho\sigma}$ . La densità di centri di scattering, ovvero la densità di fotoni, è come abbiamo già detto  $550\text{cm}^{-3}$ , mentre la sezione d'urto è circa  $200\mu\text{barn}$ , quindi si ha che il libero cammino medio è dell'ordine di  $10^{25}\text{cm}$ . Se ci confrontiamo con le lunghezze tipiche della scala cosmica, ovvero  $100\text{Mpc} \simeq 3 \cdot 10^{25}\text{cm}$ , concludiamo che l'effetto dovuto al cutoff GZK si può osservare solo se le particelle appartenenti ai raggi cosmici sono di origine extragalattica, altrimenti non avrebbero modo di interagire con i fotoni della radiazione di fondo, generare pioni, e perdere la loro energia.

Come si fa ad osservare i flussi così ridotti dei raggi cosmici ad alta energia? Ci sono sostanzialmente due modi, a seconda del problema:

- per raggi cosmici di alta energia (circa un migliaio di TeV), si posizionano osservatori a terra, di solito su altopiani, su superfici molto estese; ad esempio l'osservatorio ARGO, in Tibet, è posto a 4500m e si estende per una superficie di  $6000\text{m}^2$ . In tali osservatori si osservano i raggi cosmici secondari, e si risale all'energia dei primari a seconda dell'intensità del flusso simultaneo di secondari.

Altrimenti, sempre a terra, si sfrutta il fatto che le particelle cariche prodotte dallo sciame sono molto relativistiche, ed hanno la caratteristica di generare **emissione Cerenkov**: una carica elettrica si porta dietro il suo campo elettrostatico  $\vec{E}$ , che in un mezzo materiale si propagherà con la velocità della luce in quel mezzo. Tuttavia niente vieta alla carica di muoversi con una velocità superiore alla velocità della luce nel mezzo (ma sempre inferiore alla velocità della luce nel vuoto): si genera in questo modo un cono di radiazione ad un ben determinato angolo (angolo di Cerenkov) dato da  $\cos(\theta) = \frac{1}{n} \frac{c}{v}$ . Una maniera alternativa per osservare particelle cariche è quella di osservare la radiazione Cerenkov nell'atmosfera, posizionando opportunamente degli specchi, sensibili alle zone più importanti dello spettro di emissione Cerenkov (intorno all'ultravioletto); la conoscenza di tale spettro è importante anche per 'ripulire' le misure osservate da radiazioni che non c'entrano niente con l'emissione Cerenkov. Le misure devono esser fatte limitando al massimo le interferenze, pertanto di solito vengono fatte di notte.

- Per basse energie (tra i 50MeV e i 200GeV) si effettuano esperimenti in orbita, guardando quindi direttamente i raggi cosmici primari. Non è importante in questi casi determinare l'energia dei raggi

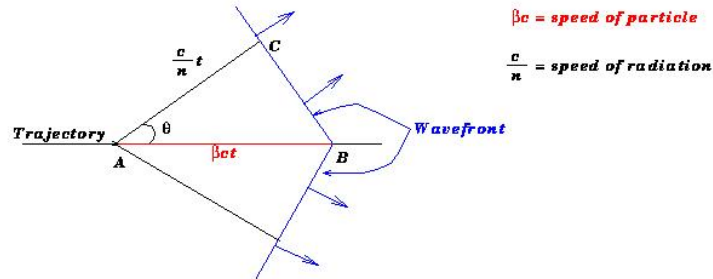


Figura 10.2: Cinematica dell'effetto Cerenkov

quanto la loro composizione: si è scoperto infatti che sono composti principalmente da protoni, con qualche contaminazione in antimateria (ad esempio antiprotoni e positroni, ma anche antinuclei leggeri come l'antielio).

Osserviamo dunque che esiste una sorta di simmetria tra materia e antimateria. Non siamo a conoscenza di nessun meccanismo che ci spieghi perchè il nostro mondo è dominato dalla materia: in ogni caso potremmo benissimo star vivendo in un'isola di materia, e la media su tutto l'universo tra materia e antimateria potrebbe comunque essere nulla.

Resta il problema del perchè vengano osservati raggi cosmici con energie così sbalorditive: una possibile spiegazione potrebbe risiedere nel meccanismo di Fermi, ovvero l'accelerazione di cariche presenti in un plasma interstellare dovuta all'onda d'urto generata dall'esplosione di una supernova; ma anche in questo caso, le energie resterebbero dell'ordine di  $10^{14} - 10^{15} eV$ .

## 10.1 Complementi: la Zeta di Riemann

Consideriamo l'integrale:

$$\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx \quad (s \in \mathbb{N})$$

tale integrale è risolubile e vale  $\Gamma(s) \cdot \zeta(s)$ , dove  $\Gamma(s)$  è la funzione Gamma di Eulero, e  $\zeta(s)$  è invece la funzione Zeta di Riemann. La  $\Gamma$  di Eulero è tale che  $\Gamma(s) = (s-1)!$ , mentre la Zeta di Riemann è definita così:

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \quad (s > 1)$$

C'è un premio di un milione di dollari per chi riuscirà a dimostrare che gli zeri non banali della Zeta di Riemann hanno tutti parte reale uguale a  $\frac{1}{2}$ .

La Zeta di Riemann è legata ai numeri primi, e il loro legame fu definito da Eulero: sia  $p_1$  un numero primo, e consideriamo la serie:

$$\sum_{j_1=0}^{\infty} \frac{1}{p_1^{s_{j_1}}}$$



Certamente gli elementi di questa serie sono contenuti nella Zeta; ad esempio se  $s = 2$  e  $p_1 = 6$ :

$$\sum_{j_1=0}^{\infty} \frac{1}{8^{j_1}} = 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8^2} + \dots$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \underbrace{1}_{k=1} + \frac{1}{2^2} + \underbrace{\frac{1}{2^3}}_{k=2} + \dots + \underbrace{\frac{1}{2^6}}_{k=3} + \dots$$

Prendiamo adesso un altro numero primo  $p_2$ , e consideriamo:

$$\sum_{j_2=0}^{\infty} \frac{1}{p_2^{sj_2}}$$

Se moltiplichiamo le due serie e applichiamo la proprietà distributiva, otteniamo una somma di inversi di numeri naturali costruibili a partire dal prodotto  $p_1 \cdot p_2$ :

$$\sum_{j_2=0}^{\infty} \frac{1}{p_2^{sj_2}} \sum_{j_1=0}^{\infty} \frac{1}{p_1^{sj_1}} = 1 + \frac{1}{p_1^s} + \frac{1}{p_2^s} + \frac{1}{p_2^s p_1^s} + \frac{1}{p_2^s p_1^{2s}} + \frac{1}{p_2^{2s} p_1^s} + \dots$$

Se costruiamo il prodotto delle serie per tutti i numeri primi, finiamo per riottenere la funzione  $\zeta(s)$ , ma stavolta sappiamo come riesprimere la serie  $\sum_{j_1=0}^{\infty} \frac{1}{p_1^{sj_1}}$ :

$$\sum_{j_1=0}^{\infty} \frac{1}{p_1^{sj_1}} = \frac{1}{1 - p_1^{-s}}$$

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

dove  $p$  è un numero primo. Per  $s$  pari, la Zeta di Riemann ha come risultato:

$$\zeta(2k) = \frac{2^{2k-1} \pi^{2k}}{(2k)!} |B_{2k}|$$

dove  $B_{2k}$  è il 2k-esimo numero di Bernoulli. Nel caso dell'integrale della densità di energia, risulta:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \int_0^{\infty} \frac{x^{4-1}}{e^x - 1} dx = \Gamma(4) \cdot \zeta(4) = 3! \frac{2^3 \pi^4}{4!} \underbrace{|B_4|}_{-\frac{1}{30}} = \frac{\pi^4}{15}$$

Nel caso dell'integrale della densità numerica, si ha invece:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} dx = \Gamma(3) \cdot \underbrace{\zeta(3)}_{\sim 1,202} \sim 2$$

## Capitolo 11

### Martedì 5 gennaio

Abbiamo già introdotto il tema della comprensione del fatto che molte particelle hanno una loro antiparticella (o particella coniugata). L'origine del problema è di carattere più teorico che sperimentale, e nasce dall'idea di Dirac di fare una teoria di particella libera, che fosse anche covariante relativistica. Nel 1926 la meccanica quantistica funzionava bene, con l'interpretazione di Copenhagen (lavori di Bohr e Heisenberg durante il loro soggiorno a Copenhagen) e l'equazione di Schroedinger, ma restava il fatto che non era relativisticamente covariante perchè non trattava allo stesso le derivate temporali (che comparivano al prim'ordine) e quelle spaziali ( $\nabla^2$ ). Dirac costruendo la sua teoria pensava all'elettrone, riesce a costruire e a risolvere un'equazione, ma si trova davanti ad una situazione strana:

- lo spin dell'elettrone era  $\frac{1}{2}$ , quindi l'elettrone aveva due gradi di libertà, ma lo spinore di Dirac invece ne aveva quattro;
- tra le soluzioni di Dirac c'erano stati ad energia positiva, che si evolvevano con una legge del tipo  $e^{-ipx}$ , ma anche stati ad energia negativa, che si evolvevano invece come  $e^{ipx}$ .

Le soluzioni ad energia positiva si chiamano così perchè obbediscono all'equazione di Schroedinger:

$$i\partial_t\psi = E\psi$$

dove  $E$  è la parte temporale del quadrimpulso  $p \equiv p^\mu$ ; le soluzioni ad energia negativa obbediscono alla stessa equazione, ma con  $E$  cambiato in  $-E$ . Questo problema c'era anche con l'equazione di Klein-Gordon, ed è intrinseco nella teoria relativistica, che prevede la relazione di dispersione tra energia e impulso  $E^2 = p^2 + m^2$ . Classicamente, le variabili cambiano in maniera continua, e anche l'energia non fa eccezione: fissata la massa, la relazione  $E^2 = p^2 + m^2$  prevede che ci siano stati sia ad energia maggiore che ad energia minore di  $m$ . L'esistenza di questo gap, dato che classicamente non sarebbe stato possibile passare dagli stati superiori a quelli inferiori, consentiva di togliere ogni senso fisico alle soluzioni ad energie negative. Il problema nasce con la meccanica quantistica e con le interazioni, in cui sono ammesse transizioni tra stati con salti quantici e scambi di energia in quantità discrete; limitarsi soltanto alle energie positive sarebbe andato contro ai principi della teoria stessa. Restava però il problema di fondo del perchè un elettrone, in uno stato ad energia positiva, non iniziava ad emettere fotoni a raffica, passando così negli stati inferiori e continuando la sua corsa verso il minimo dell'energia fino a  $-\infty$ . Dirac nel 1928 tirò fuori l'idea del cosiddetto *mare di*

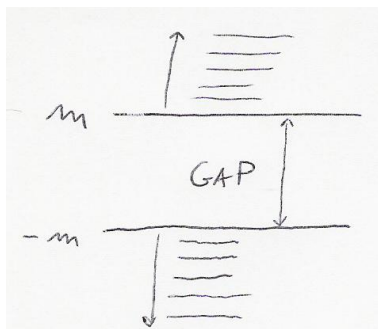


Figura 11.1: Soluzioni a energia positiva e negativa

*Dirac*: le transizioni dell'elettrone verso stati ad energia sempre più bassa non potevano avvenire perchè gli stati ad energia negativa erano già tutti occupati, e l'elettrone avendo spin  $\frac{1}{2}$  soddisfaceva giusto alla statistica di Fermi-Dirac. Questa teoria nelle speranze di Dirac doveva mettere da parte il problema, ma suscitava dei dubbi:

- Come mai dalla simmetria delle soluzioni ad energia positiva e negativa saltava fuori che c'era un mare di energie negative mentre le energie positive erano per lo più tutte disponibili?
- A posteriori, possiamo dire che il meccanismo del mare di Dirac funziona solo per elettroni e per particelle di spin semintero; ma nel 1928 ancora non si conosceva nè il neutrone, nè altre particelle che non avessero spin  $\frac{1}{2}$ . Ad esempio la spiegazione del mare di Dirac non va bene per bosoni come i pioni, per i quali l'equazione di Klein-Gordon fornisce ugualmente soluzioni ad energia positiva e negativa.

Tuttavia la spiegazione di Dirac forniva un meccanismo elegante per la produzione di coppie particella-antiparticella: ad esempio un fotone poteva interagire con un elettrone ad energia negativa, fornendogli abbastanza energia da sbalzarlo verso gli stati ad energia positiva (creando quindi un elettrone 'vero'), e producendo contemporaneamente un buco nel mare. Tale buco si comporta quindi come una particella di carica positiva.

Chi era questa carica positiva? Dirac sempre nel 1928 la interpretò come un protone, ed era estremamente contento di questa conclusione: se avesse funzionato, il protone sarebbe stato il coniugato dell'elettrone, regolato dalla stessa equazione, e nel nucleo atomico ci sarebbero state quindi particelle dello stesso tipo dell'elettrone. Inoltre si conosceva già la radioattività  $\beta$ , e si era interpretata come dovuta alla presenza nei nuclei di 'sacchetti' contenenti un protone ed un elettrone (*elettrone atomico*). Se l'elettrone e il protone fossero stati due stati della stessa particella, svariate teorie ne avrebbero guadagnato in eleganza, e in un suo articolo del 1929 Dirac scrisse '*...richiediamo di postulare una sola specie di particelle e non due...*'.

Ma le teorie di Dirac non erano appoggiate all'unanimità: nel 1930 Oppenheimer obiettò che se davvero protone ed elettrone erano legati in tal modo, e se poteva avvenire la reazione  $\gamma \rightarrow p + e^-$ , allora sarebbe potuta avvenire anche la reazione inversa  $p + e^- \rightarrow \gamma$ , che però non veniva osservata. Un'altra obiezione venne dal fisico russo Igor Tamm, il quale sosteneva che se elettrone e protone erano l'uno il coniugato dell'altro, dovevano subire la stessa interazione elettromagnetica, mentre si sapeva che lo scattering di  $\gamma$  su protoni e su elettroni davano sezioni d'urto Thomson molto diverse (perchè diverso è il raggio classico  $\frac{e^2}{mc^2}$ ). All'inizio questa obiezione non fu presa con la giusta importanza, ma in seguito Weyl dimostrò, sulla

base della simmetria dell'equazione di Dirac, che non poteva esserci differenza di massa tra l'elettrone e le eventuali particella ad energia negativa.

Come continuò la storia: Millikan continuava a pensare che i raggi cosmici fossero raggi  $\gamma$  di altissima energia, formati dalla sintesi di atomi pesanti a partire da atomi leggeri, e per dimostrare la sua congettura cominciò a studiare lo spettro delle particelle secondarie cariche, prodotte dai suoi 'fotoni' in materia. Chiese quindi al suo allievo Anderson di posizionare in una camera a nebbia un campo magnetico per misurare l'impulso delle particelle, e cominciò a guardare le tracce; si aspettava di vedere in gran parte elettroni, con un pò di protoni sparsi, in realtà scoprì che c'erano tante particelle positive quante negative, e mentre quelle negative si potevano ben identificare con elettroni, non si sapeva ben spiegare cosa fossero quelle positive: inizialmente si pensò che fossero protoni, oppure elettroni che procedevano in verso opposto, ovvero elettroni che invece di scendere dal cielo, salivano da terra. Infatti, le misure mediante campo magnetico non permettevano di stabilire il verso in cui si muovevano le cariche, poichè la forza di Lorentz è simmetrica nello scambio contemporaneo della carica e del verso della velocità ( $F_l = q \frac{\vec{v} \wedge \vec{B}}{c}$ ). Anderson allora mise nella camera a nebbia una lamina di piombo spessa circa 6 millimetri:

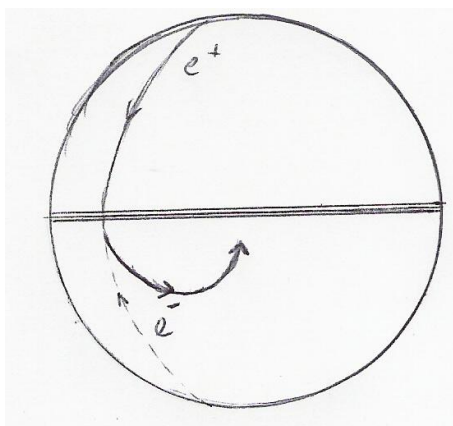


Figura 11.2: Traiettoria del positrone in presenza della lamina

Nel passare attraverso il piombo, le particelle cariche perdono energia e quindi impulso, pertanto la curvatura della traiettoria diminuisce, e in questo modo fu possibile rendersi conto che la particella osservata non era un elettrone retrogrado bensì una particella con carica positiva, di cui ancora non si sapeva la provenienza, ma battezzata comunque per l'occasione *positrone*.

Anderson, nel 1933, propose l'idea che questa particella di carica positiva dovesse provenire dall'interazione dei raggi cosmici primari con sistemi legati  $e^+ + p^-$ , analogamente a come gli elettroni sarebbero dovuti provenire dai sistemi legati  $e^- + p$ . Tuttavia lo stesso Anderson era scettico, dato che particelle come il protone ma negative non erano state ancora osservate, e suggerì (giustamente) che la ricerca dovesse spingersi in tal senso. 22 anni dopo fu scoperto l'antiprotone.

L'identificazione completa tra il positrone e la particella positiva di Anderson fu fatta da Occhialini e Blackett ai laboratori di Cavendish grazie al telescopio di Rossi. In camera a nebbia si guardarono gli eventi di Anderson, e grazie ad un trigger ci si rese conto che il numero di eventi di carica positiva e negativa era pressochè il solito. I due inquadrarono il problema, e conclusero che poichè i positroni non sono presenti in materia, dovevano essere prodotti in qualche modo dallo sciame: poichè ce n'era tanti positivi quanti

negativi, era verosimile che il meccanismo che li produceva fosse il solito, e ripresero il meccanismo del mare di Dirac, ovvero della **conversione del fotone in materia**.

Restava il fatto che il mare di Dirac creava più problemi di quanti non ne risolvesse: nell'ambito della teoria classica di Dirac non c'era soluzione a tali problemi, e la spiegazione definitiva del significato dell'equazione di Dirac si capiva soltanto quantizzando il campo. 'Quantizzare un campo' significa esprimerlo in termini di soluzioni piane, con coefficienti che in fase di quantizzazione diventano operatori di creazione e distruzione, per le particelle e antiparticelle che il campo stesso descrive. In prima quantizzazione le particelle non si possono creare o distruggere, in seconda quantizzazione sì. A questo punto le soluzioni ad energia negativa sono associate non a delle antiparticelle, ma al fatto che il campo contenga operatori che creano e distruggono: le energie positive sono legate alla creazione di particelle, quelle negative alla loro distruzione.

Come arrivò Dirac alla sua equazione? Essa doveva avere una serie di caratteristiche:

- doveva essere covariante relativistica;
- doveva potersi scrivere nella forma  $i\partial_t\psi = H\psi$ ;
- doveva ammettere una quadricorrente conservata, la cui componente temporale doveva essere definita positiva, in modo da essere interpretabile come densità di probabilità. L'equazione di Klein-Gordon non permetteva questa possibilità.

Il fatto che si pretendesse la covarianza relativistica implicava che le derivate temporali dovessero essere sostituite dall'operatore  $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ , ma essendo esso un quadrivettore non era di per sé covariante, e doveva essere quindi affiancato da un secondo quadrivettore col quale avrebbe formato un prodotto scalare (stavolta invariante di Lorentz). Si poteva pensare di prendere il prodotto  $\partial_\mu\partial^\mu$ , ma non sarebbe stata una scelta furba dato che avremmo riottenuto l'equazione di Klein-Gordon. Allora Dirac cercò il suo quadrivettore nella legge di trasformazione del campo, non più scalare come nel caso di Klein-Gordon, e che si trasformava sotto trasformazioni di Lorentz in questo modo:

$$x' = \Lambda x \Rightarrow \phi'(x') = S(\Lambda)\psi(x)$$

dove  $S(\Lambda)$  è una rappresentazione del gruppo di Lorentz, ed ha la forma:

$$S(\Lambda) = e^{\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}}$$

dove  $\sigma_{\mu\nu} = -\frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$ . Le  $\gamma_\mu$  sono matrici 4x4 che soddisfano l'algebra:

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}$$

mentre  $\omega_{\mu\nu}$  è un tensore antisimmetrico di parametri. La  $S(\Lambda)$  è una azione non banale sullo spinore  $\psi(x)$ , le cui componenti vengono rimescolate; per una rotazione pura definita dal vettore  $\vec{\theta}$  possiamo esprimere  $S(\vec{\theta})$  come:

$$S(\vec{\theta}) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - i(\vec{\Sigma} \cdot \hat{\theta})\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

dove  $\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$ . Nel caso dei boost di Lorentz, definiti da un vettore velocità  $\vec{v}$  e dalla *rapidità*  $y = \tanh^{-1}(\beta)$ ,  $S(\vec{v})$  si scrive come:

$$S(\vec{v}) = \cosh\left(\frac{y}{2}\right) + (\vec{\alpha} \cdot \hat{v}) \sinh\left(\frac{y}{2}\right)$$

dove  $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$ .

Le matrici  $\gamma_\mu$  d'altra parte si trasformano nel modo seguente:

$$S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu$$

pertanto  $\gamma^\mu$  è un operatore quadri-vettoriale: in questo modo possiamo costruire un prodotto di Lorentz contraendo  $\gamma^\mu$  con  $\partial_\mu$ . Adesso siamo anche in grado di mostrare che se  $\psi(x)$  è soluzione dell'equazione di Dirac, anche  $\psi'(x')$  lo è:

$$\begin{aligned} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) &= 0 \\ \Rightarrow (i\gamma^\mu \partial'_\mu - m)\psi'(x') &= (i\gamma^\mu \partial'_\mu - m)S(\Lambda)\psi(x) = S(\Lambda)S^{-1}(\Lambda)(i\gamma^\mu \partial'_\mu - m)S(\Lambda)\psi(x) = \\ &= S(\Lambda)(i\underbrace{S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda)}_{=\Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu} \partial'_\mu - m)\psi(x) = S(\Lambda)(\underbrace{\Lambda^\mu{}_\nu \Lambda_\mu{}^\rho}_{\delta_\nu^\rho} \gamma^\nu \partial_\rho - m)\psi(x) = S(\Lambda)\underbrace{(\gamma^\nu \partial_\nu - m)}_{=0}\psi(x) = 0 \end{aligned}$$

Nella rappresentazione cosiddetta 'di Dirac', le matrici  $\gamma^\mu$  si scrivono come:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

Per procedere nella scrittura dell'equazione di Dirac, dobbiamo capire a chi può essere legato l'operatore  $\gamma^\mu \partial_\mu$ . Se ne prendiamo il quadrato, otteniamo:

$$\gamma^\mu \partial_\mu \gamma^\nu \partial_\nu = \frac{1}{2} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \partial_\mu \partial_\nu = \square$$

dunque affinché sia soddisfatta la regola di dispersione relativistica  $E^2 = p^2 + m^2$  insieme a  $\gamma^\mu \partial_\mu$  deve comparire anche la massa: l'equazione di Dirac si scrive infine come

$$(\gamma^\mu \partial_\mu + im)\phi(x) = 0 \Rightarrow (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0$$

Per poter dare una qualche interpretazione è importante a questo punto introdurre l'interazione elettromagnetica, mediante sostituzione minimale:

$$\begin{aligned} i\partial_\mu &\rightarrow i\partial_\mu - \frac{e}{c}A_\mu \\ \Rightarrow (i\gamma^\mu \partial_\mu - \frac{e}{c}\gamma^\mu A_\mu - m)\psi(x) &= 0 \end{aligned}$$

**Osservazione:** le soluzioni ad energia positiva evolvono come  $e^{ipx}$ , mentre quelle ad energia negativa come  $e^{-ipx}$ . E' possibile passare dall'una all'altra prendendo il complesso coniugato, ma se  $\psi(x)$  è soluzione

dell'equazione di Dirac, anche  $\psi(x)^*$  lo è? Prendendo il quadripotenziale elettromagnetico come reale, scriveremo:

$$(-i\gamma^{\mu*}\partial_\mu - \frac{e}{c}\gamma^{\mu*}A_\mu - m)\psi^* = 0$$

Siamo arrivati ad una equazione che non è più l'equazione di Dirac; infatti le  $\gamma^\mu$  non sono connettabili alle  $\gamma^{\mu*}$  mediante un cambio di base, e sono tutte reali a parte  $\gamma^2$ . Se costruiamo la matrice  $M = i\gamma^2$ , questa è tale che  $M\gamma^{\mu*} = -\gamma^\mu M$ :

- se  $\mu \neq 2$ ,  $\gamma^\mu = \gamma^{\mu*}$ , e anticommuta con  $M$ ;
- se  $\mu = 2$ ,  $\gamma^\mu$  commuta con  $M$  e  $\gamma^{\mu*} = -\gamma^\mu$ .

Allora se moltiplichiamo a sinistra per  $M$  la complessa coniugata dell'equazione di Dirac, abbiamo:

$$M(-i\gamma^\mu\partial_\mu - \frac{e}{c}\gamma^{\mu*}A_\mu - m)\psi^* = -(-i\gamma^\mu\partial_\mu - \frac{e}{c}\gamma^\mu A_\mu - m)M\psi^* = (i\gamma^\mu\partial_\mu + \frac{e}{c}\gamma^\mu A_\mu - m)M\psi^* = 0$$

che è l'equazione di Dirac per lo spinore  $M\psi^*$ , che descrive una particella di carica opposta a quella dell'elettrone, nello stesso campo elettromagnetico. La trasformazione  $\psi \rightarrow M\psi^*$  si dice trasformazione di **coniugazione di carica**.

## Capitolo 12

### Mercoledì 6 febbraio

#### 12.1 Antimateria

Nell'ambito di una teoria di campo è necessario postulare l'esistenza dell'antimateria. Ogni particella finora scoperta ha una sua antiparticella, e in generale sono diverse l'una dall'altra, almeno per la carica. Il problema dell'identità tra particella e antiparticella si pone solo se la particella è neutra, ad esempio nel caso dei fotoni e del  $\pi^0$ , in cui la particella coincide con l'antiparticella. Nel caso del neutrone si potrebbe avere qualche dubbio dato che è neutro, ma sappiamo che la sua antiparticella, l'antineutrone, è ben diversa dal neutrone stesso. In realtà il neutrone è neutro per modo di dire: è complessivamente neutro, ma al suo interno ha una distribuzione di carica elettrica non nulla, inoltre ha anche un momento magnetico. Alla fine sappiamo che il neutrone è formato da tre quark, mentre l'antineutrone è formato da tre antiquark.

Nel **1955**, periodo in cui già convivevano la fisica degli acceleratori e la fisica dei raggi cosmici, Chamberlain e Segrè a Berkeley scoprono l'antiprotone. L'acceleratore utilizzato accelerava le particelle cariche fino a 6GeV, e la reazione sfruttata era la seguente:

$$p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p}$$

Abbiamo scritto questa reazione perchè sappiamo che è quella giusta, ma apparentemente niente avrebbe vietato di sostituire due dei protoni finali con due  $\pi^+$ , per dare la reazione:

$$p + p \rightarrow \pi^+ + \pi^+ + p + \bar{p}$$

La carica è conservata, e il momento angolare pure, tuttavia questa reazione non si osserva. Come mai? Nel 1938 Stuckelberg si chiese perchè non si osservava la reazione  $p \rightarrow e^+ + \gamma$ , per quanto essa sembrasse molto favorita dal punto di vista energetico e del momento angolare. Per spiegare questo fatto, Stuckelberg introdusse un nuovo numero quantico, la *carica barionica*: protone e neutrone avrebbero dovuto avere carica barionica 1 e le loro antiparticelle -1, mentre i pioni  $^\pm$  avevano carica barionica 0. Quindi la reazione  $p + p \rightarrow \pi^+ + \pi^+ + p + \bar{p}$  non può avvenire perchè non è conservata la carica barionica. Tra l'altro si è osservato che la vita media della reazione  $p \rightarrow e^+ + \gamma$  è di  $10^{34}$  anni.

Calcoliamo adesso l'energia di soglia per la reazione  $p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p}$ . Se il protone proiettile ha un quadrimpulso  $(E, \vec{p})$  e il protone bersaglio ha un quadrimpulso  $(M, \vec{0})$ , la massa invariante del sistema iniziale è data da  $s_i = 2M^2 + 2EM = 2M^2 + 2\gamma M^2$ . Per il sistema finale invece,  $s_f = (4M)^2 = 16M^2$ .



Affinchè possa avvenire la reazione quindi, si deve avere  $s_i = s_f \Rightarrow 2M^2\gamma = 14M^2 \Rightarrow \gamma = 7$ . Un  $\gamma$  del genere corrisponde per il protone ad una energia di circa 6,57GeV, quindi superiore a quella che l'acceleratore poteva fornire. Tuttavia ricordiamo che i protoni bersaglio non sono mai completamente fermi, bensì sono soggetti all'agitazione di Fermi, che consente quindi di osservare reazioni anche quando siamo formalmente sotto soglia. Quantifichiamo adesso l'effetto dell'agitazione di Fermi: il protone bersaglio ha quadrimpulso  $(M\hat{\gamma}, M\hat{\gamma}\hat{\beta}\vec{n})$  dove  $\vec{n}$  è il versore della direzione dell'impulso spaziale. L'effetto dell'agitazione di Fermi è massimizzato quando  $\vec{n}$  e l'impulso spaziale  $\vec{p}$  del protone proiettile hanno stessa direzione e versi opposti; quando questo accade, la massa invariante del sistema iniziale si ricalcola come:

$$s'_i = 2M^2 + 2M\gamma M\hat{\gamma} - M\gamma M\hat{\gamma}\hat{\beta} \underbrace{\vec{\beta} \cdot \vec{n}}_{=-\beta} = 2M^2 + 2M^2\gamma\hat{\gamma}(1 + \beta\hat{\beta})$$

Analogamente a prima, l'energia di soglia si ottiene uguagliando a 7 la quantità  $\gamma\hat{\gamma}(1 + \beta\hat{\beta})$ : si ottiene che il  $\gamma$  che deve essere fornito dall'acceleratore è dato da

$$\gamma = \frac{7}{\hat{\gamma}(1 + \beta\hat{\beta})}$$

L'agitazione di Fermi può dare contributi energetici fino a circa 25 MeV, quindi  $\hat{\gamma} = \frac{E}{M} = \frac{M+25MeV}{M} \simeq 1,027$ .  $\hat{\beta}$  si ottiene come:

$$\hat{\beta} = \sqrt{1 - \frac{1}{\hat{\gamma}^2}}$$

Nell'ipotesi che il nuovo  $\gamma$  non sia molto diverso da 7, stimiamo inizialmente  $\beta \simeq 1$ , ottenendo come gamma di soglia  $\gamma = 5,56 \Rightarrow E = 5,22GeV$ . A posteriori, ricalcolando  $\beta$  con il valore di  $\gamma$  appena trovato, otteniamo  $\beta \simeq 0,98$ , quindi l'approssimazione  $\beta \simeq 1$  non era poi così fuori dal mondo. Sfruttando l'agitazione di Fermi, dunque, è possibile avere energia sufficiente ad innescare la reazione.

Resta il problema del distinguere tra i prodotti di reazione quelli che ci interessano: in questi tipi di reazione vengono prodotti anche pioni carichi, e bisogna selezionare gli eventi giusti. Come si può capire se una particella negativa è effettivamente un antiprotone?

Poichè stiamo cercando particelle cariche negativamente, posizioneremo per prima cosa un campo magnetico opportuno. Occhialini e Blackett utilizzarono uno spettrometro magnetico, che oltre a deflettere selezionava le particelle relativamente al loro impulso: la carica selezionata era ovviamente quella negativa, e l'impulso era intorno a  $1,19\frac{GeV}{c}$ . Con questo impulso, però, poteva essere benissimo un  $\pi^-$ ; per distinguerlo da un antiprotone si deve poter valutare la massa, quindi sapere la velocità delle particelle. A questo scopo utilizzarono 3 approcci diversi:

1. Prima di tutto posizionarono due *scintillatori*<sup>1</sup> lungo la traiettoria delle particelle, ad una distanza di circa 12 metri, per calcolarne il tempo di volo.

Quand'è che questo metodo non funziona? Se le particelle sono ultrarelativistiche viaggiano tutte a velocità prossime a c, dunque per percorrere i 12 metri ci metteranno tutte circa 40ns. Nel caso attuale però non c'è questo problema poichè un  $\pi^-$  con impulso di  $1,19\frac{GeV}{c}$  è sì ultrarelativistico, ma un antiprotone no: l'impulso spaziale è per definizione  $|\vec{p}| = m\beta\gamma$ , mentre l'energia è  $E = m\gamma$ ; poichè

<sup>1</sup>Uno scintillatore è un rivelatore composto da materiali organici, inorganici o plastici, i quali emettono radiazione (di solito visibile o ultravioletta) quando sono attraversati (quindi ionizzati) da particelle cariche.

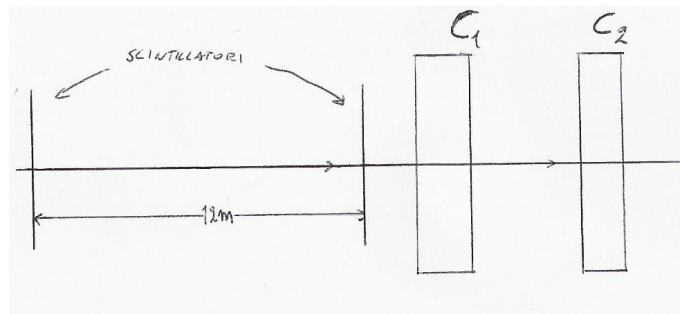


Figura 12.1: Schema dell'apparato

stiamo ipotizzando di cercare antiprotoni, sappiamo che avremo a che fare con particelle di massa sostanzialmente pari a quella del protone, dunque siamo in grado di ricavare il prodotto  $\beta\gamma = \frac{p}{m}$ . Ma  $\gamma = \sqrt{1 + (\beta\gamma)^2}$ : per l'antiprotone si otteneva  $\beta\gamma = 1,268$ , quindi  $\gamma = 1,615$  e  $\beta = 0,785$ , mentre per il  $\pi^-$  si aveva  $\gamma = 10,3$  e  $\beta = 0,995$ . Nel caso del pione allora, il tempo di volo doveva essere circa 40ns, mentre per l'antiprotone  $\Delta t = \frac{40ns}{0,785} \simeq 51ns$ . A quei tempi era già possibile distinguere una differenza temporale di 11 ns, ma le code delle distribuzioni potevano sovrapporsi, e questo procedimento da solo non bastava.

2. Accoppiarono allora agli scintillatori altri due rivelatori a luce Cerenkov: a differenza della luce di scintillazione (isotropa), la radiazione Cerenkov è del tutto direzionale, e forma un cono che ha come asse la direzione di volo della particella che la emette. Come da figura, dopo un tempo  $\Delta t$  la particella avrà percorso un tratto  $\Delta s = \beta c \Delta t$ , e nel frattempo il campo elettrico si sarà propagato per una distanza  $\Delta s' = \frac{c}{n} \Delta t$ , dove  $n$  è l'indice di rifrazione del mezzo.

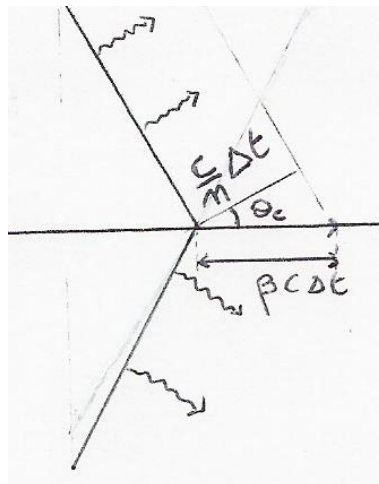


Figura 12.2: L'angolo di emissione Cerenkov

L'angolo Cerenkov di emissione si calcola come:

$$\cos(\theta_c) = \frac{\frac{c}{n} \Delta t}{\beta c \Delta t} = \frac{1}{n\beta}$$

L'ultima espressione va sotto il nome di *relazione Cerenkov*: si ha emissione solo se  $n\beta > 1$ . E' possibile dimostrare che la quantità di fotoni Cerenkov emessi per unità di lunghezza e di energia è:

$$\frac{dn}{dLdE} = \frac{\alpha}{\hbar c} \sin^2(\theta_c)$$

La radiazione Cerenkov è dunque un effetto a soglia: il rivelatore  $C_1$  era regolato per scattare soltanto nel caso del passaggio di particelle con  $\beta > 0,785$ , dunque solo il  $\pi^-$  era in grado di dare un segnale in  $C_1$ .

3. Il rivelatore  $C_2$  invece veniva usato in modo differenziale, si sfruttava infatti la caratteristica di direzionalità della radiazione Cerenkov: immaginiamo di conoscere la traiettoria della particella, e di conoscere l'angolo Cerenkov di emissione. All'interno del rivelatore  $C_2$  veniva posto uno specchio sferico di distanza focale pari a  $F$ , che avrebbe dovuto riflettere i fotoni Cerenkov parallelamente all'asse di volo, ad una altezza (nell'ipotesi di piccoli  $\theta_c$ )  $R \simeq \theta_c F$ . Una fenditura posta a quell'altezza avrebbe raccolto i fotoni emessi al giusto angolo (ovvero il giusto  $n\beta$ ), bloccando gli altri. Occhialini e Blackett selezionarono  $\beta$  tra 0,75 e 0,78, considerando il fatto che gli antiprotoni, passando attraverso ai due scintillatori e al primo rivelatore Cerenkov, avrebbero perso per ionizzazione un pò del  $\beta = 0,785$  iniziale.

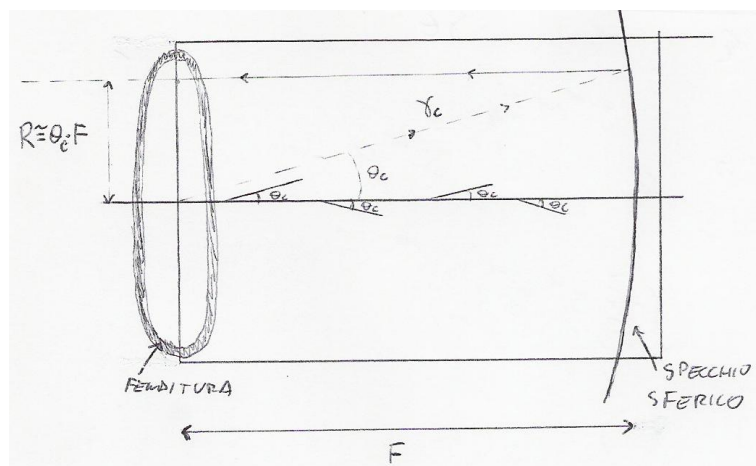


Figura 12.3: Il secondo rivelatore Cerenkov

Ricapitolando, la misura era effettuata in tre stadi: raccolta del primo segnale di tempo di volo  $\sim 51ns$ , assenza del segnale nel primo rivelatore Cerenkov, presenza del segnale nel secondo Cerenkov.

## Capitolo 13

### Lunedì 11 febbraio

Vediamo adesso come si deformò il quadro delle particelle elementari dopo la scoperta del positrone. A quell'epoca si conoscevano protoni, neutroni, fotoni, elettroni, positroni, muoni e pioni, e ognuna di queste particelle aveva più o meno una sua ragione d'esistere (a parte il muone). Nella seconda metà degli anni '40 furono osservate delle particelle che non appartenevano al quadro, più precisamente nel **1947** Rochester e Butler osservarono in camera a nebbia una traccia singolare (FIGURA): da un punto di diramazione partivano due particelle, una positiva e una negativa, che risultavano essere pioni. Data la forma a V della traccia, la particella alla base del decadimento fu battezzata  $V^0$ ; la sua massa era circa un migliaio di masse elettroniche, quindi circa la metà della massa del protone, e nel giro di un paio d'anni se ne scoprì l'analogo carico,  $V^+$ , che decadeva in tre pioni:

$$\begin{aligned}V^0 &\rightarrow \pi^+ + \pi^- \\V^+ &\rightarrow \pi^+ + \pi^+ + \pi^-\end{aligned}$$

Oggi sappiamo che la  $V^0$  e la  $V^+$  altri non sono che i mesoni  $K^0$  e  $K^+$ . Sempre in quegli anni Anderson scoprì una nuova particella, la  $\Lambda$ , simile alla  $V^0$ : era neutra, e decadeva in un protone e in un  $\pi^-$ . La  $\Lambda$  però creava un problema, legato al numero barionico: poichè nei suoi prodotti di decadimento c'era un protone, per la conservazione del numero barionico bisognava assegnare carica barionica +1 alla  $\Lambda$ . Questo non era di per sè una tragedia, ma in qualche modo andava a turbare l'ambiente nucleare di protone e neutrone, fino ad allora le uniche particelle a cui fosse stato necessario assegnare carica barionica.

Negli anni immediatamente successivi alla scoperta della  $\Lambda$ , si ebbe un fiume di scoperte di particelle simili, e si ingrandiva a dismisura il pantheon delle particelle elementari. Le ultime particelle scoperte, come se non bastasse, avevano un che di 'strano', che giustificherà poi la loro classificazione come particelle, appunto, *strane*. Infatti, tali particelle venivano di solito create in interazioni forti:

$$\pi^- + p \left\{ \begin{array}{ll} \rightarrow K^0 + \Lambda & ; \\ \rightarrow K^+ + \Sigma^- & ; \\ \rightarrow K^0 + \Sigma^0 & . \end{array} \right.$$

Due fatti sperimentali:

1. Nessuno aveva mai osservato le reazioni

$$\pi^- + p \left\{ \begin{array}{l} \rightarrow \pi^0 + \Lambda \quad ; \\ \rightarrow \pi^+ + \Sigma^- \quad ; \\ \rightarrow \pi^0 + \Sigma^0 \quad . \end{array} \right.$$

Inoltre le nuove particelle venivano create sempre a coppie.

2. Vite medie:

- La  $\Lambda$  ha una massa di circa  $1,11 GeV$  e decade in  $p + \pi^-$  con una vita media di  $2,6 \cdot 10^{-10} s$ ;
- la  $\Sigma^-$  ha una massa di circa  $1,20 GeV$  e decade in  $n + \pi^-$  con una vita media di  $1,5 \cdot 10^{-10} s$ ;
- la  $\Sigma^0$  ha una massa di circa  $1,19 GeV$  e decade in  $\Lambda + \gamma$  con una vita media di  $7 \cdot 10^{-20} s$ .

I decadimenti della  $\Lambda$  e della  $\Sigma^-$  sembrerebbero di tipo forte, ma non è l'interazione forte che le fa decadere. Possiamo affermarlo con sicurezza confrontando le vite medie; che vita media ci aspetteremmo per un decadimento forte? Consideriamo il decadimento  $\Sigma^0 \rightarrow \Lambda + \gamma$ ;  $\Sigma^0$  ha numero barionico 1 perchè decade in una  $\Lambda$ , inoltre la sua massa è molto simile a quella della  $\Sigma^-$ , anch'essa con numero barionico 1. Tuttavia abbiamo osservato che le loro vite medie sono drammaticamente diverse (10 ordini di grandezza). Un parallelo naturale è con il comportamento dei pioni, infatti anche per loro avevamo osservato una differenza di vite medie tra  $\pi^0$  e  $\pi^\pm$  di circa 8 ordini di grandezza. Per il pione neutro l'interazione responsabile del decadimento è quella elettromagnetica, e questo fa sì che il decadimento avvenga più velocemente di quello dei pioni carichi, per i quali l'interazione responsabile è quella debole. Dato che la  $\Sigma^0$  decade in una  $\Lambda$  più fotoni, l'interazione responsabile è elettromagnetica, e poichè la massa della  $\Sigma^0$  è maggiore di quella del  $\pi^0$ , si ha una diminuzione della vita media fino a circa  $10^{-19} s$ . A questo punto, se il decadimento della  $\Lambda$  e della  $\Sigma^-$  fosse dovuto all'interazione forte, più intensa di quella elettromagnetica, la loro vita media dovrebbe essere ancora più breve, intorno ai  $10^{-23} s$ , dunque il decadimento piuttosto lento delle due particelle non si può spiegare che tramite una interazione debole. Dunque ci ritroviamo nella seguente situazione: dal punto di vista della produzione di particelle, questa era copiosa, sintomo di una interazione molto intensa come quella forte, mentre dal punto di vista del decadimento, questo avveniva secondo l'interazione debole. Si uscì dal dilemma con un'ipotesi di Abraham Pais, che battezzò il fenomeno come **produzione associata di particelle strane**: nella interazione tra particelle non strane, le particelle strane venivano prodotte a coppie, e mai una sola per volta. Questo concetto venne formalizzato in seguito, introducendo un nuovo numero quantico, chiamato per l'appunto *stranezza* ( $s$ ), la cui conservazione fosse garantita dall'interazione forte mentre poteva essere violata da quella debole. Se assegniamo  $s = 1$  al  $K^0$  e al  $K^+$  e  $s = -1$  a  $\Lambda$ ,  $\Sigma^-$  e  $\Sigma^0$ , le reazioni osservate dalla reazione di  $\pi^-$  con protoni conservavano tutte la stranezza, e fu giustificato quindi perchè non avvenissero quelle

$$\pi^- + p \left\{ \begin{array}{l} \rightarrow \pi^0 + \Lambda \quad ; \\ \rightarrow \pi^+ + \Sigma^- \quad ; \\ \rightarrow \pi^0 + \Sigma^0 \quad . \end{array} \right.$$

Una volta prodotte, le particelle strane decadono allora via interazione debole. Se non ci fosse l'interazione debole, la  $\Lambda$  infatti non potrebbe decadere, non essendoci altre particelle strane con  $s = -1$  e massa minore

della massa della  $\Lambda$ ; l'unico decadimento possibile è quindi  $\pi^- + p$ , che però viola la stranezza ed avviene coi tempi caratteristici dell'interazione debole. Per la  $\Sigma^0$  il decadimento avviene in  $\Lambda + \gamma$ , la stranezza si conserva, e i tempi caratteristici sono quelli dell'interazione elettromagnetica.

Man mano che si perfezionava l'utilizzo degli acceleratori, e si scoprivano sempre nuove particelle, ci si poneva il problema se quelle elementari dovessero davvero essere un numero così spropositato, oppure se esistesse un modo per classificarle. La prima idea risale a Sakata, nel 1956, che propose un modello per mesoni e barioni basato sui tre barioni conosciuti al momento:  $p$ ,  $n$ , il nuovo barione strano  $\Lambda$ , e le loro rispettive antiparticelle. Sakata assunse che le interazioni forti fossero invarianti per rotazioni nello spazio di  $p$ ,  $n$  e  $\Lambda$  (invarianza sotto  $SU(3)$ ), analogamente all'isospin, in cui l'interazione tra nucleoni era uno scalare per rotazioni nello spazio di  $p$  e  $n$ . Tale simmetria non è esatta, e anche se venne ripresa in seguito in altra forma, si dimostrò rapidamente che l'idea di Nakata non funzionava, dato che non spiegava certi fatti come la massa di alcune particelle (le  $\Xi$ ).

Gell-Mann riprese l'idea di Sakata e sviluppò l'idea dei quark: le particelle erano costituite a partire da tre costituenti fondamentali, simili a protone, neutrone e particella  $\Lambda$ :

- una particella p-like, il quark **up** ( $u$ ), di carica  $\frac{2}{3}$ ;
- una particella n-like, il quark **down** ( $d$ ), di carica  $-\frac{1}{3}$ ;
- una particella  $\Lambda$ -like, il quark **strange** ( $s$ ), di carica  $-\frac{1}{3}$ .

Secondo il modello di Gell-Mann, i quark avevano cariche frazionarie e spin  $\frac{1}{2}$ . La simmetria alla base della sua costruzione era ancora  $SU(3)$ , e partì dai tre costituenti fondamentali costruendo i mesoni con sistemi  $q\bar{q}$ , e i barioni con sistemi  $qqq$ . Gell-Mann stesso riteneva la simmetria  $SU(3)$  come conservata, ma passibile di violazione nel caso di quark strani, mentre  $u$  e  $d$  rispettavano da soli la solita simmetria  $SU(2)$  di isospin.

La teoria di Gell-Mann condusse al cosiddetto **metodo dell'ottetto** (*the eightfold way*); tale denominazione nasce dal seguente fatto: i mesoni si ottenevano mettendo insieme un quark e un antiquark, e i quark costituivano i tre elementi della rappresentazione fondamentale di  $SU(3)$  (di dimensione 3); nel caso di  $SU(3)$  si hanno due rappresentazioni fondamentali non equivalenti (ovvero non collegate da una trasformazione unitaria), la rappresentazione dei quark, detta *rappresentazione 3*, e la rappresentazione degli antiquark, detta *rappresentazione  $\bar{3}$* . Un sistema quark-antiquark è in sostanza il prodotto diretto di due rappresentazioni di dimensione 3, e analogamente al caso del prodotto di momenti angolari possiamo scrivere:

$$q\bar{q} = 3 \otimes \bar{3}$$

La dimensione del prodotto diretto di due rappresentazioni a dimensione 3 è 9, ma tale rappresentazione *non è irriducibile*; sempre analogamente al caso del momento angolare (ricordiamo il caso di  $1 \otimes 1 = 0 \oplus 1 \oplus 2$ ), la rappresentazione a dimensione 9 è scomponibile come somma diretta di 2 rappresentazioni irriducibili, una a dimensione 8 e l'altra a dimensione 1:

$$3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1$$

Avendo a disposizione il tripletto  $u, d, s$  e il tripletto  $\bar{u}, \bar{d}, \bar{s}$ , possiamo quindi costruire l'ottetto mesonico: Vediamo come si formano i mesoni a partire dai doppietti quark-antiquark:

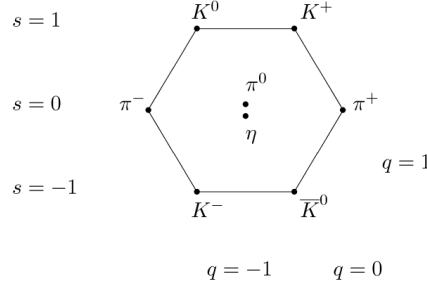


Figura 13.1: Ottetto mesonico

$$\left\{ \begin{array}{ll} K^0, & d\bar{s}; \\ K^+, & u\bar{s}; \\ \pi^+, & u\bar{d}; \\ \pi^0, & \text{combinazioni di } u\bar{u} \text{ e } d\bar{d}, \text{ isospin } 1; \\ \pi^-, & \bar{u}d; \\ \bar{K}^0, & \bar{d}s; \\ \bar{K}^-, & \bar{u}s; \\ \eta, & \text{combinazioni di } u\bar{u} \text{ e } d\bar{d}, \text{ ma con isospin } 0. \end{array} \right.$$

Questi 8 mesoni corrispondono alla rappresentazione 8-dimensionale di SU(3).

**Osservazioni:**

- Per convenzione si assegna stranezza +1 all'antiquark strange.
- Abbiamo considerato l'ottetto, ma non abbiamo ancora considerato il singoletto: esso è costituito da una nona particella, chiamata  $\eta'$ , che ha carica 0, stranezza 0, e si ottiene introducendo la coppia  $s\bar{s}$ .

Per i barioni invece dobbiamo costruire un sistema a tre corpi, del tipo  $qqq$ . Si vede subito che dovendo prendere il prodotto diretto di tre rappresentazioni fondamentali di SU(3) a dimensione 3, otteniamo una rappresentazione a 27 dimensioni, scomponibile in questo modo:

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1$$

I barioni stanno proprio in uno dei due ottetti, costruito con la stessa geometria di quello dei mesoni.

Ancora possiamo scrivere la composizione dei barioni come:

$$\left\{ \begin{array}{ll} n, & udd; \\ p, & uud; \\ \Sigma^-, & dds; \\ \Sigma^0, \Lambda, & uds; \\ \Sigma^+, & uus; \\ \Xi^-, & dss; \\ \Xi^0, & uss; \end{array} \right.$$

**Osservazione:** a differenza dell'ottetto mesonico, le particelle opposte rispetto al centro dell'esagono non sono stavolta antiparticelle l'una dell'altra; ad esempio  $\Sigma^+$  e  $\Sigma^-$  hanno masse differenti. In ogni caso tutte le particelle dell'ottetto hanno numero barionico +1.

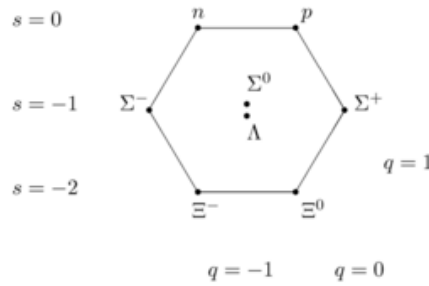


Figura 13.2: L'ottetto dei barioni

Il decupletto invece contiene un'altra famiglia di particelle:

Questo decupletto costituì sia un punto a favore che uno contro l'idea dei quark: il punto a favore era che quando fu fatta la teoria, la particella  $\Omega^-$  al vertice del decupletto ancora non era stata scoperta, ma nell'ambito della rottura di simmetria di SU(3) fu predetta la sua esistenza e un certo valore della sua massa; in seguito fu scoperta e la massa era quella giusta. Ciononostante nemmeno Gell-Mann era troppo convinto dell'idea dei quark, e pensava che SU(3) fosse soltanto un modo furbo di riorganizzare le particelle.

Il punto contro invece era che nel decupletto esistevano anche particelle come la  $\Delta^{++}$ , composta da 3 quark identici, e posti in uno stato di momento angolare orbitale nullo, e spin massimo:  $\vec{L} = 0$  e  $\vec{S} = \frac{3}{2}$ . Per tre particelle identiche lo stato di spin massimo è completamente simmetrico nello scambio di due quark, così come lo era lo stato di momento angolare orbitale nullo, dunque la  $\Delta^{++}$  violava il principio di Pauli (così come la  $\Omega^-$ , fatta da 3 quark strange). Per questo si avanzò l'ipotesi che i quark in realtà non esistessero, anche perchè nessuno fino ad allora aveva mai osservato cariche frazionarie; si fece l'ipotesi del confinamento, ovvero che i quark esistessero soltanto nei barioni e nei mesoni, ma era come spesso accade soltanto un rattoppo forzato, messo lì per far tornare le cose.

Per quanto riguarda la statistica, la situazione si sbloccò con la cromodinamica quantistica (QCD): si avanzò l'idea che i quark non esistessero soltanto nella forma  $u$ ,  $d$ ,  $s$ , ma ciascuno di essi esistesse in 3 stati diversi, detti stati di 'colore' (blu, verde e rosso). Uno stato di barione doveva essere globalmente incolore, e tale situazione si poteva raggiungere o accoppiando un colore col suo anticolore (mesoni), oppure, nei barioni, ogni quark doveva avere un colore diverso. Ad esempio nel neutrone,  $udd$ , i tre quark si potevano

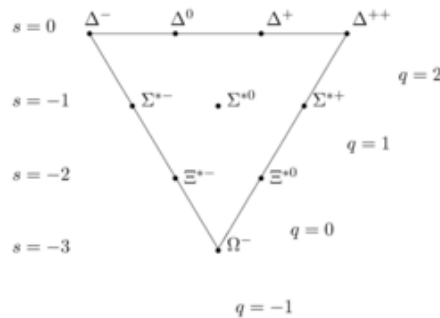


Figura 13.3: Il decupletto barionico



disporre in una qualunque sequenza di colori, BVR, BRV, RVB, ecc.

Questa simmetria di colore è considerata *esatta*, e viene detta simmetria *di colore* per differenziarla da quella SU(3) mesonica, non esatta, e detta *di sapore* (flavour). L'introduzione del colore, in base alla simmetria delle rappresentazioni di SU(3), risolve il problema dell'antisimmetria di scambio: dal punto di vista del colore, *uuu* simmetrico nella parte orbitale e in quella di spin, ma antisimmetrico nella parte di colore, quindi globalmente è antisimmetrico e il principio di Pauli è rispettato. Questo spiega anche il fatto che finora in natura non si sono osservati stati adronici diversi da  $q\bar{q}$ ,  $qqq$  o  $\bar{q}\bar{q}\bar{q}$ .

Attraverso il colore si arriva dunque alla cromodinamica quantistica, la quale prevede che i mediatori dello scambio di colore siano i **gluoni**: tali particelle stanno anch'esse su un ottetto, e portano con sé un anticoloro, col quale distruggono un colore di un quark, e un colore, con cui lo colorano. Ad esempio un gluone  $V\bar{B}$  trova un quark  $B$ , distrugge il colore  $B$  e il quark diventa  $V$ .

Le interazioni forti fanno parte del **Modello Standard**, che nacque quando ormai fu assodata l'esistenza dei quark: negli anni '70 si fecero esperimenti di scattering di elettroni (a 20, 25 GeV) su protoni, e si osservò che la sezione d'urto elettrone-protone non andava d'accordo con la descrizione del protone mediante una densità di carica e un fattore di forma. Per spiegare i risultati di questi esperimenti, detti di *deep inelastic scattering*, si doveva postulare che il protone fosse fatto da noccioli duri e carichi. Feynman chiamò inizialmente questi noccioli *partoni*, differenziandoli dai quark, però poco dopo ci si accorse che avevano le stesse caratteristiche e si trattava effettivamente di quark.

Insieme a questi esperimenti ce ne fu in particolare uno negli anni '80, in cui si osservarono sperimentalmente i mediatori dell'interazione elettrodebole, dopo che negli anni 60 Weinberg e Salam prevederono che l'interazione debole e quella elettromagnetica dovessero essere unificate in una teoria di gauge. Quark e teoria elettrodebole segnarono quindi la nascita del Modello Standard.

## Capitolo 14

### Martedì 12 febbraio

Nel modello standard le interazioni tra particelle si descrivono tramite interazioni locali, ovvero due particelle non possono interagire a distanza, e interagiscono solo quando si toccano, o più precisamente quando le loro funzioni d'onda si sovrappongono. Il modello standard nasce cercando di soddisfare ad alcuni requisiti fondamentali: prima di tutto si vuole compatibilità con la relatività ristretta, e la densità lagrangiana che descrive le interazioni godrà *a priori* di alcune proprietà, come

- invarianza sotto trasformazioni di Lorentz;
- hermitianità; quest'ultima è dovuta a ragioni di osservabilità.

La lagrangiana dunque sarà della forma  $\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(\phi^\alpha(x), \partial_\mu \phi^\alpha(x), x)$ ; normalmente la dipendenza esplicita dalle coordinate è assente, per mantenere l'isotropia dello spazio.

Nel modello standard è importante anche il concetto di campo come mediatore dell'interazione; non si parla mai di relatività generale, pertanto non si considera mai il gravitone (che ha spin 2): tutti i mediatori (fotoni, gluoni, bosoni  $W^\pm$ ,  $Z$ ) hanno spin 1. E' importante osservare che lo spin dei mediatori è 1, quindi intero, cioè i mediatori (i quanti associati al campo) sono dei *bosoni*, mentre le particelle elementari sono tutte dei *fermioni*. Questo, da un punto di vista filosofico, assegna una sorta di *individualità* alle particelle elementari, che dovendo soddisfare alla statistica di Pauli non possono stare più di una in uno stesso stato quantico. Per i bosoni non c'è questa restrizione e possiamo avere un numero arbitrario di mediatori in uno spazio arbitrariamente piccolo.

Per il principio di minima azione le equazioni del moto si ottengono dalla densità lagrangiana come:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\alpha} = 0$$

La lagrangiana conterrà anche tutte le simmetrie legate all'interazione.

Come abbiamo già accennato, le particelle elementari si dividono in **leptoni** e **adroni**. C'è una grande somiglianza tra le due famiglie, e possiamo dire che i leptoni si individuano tra gli altri andando per esclusione: i leptoni infatti sono le uniche particelle che non interagiscono forte. Viceversa, sia adroni che leptoni interagiscono debolmente, mentre adroni e leptoni carichi possono interagire anche elettromagneticamente. Possiamo dividere i leptoni in una famiglia **con 3 'generazioni'**:

$$\begin{array}{l} q = 0 \\ q = -1 \end{array} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix}$$

Ogni colonna corrisponde a una generazione, e le masse dei costituenti aumentano da sinistra verso destra. La prima generazione (quella dell'elettrone) è fatta da particelle stabili (piccole masse, quindi impossibilità di decadere in particelle più leggere). La seconda generazione vede il muone, che con una vita media di  $2,2\mu s$  decade in  $e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$  nel caso del  $\mu^-$ , e in  $e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$  nel caso del  $\mu^+$ . La terza generazione è in sostanza una replica delle precedenti ma con massa maggiore: l'elettrone infatti ha massa  $\sim 0,511 MeV$ , il muone  $\sim 105 MeV$ , e il tauone  $1,777 GeV$ . Data la sua massa considerevole il tauone ha molti più canali di decadimento rispetto al muone; con una vita media di  $0,29 ps$  si ha:

$$\tau \rightarrow \begin{cases} e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\tau, & \sim 17\%; \\ \mu^- + \bar{\nu}_\mu + \nu_\tau, & \sim 17\%; \\ \nu_\tau + \text{adroni}, & \text{il resto.} \end{cases}$$

Ciascuna delle coppie  $\begin{pmatrix} \nu_p \\ p \end{pmatrix}$  costituisce una generazione, ed è detto *doppio di isospin debole*; ancora una volta, questa denominazione definisce una simmetria sotto  $SU(2)$  che non ha niente a che fare con le rotazioni ordinarie.

Non esistono particelle composite fatte da leptoni; non perchè in assoluto non si leghino, ma perchè l'interazione è talmente debole che non riesce a creare sistemi stabili. Gli unici sistemi che si riescono ad osservare sono sistemi legati come gli *atomi esotici*: ad esempio si può costruire un sistema legato  $e^+e^-$ , che si chiama *positronio* e decade molto velocemente. Tale sistema legato è molto simile all'idrogeno per quanto riguarda le dimensioni: stavolta la massa ridotta del sistema  $e^+e^-$  è metà di quella del sistema  $pe^-$ , di conseguenza il raggio atomico sarà scalato di un fattore due, ma rimaniamo comunque nell'ordine dell'angstrom, quindi molto maggiore delle dimensioni delle particelle elementari come protone e neutrone ( $\sim fm$ ); per questo per sistemi di leptoni non si può parlare di particelle in senso stretto, sebbene un sistema  $e^+e^-$  non sia poi così diverso da un sistema  $q\bar{q}$ . Analogamente si possono costruire stati legati  $\mu^+e^-$ , oppure  $\mu^+\mu^-$  (*muonio*).

Vediamo adesso come sono descritte le interazioni nel modello standard. Nel caso elettromagnetico la lagrangiana di interazione si scrive:

$$\mathcal{L}(x) = e\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)A^\mu(x)$$

Com'è fatto il prodotto  $\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)$ ? Le  $\gamma^\mu$  come abbiamo già detto sono matrici  $4 \times 4$ , mentre  $\psi(x)$  ha questa forma:

$$\psi(x) = \sum_{r=1,2} \int \frac{d^3p}{2E} \left( a^{(r)}(\vec{p})u^{(r)}(\vec{p})e^{ipx} + b^{\dagger(r)}(\vec{p})v^{(r)}(\vec{p})e^{-ipx} \right)$$

analogamente per il campo hermitiano coniugato si ha:

$$\psi^\dagger(x) = \sum_{r=1,2} \int \frac{d^3p}{2E} \left( b^{(r)}(\vec{p})v^{\dagger(r)}(\vec{p})e^{ipx} + a^{\dagger(r)}(\vec{p})u^{\dagger(r)}(\vec{p})e^{-ipx} \right)$$

dove  $E = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}$ , il fattore  $\int \frac{d^3p}{2E}$  è un elemento di volume invariante, e  $u^{(r)}(\vec{p})e^{ipx}$  è la soluzione dell'equazione di Dirac ad energie positive.  $u^{(r)}(\vec{p})$  è uno spinore a 4 componenti di questa forma:

$$u^{(1)}(\vec{p}) = \frac{m + \hat{p}}{\sqrt{m + E}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad u^{(2)}(\vec{p}) = \frac{m + \hat{p}}{\sqrt{m + E}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dove  $\hat{p} = \gamma_\mu p^\mu$ , mentre  $v^{(r)}(\vec{p})e^{-ipx}$  è la soluzione ad energia negativa:

$$v^{(1)}(\vec{p}) = \frac{m - \hat{p}}{\sqrt{m + E}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad v^{(2)}(\vec{p}) = \frac{m - \hat{p}}{\sqrt{m + E}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il campo di Dirac è associato all'elettrone, mentre il suo hermitiano coniugato  $\psi^\dagger(x)$  (così come  $\bar{\psi}(x) = \psi^\dagger(x)\gamma^0$ ) è associato al positrone, ed entrambi non sono autoaggiunti; per campi non autoaggiunti, l'operatore di distruzione è convenzionalmente associato alla distruzione della particella a cui il campo è associato, in questo caso  $a$  in  $\psi(x)$  distrugge un elettrone, e  $b$  in  $\bar{\psi}(x)$  distrugge un positrone; di conseguenza  $a^\dagger$  e  $b^\dagger$  distruggono un elettrone e un positrone rispettivamente. Osserviamo inoltre che l'operatore di creazione è sempre associato all'evoluzione temporale di particelle ad energia negativa.

Su questa base, particelle e antiparticelle sono trattate alla stessa maniera; inoltre, nello stesso campo sono presenti operatori che agiscono sia sulle particelle che sulle antiparticelle. Tuttavia, data l'azione del singolo campo  $\psi(x)$ , che abbiamo appena visto contenere operatori di distruzione di cariche negative o di creazione di cariche positive, ci potremmo chiedere come faccia a venir conservata la carica in un processo. In realtà la risposta sta nel modo in cui la lagrangiana di interazione è costruita: infatti in essa è presente il prodotto  $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ , che dal punto di vista operatoriale vede l'azione combinata di coppie di operatori  $a, b, a^\dagger, b^\dagger$ :

$$(a^\dagger, b)(a, b^\dagger) \rightarrow \begin{cases} a^\dagger a & ; \\ a^\dagger b^\dagger & ; \\ ba & ; \\ bb^\dagger & . \end{cases}$$

Queste combinazioni conservano tutte la carica elettrica, infatti o abbiamo la creazione di una carica positiva e la distruzione di una negativa, o viceversa, oppure la creazione o la distruzione contemporanea di una coppia particella-antiparticella. Tali azioni si possono rappresentare graficamente con i cosiddetti diagrammi di Feynman:(FIGURA)

In ognuno di questi processi deve essere presente anche un fotone, in quanto l'interazione prevede la presenza del campo elettromagnetico, tuttavia tale fotone non è un vero fotone bensì un fotone virtuale; infatti, ognuno dei processi è vietato dalla cinematica, consideriamo ad esempio il diagramma in cui un fotone di quadrimpulso  $(k, 0, 0, k)$  urta un elettrone modificando il suo impulso: la massa invariante del sistema iniziale  $\gamma + e^-$  (in un riferimento in cui l'elettrone bersaglio è fermo) è pari a  $m_p^2 + 2mk$  mentre il sistema finale è costituito dal solo elettrone e ha quindi massa invariante pari a  $m_p^2$ . La cinematica non è rispettata a meno di non considerare un fotone di energia nulla, e quindi assenza di fotoni, oppure un

fotone con energia nulla ma impulso spaziale diverso da zero, ancora più sorprendente. La spiegazione a questo apparente controsenso sta nel fatto che appunto il fotone disegnato è un fotone *virtuale*, ovvero una particella di fatto non osservabile (porta con sé un'energia  $\Delta E$  creata dal nulla, dunque può esistere solo per un tempo  $\Delta t$  tale che  $\Delta E \Delta t < \hbar$ ), introdotta per descrivere la propagazione del campo elettromagnetico da un punto in cui è presente una carica  $q$ , ad un punto in cui è presente una carica  $q'$ . I fotoni 'veri' sono quelli che vengono dalle soluzioni dell'equazione di d'Alembert *omogenea*  $\square A^\mu = 0$ ; in presenza di sorgenti, l'equazione di d'Alembert (non più omogenea) si riscrive come  $\square A^\mu = J^\mu$ , e la sua soluzione si può scrivere come somma della soluzione generale dell'omogenea e di una soluzione particolare dell'equazione non omogenea: i fotoni virtuali rappresentano proprio tale soluzione particolare, per questo motivo non sono obbligati a stare sullo shell di massa, e soddisfare alla relazione di dispersione fotonica  $E^2 = \vec{p}^2$ ; infatti in questo caso si avrà  $0 = E \neq \vec{p} \neq 0$ . Nel caso dello scambio di pioni tra protoni e neutroni il discorso è analogo: un protone che emette un pione, viola la conservazione dell'energia per una quantità di circa  $140 MeV$ , a patto che il pione viva per un tempo inferiore a  $\frac{\hbar}{140 MeV}$ ; in un tempo del genere, e supponendo che viaggi a velocità prossime a  $c$ , potrebbe percorrere una distanza  $\Delta s = \frac{\hbar c}{140} \sim \frac{197 MeV \cdot fm}{140 MeV} \sim 1,4 fm$ , che è più o meno il range dell'interazione forte. Anche in questo caso il pione non è obbligato a stare sullo shell di massa, essendo stato creato dal nulla.

## Capitolo 15

# Mercoledì 13 febbraio

Nell'ambito dei leptoni parliamo della **interazione debole**. L'interazione debole viene descritta a partire da una lagrangiana che contiene le cosiddette correnti deboli, che si accoppiano coi bosoni mediatori. Una prima differenza col caso elettromagnetico sta proprio nelle caratteristiche di questi mediatori: nel caso delle interazioni deboli essi sono 3, il  $W^\pm$  e lo  $Z^0$ , due carichi ( $W^\pm$ ) e uno neutro ( $Z^0$ ), ed entrambi massivi. Infatti lo  $Z^0$  ha una massa di circa  $90\text{GeV}$ , mentre i  $W^\pm$  di circa  $81\text{GeV}$ .

Un'altra differenza sta nel fatto che la lagrangiana di interazione debole contiene sia correnti *cariche* (mediate dai  $W^\pm$ ) che correnti *neutre*, l'elettromagnetismo solo correnti neutre; le prime si conoscevano già all'epoca di Fermi, mentre le correnti neutre furono osservate solo nel 1973. Tutte le correnti, sia quella elettromagnetica che le 3 correnti deboli fanno parte di una unica teoria detta *elettrodebole*.

La lagrangiana che descrive le correnti cariche dell'interazione debole è:

$$\mathcal{L} = \frac{e}{\sqrt{2} \sin \theta_W} \left[ \sum_{gen} J_\mu^{(-)}(x) W^\mu(x)^{(+)} + J_\mu^{(+)}(x) W^\mu(x)^{(-)} \right]$$

dove  $\frac{e}{\sqrt{2} \sin \theta_W}$  è la costante di accoppiamento debole, e  $\theta_W$  è il cosiddetto **angolo di Weinberg**. La sommatoria è da intendersi sulle tre generazioni, e i due addendi sono l'uno l'hermitiano coniugato dell'altro: infatti il campo  $W^{(+)}$  è carico, pertanto distingue tra particelle e antiparticelle.

$W^{\mu(+)}(x)$  è un campo quadrivettoriale, e in seguito lo chiameremo semplicemente  $W^\mu(x)$ ; esso contiene gli operatori  $a_{W^+}$  e  $b_{W^-}^\dagger$ , che rispettivamente distruggono un  $W^+$  e creano un  $W^-$ . La corrente  $J^\mu$  invece ha a che fare con i doppietti leptonici:

$$J_\mu^{(-)} = \bar{\nu}_l \gamma^\mu \left( \frac{1 - \gamma^5}{2} \right) l$$

dove abbiamo abbreviato la notazione, scrivendo  $\bar{\psi}_\nu \equiv \bar{\nu}$  e  $\psi_l \equiv l$ . Conseguentemente,  $J_\mu^{(+)} = \bar{l} \gamma^\mu \left( \frac{1 - \gamma^5}{2} \right) \nu = J_\mu^{(-)\dagger}$ . La matrice  $\gamma^5$  si ottiene a partire dalle altre 4 matrici  $\gamma^\mu$  in questo modo:

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$$

La sua caratteristica principale è di anticommutare con le  $\gamma^\mu$ :  $\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0$ . Inoltre, sotto la trasformazione  $S(\Lambda)$ , rappresentazione del gruppo di Lorentz sullo spazio degli spinori,  $\gamma^5$  è uno scalare:

$$S(\Lambda)^{-1} \gamma^5 S(\Lambda) = \gamma^5$$

Il fatto che  $\gamma^5$  sia scalare di Lorentz è fondamentale, poichè in caso contrario la corrente  $J^\mu$  perderebbe il suo carattere quadrivettoriale e  $J^\mu W_\mu$  non sarebbe più uno scalare.

La prima differenza della corrente debole rispetto a quella elettromagnetica è che nel secondo caso la  $\bar{\psi}$  e la  $\psi$  si riferiscono alla stessa particella, l'elettrone, mentre nel caso leptonic abbiamo accoppiato i campi di un leptone e del suo neutrino associato. Adesso capiamo perchè la corrente viene detta *carica*: il campo del neutrino descrive particelle scariche, mentre quello leptonic descrive particelle cariche, dunque il termine di corrente descrive in generale processi dove la carica elettrica non si conserva.

La seconda differenza è contenuta nel termine  $(\frac{1-\gamma^5}{2})$ , responsabile del fatto che le interazioni deboli violano la parità: nelle interazioni deboli 'alla Fermi' viene infatti inserita a mano la violazione della parità, e il termine  $\bar{\nu}_l \gamma^\mu (\frac{1-\gamma^5}{2}) l$  si trasforma sotto parità come un vettore assiale. Sottolineiamo che la sola presenza della matrice  $\gamma^5$  non sarebbe bastata a garantire la violazione della parità: gli elementi di matrice del prodotto  $J^\mu W_\mu$  rappresentano delle ampiezze di probabilità, e noi siamo interessati al loro modulo quadro per ottenere delle probabilità. Un termine del tipo  $J_A^\mu = \bar{\nu}_l \gamma^\mu (\gamma^5) l = ((J_A^0, \vec{J}_A))$  effettivamente si trasforma come uno pseudovettore sotto parità, cioè  $S_p^{-1} J_A^\mu S_p = J_A^\mu$ , ma il suo modulo quadro è uguale al modulo quadro del quadrivettore  $J_V^\mu = \bar{\nu}_l \gamma^\mu l$ , che invece per parità si trasforma come  $S_p^{-1} J_V^\mu S_p = \tilde{J}_V^\mu = (J_V^0, -\vec{J}_V)$ . Se prendiamo invece la combinazione  $\frac{1}{2}(J_V^\mu - J_A^\mu)$ , questa sotto parità diventa  $\frac{1}{2}(\tilde{J}_V^\mu - J_A^\mu)$ , che ha in generale modulo quadro differente. Per questo motivo la corrente debole viene anche detta *componente V-A* (vettore meno vettore assiale). Come al solito, i campi contengono gli operatori di distruzione della particella associata, e quelli di distruzione dell'antiparticella. Stavolta abbiamo la combinazione  $\bar{\nu} \dots l \equiv (b_\nu, a_\nu^\dagger)(a_l, b_l^\dagger)$ , e possiamo descrivere i processi:

$$b_\nu a_l$$

$$b_\nu b_l^\dagger$$

$$a_\nu^\dagger a_l$$

$$a_\nu^\dagger b_l^\dagger$$

Prendiamo ad esempio il primo,  $b_\nu a_l$ , questo è collegato al diagramma:

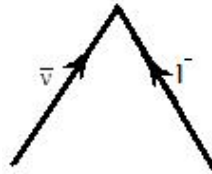


Figura 15.1:  $\bar{\nu} + l^- \rightarrow \dots$

Osserviamo subito che se non aggiungiamo niente al diagramma, nel vertice non si ha conservazione della carica elettrica. Più verosimilmente al vertice sarà scambiato un bosone  $W^-$  (figura 15.2).

Consideriamo adesso il termine  $a_\nu^\dagger b_l^\dagger$ : esso descrive la creazione di una coppia neutrino-antileptone, a partire ad esempio da un  $W^+$ . Infatti, il campo  $W^\mu(x)$  associato al  $W^+$  contiene l'operatore di distruzione  $a_{W^+}$ . Il diagramma è quello figura 15.3.

La rappresentazione è la stessa della creazione di una coppia  $e^+ e^-$ , ma la differenza fondamentale è che mentre in tal caso il fotone doveva essere necessariamente un fotone virtuale, adesso può accadere che il

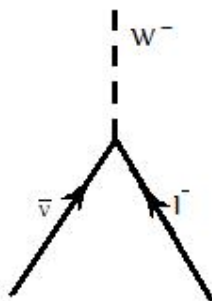


Figura 15.2:  $\bar{\nu} + l^- \rightarrow W^-$

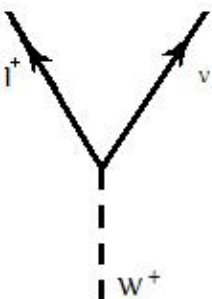


Figura 15.3:  $W^+ \rightarrow \nu + l^+$

bosone  $W^\pm$  sia reale. Il  $W^+$  ad esempio ha una massa di 81GeV e possono esistere processi dove viene creato, ad esempio nell'annichilazione quark-antiquark vengono creati  $W^+$  reali, che poi decadono con stessa probabilità nei tre canali leptonici possibili. La produzione di  $W^\pm$  sullo shell di massa si dice anche produzione **in risonanza**; questo avviene quando il denominatore del propagatore bosonico, della forma  $\sim \frac{1}{q^2 - m^2}$ , è vicino ad annullarsi. Se è possibile creare una particella reale, questo si traduce in un grosso vantaggio dal punto di vista della probabilità di transizione: più particelle ci sono, più alta è la sezione d'urto, per questo si cerca di lavorare sempre alla risonanza. Nel caso delle correnti cariche, il mediatore massivo può essere prodotto in risonanza, ed infatti è così che è stato osservato. Gli effetti della particella si vedono viceversa anche a impulsi trasferiti molto bassi (il  $q$  a denominatore nella formula del propagatore): se possiamo trascurare  $q$  rispetto a  $M$ , il propagatore diventa  $\frac{1}{M^2}$ , e si riproduce la corrente di Fermi. In tal caso però siamo lontani dalla risonanza, e il  $W^\pm$  non è reale, e infatti esso scompare formalmente dalla formula; quello che sappiamo della teoria debole oggi riproduce esattamente a bassa energia la teoria di Fermi, in cui non c'era interazione con un mediatore, ma tra due correnti (4 campi quindi). La costante di accoppiamento in quel caso era la costante di Fermi, ovvero il riflesso a basse energie del bosone  $W^\pm$ ; tale costante nella teoria di Fermi era un semplice parametro, e adesso può essere giustificata in base alla costante  $\frac{1}{M^2} \frac{e}{\sqrt{2} \sin \theta_W}$ .

Tuttavia, la teoria di Fermi si sapeva essere sbagliata perchè non è rinormalizzabile, e viola l'unitarietà ad alte energie (?). In elettrodinamica non si aveva il problema di infiniti non riassorbibili, pertanto nell'ideare delle teorie si cercava di farle somigliare il più possibile all'elettromagnetismo.

Si pensò di introdurre una sorta di isospin anche per i leptoni, il cosiddetto isospin debole: doveva es-



istere una qualche simmetria che avesse a che fare col gruppo SU(2), e come nel caso del nucleo il doppietto era formato da protone e neutrone, stavolta esso era dato dalla coppia leptone-neutrino leptonico. Il bosone  $W^\pm$  faceva passare da un elemento del doppietto all'altro, analogamente ad un operatore di salita o discesa:

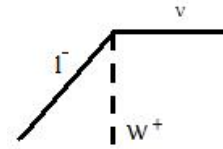


Figura 15.4:  $W^+$  come operatore di salita

$$W^+ \uparrow \begin{pmatrix} \nu \\ l \end{pmatrix} \downarrow W^-$$

In termini di spin isotopico, gli stati  $|\nu\rangle$  e  $|l\rangle$  corrispondono ad autovalori  $\pm\frac{1}{2}$ , e i  $W^\pm$  corrispondono agli operatori  $\tau^\pm$  dell'isospin o agli  $\sigma^\pm$  dello spin. Con lo stesso argomento usato nel postulare l'esistenza del  $\pi^0$ , in qualità di terzo generatore dell'isospin nucleare, si deve introdurre anche un generatore  $T_3$ , diagonale sugli stati  $|\nu\rangle$  e  $|l\rangle$ . Osserviamo che l'introduzione di questo terzo operatore diventa necessaria nel momento in cui si cerca di costruire una teoria che abbia simmetria sotto SU(2). La corrente associata al terzo generatore, poichè non cambiava la natura del leptone o del neutrino su cui agiva, doveva quindi essere una corrente neutra. Si dimostrò in seguito che la teoria era rinormalizzabile, e nel 1973 dagli esperimenti sull'interazione dei neutrini si osservarono fatti compatibili con una corrente neutra. Si cercarono allora indizi sui mediatori, avendo già una predizione sulla loro massa; la corrente neutra è descritta dalla seguente lagrangiana:

$$\mathcal{L}^{neu} = \frac{e}{\sin 2\theta_W} \sum_{gen} (\bar{\psi} \gamma^\mu (g_V - \gamma_5 g_A) \psi) Z_\mu$$

La corrente neutra deve essere tale da non cambiare il tipo di particella; a differenza dei bosoni  $W^\pm$ , il bosone neutro (lo  $Z^0$ ) non può neanche spostare le particelle all'interno dello stesso doppietto. La costante di accoppiamento è diversa, stavolta si ha  $\frac{e}{\sin 2\theta_W}$ ; compaiono i termini  $g_V$  e  $g_A$ :

$$g_V = T_3 - 2q \sin^2 \theta_W$$

$$g_A = T_3$$

$$T_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

Lo  $Z^0$  può materializzarsi in questo modo:

Lo  $Z^0$  è il parente più stretto del fotone; le differenze più grandi sono la massa, e conseguentemente la possibilità dello  $Z^0$  di avere tutti e tre gli stati di polarizzazione che gli derivano dallo spin 1. Lo  $Z^0$  può essere prodotto in risonanza facendo incontrare elettroni e positroni; per dare un'idea della potenza della creazione risonante, in tre anni di presa dati non in risonanza all'SPS ne sono stati visti circa 200, mentre al LEP, facendo incontrare due fasci di 45GeV l'uno (quindi 90 GeV nel sistema del centro di massa), in mezz'ora ne sono stati osservati più di centomila.

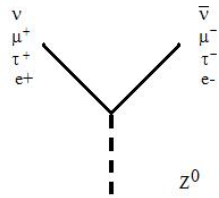


Figura 15.5: Decadimenti dello  $Z^0$

Ciascun canale di decadimento dello  $Z^0$  contribuisce all'indeterminazione sulla sua massa, poichè essa è collegata con la vita media delle particelle. Per lo  $Z^0$ , l'indeterminazione sulla massa consentì di affermare che non ci potevano essere più di tre generazioni leptoniche, a meno che nella quarta il leptone non avesse una massa superiore a 45 GeV, cosicchè una coppia leptone-antileptone non potesse essere creata dal decadimento di uno  $Z^0$  a riposo.

## Capitolo 16

### Lunedì 18 febbraio

Affrontiamo lo stesso problema per gli adroni; per certi versi la situazione è simile, e al giorno d'oggi sappiamo che esistono tre generazioni di quark:

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} q = \frac{2}{3} \\ q = -\frac{1}{3} \end{matrix}$$

Le lettere stanno per up, down, charm, strange, top, beauty. Una prima osservazione banale è che sia nel caso dei leptoni che degli adroni la differenza di carica tra le due righe è  $\Delta Q = 1$ , ma nel caso dei quark si hanno cariche frazionarie, ed entrambe le righe subiscono l'interazione elettromagnetica. Una seconda osservazione è che a differenza dei leptoni, i campi che entrano nelle interazioni deboli non hanno un sapore forte ben definito poichè compaiono come combinazioni di più campi. La questione del mescolamento nasce da una ipotesi di Cabibbo; consideriamo le seguenti reazioni:

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$$

$$K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$$

$$\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \nu_\mu$$

Questi tre decadimenti, affrontati con la teoria di Fermi del decadimento debole, avevano tre costanti  $G_f$  simili, ma non proprio uguali. Ci sono due modi di interpretare questi risultati: ogni decadimento avveniva per conto proprio, ma non era il massimo dal punto di vista della spiegazione dei fatti, oppure si cercava un modo per raggruppare questi risultati sotto un'unica teoria. L'idea di Cabibbo fu di osservare che il decadimento del muone era debole *puro*, e pensò di utilizzare la costante di Fermi ad esso associata come punto di partenza. Viceversa, per il decadimento del  $K^+$  c'era variazione di stranezza  $\Delta s = 1$ , mentre per il pione  $\Delta s = 0$ . Cabibbo suggerì che la corrente adronica dovesse essere spezzata in due parti, una che poteva cambiare la stranezza, e una che non aveva tale possibilità, e le due correnti dovessero essere pesate tramite un parametro, l'*angolo di Cabibbo*:

$$J_{had}^\mu = J_{\Delta s=0}^\mu \cos \theta_c + J_{\Delta s=1}^\mu \sin \theta_c$$

Il problema è che l'angolo di Cabibbo era un solo parametro, mentre i risultati da mettere d'accordo erano due, uno per il pione e uno per il  $K^+$ ; se non si fosse riusciti a conciliare le due cose sarebbe stato il fallimento

dell'idea di Cabibbo. Viceversa, l'idea funzionò, e le interazioni deboli nell'equazione di Fermi acquistarono un che di universale; esse erano quindi della forma:

$$\frac{G_f}{\sqrt{2}} J_{lept}^\mu(x) J_\mu^{hadr}(x) + h.c.$$

La lagrangiana per la parte adronica, in analogia con quella leptonica, potrebbe essere scritta in questa maniera:

$$\mathcal{L}_W(x) = \sum_{quark} J_\mu^{(-)} W^\mu(x) + h.c.$$

$$J_\mu^{(-)}(x) = \bar{u}\gamma_\mu \frac{(1-\gamma_5)}{2} d (+ \bar{c}\gamma_\mu \frac{(1-\gamma_5)}{2} s + \bar{t}\gamma_\mu \frac{(1-\gamma_5)}{2} b)$$

Alcuni termini sono stati messi tra parentesi perchè al tempo dell'idea di Cabibbo ancora non si conoscevano gli altri tre quark. Più verosimilmente, la corrente che usò Cabibbo era del tipo:

$$J_\mu^{(-)}(x) = \bar{u}\gamma_\mu \frac{(1-\gamma_5)}{2} d + \bar{u}\gamma_\mu \frac{(1-\gamma_5)}{2} s = J_{\Delta s=0}^\mu + J_{\Delta s=1}^\mu$$

quindi separando in qualche modo il quark  $u$ , di carica  $\frac{2}{3}$ , da quello  $d$  ed  $s$  di carica  $-\frac{1}{3}$ . Per introdurre i pesi alle correnti si procedeva così:

$$J_\mu^{(-)} = J_\mu^{(-)}(x) = \bar{u}\gamma_\mu \frac{(1-\gamma_5)}{2} d_c$$

$$d_c = d \cos \theta_c + s \sin \theta_c$$

L'idea di Cabibbo funzionò per un pò di tempo senza problemi, finchè non si pensò di introdurre nella teoria anche le correnti neutre, che conservavano la carica della parte adronica, così come quelle dello  $Z^0$  conservavano la carica della parte leptonica. Tale corrente avrebbe dovuto avere la forma  $J_\mu = \bar{\psi}\theta_\mu\psi$ , dove  $\theta$  è un operatore quadrivettoriale, quindi per gli adroni avremmo avuto:

$$J_\mu^{(0)} = \bar{u}\theta_\mu u + \bar{d}\theta_\mu d + \bar{s}\theta_\mu s$$

Tuttavia, poichè nella corrente carica abbiamo usato  $d_c$ , per coerenza avremmo dovuto usare  $d_c$  anche nella corrente neutra; vediamo però come questo porta a una incoerenza con i fatti sperimentali: infatti la presenza di un termine del tipo  $\bar{d}_c\theta_\mu d_c$  implica la presenza di termini del tipo  $\bar{d}\theta_\mu d$ ,  $\bar{s}\theta_\mu s$  ma anche di termini del tipo  $\bar{d}\theta_\mu s$  e  $\bar{s}\theta_\mu d$ , che non conservano la stranezza. Ora, sperimentalmente si era osservato per il  $K^+$  (formato da un doppietto  $u\bar{s}$ ) il decadimento in  $\mu^+ + \nu_\mu$  mediante l'emissione di un  $W^+$ , con un branching ratio del 63%; in tale decadimento non si conserva la stranezza, e analogamente ci saremmo aspettati un decadimento copioso del  $K^0$  in una coppia  $\mu^+\mu^-$  mediante l'emissione di uno  $Z^0$ ; anche in tale decadimento la stranezza non è conservata, ma aveva un branching ratio di circa  $10^{-7}$ , che confrontato con quello del  $K^+$  era sufficiente per affermare che tale processo non era consentito. Allora si rendeva necessario modificare in qualche modo il termine  $\bar{d}_c\theta_\mu d_c$ , poichè così com'era avrebbe permesso transizioni di corrente neutra in cui non si conservava la stranezza, pesate con coefficienti (i coefficienti di Cabibbo) che anche se minori di 1 non giustificavano comunque un branching ratio così basso. Tali correnti, mai osservate sperimentalmente, vennero chiamate **Flavour Changing Neutral Currents** (FCNC).

La situazione rimase in stallo fino agli anni 70, in cui Glashow, Iliopoulos e Maiani proposero quello che va sotto il nome di **GIM mechanism**, che voleva da una parte salvare i fatti sperimentali concordanti con la teoria di Cabibbo, dall'altra conciliare tale teoria con la non esistenza della FCNC: l'idea era che esistesse un quarto quark, il  $c$ , in modo da avere due doppietti:

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}$$

Dopodichè, la rotazione di Cabibbo fu rivista all'interno di un sistema a 4 quark: l'interazione di  $u$  rimaneva con un  $d_c$  costruito al solito modo, mentre l'interazione di  $c$  non era con  $s$  bensì con un  $s_c$  costruito in questo modo:

$$s_c = s \cos \theta_c - d \sin \theta_c$$

Il meccanismo GIM corrispondeva dunque ad una rotazione del vettore  $\begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}$ , in modo che nell'interazione debole entrasse il vettore ruotato:

$$\begin{pmatrix} d_c \\ s_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_c & \sin \theta_c \\ -\sin \theta_c & \cos \theta_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}$$

Vediamo adesso come questa combinazione risolve il problema delle correnti  $J^{(0)}$  che cambiano il sapore:

$$J^{(0)} \sim \bar{d}_c \theta_\mu d_c + \bar{s}_c \theta_\mu s_c = (\bar{d} \cos \theta_c + \bar{s} \sin \theta_c) \theta_\mu (d \cos \theta_c + s \sin \theta_c) + (\bar{s} \cos \theta_c - \bar{d} \sin \theta_c) \theta_\mu (s \cos \theta_c - d \sin \theta_c) = \bar{d} \theta_\mu d + \bar{s} \theta_\mu s$$

ovvero i termini misti in  $d$  ed  $s$  si elidono; ce lo potevamo aspettare dato che abbiamo operato una trasformazione unitaria su una forma quadratica del tipo  $\bar{d}d + \bar{s}s$ .

Abbiamo quindi introdotto una seconda generazione di quark, ma la teoria si può banalmente estendere (ed è così che verrà fatto) aggiungendo un terzo quark, il  $b$ , e quindi una terza generazione. Per il mescolamento del vettore  $\begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}$ , utilizzeremo adesso una matrice 3x3, detta matrice  $V_{ckm}$ , dal nome degli scienziati Cabibbo, Kobayashi e Maskawa:

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = V_{ckm} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}$$

La  $V_{ckm}$  è unitaria, e questo fa sì che valga lo stesso discorso per la corrente neutra; se indichiamo con  $d_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  i tre quark  $d$ ,  $s$  e  $b$ , possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} J^{(0)} &\sim \bar{d}_i \theta_\mu d_i \rightarrow \bar{d}'_i \theta_\mu d'_i \\ d'_i &= V_{ik} d_k \\ \bar{d}'_i &= V_{ik}^* \bar{d}_k \\ \Rightarrow \bar{d}'_i \theta_\mu d'_i &= V_{ik}^* \bar{d}_k \theta_\mu d_l V_{il} = \underbrace{V_{ik}^* V_{il}}_{=V_{ki}^\dagger V_{il}=\delta_{kl}} \bar{d}_k \theta_\mu d_l \end{aligned}$$

Finora abbiamo sempre ragionato mescolando i quark con carica  $-\frac{1}{3}$ , ma si poteva fare lo stesso discorso partendo dalla corrente  $J^\mu$  e definendo una matrice che mescolasse i quark con carica  $\frac{2}{3}$ :

$$J^\mu = \bar{u}_i \gamma_\mu \left( \frac{1 - \gamma_5}{2} \right) d'_i = \bar{u}_i \gamma_\mu \left( \frac{1 - \gamma_5}{2} \right) V_{ik} d_k = V_{ik} \bar{u}_i \gamma_\mu \left( \frac{1 - \gamma_5}{2} \right) d_k$$

Gli  $u_i$  quindi trasformerebbero come  $u'_k = V_{ik}^* u_i$  in modo che  $\bar{u}'_k = V_{ik} \bar{u}_i$ , ed abbiamo ottenuto lo stesso risultato.

Per quanto riguarda la matrice  $V_{ckm}$ , in realtà non ci sarebbe nessuna ragione per pensare che sia unitaria: si fa quest'ipotesi supponendo che i quark di sapore definito e quelli che partecipano alle interazioni deboli siano in realtà gli stessi, a meno di un cambiamento di base. Gli esperimenti hanno confermato questa ipotesi, in caso contrario sarebbe stato il fallimento della teoria, oppure la necessità di introdurre una quarta generazione. Il vincolo di unitarietà si traduce in vincoli sugli elementi: poichè  $V_{ik} V_{kj}^\dagger = \delta_{ij}$ , si deve avere  $\sum_k V_{ik}^* V_{ik} = \sum_k |V_{ik}|^2 = 1$  per  $i = 1, 2, 3$ , dunque si hanno tre equazioni reali che riguardano i moduli degli elementi di matrice. Se invece  $i \neq j$ , per l'ortonormalità si ha  $\sum_k V_{ik} V_{jk}^* = 0$ ; osserviamo che le equazioni

$$\begin{aligned} \sum_k V_{ik} V_{jk}^* &= 0 \\ \sum_k V_{ik}^* V_{jk} &= 0 \end{aligned}$$

sono una la complessa coniugata dell'altra, e danno la stessa informazione, quindi anche se per  $i \neq j$  si avrebbero 6 equazioni (stavolta complesse), solo tre sono indipendenti tra loro. Rimangono dunque tre equazioni complesse, che corrispondono a sei vincoli: tre per i moduli, tre per le fasi.

Partendo in generale da 9 moduli liberi e 9 fasi (per ogni elemento di matrice) e togliendo i vincoli, per il solo fatto di essere unitaria la matrice  $V_{ckm}$  viene a dipendere da tre parametri per i moduli, e da 6 parametri per le fasi. Di solito la matrice  $V_{ckm}$  si scrive come:

$$V_{ckm} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix}$$

Un'osservazione a parte merita il discorso sulle fasi libere: le fasi libere abbiamo osservato che sono 6, esattamente come le fasi dei campi dei 6 quark, quindi sembrerebbe che tutte le fasi siano bloccate e rimanga solo l'arbitrarietà sulla scelta dei tre parametri per moduli. In realtà resta comunque una fase libera, corrispondente alla possibilità sempre presente di poter moltiplicare la matrice per una fase globale, senza che questa azione abbia effetti osservabili; restiamo quindi con un parametro libero per la fase, e tre parametri liberi per i moduli.

Nel caso della matrice di Cabibbo si partiva da una matrice 2x2, quindi con 4 parametri liberi in generale, due dei quali erano fissati dalle equazioni per la diagonale principale, e un terzo dalla condizione fuori diagonale; restava quindi un parametro libero, che era proprio l'angolo di Cabibbo. Per le fasi, avevamo tre parametri liberi, ma 4 campi, dunque la rotazione di Cabibbo, relativa a due famiglie di quark, era la più generale possibile.

Per costruire la matrice  $V_{ckm}$ , partiamo costruendo una matrice di questa forma:

$$U = R_{23} R_{13}(\delta) R_{12}$$

dove le  $R_{12}$  e  $R_{23}$  sono matrici ortogonali della forma:

$$R_{12} = \begin{pmatrix} \cos \theta_{12} & \sin \theta_{12} & 0 \\ -\sin \theta_{12} & \cos \theta_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_{23} & \sin \theta_{23} \\ 0 & -\sin \theta_{23} & \cos \theta_{23} \end{pmatrix}$$

La terza matrice,  $R_{13}(\delta)$ , non è ortogonale ed è così definita:

$$R_{13} = \begin{pmatrix} \cos \theta_{13} & 0 & \sin \theta_{13} \\ 0 & e^{-i\delta} & 0 \\ -\sin \theta_{13} & 0 & \cos \theta_{13} \end{pmatrix}$$

Per la presenza del fattore di fase  $e^{-i\delta}$ , la matrice  $U$  non ha determinante uguale a 1, dunque non è unitaria. Per costruire la matrice  $V_{ckm}$  si moltiplica allora la terza colonna di  $U$  per  $e^{-i\delta}$ , mentre la seconda e la terza riga per  $e^{i\delta}$ ; la matrice  $V_{ckm}$  assume la forma (abbrevieremo  $\cos \theta_{ij}$  e  $\sin \theta_{ij}$  come  $c_{ij}$  ed  $s_{ij}$ ):

$$V_{ckm} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{13} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}$$

Il mixing tra le due generazioni, rappresentato da  $c_{12}$  e  $s_{12}$ , è il mixing di Cabibbo con  $\cos \theta_c$  e  $\sin \theta_c$ ; sperimentalmente si ha  $\sin \theta_c \equiv s_{12} \equiv \lambda \simeq 0,22$ . Gli altri angoli sono parametri liberi fissati dagli esperimenti:  $s_{23}$  risulta dell'ordine di  $\lambda^2$ , e scriveremo  $s_{23} = A\lambda^2$ , dove  $A \sim 1$ .  $s_{13}$  compare sempre moltiplicata per il fattore di fase  $e^{\pm i\delta}$ , ed esso risulta in modulo dell'ordine di  $\lambda^3$ ; scriveremo pertanto  $s_{13}e^{\pm i\delta} = A\lambda^3(\rho \pm i\eta)$ , dove  $(\rho \pm i\eta)$  è un numero complesso di modulo anch'esso circa 1. Se decidiamo di trascurare nella matrice  $V_{ckm}$  gli ordini superiori a  $\lambda^3$ , possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} c_{12}c_{13} &= (1 - \frac{\lambda^2}{2})(1 - O(\lambda^6)) \sim (1 - \frac{\lambda^2}{2}) \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} &\sim -\lambda \\ c_{12}c_{13} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} &\sim 1 - \frac{\lambda^2}{2} \\ s_{23}c_{13} &\sim A\lambda^2 \\ -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} &\sim -A\lambda^2 \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} &\sim A\lambda^3 - A\lambda^3(\rho + i\eta) = A\lambda^3(1 - \rho - i\eta) \\ c_{23}c_{13} &\sim 1 \\ \Rightarrow V_{ckm} &\sim \begin{pmatrix} 1 - \frac{\lambda^2}{2} & \lambda & A\lambda^3(\rho - i\eta) \\ -\lambda & 1 - \frac{\lambda^2}{2} & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1 - \rho - i\eta) & -A\lambda^2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

E' ovvio che  $V$  scritta in questa maniera non è più unitaria, a meno di termini di ordine maggiore di  $\lambda^4$ ; i parametri sono rappresentati da  $A$ ,  $\lambda$ ,  $|\rho + i\eta|$ ,  $\delta$ . La presenza della fase  $\delta$  è importante, perchè è alla base della capacità del modello standard di spiegare la violazione di CP: nel 1963, facendo esperimenti con le particelle  $K$ , ci si accorse che alcuni decadimenti violavano questa simmetria, e ci si chiese come fosse possibile per una teoria descrivere tale violazione. La lagrangiana di interazione debole si scrive come:

$$\mathcal{L} = \frac{e}{\sqrt{2} \sin \theta_w} J_\mu^{(-)}(x) W^{(+)\mu}(x) + J_\mu^{(+)}(x) W^{(-)\mu}(x)$$

$$J_\mu^{(-)} = \bar{u}_i \gamma_\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} d'_i$$

$$J_\mu^{(+)} = \bar{d}'_i \gamma_\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} u_i$$

Vogliamo vedere adesso cosa succede ai campi se effettuiamo una trasformazione di **parità**. Per quanto riguarda gli operatori di creazione e distruzione, semplicemente si ha  $a(\vec{p}) \xrightarrow{P} a(-\vec{p})$ , mentre per tutto il campo:

$$\psi(x) \xrightarrow{P} \gamma^0 \psi(Px) e^{-i\eta_p}$$

$$\bar{\psi}(x) \xrightarrow{P} \bar{\psi}(Px) \gamma^0 e^{i\eta_p}$$

Si può dimostrare che il fattore  $e^{\pm i\eta_p}$  in realtà può essere solo  $\pm 1$ , infatti se effettuiamo due volte una trasformazione di parità si deve riottenere il campo iniziale:

$$\psi(x) \xrightarrow{P} \gamma^0 \psi(Px) e^{-i\eta_p}$$

$$\gamma^0 \psi(Px) e^{-i\eta_p} \xrightarrow{P} \psi(x) \xrightarrow{P} \gamma^0 \gamma^0 \psi(P^2 x) (e^{-i\eta_p})^2 = \psi(x) (e^{-i\eta_p})^2$$

$$\Rightarrow e^{-i\eta_p} = \pm 1$$

Per quanto riguarda la **coniugazione di carica**, il comportamento del campo è piuttosto complicato, mentre è semplice l'azione sugli operatori di creazione e distruzione:

$$a^\dagger(\vec{p}) \xrightarrow{C} b^\dagger(\vec{p})$$

$$a(\vec{p}) \xrightarrow{C} b(\vec{p})$$

Anche per la coniugazione di carica del campo totale, compare un fattore di fase:

$$\psi(x) \xrightarrow{C} \mathcal{C}^{-1} \bar{\psi}^T(x) e^{-i\eta_c}$$

$$\bar{\psi}(x) \xrightarrow{C} -\psi^T \mathcal{C} e^{i\eta_c}$$

L'operatore  $\mathcal{C}$  in realtà è una vecchia conoscenza:

$$\mathcal{C} = i\gamma^0 \gamma^2$$

Vale la seguente relazione:

$$\mathcal{C} \gamma^\mu \mathcal{C}^{-1} = -(\gamma^\mu)^T$$



Date queste regole, vediamo cosa succede alla corrente per parità, per semplicità in ipotesi di *assenza di mescolamento*; effettueremo una ulteriore ipotesi, ovvero che i fattori di fase  $e^{i\eta_p}$  dei campi siano le stesse sia per quark  $u_i$  che per quark  $d_i$ , in modo tale che si elidano:

$$J_\mu^{(-)}(x) = \bar{u}_i(x) \gamma_\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} d_i(x) \xrightarrow{P} \bar{u}_i(Px) \gamma^0 \gamma_\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} \gamma^0 d_i(Px) =$$

Poichè  $\gamma^5$  anticommuta con  $\gamma^0$ :

$$= \bar{u}_i(Px) \underbrace{\gamma^0 \gamma_\mu \gamma^0}_{\gamma^\mu} \frac{1 + \gamma_5}{2} d_i(Px) =$$

Possiamo pensare la corrente iniziale  $J_\mu(x)$  come divisa in due contributi, uno contenente  $\gamma^5$  (A) e l'altro no (V):

$$J_\mu(x) = J_\mu^{(V)}(x) + J_\mu^{(A)}(x) = \bar{u}_i(x) \gamma_\mu \frac{1}{2} d_i(x) + \bar{u}_i(x) \gamma_\mu \frac{(-\gamma_5)}{2} d_i(x)$$

allora la trasformazione di parità si può riassumere come:

$$J_\mu^{(V)}(x) + J_\mu^{(A)}(x) \xrightarrow{P} J_\mu^{(V)}(Px) - J_\mu^{(A)}(Px)$$

Cioè:

- Alza (o abbassa) gli indici;
- cambia segno alla parte *assiale* della corrente.

Questo risultato rispecchia un pò quello che ci aspetteremmo da una corrente quadrivettoriale: per parità, un quadrivettore controvariante (covariante) inverte il segno delle sue componenti spaziali, il che equivale a considerare lo stesso vettore, però covariante (controvariante). Uno pseudovettore invece inverte il segno della componente temporale, lasciando invariate quelle spaziali.

Nell'espressione della lagrangiana d'interazione compare anche il campo  $W^{(+)\mu}(x)$ , che essendo un quadrivettore sotto parità abbassa soltanto gli indici; la lagrangiana si riscrive allora:

$$(J_\mu^{(-)(V)}(x) + J_\mu^{(-)(A)}(x)) W^{(+)\mu}(x) + (J_\mu^{(+)(V)}(x) + J_\mu^{(+)(A)}(x)) W^{(-)\mu}(x) \xrightarrow{P} \\ \xrightarrow{P} (J_\mu^{(-)(V)}(x) - J_\mu^{(-)(A)}(x)) W^{(+)\mu}(x) + (J_\mu^{(+)(V)}(x) - J_\mu^{(+)(A)}(x)) W^{(-)\mu}(x)$$

Dunque nella lagrangiana di interazione non può esserci simmetria per parità, anzi in questo caso si dice che la parità è violata in modo **massimale** perchè il parametro  $\gamma^5$  ha lo stesso peso di 1.

Per quanto riguarda la coniugazione di carica, anche stavolta supporremo che le fasi per campi di quark  $u_i$  e  $d_i$  siano le stesse:

$$J_\mu^{(-)}(x) = \bar{u}_i(x) \gamma_\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} d_i(x) \xrightarrow{C} -u_i^T(x) \mathcal{C} \gamma_\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} \mathcal{C}^{-1} \bar{d}_i^T(x) =$$

Ora, sfruttiamo il fatto che  $\mathcal{C}$  contiene una coppia di matrici  $\gamma$ , che entrambe anticommutano con  $\gamma_5$ , dunque  $[\mathcal{C}, \gamma_5] = [\mathcal{C}^{-1}, \gamma_5] = 0$ :

$$= -u_i^T(x) \underbrace{\mathcal{C} \gamma_\mu \mathcal{C}^{-1}}_{=-(\gamma^\mu)^T} \frac{1 - \gamma_5}{2} \bar{d}_i^T(x) = u_i^T(x) (\gamma^\mu)^T \underbrace{\frac{1 - \gamma_5}{2}}_{\equiv (\frac{1 - \gamma_5}{2})^T} \bar{d}_i^T(x) = \left[ \bar{d}_i(x) \frac{1 - \gamma_5}{2} \gamma^\mu u_i(x) \right]^T =$$

$$= \left[ \bar{d}_i(x) \gamma^\mu \frac{1 + \gamma_5}{2} u_i(x) \right]^T \equiv \bar{d}_i(x) \frac{1 - \gamma_5}{2} \gamma^\mu u_i(x)$$

l'ultimo passaggio è lecito perchè dal punto di vista degli indici di Lorentz  $\bar{d}_i(x) \gamma^\mu \frac{1 + \gamma_5}{2} u_i(x)$  è uno scalare. Dunque, se scomponiamo di nuovo la corrente in una parte vettoriale più una parte assiale, possiamo di nuovo riassumere l'azione della coniugazione di carica con:

$$J_\mu^{(-)(V)}(x) + J_\mu^{(-)(A)}(x) \xrightarrow{C} J_{(V)}^{\mu(+)}(x) - J_{(A)}^{\mu(+)}(x)$$

Vediamo allora che mentre la parità non altera le caratteristiche della corrente, la coniugazione di carica scambia (+) con (-) e viceversa. Anche nel caso della coniugazione di carica, la lagrangiana finale non coincide con quella di partenza, e la violazione della conservazione della carica è massimale.

Tuttavia, in assenza di mixing non viene violata la simmetria CP, infatti:

$$\begin{aligned} & J_\mu^{(-)(V)}(x) + J_\mu^{(-)(A)}(x) + J_\mu^{(+)(V)}(x) + J_\mu^{(+)(A)}(x) \xrightarrow{C} \\ & \xrightarrow{C} J^{\mu(+)(V)}(x) - J^{\mu(+)(A)}(x) + J^{\mu(-)(V)}(x) - J^{\mu(-)(A)}(x) \xrightarrow{P} \\ & \xrightarrow{P} J_\mu^{(-)(V)}(Px) + J_\mu^{(-)(A)}(Px) + J_\mu^{(+)(V)}(Px) + J_\mu^{(+)(A)}(Px) \end{aligned}$$

Anche includendo il mixing nella lagrangiana, la simmetria CP subisce violazioni intorno al per mille, e ci si chiese se il modello standard poteva descrivere tale violazione. Vedremo in breve che la violazione di CP può essere descritta dal modello standard se ipotizziamo che la matrice  $V_{ckm}$  non sia reale; se infatti includiamo nella corrente carica il mescolamento:

$$J_\mu^{(-)}(x) = \bar{u}_i \gamma_\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} d_j V_{ij}$$

$$J_\mu^{(+)}(x) = \bar{d}_j V_{ij}^* \gamma_\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} u_i$$

sotto una trasformazione di CP si ha:

$$J_\mu^{(-)}(x) \xrightarrow{CP} V_{ij} \bar{d}_j \gamma_\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} u_i$$

$$J_\mu^{(+)}(x) \xrightarrow{CP} \bar{u}_i \gamma_\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} d_j V_{ij}^*$$

Dunque una trasformazione di CP è una trasformazione di simmetria solo se  $V_{ij} = V_{ij}^*$ , cioè la matrice  $V_{ckm}$  è reale. La fase  $\delta$  che abbiamo introdotto nella costruzione della matrice  $V$  è quindi fondamentale affinché il modello standard possa spiegare la violazione di CP; abbiamo visto che nella prima costruzione di Cabibbo e del meccanismo GIM c'erano soltanto due generazioni di quark, e le condizioni sui loro campi fissavano irrimediabilmente tutti i parametri liberi. Introducendo una terza generazione invece rimane una libertà di fase per la matrice  $V_{ckm}$ , ed è possibile spiegare la violazione di CP.

## Capitolo 17

### Mercoledì 20 febbraio

**Problema:** abbiamo visto che per la matrice  $V_{ckm}$  resta la libertà di moltiplicare per un fattore di fase arbitrario, e tale operazione non deve produrre risultati osservabili, per coerenza con i fondamenti della meccanica quantistica. Ricordiamo la forma della matrice  $V_{ckm}$ :

$$V_{ckm} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix}$$

E' immediato il significato degli indici dei vari elementi di matrice; la corrente invece ha la forma  $J_\mu^{(-)} = \bar{u}_i \gamma_\mu \frac{1-\gamma_5}{2} d_j V_{ij}$  dunque se prendiamo  $i = 1$  la matrice  $V$  accoppia il quark  $u$  (di carica  $\frac{2}{3}$ ) con i tre quark di carica  $-\frac{1}{3}$ :

$$\bar{u} \gamma_\mu \frac{1-\gamma_5}{2} (V_{ud}d + V_{us}s + V_{ub}b)$$

Supponiamo adesso di cambiare la fase del campo del quark  $u$  con un fattore  $e^{i\phi_u}$ , questo equivale a moltiplicare la prima riga della matrice  $V_{ckm}$  per un fattore  $e^{-i\phi_u}$ ; viceversa, cambiare fase ai campi dei quark  $d_i$  significa moltiplicare per un fattore di fase le colonne.

In generale, prendendo una matrice unitaria 3x3, si hanno 6 fasi libere; supponiamo di voler imporre che l'elemento  $V_{ud}$  sia reale, questo significa che la differenza  $\phi_d - \phi_u$  non sia arbitraria, ma possa assumere soltanto valori multipli di  $2\pi$ , e passiamo da 6 gradi di libertà a 5; si dice anche che *a meno di una fase globale*, possiamo disporre di 5 gradi di libertà e non di 6. Oppure, la fase di  $V_{ud}$  è detta fase *libera*, diversamente dalle altre 6 fasi che sono *arbitrarie*.

Torniamo ora su  $V_{ud}$ , abbiamo imposto che fosse reale, ma non ce n'era realmente bisogno; moltiplicando tutta la matrice per un fattore di fase globale non deve produrre risultati osservabili, dunque partiamo da una  $\hat{V}$  (reale o meno, non è importante), e andiamo a finire in una  $\hat{V}e^{i\phi_g}$ . Nella corrente questo si traduce nella scrittura:

$$J_\mu^{(-)}(x) = \bar{u}_i \gamma_\mu \frac{1-\gamma_5}{2} d_j \hat{V}_{ij} \rightarrow \bar{u}_i \gamma_\mu \frac{1-\gamma_5}{2} d_j \hat{V}_{ij} e^{i\phi_g}$$

Ricordiamo le azioni della parità e della coniugazione di carica sui campi:

$$\psi(x) \xrightarrow{P} \gamma^0 \psi(Px) e^{-i\eta_p}$$

$$\begin{aligned}
& \bar{\psi}(x) \overbrace{\longrightarrow_P} \bar{\psi}(Px) \gamma^0 e^{i\eta_p} \\
& \psi(x) \overbrace{\longrightarrow_C} C^{-1} \bar{\psi}^T(x) e^{-i\eta_c} \\
& \bar{\psi}(x) \overbrace{\longrightarrow_C} -\psi^T C e^{i\eta_c}
\end{aligned}$$

Per quanto riguarda le fasi, abbiamo già dimostrato che il fattore  $e^{i\eta_p}$ , detto anche *parità intrinseca del campo*, può essere solo  $\pm 1$ ; esiste una proprietà: la parità intrinseca dei campi di particelle e antiparticelle è opposta, vale 1 per le particelle e -1 per le antiparticelle.

Sulla fase relativa alla coniugazione di carica invece non c'è un vincolo: anche per essa l'operatore di coniugazione di carica applicato due volte deve riprodurre lo stesso campo, ma mentre la prima volta agisce su un campo del tipo  $\psi$  ( $\bar{\psi}$ ), la seconda volta agisce su un campo di tipo  $\bar{\psi}$  ( $\psi$ ), quindi i fattori di fase si elidono comunque.

Prima avevamo supposto che i cambi di fase per parità o per coniugazione di carica fossero gli stessi sia per quark di carica  $\frac{2}{3}$  che per quelli di carica  $-\frac{1}{3}$ ; in realtà, niente ci vieta di pensare che quando  $C$  agisce sui quark di tipo up cambi la fase di un fattore  $e^{i\phi_u}$ , mentre sui down il fattore sia diverso,  $e^{i\phi_d}$ . Allora nella corrente  $J_\mu$ , dopo la coniugazione di carica comparirà un fattore  $e^{i(\phi_d - \phi_u)}$ , mentre i fattori di fase dovuti alla parità si elideranno (c'è un campo  $\bar{\psi}$  e un campo  $\psi$ ). Il fattore di fase dovuto alla coniugazione di carica è indipendente dalla generazione, dunque basterà sceglierlo in modo che annulli ogni eventuale fattore di fase globale venga riassorbito:

$$\bar{u}_i \gamma_\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} d_j \hat{V}_{ij} e^{i\phi_g} \overbrace{\longrightarrow_{CP}} \bar{u}_i \gamma_\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} d_j \hat{V}_{ij} \underbrace{e^{i\phi_g} e^{i(\phi_d - \phi_u)}}$$

## 17.1 'Zoologia' delle particelle fondamentali

### 17.1.1 I mesoni

I mesoni sono dei sistemi  $q\bar{q}$ , la prima famiglia è composta dai quark u e d, ed 'eredita' da protoni e neutroni la simmetria di isospin; entrambi hanno isospin  $\frac{1}{2}$  e corrispondono agli autovalori  $\pm \frac{1}{2}$

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \begin{matrix} +\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{matrix}$$

La simmetria di isospin dice che possiamo fare trasformazioni di spin isotopico in un sistema e se la simmetria è esatta i livelli devono restare gli stessi. Per protone e neutrone questa affermazione necessita di qualche precisazione in più: se abbiamo un sistema fatto da protoni e neutroni, e scambiamo un protone con un neutrone, all'ordine più basso non ci aspettiamo variazioni dei livelli energetici. Tuttavia la simmetria di isospin non è esatta, quindi già l'affermazione precedente è da prendere con le molle. Inoltre, prendiamo un sistema come il deuterio: il deuterio è un sistema (p,n) con  $\vec{L} = 0$  e  $\vec{S} = 1$ , quindi simmetrico per lo scambio del protone e del neutrone sia nelle variabili orbitali che in quelle di spin. Se la simmetria fosse esatta si potrebbe pensare che il deuterio sia degenere in energia con sistemi come (p,p) e (n,n), ma questo è chiaramente falso perchè stiamo parlando di sistemi non legati, inoltre il deuterio è un sistema di isospin 0. Infine, si passa dal deuterio a un sistema (p,p) o (n,n) trasformando solo *un* protone in un neutrone o viceversa, mentre per poter far valere le considerazioni di simmetria si dovrebbero trasformare tutti.

Gli altri quattro quark, s, b, c, t non hanno isospin ( $I=0$ ); per le antiparticelle dei quark u e d si ha invece:

$$\begin{aligned} q = \frac{1}{3} & \quad \begin{pmatrix} \bar{d} \\ \bar{u} \end{pmatrix} & I_3 = +\frac{1}{2} \\ q = -\frac{2}{3} & & I_3 = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Possiamo definire come nel caso del momento angolare degli operatori di innalzamento e abbassamento di isospin:

$$I_{\pm} = \frac{I_1 \pm iI_2}{2}$$

L'effetto di tali operatori sui campi dei quark è il seguente:

$$I_-|u\rangle \sim |d\rangle$$

$$I_-|d\rangle = 0$$

$$I_+|d\rangle \sim |u\rangle$$

$$I_+|u\rangle = 0$$

Per le antiparticelle si utilizza la seguente convenzione:

$$I_-|\bar{d}\rangle = -|\bar{u}\rangle$$

$$I_+|\bar{u}\rangle = -|\bar{d}\rangle$$

ovvero si introduce un segno - nel passare da un autostato di  $I_3$  all'altro.

## I pioni

I pioni sono sistemi di tipo (u,d); dato che i quark di tipo u e d hanno isospin  $\frac{1}{2}$ , un sistema quark-antiquark può dare origine a un tripletto di isospin, oppure a un singoletto. Del tripletto fanno parte i pioni, ad esempio abbiamo il  $\pi^+ = |u\bar{d}\rangle$ , che corrisponde all'autovalore di  $I_3 = 1$ . Il  $\pi^0$  e il  $\pi^-$  si ottengono dal  $\pi^+$  applicando l'operatore di discesa:

$$\pi^0 : \frac{(I_-^{(\bar{d})} + I_-^{(u)})}{\sqrt{2}}|u\bar{d}\rangle = \frac{|d\bar{d}\rangle - |u\bar{u}\rangle}{\sqrt{2}} \quad (I_3 = 0)$$

$$\pi^- : \frac{(I_-^{(d)} + I_-^{(\bar{d})})}{\sqrt{2}}\frac{|d\bar{d}\rangle}{\sqrt{2}} - \frac{(I_-^{(u)} + I_-^{(\bar{u})})}{\sqrt{2}}\frac{|u\bar{u}\rangle}{\sqrt{2}} = -\frac{|d\bar{u}\rangle}{\sqrt{2}} - \frac{|d\bar{u}\rangle}{\sqrt{2}} = -|d\bar{u}\rangle$$

I pioni hanno masse intorno ai 140 MeV (139 il  $\pi^0$ , 135 i  $\pi^{\pm}$ ), e vite medie  $\tau^0 \sim 10^{-16}s$  e  $\tau^{\pm} \sim 10^{-8}$ . Sono pseudoscalari, ovvero hanno parità intrinseca -1 e spin 0. Sono *scalari* perchè sono i sistemi  $q\bar{q}$  di massa minore, e il sistema finisce col trovarsi in uno stato ad energia più bassa possibile; viceversa, lo *pseudo* sta ad indicare la parità intrinseca negativa: se un quark ha parità intrinseca +1, il suo antiquark avrà parità intrinseca opposta, dunque la parità di un sistema quark-antiquark, in uno stato con momento angolare orbitale nullo, sarà data dal prodotto delle parità dei singoli costituenti, cioè  $-1 \cdot 1 = -1$ .

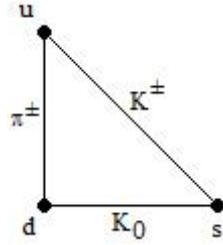


Figura 17.1: Pioni carichi e mesoni K

### I mesoni strani

Se vogliamo costruire dei sistemi  $q\bar{q}$  utilizzando il quark strano, abbiamo le seguenti possibilità:

$$K^+ \rightarrow (u\bar{s})$$

$$K^0 \rightarrow (d\bar{s})$$

Poichè il quark strano non ha isospin, il sistema  $K^0 K^+$  costituisce un doppietto di isospin; questo ci lascia supporre che esista un altro doppietto analogo ma con le cariche scambiate, e infatti abbiamo anche il doppietto costituito da:

$$\bar{K}^0 = (\bar{d}s)$$

$$K^- = -(\bar{u}s)$$

I mesoni costruiti con i quark strano e antistrano presentano masse molto diverse da quelle dei pioni, infatti stavolta abbiamo masse dell'ordine dei  $495 MeV$ . Per quanto riguarda le vite medie, i  $K^\pm$  hanno  $\tau \sim 10^{-8} s$ .

I mesoni  $K^0$  e  $\bar{K}^0$  hanno consentito di osservare la violazione di CP in natura; infatti, possiamo scegliere le fasi dei campi in modo che sotto coniugazione di carica si abbia:

$$CP|K^0\rangle = |\bar{K}^0\rangle$$

Allora è possibile costruire i seguenti stati:

$$|K_1\rangle = \frac{|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$|K_2\rangle = \frac{|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle}{\sqrt{2}}$$

Lo stato  $|K_1\rangle$  è *CP pari*, ovvero è autostato dell'operatore CP con autovalore 1, mentre lo stato  $|K_2\rangle$  è autostato di CP con autovalore -1, per questo si dice *CP dispari*. **Ipotesi:** nell'interazione debole CP viene violata, come abbiamo già accennato, intorno all'un per mille, quindi faremo finta che non venga violata per nulla.

Se CP non viene violata mi posso aspettare che  $|K_1\rangle$  e  $|K_2\rangle$  in generale decadano in sistemi differenti perchè hanno CP-parità opposta. Ad esempio, il  $|K_1\rangle$  decade verosimilmente in due pioni:

$$K_1 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$$

oppure

$$K_1 \rightarrow \pi^0 + \pi^0$$

dato che il sistema dei due pioni dal punto di vista della parità ha parità  $(-1) \cdot (-1) = 1$ . Se il  $K_1$  rispetta la parità, potrebbe decadere in due pioni, mentre al  $K_2$  questo dovrebbe essere vietato. Dunque la conservazione di CP nelle interazioni deboli deve necessariamente tradursi nella diversità di decadimento degli stati  $|K_1\rangle$  e  $|K_2\rangle$ . Dal punto di vista osservativo, in termini dei mesoni K neutri si hanno due componenti:

- **K short:** vita media  $\tau \sim 10^{-10}$ , composto da una combinazione di  $|K^0\rangle$  e  $|\bar{K}^0\rangle$  CP pari;
- **K long:** vita media  $\tau \sim 10^{-8}$ , e composto da una combinazione CP dispari.

Il motivo di questa differenza di due ordini di grandezza tra le vite medie dei due stati sta nel fatto che al  $K_{long}$ , essendo CP dispari, non è permesso il canale di decadimento a due pioni e deve necessariamente decadere in tre pioni: dunque c'è bisogno di più energia perchè i pioni da produrre sono tre e non due, e lo spazio delle fasi finale si riduce.

Se realmente non ci fosse violazione di CP,  $K_{short}$  coinciderebbe con  $K_1$ , e  $K_{long}$  con  $K_2$ . Ma in realtà CP non è conservata: tramite interazione adronica è possibile produrre i  $K^0$ , si lasciano propagare, dopodichè i  $K_{short}$  decadono subito, permettendo di costruire facilmente dei fasci costituiti da soli  $K_{long}$ ; a questo punto possiamo osservare come decadono i  $K_{long}$ , e se CP fosse conservata ci aspetteremmo di non osservare decadimenti a due pioni, che invece, anche se pochi, vengono puntualmente osservati.

Concludiamo allora che  $K_{long}$  non è autostato esatto di CP, ma c'è un mescolamento:

$$K_{short} = K_1 + \epsilon K_2$$

$$K_{long} = K_2 + \epsilon K_1$$

Nel 1964, degli esperimenti di Fitch, Cronin e Turley permisero di determinare il parametro  $\epsilon$ :  $|\epsilon| \sim 2,3 \cdot 10^{-3}$ . Permane ancora un dubbio:

- la violazione di CP è indiretta, ovvero partiamo da stati non CP-definiti?
- oppure esiste una violazione diretta, nell'interazione stessa?

Cinque anni fa si è dimostrato che è la dinamica stessa del decadimento a violare CP, quindi la seconda ipotesi.

## Altri tipi di mesoni

Attualmente non si conoscono mesoni costruiti con quark di tipo  $t$ ; accoppiando il quark charm con i quark della prima generazione, otteniamo i mesoni  $D$ :

$$D^0 = \bar{u}c \ ; \ \bar{D}^0 = u\bar{c}$$

$$D^+ = \bar{d}c \ ; \ D^- = d\bar{c}$$

Accoppiando il charm con lo strange otteniamo invece i mesoni  $D_s$ :

$$D_s^\pm = (s, c)$$

Le masse dei  $D$  si aggirano intorno ai  $1870MeV$ , mentre quelle dei  $D_s$  sono circa  $1970MeV$ ; le coppie  $(D^0, \bar{D}^0)$  e  $(D^+, D^-)$  costituiscono due doppietti di spin isotopico. Infine, analogamente avremo anche per il quark beauty delle combinazioni  $B^\pm$ ,  $B^0$  e  $\bar{B}^0$  nel caso di accoppiamento con i quark di prima generazione; le masse di questi mesoni sono circa  $5280MeV$ . Per gli accoppiamenti con il quark strange e il quark charm, si hanno rispettivamente masse di  $5380MeV$  e  $6400MeV$ . Tutti i mesoni sopra elencati sono sempre pseudoscalari.

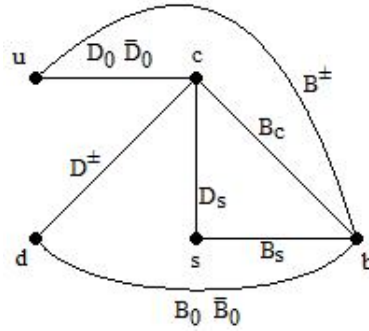


Figura 17.2: Mesoni contenenti i quark c e b

Le vite medie di questi mesoni si aggirano intorno ai  $10^{-12}s$ ; il decadimento non può che essere debole, poichè i mesoni che stiamo considerando sono quelli di energia più bassa possibile, dunque non esistono particelle più leggere in cui possono decadere conservando il sapore forte. Tuttavia, è possibile costruire mesoni con energia più alta ed aprire il canale per i decadimenti forti: ad esempio esiste il mesone  $\rho$ , pseudovettoriale con  $J = 1^-$ , e di massa  $m_\rho = 770MeV$ . Tale mesone ha a disposizione i canali pionici e quindi può decadere forte; la sua vita media, a causa dell'intensità dell'interazione che lo fa decadere, è talmente piccola che si stenta a darle la dignità di particella e a volte ci si riferisce a lei come a una *risonanza*. Vediamo come è possibile determinare tale vita media: l'indeterminazione (o *larghezza*) sulla sua massa è  $\Gamma \sim 150MeV$ , ed esiste una relazione tra la larghezza e la vita media

$$\tau\Gamma = \hbar$$

$$\Rightarrow \tau \sim \frac{6,6 \cdot 10^{-22} MeV \cdot s}{150 MeV} \sim 10^{-24} s$$



## Capitolo 18

# Lunedì 25 febbraio

### 18.1 Mesoni pseudovettoriali

#### 18.1.1 Il mesone $\rho$

Abbiamo visto che non esistono soltanto mesoni pseudoscalari, ad esempio ci sono anche mesoni pseudovettoriali ( $J = 1^-$ ) come i mesoni  $\rho^\pm$  e  $\rho^0$ :

- dal punto di vista della struttura a quark sono simili ai pioni;
- costituiscono un tripletto di isospin;
- hanno masse di circa  $775\text{MeV}$  con una larghezza di  $150\text{MeV}$ ;
- decadono forte in pioni.

#### 18.1.2 Il mesone $\Phi$

Un altro mesone pseudovettoriale è il mesone  $\Phi$ ; tale mesone è un sistema  $s\bar{s}$ , e ha una massa di circa  $1020\text{MeV}$  con una larghezza di  $4 \div 5\text{MeV}$ . Il mesone  $\Phi$  non ha nè isospin nè stranezza, e decade forte secondo due canali:

$$\Phi \rightarrow K^+ + K^-$$

$$\Phi \rightarrow K^0 + \bar{K}^0$$

Tali decadimenti sono entrambi al limite della soglia, avendo i  $K$  una massa di circa  $495\text{ MeV}$ , dunque lo spazio delle fasi finale è piuttosto ridotto. Il decadimento si rappresenta graficamente come:

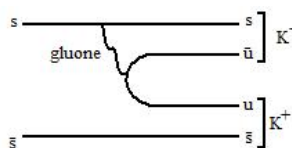


Figura 18.1: Decadimento della  $\Phi$

### 18.1.3 Il mesone $J/\psi$

Analogamente al mesone  $\Phi$ , è possibile ottenere stati legati anche del quark charm col suo antiquark, ed ottenere la particella  $J/\psi$ , detta anche *charmonio*. L'origine del nome sta nel fatto che fu scoperta contemporaneamente in due laboratori diversi, nel 1976, da Ting e Richter, che la battezzarono l'uno  $J$ , l'altro  $\psi$ . La sua scoperta consentì di accettare l'idea della seconda generazione di quark,  $\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}$ , e il GIM mechanism. All'inizio fu osservata la risonanza: il charmonio ha una massa di circa 3100MeV, ma una larghezza piuttosto piccola:  $\Gamma \sim 87\text{KeV}$ . A parità di massa, più piccola è la larghezza e maggiore è la vita media; viceversa, per particelle più massive ci si aspetta una vita media minore, e confrontandosi con il caso della  $\Phi$ , con una massa di 1020MeV e una  $\Gamma$  di 5MeV ci saremmo aspettati una larghezza dell'ordine della decina di MeV. La ragione di questa vita media maggiore ha a che fare col fatto che la  $\Phi$  può decadere forte perchè i mesoni  $K$  hanno masse minori di metà della massa del  $\Phi$ . Nel caso della  $J/\psi$ , il decadimento analogo sarebbe:

$$J/\psi \rightarrow D^0 + \bar{D}^0$$

$$J/\psi \rightarrow D^+ + D^-$$

ma adesso la massa dei D è circa 1870MeV, quindi il decadimento non può avvenire spontaneamente.

Tuttavia, della  $J/\psi$  esistono stati eccitati; esiste uno stato eccitato con energia di 3770MeV, ma stavolta con una larghezza di 25MeV per cui la vita media diminuisce di parecchio. La  $J/\psi$  può decadere in due canali:

- per l'87% delle volte decade in adroni;
- nel 13% dei casi decade in adroni più un fotone virtuale che genera coppie  $e^+e^-$  o  $\mu^+\mu^-$ .

Il fatto che esista una componente elettromagnetica competitiva significa che il decadimento della  $J/\psi$  è problematico; anche la  $J/\psi$  è una particella pseudovettoriale, inoltre si scopre che è un autostato della coniugazione di carica con autovalore -1. Come possiamo affermarlo? Il canale più pulito, dove il charmonio fu osservato per la prima volta è quello  $e^+ + e^- \rightarrow \gamma \rightarrow c\bar{c}$ . Il charmonio viene prodotto da un fotone virtuale, e i fotoni sono autostati della coniugazione di carica con autovalore -1. Allora, poichè le interazioni elettromagnetiche rispettano la coniugazione di carica (oltre che la parità e l'inversione temporale), lo stato finale ha lo stesso autovalore della coniugazione di carica di quello iniziale. Infatti, l'interazione elettromagnetica è descritta da un termine  $J^\mu A_\mu$  che per quanto abbiamo detto deve essere invariante per coniugazione di carica. Ci aspettiamo allora che poichè  $J^\mu$  cambia segno per coniugazione di carica, lo faccia anche  $A_\mu$ , dunque il campo del fotone è C-dispari.

Tornando al decadimento del charmonio, osserviamo che il diagramma che lo descrive non può essere dello stesso tipo di quello del  $s\bar{s}$ , ovvero con un solo gluone emesso e assorbito; infatti  $c\bar{c}$  è un *singoleto di colore*, e uno dei postulati della cromodinamica quantistica è che nelle interazioni forti ci si deve sempre trovare in stati di singoletto: un solo gluone porta in se un colore, e un anticolore diverso, dunque non potrà mai costituire un singoletto di colore (?).

Consideriamo allora un grafico con due gluoni, ma vediamo subito che anche questo non può andar bene: i campi dei gluoni sono C-dispari, per lo stesso motivo di quelli del fotone, cioè si vanno ad accoppiare con

correnti cariche che cambiano segno per coniugazione di carica. Dunque il sistema di due gluoni è C-pari, e non può descrivere il decadimento del  $c\bar{c}$ , che è C-dispari.

Dobbiamo quindi andare al terzo ordine nella 'costante' di accoppiamento forte,  $\alpha_s$ , e abbiamo un grafico di questo tipo

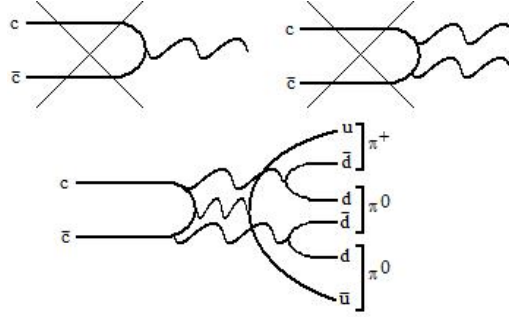


Figura 18.2: Diagramma di decadimento del  $c\bar{c}$

Abbiamo scritto 'costante' tra virgolette perchè in realtà  $\alpha_s$  non è esattamente una costante dato che cambia in funzione dell'impulso trasferito, in ogni caso per questo decadimento  $\alpha_s \sim 0,2$ . Il grafico è sconnesso dal punto di vista delle linee dei quark, e gli stati iniziale e finale sono C-dispari, queste caratteristiche fanno sì che il decadimento sia un pò più complicato, e che conseguentemente la vita media si allunghi; questo fenomeno fa sotto il nome di **regola di Zweig**.

#### 18.1.4 Il mesone $\Upsilon$

Il mesone  $\Upsilon$  è una combinazione ( $b\bar{b}$ ), ed ha una massa di circa 9460 MeV; è C-dispari ed è uno pseudovettore, e il suo stato fondamentale si indica con  $\Upsilon_{1s}$ . Per motivi simili a quelli della particella  $J/\psi$ , la  $\Upsilon$  non può decadere spontaneamente in coppie  $B^0\bar{B}^0$  o  $B^+B^-$ , che hanno masse intorno ai 5280 MeV; tuttavia esiste un suo stato eccitato, la  $\Upsilon_{45}$ , con massa intorno ai 10580 MeV, per la quale si aprono questi canali di decadimento.

## 18.2 I barioni

### 18.2.1 Il sistema delle $\Delta$

Tra i barioni, possiamo considerare ad esempio il sistema delle  $\Delta$ :  $\Delta^{++}$  (sistema  $uuu$ ),  $\Delta^+$ ,  $\Delta^0$  e  $\Delta^-$  (sistema  $ddd$ ). Questi barioni sono sistemi con  $J = \frac{3}{2}$  e isospin  $I = \frac{3}{2}$ . La massa delle  $\Delta$  è di circa 1230 MeV, con una larghezza di 120 MeV, infatti decadono forte in pioni, protoni e neutroni. Consideriamo ad esempio la risonanza della  $\Delta^{++}$ :

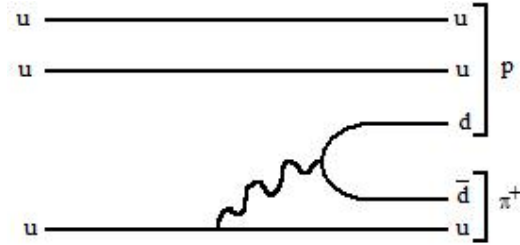


Figura 18.3: Decadimento della  $\Delta^{++}$

## 18.2.2 I barioni con stranezza

### Un solo quark strano: la $\Lambda^0$ e le $\Sigma$

Insieme ai barioni della prima generazione, ci sono anche quelli con i quark  $c$  ed  $s$ , ad esempio la  $\Lambda^0$ , un sistema  $uds$ : è un singoletto di isospin ( $I = 0$ ) ed ha  $J = \frac{1}{2}$ . La  $\Lambda^0$  decade debole perchè non esistono barioni contenenti il quark strano con massa inferiore alla sua, dunque il quark strano emetterà un mediatore elettrodebole e diventerà un quark di prima generazione (necessariamente un quark  $u$ , per l'assenza delle FCNC).

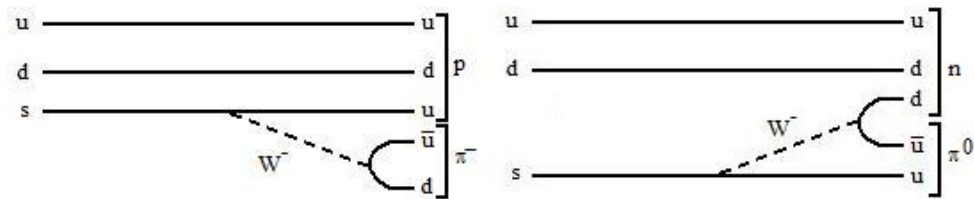


Figura 18.4: Decadimenti possibili della  $\Lambda$

Osserviamo che il quark  $s$  emette un bosone  $W^-$  e diventa un quark  $u$ : questo è permesso dal fatto che la matrice  $V_{ckm}$  non è una matrice diagonale, quindi accoppia anche quark appartenenti a differenti generazioni (ma con cariche diverse). La  $\Lambda$  ha una massa di circa 1115 MeV e una vita media  $\tau \sim 10^{-10}s$ , cioè una decina di ordini di grandezza più grande di quella delle particelle  $\Delta$ .

Insieme alla  $\Lambda$ , che costituisce un singoletto di isospin, tra i barioni strani troviamo anche le particelle  $\Sigma$ :  $\Sigma^+$  ( $uus$ ),  $\Sigma^0$  ( $uds$ ) e  $\Sigma^-$  ( $dds$ ), che viceversa costituiscono un tripletto di isospin. Per nessun barione si può parlare di autostati della coniugazione di carica, poichè ogni barione è sempre diverso dal proprio antibarione; spesso si incontrano coppie di particelle contrassegnate da uno stesso simbolo più un esponente  $+$  o  $-$ : a volte questo diversifica due particelle che sono una l'antiparticella dell'altra, ad esempio l'elettrone  $e^-$  e il positrone  $e^+$ , ma questo non vale nel caso dei barioni. La cosa è già evidente considerando la struttura a quark, ma può essere osservata anche dal punto di vista delle vite medie delle particelle: la  $\Sigma^+$  ha una vita media  $\tau \sim 0,8 \cdot 10^{-10}s$ , la  $\Sigma^0$   $\tau \sim 1,5 \cdot 10^{-20}s$ , la  $\Sigma^-$   $\tau \sim 1,5 \cdot 10^{-10}s$ . Osserviamo quindi che tra la vita media della  $\Sigma^+$  e quella della  $\Sigma^-$  c'è circa un fattore 2, e per il teorema CPT, (che stabilisce che particella e antiparticella devono avere stessa vita media) questo basta a stabilire che non possono essere particella e antiparticella.

La  $\Sigma^+$  decade  $p + \pi^0$  e in  $n + \pi^+$  mentre la  $\Sigma^-$  in  $n + \pi^-$ :

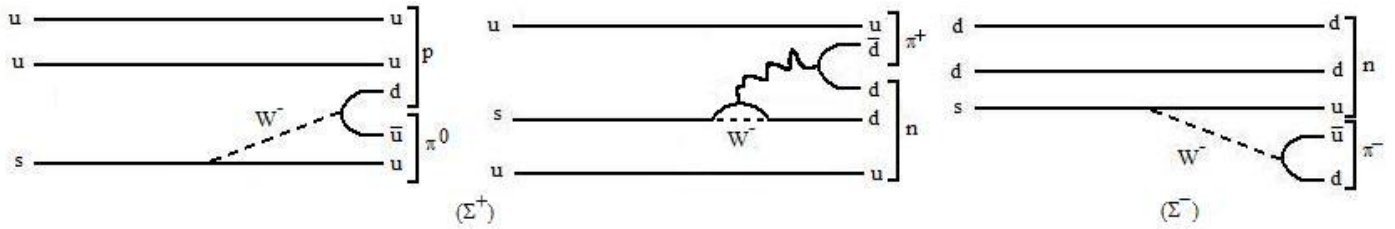


Figura 18.5: Decadimenti di  $\Sigma^+$  e  $\Sigma^-$

Per quanto riguarda la  $\Sigma^0$ , la cosa interessante è che decade per via elettromagnetica in  $\Lambda + \gamma$ , e pertanto conserva la stranezza.

### Due quark strani: le $\Xi$

Se consideriamo barioni contenenti due quark strani, abbiamo il doppietto di isospin costituito dalle particelle  $\Xi^0$  (uss) e  $\Xi^-$  (dss); tali particelle hanno masse intorno ai 1320 MeV e vite medie dell'ordine dei  $10^{-10}s$ . Tali particelle, quando vennero scoperte, furono chiamate *cascade particles*, per il fatto che decadevano a cascata, ovvero in particelle che decadevano a loro volta.

### Tre quark strani: la $\Omega^-$

Abbiamo visto che come vertice del decupletto barionico c'è una particella composta da tre quark strani, la  $\Omega^-$  (sss); tale particella ha una massa di circa 1670 MeV, e all'inizio presentava gli stessi problemi di simmetria e violazione del principio di Pauli della  $\Delta^{++}$ , ma a differenza di quest'ultima non ha isospin. I decadimenti della  $\Omega$  sono caratterizzati dal decadimento di uno dei tre quark s; i tre canali di decadimento principali sono  $\Lambda^0 + K^-$ ,  $\Xi^- + \pi^0$  e  $\Xi^- + \pi^-$ , con vite medie di circa  $0,8 \cdot 10^{-10}s$ .

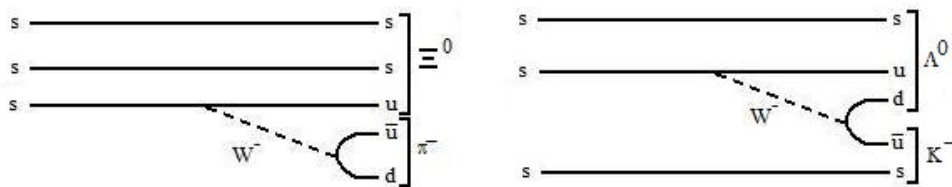


Figura 18.6: Decadimenti della  $\Omega^-$

## 18.3 Il neutrino

Il neutrino fa parte della famiglia dei leptoni e del modello standard. Fin dall'inizio è risultata una particella molto interessante, anche a causa della sua massa molto ridotta. L'atto di nascita del neutrino risale al 1930, quando Pauli in una lettera al cosiddetto 'gruppo dei radioattivi' dava una sua interpretazione di alcuni problemi del momento:

- Momenti angolari di alcuni nuclei;
- Conservazione dell'energia nel decadimento  $\beta$ ;
- Conservazione del momento angolare nello stesso.

Era noto fin dall'inizio degli studi di Chadwick sulla radioattività (1914), che lo spettro in energia degli elettroni emessi nel decadimento del Radium E (ovvero il  $^{210}_{83}Bi$ ) era in contrasto con l'idea che a quei tempi si aveva della struttura del nucleo: questo era pensato come fatto da protoni ed elettroni nucleari, dunque un nucleo con numero di massa  $A$  e numero atomico  $Z$  aveva un nucleo fatto da  $Z$  protoni ed  $A - Z$  elettroni nucleari; quindi la carica dei protoni veniva in parte compensata dagli elettroni nucleari, e annullata completamente dagli elettroni esterni. L'idea era che nel decadimento debole si avesse l'eiezione di elettroni nucleare da parte del nucleo

$$\underbrace{(A, A - Z)}_{M_0} \rightarrow \underbrace{(A, A - Z - 1)}_M + e^-$$

Lo stato finale è a due corpi, dunque l'energia delle particelle finali è univocamente determinata; infatti, se il nucleo inizialmente è fermo, il suo quadrimpulso è  $(M, \vec{0})$ , mentre nello stato finale si ha un quadrimpulso (nel centro di massa) dato da  $(E_e, \vec{p}) + (E_n, -\vec{p})$ . Dalla conservazione del quadrimpulso risulta che

$$\begin{aligned} (M_0, \vec{0}) - (E_e, \vec{p}) &= (E_n, -\vec{p}) \\ \Rightarrow s &= M_0^2 + m_e^2 - 2M_0E_e = M^2 \\ \Rightarrow E_e &= \frac{M_0^2 + m_e^2 - M^2}{2M_0} \end{aligned}$$

Se trascuriamo la massa dell'elettrone, e consideriamo  $M_0 \sim M$ , abbiamo:

$$E_e \sim \frac{(M_0 + M)(M_0 - M)}{2M_0} \sim (M_0 - M)$$

Quindi stiamo approssimando l'energia dell'elettrone con il  $Q$ -valore della reazione, ovvero la differenza di massa tra le particelle iniziali e quelle finali; tale energia è fissata dalle masse dei nuclei, e lo spettro degli elettroni emessi deve essere sostanzialmente monocromatico.

Tuttavia, lo spettro degli elettroni emessi dal RaE non era monocromatico; Lise Meitner, che si occupava di radioattività, ipotizzò che l'elettrone uscente eccitasse il nucleo perdendo quantità di energia di volta in volta diverse, giustificando uno spettro allargato, in seguito il nucleo diseccitava ed emetteva raggi  $\gamma$ . Questa idea piacque a Rutherford, ma si verificò sperimentalmente che era sbagliata; si utilizzò infatti un calorimetro per determinare l'energia media prodotta dalla reazione: se la Meitner aveva ragione, il calorimetro avrebbe assorbito per ogni decadimento sia l'energia dell'elettrone emesso, che quella dei  $\gamma$  di diseccitamento, per un totale di circa 1MeV. L'energia però risultava di circa 337KeV, compatibile con lo spettro di Chadwick, ma incompatibile con la presenza di raggi  $\gamma$ . L'idea di Pauli per spiegare la situazione era che insieme all'elettrone venisse emessa un'altra particella, neutra affinché la carica si conservasse, che lui chiamò *neutrone*, non essendo ancora stato scoperto quello vero.

Pauli suggerì che la massa di tale particella dovesse essere piccola, in modo da giustificare uno spettro non monocromatico: se la massa di questa particella fosse stata molto maggiore della massa dell'elettrone

come quella dei nuclei, anche stavolta l'elettrone si sarebbe preso tutta l'energia e sarebbe stato costretto ad essere monocromatico, per la conservazione di energia e impulso.

Pauli stesso definì la sua idea un 'estremo rimedio', e scarsamente convinto non proseguì la propria teoria, per poi riproporla alla 7<sup>a</sup> conferenza Solvay; a questa conferenza era presente anche Fermi, che riutilizzò l'ipotesi di Pauli per la creazione della sua teoria delle interazioni deboli: essendo stato scoperto nel frattempo il neutrone, Fermi battezzò la particella di Pauli *neutrino*.

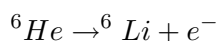
Tuttavia, tra l'idea di Pauli e quella di Fermi ci sono alcune differenze sostanziali:

- Per Pauli la particella doveva stare nel nucleo insieme a protoni ed elettroni nucleari, mentre per Fermi veniva creata *al momento del decadimento*; anche se in meccanica quantistica ci si era ormai abituati alla creazione di fotoni nelle transizioni atomiche, era la prima volta che si facevano ipotesi del genere per particelle.
- Anche l'elettrone nucleare aveva i giorni contati: con la meccanica quantistica e il principio di indeterminazione, un elettrone costretto ad essere localizzato nella sfera nucleare di raggio circa  $10\text{ fm}$  avrebbe dovuto avere un'energia di circa  $\frac{\hbar c}{10\text{ fm}} \sim 20\text{ MeV}$ , cosa che non aveva un riscontro sperimentale. Per Fermi, anche l'elettrone veniva creato al momento del decadimento.

## Capitolo 19

### Martedì 26 febbraio

L'altro problema aperto, assieme allo spettro del RaE, era la reazione:



In base a studi di struttura iperfine, i nuclei di  ${}^6\text{He}$  e  ${}^6\text{Li}$  dovevano avere spin 0 e 1, e questo non era chiaramente compatibile con la conservazione dello spin, avendo l'elettrone spin  $\frac{1}{2}$ .

**Parentesi storica:** Già a quel tempo si sapeva che l'elettrone aveva spin  $\frac{1}{2}$ ; due laureandi di Eherenfest nel '25, per spiegare l'effetto Zeeman e gli esperimenti di Stern e Gerlach, ebbero l'idea di associare all'elettrone questo nuovo numero quantico, lo spin. Bohr considerò positivamente l'idea, diversamente da Fermi e Lorentz, che ritenevano assurda l'idea di un elettrone ruotante attorno ad un proprio asse: in tale visione pittorica lo spin avrebbe potuto assumere soltanto valori interi, e non seminteri, quindi l'idea dei due laureandi cadde inizialmente nel dimenticatoio.

In definitiva, il decadimento poteva essere spiegato soltanto ipotizzando la presenza di una seconda particella di spin semiunitario. Con la scoperta del neutrone si modificò anche l'idea di struttura del nucleo: se prendiamo ad esempio il nucleo del  ${}^6\text{Li}$ , questo ha  $Z = 3$ , e spin 1; nella visione pre-Pauli del nucleo si poteva concepire come fatto da 6 protoni e 3 elettroni nucleari, ma di nuovo questo dava problemi per lo spin, poichè si aveva un numero dispari di spin seminteri.

#### 19.0.1 La teoria di Fermi

Sulla base della presentazione di Pauli alla conferenza Solvay, Fermi elaborò una teoria per descrivere il seguente decadimento:

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

Inizialmente Fermi battezzò la nuova particella *neutrino*, anche se in realtà sappiamo che è un antineutrino. Anche se approssimata, la teoria di Fermi è ancora molto usata, per processi a basse energie: Fermi concepì una generalizzazione dell'elettrodinamica dove si ha una corrente che si accoppia con un campo mediatore. Il decadimento del neutrone era visto come una *interazione di contatto* tra due correnti, una corrente *adronica* legata a protone e neutrone, e una corrente *leptonica* legata ad elettrone e neutrino; per interazione di contatto si intende che le correnti agiscono quando si trovano entrambe nello stesso punto. La lagrangiana di interazione aveva questa forma:

$$\mathcal{L} = -G_f(j_{adr}^{\dagger\mu}(x)j_{lep\mu}(x) + h.c.)$$



$$j_{adr}^{\dagger\mu}(x) = \bar{\psi}_n(x)\gamma^\mu\psi_p(x)$$

$$j_{lep\mu}(x) = \bar{\psi}_e(x)\gamma^\mu\psi_\nu(x)$$

Fermi dunque trattava protone e neutrone, così come elettrone e neutrino, come particelle di Dirac; questa era la prima analogia con l'elettrodinamica, anche se in tal caso i campi  $\psi$  e  $\bar{\psi}$  che comparivano nella corrente erano lo stesso campo. Allora la lagrangiana si può scrivere come:

$$\mathcal{L} = -G_f(\bar{\psi}_p(x)\gamma^\mu\psi_n(x))(\bar{\psi}_e(x)\gamma^\mu\psi_\nu(x)) + h.c.$$

La parte che descrive l'intensità dell'interazione sta nella  $G_f$ , la *costante di Fermi*:

$$G_f = 1,166 \cdot 10^{-5} GeV^{-2}$$

Questa è la teoria originale, dove non si consideravano fenomeni come la violazione di parità (che peraltro al momento della formulazione della teoria Fermi non conosceva ancora), dunque le correnti sono puramente vettoriali e non comprendono componenti assiali.

Fin dove ci può portare l'analogia con l'elettrodinamica? Facciamo un passo indietro, e ricordiamo che in elettrodinamica si aveva un campo  $A^\mu$  che soddisfaceva all'equazione  $\square A^\mu = J^\mu$  (nel sistema di Heaviside-Lorentz, dove  $c=1$  e non si ha il  $4\pi$ ). Se abbiamo due correnti, esse partecipano entrambe all'equazione del campo  $A^\mu(x)$ ; per il principio di sovrapposizione possiamo considerarle separatamente, e vediamo il caso in cui  $J_2^\mu$  agisce sul campo:

$$\square A^\mu(x) = J_2^\mu(x)$$

$$J_1^\mu(x) = -e\bar{\psi}_1(x)\gamma^\mu\psi_1(x) = -ej_1^\mu(x)$$

$$J_2^\mu(x) = -e\bar{\psi}_2(x)\gamma^\mu\psi_2(x) = -ej_2^\mu(x)$$

dove  $e = |e|$  è la carica del positrone. La corrente  $J_2$  interagisce con la corrente  $J_1$  tramite una lagrangiana della forma:

$$\mathcal{L} = -J_1^\mu(x)A_\mu(x)$$

Per far somigliare il più possibile questa lagrangiana alla lagrangiana di Fermi dobbiamo esprimere il campo  $A_\mu$  tramite  $J_2$ ; riprendiamo allora l'equazione  $\square A^\mu(x) = J_2^\mu(x)$  e scriviamo  $A^\mu$  supponendo di conoscere la funzione di Green per l'operatore  $\square$ :

$$\square D_f(z) = \delta^4(z)$$

$$\Rightarrow A^\mu(x) = \int d^4y D_f(x-y)J_2^\mu(y)$$

Riscriviamo a questo punto la densità lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -e^2 j_1(x) \int d^4y D_f(x-y) j_{2\mu}(y)$$

Formalmente è scomparso il campo mediatore, assente nella lagrangiana di Fermi, ma abbiamo introdotto la funzione di Green  $D_f$ , detta anche *propagatore del campo*. Tale funzione si può esprimere riscrivendo la sua equazione definitoria nello spazio degli impulsi:

$$\square D_f(z) = \delta^4(z)$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \partial^\mu \partial_\mu \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ikx} D_f(k) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ikx} \\
&\Rightarrow \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (-k^\mu k_\mu) e^{-ikx} D_f(k) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ikx} \\
&\Rightarrow -k^2 D_f = 1 \Rightarrow D_f(k) = -\frac{1}{k^2} \Rightarrow D_f(x) = - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ikx} \frac{1}{k^2 + i\epsilon}
\end{aligned}$$

dove l' $i\epsilon$  al denominatore è stato aggiunto per *regolarizzare* l'integrale: infatti sul dominio di integrazione la funzione  $\frac{1}{k^2}$  avrebbe dei poli e l'integrale è mal definito, allora si aggiunge una quantità immaginaria infinitesima in modo che il denominatore non si annulli.

Quella che compare nella lagrangiana non è una interazione di contatto, poichè  $J_1$  e  $J_2$  sono calcolate in punti diversi, e connesse dal propagatore tra i due punti. Se il propagatore fosse una delta di Dirac  $\delta^4(x-y)$ , l'interazione sarebbe di contatto.

Una differenza tra l'elettrodinamica e l'interazione debole è che nel primo caso i mediatori sono a massa nulla (fotoni), mentre nel secondo caso sappiamo che la massa dei bosoni (carichi) è dell'ordine dell'ottantina di GeV. Se pensiamo di effettuare una analogia non possiamo quindi trascurare il fatto che l'equazione per il campo mediatore deve essere l'equazione del campo di Klein-Gordon *con massa*:

$$(\square + M^2)W^\mu(x) = J_2^\mu(x)$$

Cosa cambia nel discorso? Resta tutto uguale, a parte che stavolta il propagatore del campo deve soddisfare all'equazione

$$\begin{aligned}
&(\square + M^2)D'_f(z) = \delta^4(z) \\
&\Rightarrow D'_f(x) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ikx} \frac{1}{-k^2 + M^2 + i\epsilon}
\end{aligned}$$

Immaginiamo adesso che la scala di energia del processo sia molto minore della massa del mediatore, abbiamo allora che nell'espressione del propagatore si ha:

$$D'_f(x) \sim \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ikx} \frac{1}{M^2} = \frac{1}{M^2} \delta^4(x-y)$$

La lagrangiana si riscrive:

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{e^2}{M^2} j_1^\mu(x) J_{2\mu}(x)$$

e adesso siamo in pieno accordo con l'espressione di Fermi. Se identifichiamo la quantità  $\frac{e^2}{M^2}$  con la costante di Fermi, e ricordando che nel sistema di Heaviside-Lorentz  $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$ , si ha:

$$G_f = \frac{4\pi\alpha}{M^2}$$

Questa espressione giustifica il fatto che per come l'abbiamo presentata all'inizio, le dimensioni della costante di Fermi sono quelle di una energia alla  $^{-2}$ . Sostituendo i valori di  $\alpha$  e  $G_f$ , si trova per la massa del mediatore  $M \sim 88,7 \text{ GeV}$ , che è diversa dal valore che conosciamo per il bosone  $W$ . Questa discrepanza è dovuta al fatto che non abbiamo tenuto conto della struttura di gauge, da cui risulta che  $\frac{G_f}{\sqrt{2}} = \frac{e^2}{8 \sin^2 \theta_W M^2}$ , che differisce dal nostro risultato iniziale per un fattore  $\frac{8 \sin^2 \theta_W}{2} \sim 1,26$ .

Dunque la teoria di Fermi si può vedere come limite di bassa energia della teoria elettrodebole, ad esempio per il decadimenti, in cui non si hanno mai energie superiori alla decina di MeV.

La Lagrangiana di Fermi, all'ordine più basso, è in grado o no di descrivere il processo  $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ ? L'interazione deve contenere un operatore di distruzione del neutrone, e gli operatori di creazione di protone, elettrone e antineutrino:

- $\psi_n$  contiene l'operatore di distruzione del neutrone;
- $\bar{\psi}_p$  contiene l'operatore di creazione del protone; la prima parte della lagrangiana può spiegare la scomparsa del neutrone e la comparsa del protone;
- il termine  $\bar{\psi}_e \gamma^\mu \psi_\nu$  contiene gli operatori di creazione dell'elettrone e dell'antineutrino.

**Osservazione:** la lagrangiana di Fermi in linea di principio può descrivere anche il processo seguente:

$$\bar{p} \rightarrow \bar{n} + e^- + \bar{\nu}_e$$

ovvero la reazione **coniugata per crossing** della reazione  $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ ; questa reazione però non può avvenire per motivi cinematici: la dinamica dei due processi è infatti la stessa, ma poichè (sempre per il teorema CPT, la massa di una particella deve essere uguale alla massa dell'antiparticella)  $m_{\bar{p}} < m_{\bar{n}}$ , la seconda reazione non può avvenire spontaneamente. Stesso discorso per la reazione  $p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$ : è vietata dalla cinematica, ma è descritta dinamicamente dalla parte hermitiana coniugata della lagrangiana di Fermi. Tuttavia, anche se questa reazione non è possibile per il protone libero, lo stesso non accade per i protoni legati all'interno dei nuclei: il  $^{22}\text{Na}$  emette  $\beta^+$  e la reazione che avviene è proprio  $p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$ . In ogni caso, il fatto che la reazione iniziale  $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$  sia permessa oltre che dinamicamente anche cinematicamente non significa che tutti i neutroni debbano necessariamente decadere: nei radionuclidi stabili ad esempio questo decadimento è energeticamente proibito.

### 19.0.2 La reazione $\bar{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n$

La forza della teoria di Fermi stava nel fatto che oltre a risolvere alcuni problemi del momento, descriveva e spiegava tante reazioni non ancora osservate e in seguito confermate. Uno dei primi utilizzi della teoria di Fermi fu per la ricerca di un modo di osservare i neutrini; ad esempio si cercò la reazione  $\bar{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n$ . Tale reazione è un urto *a soglia*, ovvero l'energia del neutrino deve essere maggiore di una certa quantità: nel sistema del laboratorio abbiamo un protone fermo con quadrimpulso  $(M_p, \vec{0})$  e un antineutrino in moto con quadrimpulso  $(E, \vec{p})$ . Per la conservazione del quadrimpulso si deve avere:

$$M_p^2 + 2M_p E = (M_n + m)^2$$

Bethe e Peierls cercarono di capire quale fosse la sezione d'urto del processo, in base a considerazioni sugli ordini di grandezza: l'idea era di supporre che la costante di Fermi per la reazione fosse la stessa del processo  $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ , e di indagare che legame ci potesse essere tra la vita media del neutrone e la sezione d'urto della reazione  $\bar{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n$ . Sia la sezione d'urto del processo che la larghezza  $\Gamma$  del neutrone devono dipendere dal modulo quadro della costante di Fermi, dunque, poichè  $\Gamma = \frac{\hbar}{\tau}$ , il prodotto  $\sigma \cdot \tau$  non dipende da tale costante. Allora nell'espressione di  $\sigma \cdot \tau$  possono comparire solo  $\hbar$ ,  $c$  e la scala di energia a cui

avvengono questi processi,  $E \sim 1MeV$ . Dimensionalmente,  $\sigma \cdot \tau$  è una superficie per un tempo, dimensioni che possiamo ottenere come:

$$\sigma \cdot \tau \sim \underbrace{\left(\frac{\hbar c}{E}\right)^2}_{cm^2} \underbrace{\frac{\hbar}{E}}_s$$

$\sigma \cdot \tau$  è proporzionale allora alla quantità  $(\frac{\hbar c}{E})^2 \frac{\hbar}{E}$ , dunque sapendo  $\tau$  si può risalire a  $\sigma$ :

$$\sigma \sim \frac{1}{\tau} \left( \frac{197MeV \cdot fm}{1MeV} \right)^2 \left( \frac{6,6 \cdot 10^{-22}MeV \cdot s}{1MeV} \right) = \frac{1}{\tau} 26 \cdot 10^{-44} cm^2 \cdot s$$

La vita media del neutrone è di circa 15 minuti, ma loro presero  $\tau = 1min \equiv 60s$ , da cui la sezione d'urto veniva dell'ordine dei  $10^{-44}cm^2$ , e conclusero che non se ne faceva niente: la sezione d'urto era troppo bassa e coi mezzi del momento non c'era verso di osservarla. La sezione d'urto che calcolarono, per quanto fosse un calcolo grossolano e non tenesse conto di eventuali costanti adimensionali a moltiplicare il prodotto  $(\frac{\hbar c}{E})^2 \frac{\hbar}{E}$ , non era poi così sbagliato: dalla teoria di Fermi si ricava ( $\hbar = c = 1$ )

$$\sigma = \frac{G_f^2}{\pi} (g_v^2 + g_a^2) E_\nu^2 = \frac{G_f^2}{\pi} (1 + 3,75) E_\nu^2$$

$$\Gamma = G_f^2 \frac{0,47}{60\pi^3} E_\nu^5$$

Sostituendo sempre  $1MeV$  per l'energia del neutrino, e  $1,166 \cdot 10^{-5}GeV^{-2}$  per la costante di Fermi, e ricordando che  $1MeV^{-1} = 197fm$ , si ottiene:

$$\sigma = \frac{(1,166 \cdot 10^{-5}GeV^{-2})^2}{\pi} 4,75 \cdot 1MeV^2 \simeq 8 \cdot 10^{-44}cm^2$$

anche se in seguito si utilizzerà sempre  $\sigma \sim 5 \cdot 10^{-44}cm^2$ .

## Capitolo 20

### Mercoledì 27 febbraio

Come abbiamo visto nel caso dei raggi cosmici, il libero cammino medio di una particella in un mezzo è legato alla densità numerica di centri scatteratori nel mezzo e alla sezione d'urto delle reazioni a cui la particella può partecipare in tal mezzo dalla relazione  $\lambda = \frac{1}{\sigma N}$ . Avevamo anche riscontrato una attenuazione dell'onda piana incidente della forma  $e^{-\frac{r}{\lambda}}$ .

#### 20.0.3 L'esperimento di Rodeback e Allen

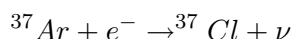
Definiamo adesso il mezzo di propagazione, ad esempio *acqua*, e immaginiamo che l'interazione dei neutrini possa avvenire soltanto con i protoni dell'idrogeno, dunque per ogni molecola d'acqua abbiamo due centri scatteratori. Calcoliamo allora il numero di protoni per unità di volume: un centimetro cubo di acqua corrisponde a un grammo, che a sua volta contiene  $\frac{1}{18}$  grammo-molecole d'acqua. Moltiplicando per il numero di Avogadro si ottiene il numero di molecole d'acqua in un grammo. Il numero di centri scatteratori per unità di volume sarà due volte la densità numerica di molecole d'acqua:

$$N = 2 \cdot \frac{1}{18} \mathcal{N} \text{cm}^{-3} = \frac{1}{9} 6,022 \cdot 10^{23} \text{cm}^{-3} = 0,7 \cdot 10^{23} \text{cm}^{-3}$$

da cui

$$\lambda = \frac{1}{0,7 \cdot 10^{23} \cdot 10^{-44}} \text{cm} = 3 \cdot 10^{20} \text{cm}$$

Sapendo che in un anno ci sono circa  $\pi \cdot 10^7$  secondi, si ha che la distanza percorsa dalla luce in un anno (anno luce) è di circa  $10^{18} \text{cm}$ , dunque il libero cammino medio di un neutrino in acqua è circa 300 anni luce. *Rodeback e Allen* sfruttarono il seguente fatto: il nucleo dell' $^{37}\text{Ar}$  tende ad assorbire di tanto in tanto un elettrone dello shell k (il più interno), decadendo in  $^{37}\text{Cl}$  ed emettendo un neutrino, con una vita media di circa 35 giorni. Tale processo va sotto il nome di *cattura elettronica*:



Il processo è interessante perchè l'argon è un gas nobile e per questo lo possiamo considerare fermo nel sistema del laboratorio; il Q-valore della reazione è di circa 800KeV.

In un gas di argon rarefatto, Rodeback e Allen misurarono la velocità degli ioni di cloro, formati nel processo di cattura: una volta che l'elettrone è stato assorbito, tutti i livelli si sbilanciano e c'è un effetto

a cascata di emissione di fotoni ed elettroni (*detti elettroni Auger*), c'è quindi l'eventualità che si formi un atomo di cloro ionizzato. I risultati indicarono una velocità di circa  $(0,7 \pm 0,06) \cdot 10^6 \frac{cm}{s}$ , sostanzialmente la stessa per tutti, il che era indice di un decadimento a due corpi (energia monocromatica). Sostituendo la massa del cloro, l'energia cinetica era di circa  $9,5 \pm 1eV$ , e ci potremmo chiedere se questo risultato è compatibile con l'ipotesi di massa del neutrino molto piccola. Se gli 800KeV del Q-valore vengono portati via quasi del tutto dal neutrino, ed effettivamente questo ha una massa minore o uguale di quella dell'elettrone, possiamo ragionevolmente considerarlo relativistico; nel sistema del centro di massa il neutrino e il nucleo di cloro hanno impulsi uguali e opposti di modulo  $p$ ; l'energia del neutrino sarà allora  $E_\nu = pc$ , mentre l'energia di rinculo del nucleo di cloro sarà  $E_r = \frac{p^2}{2M_{cl}}$ . Si ha quindi:

$$E_r = \frac{p^2}{2M_{cl}} = \frac{\left(\frac{E_{nu}}{c}\right)^2}{2M_{cl}} = E_\nu \frac{E_\nu}{2M_{cl}c^2}$$

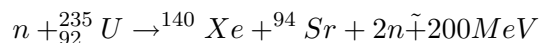
Questo significa che l'energia del cloro è una frazione molto piccola dell'energia del neutrino, essendo la massa del cloro circa 35 GeV, dunque al cloro spetta una quantità di energia trascurabile e possiamo identificare l'energia del neutrino con il Q-valore:

$$E_r = \frac{816^2 KeV^2}{2M_{cl}c^2} \sim 9,5eV$$

ovvero un risultato in perfetto accordo con i valori sperimentali; questo è indice del fatto che viene prodotta *una sola* particella, di massa molto piccola, e nel **1952** si ha la prima evidenza sperimentale dell'esistenza dei neutrini.

#### 20.0.4 L'esperimento di Cowan e Reines

Tuttavia, l'evidenza sperimentale dei neutrini non bastava a dimostrare una eventuale loro interazione, e rimaneva la volontà di osservare la reazione  $\bar{\nu} + p \rightarrow n + e^+$ . Cowan e Reines dal **1953** al **1960** si occuparono del caso, e data la sezione d'urto molto piccola, dovettero impegnarsi per mettere in piedi un apparato sperimentale contemporaneamente molto sensibile, e in grado di raccogliere un flusso considerevole di neutrini. Con le sorgenti radioattive degli anni 30 non era possibile osservare flussi di neutrini molto significativi, mentre negli anni 50/60 nascevano le prime centrali nucleari, in prossimità delle quali si potevano ottenere dei buoni risultati. Fu scelta la centrale nucleare di Savannah-River vicino ad Augusta, in Georgia, e l'apparato sperimentale fu collocato a 20 metri dal nucleo del reattore. Il flusso che si aspettavano era di circa  $10^{13} \frac{\bar{\nu}}{cm^2 s}$ , e per stimare questo flusso considerarono la seguente reazione:



i nuclei provenienti dalla frammentazione hanno un rapporto  $\frac{A}{Z}$  piuttosto alto, e tendono a decadere  $\beta$ , quindi per ogni reazione si aveva in media la produzione di 6 antineutrini. La potenza termica della centrale era di 3 gigawatt, dunque per sapere quante fissioni avvenivano in un secondo basta dividere per l'energia (200MeV) prodotta nella fissione:

$$N_{fis} = \frac{3 \cdot 10^9 \frac{J}{s}}{2 \cdot 10^8 1,6 \cdot 10^{19} J} \sim 10^{20} s^{-1}$$

dunque il numero di neutrini prodotti al secondo, *in tutte le direzioni*, era circa  $6 \cdot 10^{20}$ . La frazione di neutrini che arrivavano su un centimetro quadro della superficie utile dell'apparato è data da:

$$N'_\nu = \frac{6 \cdot 10^{20} \frac{\nu}{s}}{4\pi(2000)^2} = \frac{6 \cdot 10^{20}}{4\pi \cdot 4 \cdot 10^6} = \frac{6 \cdot 10^{20}}{5,02 \cdot 10^7} \sim 1,2 \cdot 10^{-13}$$

L'apparato sperimentale era composto da 200 litri di acqua in cui erano stati sciolti 40Kg di cloruro di cadmio ( $CdCl_2$ ):

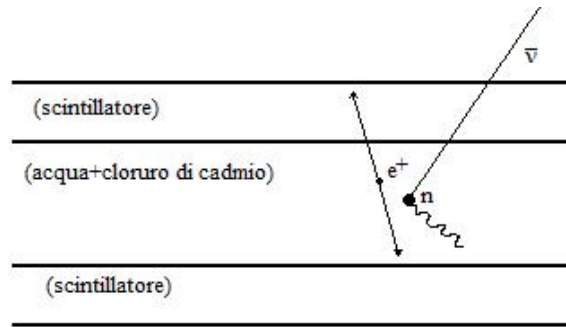


Figura 20.1: Apparato sperimentale di Cowan e Reines

Si è scelto proprio il cloruro di cadmio poichè ha una alta sezione d'urto di cattura neutronica, cosicchè il neutrone prodotto dalla reazione viene catturato dal nucleo di  $CdCl_2$ , che poi diseccita emettendo due o tre fotoni. Il positrone emesso, viceversa, incontra un elettrone con cui si annichila e crea due fotoni, ognuno di energia 0,511MeV, che vengono rivelati dal materiale scintillatore posto ai lati della vasca di acqua e sale. Questa reazione avviene in un tempo dell'ordine del nanosecondo, mentre per la cattura del neutrone e per i rilascio dei fotoni di diseccitamento si deve aspettare dai 20 ai  $30\mu s$ , per questo vengono detti fotoni *ritardati*.

Per rivelare i fotoni di annichilazione e diseccitamento era necessario utilizzare dei fotomoltiplicatori, e quindi tener conto della loro efficienza e della possibilità di conteggi non significativi dovuti ad eventi accidentali: per questo, Cowan e Reines confrontarono il numero di eventi che rilevavano quando la centrale era in funzione, con quello che avevano a centrale spenta. Se avessero avuto 30 eventi a centrale accesa, e 27 a centrale spenta, poichè l'errore va come la radice del numero di conteggi (distribuzione poissoniana) non ci sarebbero stato i presupposti per poter affermare che la reazione  $\bar{\nu} + p \rightarrow n + e^+$  avvenisse davvero. Tuttavia i risultati erano favorevoli e conclusero che si avevano circa  $3 \pm 0,2$  eventi l'ora; su questa base, la sezione d'urto risultava  $12_{-4}^{+7} \cdot 10^{-44} cm^2$ , in pieno accordo con i  $5 \cdot 10^{-44} cm^2$  teorici. Il valore sperimentale della sezione d'urto si ottiene in questo modo: il numero di eventi per unità di tempo,  $n$ , è dato da

$$n = N \cdot \sigma \cdot F$$

dove  $N$  è il numero di centri scatteratori (protoni), e  $F$  è il flusso di antineutrini incidenti. Il numero di centri scatteratori è dato da:

$$N = \frac{200 \cdot 10^3}{18} \cdot 2 \cdot 6 \cdot 10^{23} = 1,2 \cdot 10^{28}$$

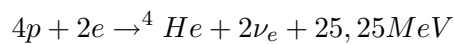
Allora la sezione d'urto si trova come  $\sigma = \frac{n}{NF}$ . Viceversa, il valore teorico del numero di eventi per unità di tempo è:

$$n = 1,2 \cdot 10^{28} 5 \cdot 10^{-44} \cdot 10^{13} \sim 6 \cdot 10^{-3} s^{-1} \Rightarrow 20h^{-1}$$

Cioè teoricamente ci saremmo aspettati una ventina di eventi l'ora, contro i 3 eventi l'ora sperimentali. Questo non deve sorprendere perchè nel calcolo non abbiamo tenuto conto dell'accettanza dei rivelatori, che gioca sempre un ruolo; in ogni caso l'accettanza in questo caso è del 10% circa, ed è più che rispettabile.

## 20.0.5 L'esperimento di Davis e le oscillazioni di neutrino

Un'altra caratteristica dei neutrini, scoperta negli ultimi anni, è il fatto che i neutrini non rimangano uguali a se stessi durante la loro propagazione, ovvero cambiano nel tempo il loro sapore debole. Sappiamo che esistono neutrini di tre tipi, associati ai tre leptoni  $e$ ,  $\mu$  e  $\tau$ ; sulla base dell'esperimento di Cowan e Reines, Davis cercò di misurare il flusso dei neutrini solari: all'interno del sole avvengono reazioni di fusione abbastanza complicate, ma che possiamo riassumere in:



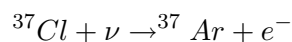
Ogni neutrino si porta dietro una energia di circa 0,6MeV.

**Osservazione:** in queste reazioni si ha il decadimento  $\beta$  inverso, ovvero si producono neutrini e non antineutrini.

Calcoliamo ora il flusso di neutrini dal sole, tenendo conto che sulla Terra la costante solare (ovvero la quantità di radiazione che arriva sulla Terra dal Sole per unità di superficie, misurata sulla superficie superiore dell'atmosfera, su di un piano perpendicolare ai raggi) è di circa  $1370 \frac{W}{m^2}$ : se supponiamo che per ogni 25,5MeV di energia arrivino due neutrini, il flusso di neutrini è dato da:

$$\Phi_\nu = 2 \cdot \frac{W}{25,5\text{MeV}} \sim \frac{1400}{25,5 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-10}} \sim 7 \cdot 10^{10} s^{-1}$$

Osserviamo che sono circa  $\frac{1}{100}$  di quelli che si osservavano a venti metri dal reattore nell'esperimento di Cowan e Reines. Nell'esperimento di Rodeback e Allen la reazione utilizzata era  ${}^{37}\text{Ar} + e^- \rightarrow {}^{37}\text{Cl} + \nu$ , mentre Davis utilizzò quella *time-reversed*:



L'apparato sperimentale consisteva in una quantità considerevole di percloroetilene, circa 400.000 litri, posti in una miniera sotterranea ad Homestake, in Sud Dakota. L'argon che si forma è scarso, e la maggiore difficoltà sta nell'isolarlo dal resto del cloro; come sappiamo, esso è radioattivo e decade in cloro con una vita media di 35 giorni, e con una cadenza di poche settimane (circa ogni 20 giorni) veniva fatto gorgogliare dell'elio e l'argon formatosi veniva raccolto con una efficienza maggiore del 95%. L'esperimento durò per 25 anni, e si concluse che il flusso di neutrini rivelato era circa il 30-40% di quello che ci si aspettava; questo risultato poteva essere interpretato in vari modi:

- Poteva essere un problema di costante solare: i neutrini sono prodotti all'interno del nucleo solare, ma non interagendo con esso arrivano a noi molto prima dei fotoni, che sono invece costretti a venire assorbiti e riemessi un numero molto alto di volte, prima di uscire dal nucleo e cominciare il loro viaggio verso la terra. Se il sole rallentasse il suo ritmo, la prima cosa di cui ci accorgeremmo sarebbe la diminuzione di neutrini, che impiegano circa 8 minuti a percorrere la distanza Terra-Sole, mentre per renderci conto della diminuzione della costante solare dovremmo aspettare molto di più, dunque si ipotizzò che la costante solare fosse in realtà minore di quella misurata;



- Pontecorvo ipotizzò la possibilità di oscillazioni neutrino-antineutrino, ma si tratta di una cosa diversa dalle oscillazioni tra famiglie leptoniche; su questa base tuttavia si costruì la teoria delle oscillazioni di neutrino: l'idea è che i neutrini di sapore definito non siano autostati della massa, bensì combinazioni lineari degli autostati di massa  $|\nu_1\rangle$ ,  $|\nu_2\rangle$  e  $|\nu_3\rangle$ :

$$|\nu_e\rangle = \alpha_e|\nu_1\rangle + \beta_e|\nu_2\rangle + \gamma_e|\nu_3\rangle$$

$$|\nu_\mu\rangle = \alpha_\mu|\nu_1\rangle + \beta_\mu|\nu_2\rangle + \gamma_\mu|\nu_3\rangle$$

$$|\nu_\tau\rangle = \alpha_\tau|\nu_1\rangle + \beta_\tau|\nu_2\rangle + \gamma_\tau|\nu_3\rangle$$

Secondo questa teoria, ogni neutrino di una determinata famiglia è combinazione lineare dei tre autostati di massa, che poi evolvono nel tempo indipendentemente, e man mano che si rimescolano possono dare luogo a neutrini di altre famiglie.

La soluzione del problema sembrerebbe semplice: basta mettersi in grado di osservare anche i neutrini muonici e tauonici, e si ricompone il flusso inizialmente previsto per i neutrini. In realtà questo non era possibile con l'apparato sperimentale di Davis, poichè l'analoga reazione di corrente carica per i neutrini  $\nu_\mu$  e  $\nu_\tau$  è sotto soglia, non essendoci energia sufficiente a produrre il  $\mu$  o il  $\tau$ ; i neutrini solari infatti avevano energie dell'ordine del MeV, che sono sufficienti solo per creare un elettrone. Dunque, se un neutrino elettronico nel suo viaggio si trasforma in un neutrino muonico o tauonico, l'apparato sperimentale di Davis perde la capacità di osservarlo; nel percorrere la distanza Terra-Sole i neutrini perdono completamente la coerenza, e in media il flusso di neutrini che ci arriva è composto da  $\frac{1}{3}$  di neutrini elettronici (che è quello che Davis rivelava),  $\frac{1}{3}$  di neutrini muonici, e  $\frac{1}{3}$  di neutrini tauonici.

La trattazione è la seguente: indichiamo con  $\nu_\alpha$  i neutrini di sapore definito, con  $\nu_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) gli autostati della massa con masse  $m_1$ ,  $m_2$  ed  $m_3$ . Allora, come nel caso dei quark, avremo una matrice unitaria che rimescola i neutrini:

$$|\nu_\alpha\rangle = U_{\alpha i}|\nu_i\rangle$$

La matrice  $U_{\alpha i}$  è determinata da 3 parametri reali e una fase; analizziamo il caso semplice di oscillazione tra soltanto due sapori, e assumiamo che si abbia:

$$|\nu_e\rangle = \cos\theta|\nu_1\rangle + \sin\theta|\nu_2\rangle$$

$$|\nu_\mu\rangle = -\sin\theta|\nu_1\rangle + \cos\theta|\nu_2\rangle$$

Immaginiamo che quando il neutrino  $\nu_e$  viene emesso, abbia impulso  $\vec{p}$  definito, tale che  $p \gg m_i$ ; ogni autostato della massa evolverà con un fattore  $e^{-ip_i x} = e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}e^{-iE_i t}$ , dove  $E_i = \sqrt{\vec{p}^2 + m_i^2} \sim p + \frac{m_i^2}{2p}$ . Allora si avrà:

$$|\nu_e, t\rangle = e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \left( e^{-iE_1 t} \cos\theta|\nu_1\rangle + e^{-iE_2 t} \sin\theta|\nu_2\rangle \right)$$

Se vogliamo la probabilità che al tempo  $t$  il neutrino elettronico iniziale sia diventato un neutrino muonico, consideriamo la seguente espressione:

$$P_{e\rightarrow\mu}(t) = |\langle\nu_\mu|\nu_e, t\rangle|^2 = |-e^{-iE_1 t} \sin\theta \cos\theta + e^{-iE_2 t} \sin\theta \cos\theta|^2 = |2\sin\theta \cos\theta \frac{e^{-iE_2 t} - e^{-iE_1 t}}{2}|^2 =$$

$$= \sin^2 2\theta \frac{e^{(-iE_2t - e^{-iE_1t})}(e^{iE_2t} - e^{iE_1t})}{4} = \sin^2 2\theta \frac{2 - e^{-i\Delta Et} - e^{i\Delta Et}}{4} =$$

dove  $\Delta E = E_1 - E_2$ ;

$$= \sin^2 2\theta \frac{1 - \cos \Delta Et}{2} = \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{\Delta Et}{2}$$

Al posto della differenza di energia possiamo sostituire la differenza dei quadrati delle masse:

$$\Delta E \sim p + \frac{m_1^2}{2p} - p - \frac{m_2^2}{2p} = \frac{m_1^2 - m_2^2}{2p} \equiv \frac{m_1^2 - m_2^2}{2E}$$

Dunque la probabilità dell'oscillazione  $e \rightarrow \mu$  nel tragitto Sole-Terra (e quindi in un tempo dato da  $\frac{L_{t-s}}{c} \equiv \frac{L}{1}$  risulta:

$$P_{e \rightarrow \mu}(t) = \sin^2 2\theta \underbrace{\sin^2 \frac{\Delta m^2}{4E} L}_{\text{termine di modulazione}}$$

Dunque, secondo questa teoria:

- ci deve essere mixing;
- se c'è mixing, allora i neutrini devono avere masse diverse, il che significa che almeno uno di loro ha massa diversa da zero; ci aspettiamo  $\Delta m^2 \sim 2 \cdot 10^{-3} (eV)^2$ .

Ci sono esperimenti sui neutrini in Giappone, oppure al Gran Sasso, dove si ricevono neutrini provenienti da Ginevra; la distanza percorsa è di circa 730Km, e i neutrini hanno un'energia di circa 17GeV. Tali neutrini dovrebbero consentire di osservare la transizione  $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$ : se nel tragitto il neutrino muonico diventa neutrino tauonico, acquisisce la possibilità di dar luogo a un leptone  $\tau$  tramite interazione di corrente carica.

## Capitolo 21

### Lunedì 3 marzo

Ricordiamo l'espressione della lagrangiana di Fermi:

$$\mathcal{L} = G_f(\bar{\psi}_p\gamma^\mu\psi_n)(\bar{\psi}_e\gamma^\mu\psi_\nu) + h.c.$$

Vedremo adesso come si arrivò in breve tempo a riconoscere una incapacità della teoria di Fermi nel descrivere alcuni fenomeni. Facciamo prima un discorso generale: una soluzione dell'equazione di Dirac è della forma

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{m+E}} \begin{pmatrix} (m+E)W \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p}W \end{pmatrix}$$
$$W = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Le componenti superiori sono dette *grandi componenti*, mentre quelle inferiori *piccole componenti*; questa denominazione è legata al comportamento nel limite non relativistico (di basse velocità): se l'impulso della particella tende a zero, le componenti inferiori sono trascurabili rispetto a quelle superiori, e possiamo ignorarle.

Per quanto riguarda la parte adronica della corrente nella lagrangiana di Fermi, si può assumere che in tutti i fenomeni di tipo nucleare, il protone e il neutrone sono ampiamente non relativistici (le loro energie sono dell'ordine di qualche MeV), dunque le loro velocità sono molto minori di  $c$ . Per quanto affermato poco fa, questo significa che possiamo ignorare le piccole componenti nella descrizione dello stato adronico. Ricordiamo adesso la forma delle matrici  $\gamma$ :

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$
$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

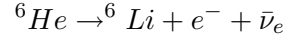
La componente temporale della corrente adronica è data da  $\bar{\psi}_p\gamma^0\psi_n$ , e poichè  $\gamma^0$  è diagonale essa collega le componenti di  $\psi_n$  con le componenti di  $\bar{\psi}_p$ , grandi con grandi e piccole con piccole. Diversamente accade

con le  $\gamma^i$ , che essendo *off-diagonal* mischiano grandi con piccole componenti, e quindi danno un risultato trascurabile. Nel limite di basse velocità quindi possiamo scrivere:

$$\bar{\psi}_p \gamma^\mu \psi_n \sim \frac{1}{\sqrt{M_p + E_p}} (\hat{\psi}_p^\dagger \hat{\psi}_n, \vec{0}) \frac{1}{\sqrt{M_n + E_n}} \hat{\psi} = (M + E)W$$

Osserviamo che l'oggetto  $\hat{\psi}_p^\dagger \hat{\psi}_n$  è uno scalare sotto il gruppo delle rotazioni nello spazio degli spinori, dunque l'operatore  $\bar{\psi}_p \gamma^\mu \psi_n$  nel limite di basse velocità è uno scalare; per conseguenza, esso può accoppiare soltanto stati nucleari con stesso valore dello spin, cioè coppie di stati con  $\Delta J = 0$ . Questa è una banale conseguenza del teorema di Wigner-Eckart: se abbiamo un operatore tensoriale di rango  $q$ , esso può far transire uno stato iniziale con momento angolare  $J_i$  soltanto verso stati finali con momento angolare  $J_f$  compreso tra  $|J - q|$  e  $J + q$ . Inoltre, l'operatore  $\bar{\psi}_p \gamma^\mu \psi_n$  è scalare sotto parità, e può avere elementi di matrice non nulli soltanto tra stati con stessa parità. Transizioni con  $\Delta J = 0$  e  $\Delta P = 0$  sono dette *transizioni di Fermi*.

Tuttavia, esistevano dei decadimenti che non rispettavano almeno una delle due condizioni, ad esempio il decadimento dell' ${}^6\text{He}$ :



L'elio risulta avere spin nucleare  $J = 0$ , mentre il litio ha  $J = 1$ , dunque questa è una transizione a  $\Delta J = 1$ , non spiegabile dalla teoria di Fermi. La conclusione fu che l'hamiltoniana di Fermi andava un pò rimaneggiata, in particolare andava rivista l'analogia con l'elettrodinamica.

Anche dopo le modifiche, dovevano restare alcuni punti fermi:

- Le correnti adronica e leptonica dovevano essere entrambe bilineari nei campi: una struttura di questo tipo garantisce che ai vertici si conservino il numero adronico e il numero leptonico.
- L'accoppiamento doveva essere non derivativo; il motivo principale era la semplicità, inoltre se l'accoppiamento è non derivativo lagrangiana e hamiltoniana d'interazione coincidono a meno di un segno.
- L'hamiltoniana doveva essere uno scalare sotto il gruppo di Lorentz.

**Osservazione:** quali entità si possono costruire dati due campi spinoriali? Abbiamo 4 gradi di libertà disponibili per ognuno dei due campi, dunque a priori i gradi di libertà sono 16.

Passiamo adesso a costruire i cosiddetti *bilineari di Dirac*:

- Possiamo costruire un oggetto scalare:  $\bar{\psi}_1 \psi_2$ ; i campi 1 e 2 non devono necessariamente essere lo stesso campo. Sotto il gruppo di Lorentz tale oggetto è uno scalare, infatti se  $S(\Lambda)$  è la rappresentazione del gruppo di Lorentz sullo spazio degli spinori relativa a una trasformazione di Lorentz  $\Lambda$ , lo spinore  $\psi$  trasforma in questo modo:

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow \psi' = S(\Lambda)\psi \\ \Rightarrow \psi^\dagger &\rightarrow \psi'^\dagger = \psi^\dagger S^\dagger(\Lambda) \\ \Rightarrow \bar{\psi} &= \psi^\dagger \gamma^0 \rightarrow \bar{\psi}' = \psi^\dagger S^\dagger(\Lambda) \gamma^0 \end{aligned}$$

ricordando la proprietà delle matrici  $S(\Lambda)$ , ovvero che  $\gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0 = S^{-1}$ , si ha:

$$\bar{\psi}_1 \psi_2 \rightarrow \psi_1^\dagger S^\dagger(\Lambda) \gamma^0 S(\Lambda) \psi_2 = \bar{\psi}_1 \gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0 S(\Lambda) \psi_2 = \bar{\psi}_1 S^{-1}(\Lambda) S(\Lambda) \psi_2 = \bar{\psi}_1 \psi_2$$

- L'oggetto  $\bar{\psi}\gamma^5\psi$  è un oggetto pseudoscalare (1 grado di libertà): l'operatore che effettua le trasformazioni di parità sugli spinori è  $\gamma^0$ , dunque:

$$\bar{\psi}_1\gamma^5\psi_2 \rightarrow \bar{\psi}_1\gamma^0\gamma^5\gamma^0\psi_2 = -\bar{\psi}_1\gamma^0\gamma^0\gamma^5\psi_2 = \bar{\psi}_1\gamma^5\psi_2$$

- $\bar{\psi}_1\gamma^\mu\psi_2$  si comporta come un quadrivettore (4 gradi di libertà);
- $\bar{\psi}_1\gamma^\mu\gamma^5\psi_2$  è invece un vettore assiale (4 gradi di libertà);
- $\bar{\psi}_1\sigma^{\mu\nu}\psi_2$  è un tensore di Lorentz antisimmetrico (6 gradi di libertà), ed eredita tale proprietà dal tensore  $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ .

Dunque abbiamo la possibilità di costruire oggetti di questo tipo e utilizzarli all'interno dell'hamiltoniana, ma non dobbiamo dimenticare che alla fine dei conti essa deve risultare uno scalare di Lorentz.

**Problema:** se consideriamo l'hamiltoniana di Fermi, questa non è in grado di descrivere transizioni con  $\Delta J = 1$  (le cosiddette transizioni di Gamow-Teller), dunque vediamo se qualcuno tra i bilineari di Dirac asserve a tale compito:

- Il bilineare scalare no perdio;
- lo pseudoscalare, per la presenza di  $\gamma^5$  che è fuori diagonale, mescola componenti grandi e piccole e quindi non dà contributo;
- la corrente vettoriale abbiamo visto poco fa che non funziona;
- la corrente assiale ha la componente temporale, contenente  $\gamma^0\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$  che mescola le componenti grandi e piccole ed è quindi fuori gioco, mentre le componenti spaziali contengono il prodotto  $\gamma^i\gamma^5 = \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{pmatrix}$  e danno contributi non trascurabili.
- il contributo del tensore  $\sigma^{\mu\nu}$  si può scomporre nei tre elementi  $\sigma^{0j} = i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ \sigma^j & 0 \end{pmatrix}$  che per gli stessi motivi di prima non danno contributo, e nei restanti tre elementi  $\sigma^{jk} = \epsilon^{jkm} \begin{pmatrix} \sigma^m & 0 \\ 0 & \sigma^m \end{pmatrix}$ , che di nuovo accoppiano le grandi componenti.

Dunque vediamo che le transizioni di Gamow-Teller possono essere descritte dal termine assiale (A) o da quello tensoriale (T), oppure da una loro combinazione. Se ci limitiamo al solo operatore A, questo è capace di descrivere transizioni con  $\Delta J = 0$ , oltre che  $\Delta J = 1$ ? Se questo si verificasse, potremmo sostituire del tutto nell'hamiltoniana di Fermi il termine vettoriale con quello assiale; in realtà questo non è possibile, perchè esistono delle transizioni (dette transizioni di Fermi **pure**) in cui gli stati iniziale e finale hanno  $J = 0$ , e un operatore vettoriale non può avere elementi di matrice diversi da zero tra due stati del genere (come ad esempio il dipolo elettrico tra due stati con momento angolare nullo). Dunque, se esistono transizioni tra stati con  $J = 0$ , queste non sono descritte nè da A nè da T, dunque nell'hamiltoniana è necessaria

anche la presenza del termine scalare (S), o di quello vettoriale (V), o ancora, di una loro combinazione. Consideriamo ad esempio la seguente transizione:

$$^{14}\text{O} \rightarrow ^{14}\text{N} + e^+ + \nu$$

Entrambi i nuclei di ossigeno e azoto hanno  $J = 0^+$ , e la transizione è di Fermi pura, quindi è descritta dai termini S o V. In conclusione l'hamiltoniana è fatta da due parti: in linea di principio dovrebbero essere presenti S, V, A e T, ma tramite degli esperimenti si valutarono i singoli contributi e si concluse che la corrente adronica doveva essere della forma  $V - A$ :

$$J^\mu = \bar{\psi}_p \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \psi_n$$

Come avevamo già osservato, tale combinazione viola la parità.

## 21.1 Il $\tau - \theta$ puzzle

Negli anni '50 era nato il cosiddetto  $\tau - \theta$  puzzle, ovvero erano stati osservati in emulsione i decadimenti di due particelle, la  $\tau^+$ :

$$\tau^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^+ + \pi^-$$

La massa di tale particella, che a dispetto del nome non c'entra niente col leptone  $\tau$ , bensì è in realtà il mesone  $K^+$ , era di circa  $1080 \pm 160$  masse elettroniche, e aveva una vita media di circa  $10^{-8}$  secondi.

La seconda particella era la  $\theta^+$ , che decadeva invece in due pioni:

$$\theta^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0$$

e aveva una massa di circa  $1125 \pm 140$  masse elettroniche. Le masse delle due particelle erano le stesse, entro gli errori sperimentali, e ci si pose il problema se fossero in realtà la stessa particella. Come si fa ad assegnare i numeri quantici alle due particelle (ovvero a ricostruire una sorta di 'carta di identità') soltanto osservando i prodotti di decadimento? Per prima cosa dobbiamo assumere che siano rispettate delle leggi di conservazione, ad esempio quella del momento angolare: per quanto riguarda la  $\theta^+$ , i pioni hanno spin 0, quindi, *se la parità è conservata*, la  $\theta^+$  avrà spin pari al momento angolare orbitale  $\vec{L}$  del sistema  $\pi^+\pi^0$ , cioè  $S = 0^+, 1^-, 2^+, \dots$

Per la  $\tau^+$  il discorso è più complicato, essendo lo stato finale a tre particelle; allora si accorpano i due pioni positivi in un'unico sistema e si considera il sistema  $(2) + 1 = (\pi^+ + \pi^+) + \pi^-$ . I due pioni hanno entrambi parità intrinseca negativa, dunque la parità intrinseca del sistema  $\pi^+\pi^+$  è  $+1$ , e di conseguenza il momento angolare  $L$  dovrà essere pari. Consideriamo il momento angolare  $\vec{L}'$  del pione negativo rimasto solo: lo spin della  $\tau^+$  sarà compreso tra i valori  $|L - L'|$  e  $L + L'$ . Su  $L'$  non si sa niente a priori, allora si procede con una analisi statistica degli stati finali, e si conclude che tutto è compatibile con  $L, L' = 0$ , da cui segue che  $S = 0$ . Inoltre, la parità intrinseca del sistema di tre pioni (tutti con parità intrinseca  $-1$ ) è  $-1$ , dunque la  $\tau^+$  è in uno stato  $0^-$ , diverso dallo  $0^+$  riscontrato per la  $\theta^+$ , e si concluse che la  $\tau^+$  e la  $\theta^+$  non potevano essere la stessa particella. Si osservi che questo risultato è concorde con l'assunzione che la parità *non venga violata*.

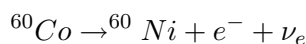
Lee e Yang **nel 1956** fecero diversi studi sulla parità, e osservarono che non c'era evidenza sperimentale del fatto che la parità dovesse conservarsi nelle interazioni deboli. Un anno dopo, nel 1957, ben due esperimenti dimostrarono che la parità veniva violata nelle interazioni deboli:

- L'esperimento di Madame Wu;
- l'esperimento di Garmin e Ledermann.

Entrambi gli esperimenti ebbero luogo alla Columbia University, e furono pubblicati nello stesso numero del *Physical Review*. Lee e Yang ebbero il nobel l'anno successivo per le loro predizioni, Ledermann lo conseguì in seguito per un altro lavoro, sulla diversità dei neutrini elettronico e muonico; ingiustizie della vita, l'unica che non ricevette mai un riconoscimento, forse a causa del suo pessimo carattere, fu proprio Madame Wu.

## 21.2 L'esperimento di Madame Wu

Madame Wu osservò il seguente decadimento debole:



Il cobalto si può polarizzare mediante l'applicazione di un campo magnetico. Per capire se nel decadimento c'è o meno violazione della parità è necessario trovare una osservabile che, se applicata su uno stato, dia un risultato diverso da quello che darebbe se applicata allo stesso stato trasformato per parità. Ad esempio, un'osservabile come  $\vec{\sigma} \cdot \vec{p}$  si comporta esattamente così: supponiamo, estremizzando, che i nuclei di cobalto siano tutti allineati, e gli elettroni di decadimento vengano osservati tutti in una stessa direzione, ad esempio quella della polarizzazione dello spin:

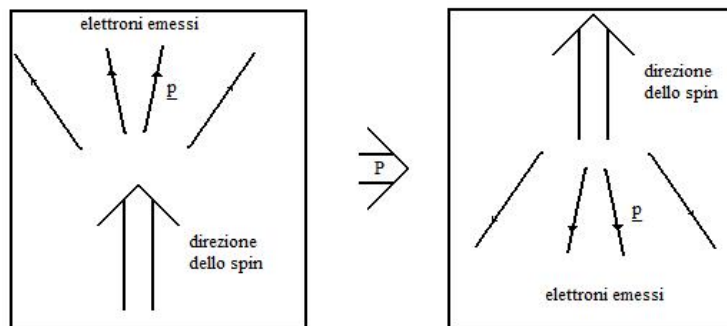


Figura 21.1: Esempio di violazione della parità

Se effettuiamo una trasformazione di parità, l'impulso cambia di direzione mentre lo spin rimane invariato, e abbiamo la situazione a destra nella figura. Se la parità è violata, quindi, i due stati sono distinguibili.

Nell'esperimento di Madame Wu la situazione era meno drastica, e si aveva semplicemente una asimmetria tra gli elettroni emessi nello stesso verso della polarizzazione degli spin, e quelli emessi nel verso opposto. L'apparato sperimentale è mostrato in figura.

La *temperatura* era di circa  $0,1K$ , in modo che il cobalto restasse polarizzato anche dopo che il campo magnetico era stato spento. Era necessario spegnere il campo magnetico altrimenti esso avrebbe alterato il moto degli elettroni. Gli elettroni emessi finivano in uno *scintillatore* contenente antracene, e la radiazione prodotta veniva indirizzata da una *guida di luce* nel *fotomoltiplicatore*.

Tuttavia, una volta spento il campo magnetico, il cobalto si spolarizzava entro 4-5 minuti; per assicurarsi che il sistema fosse sempre polarizzato si sfruttava il seguente fatto: il nichel prodotto nel decadimento è

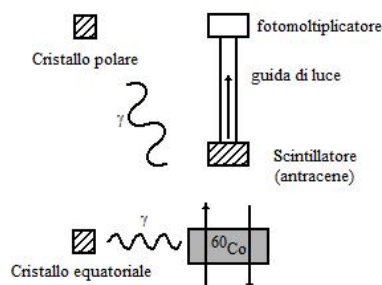


Figura 21.2: Apparato sperimentale di Madame Wu

eccitato, e diseccita emettendo fotoni. Tali fotoni risentono della polarizzazione del cobalto, e vennero posti dei cristalli (ioduri) in zone cruciali per raccogliarli: in particolare, ci si aspettava che il cristallo equatoriale, quando il cobalto era ancora polarizzato, raccogliesse più fotoni di quello polare.

Questa asimmetria nella distribuzione dei fotoni potrebbe far erroneamente pensare che anche le interazioni elettromagnetiche violino la parità, ma in realtà tale distribuzione non risente della direzione di polarizzazione del cobalto, nè tantomeno del moto degli elettroni: semplicemente in caso di polarizzazione, i fotoni vengono emessi prevalentemente in direzione ortogonale a quella dello spin, ma con simmetria di scambio alto-basso:

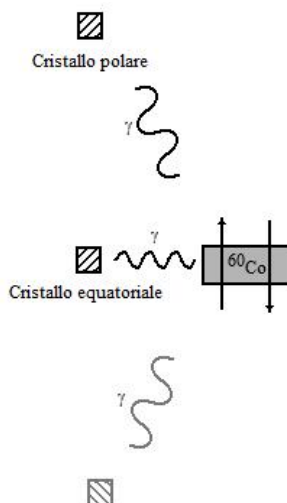


Figura 21.3: Simmetria alto-basso nella distribuzione dei fotoni

La correlazione tra l'impulso dei fotoni e lo spin del cobalto è quindi del tipo  $\vec{\sigma} \wedge \vec{k}$ , ovvero è uno scalare per parità.

Si riscontrava come si è già accennato che i conteggi di elettroni e fotoni cambiavano nel tempo, per stabilizzarsi su un valore finale dopo un tempo di circa 5 minuti. Per simulare la trasformazione di parità si invertiva semplicemente la direzione del campo magnetico, il che provoca l'inversione dello spin e quindi un cambiamento di segno nell'operatore  $\vec{\sigma} \cdot \vec{p}$ , analogo a quello provocato dall'inversione delle coordinate spaziali.



Ad esempio il grafico dei fotoni conteggiati dai due cristalli polare ed equatoriale (dopo aver *corretto per lo spazio delle fasi*, ovvero tenendo conto della sproporzione di fotoni che arriva ad uno piuttosto che all'altro) è di questo tipo:

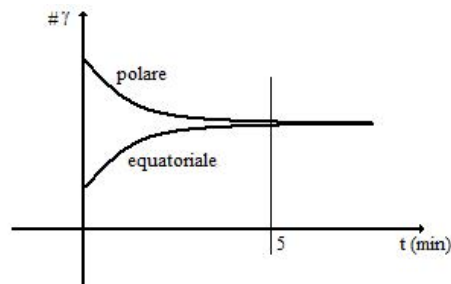


Figura 21.4: Conteggi dei fotoni nei cristalli al passare del tempo

mentre per gli elettroni si avevano due grafici diversi, a seconda che il campo magnetico fosse diretto in una direzione, o nell'altra:

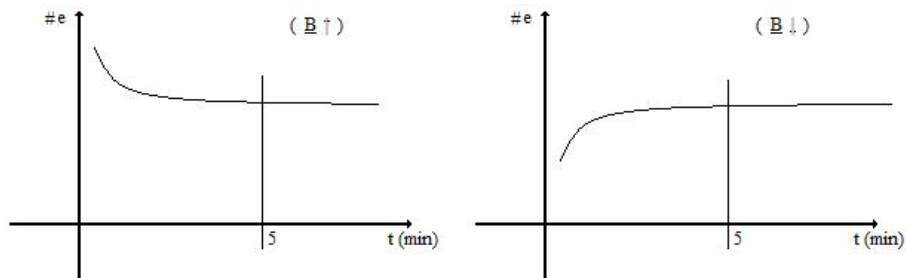


Figura 21.5: Grafici dei conteggi elettronici

## Capitolo 22

### Martedì 4 marzo

#### 22.1 L'esperimento di Ledermann

L'esperimento di Ledermann aveva l'obiettivo di osservare la violazione della parità da una catena di decadimenti che partiva da quello del pione:

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$$

a sua volta il muone, dopo  $2,2\mu s$  nel suo sistema di riposo, decadeva in

$$\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$$

Ledermann usò un fascio di pioni positivi (contaminato da circa un 10% di muoni positivi) con un impulso di  $85 \frac{MeV}{c}$ ; l'apparato sperimentale è quello mostrato in figura:

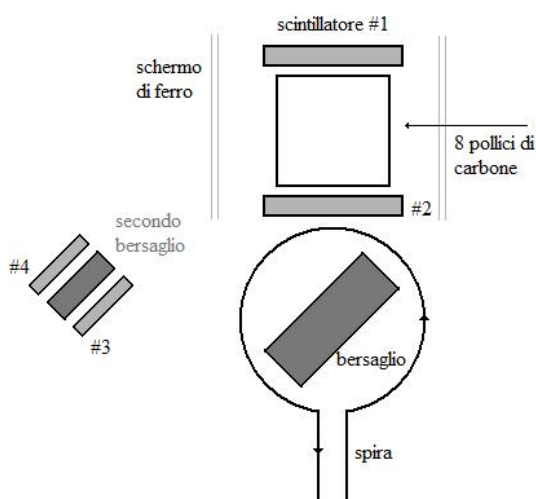


Figura 22.1: Apparato sperimentale di Ledermann

Attorno al bersaglio principale c'era una spira percorsa da corrente che generava un campo magnetico. Il materiale posto tra uno scintillatore e l'altro aveva un utilizzo passivo: assorbire o rallentare; gli otto pollici

di carbone servivano infatti a filtrare i pioni nel fascio: i pioni hanno infatti una sezione d'urto maggiore dei muoni e finiscono bloccati dal carbone, mentre i muoni proseguono pressochè indisturbati. L'eventuale segnale degli scintillatori 1 e 2 significava quindi il passaggio di un muone.

Con alta probabilità viceversa i muoni si fermavano nel bersaglio principale: essendo muoni positivi non potevano comportarsi come la loro controparte negativa e dare origine ad atomi mesici, dunque la loro unica alternativa era di decadere. Gli scintillatori 3 e 4 servivano a segnalare il passaggio di una particella carica, nel nostro caso il positrone di decadimento; il bersaglio secondario posto tra i due scintillatori serviva a rallentare ulteriormente le particelle che lo attraversavano, in modo che allo scintillatore 4 arrivassero soltanto positroni con energia maggiore di 25MeV. Avere un segnale da entrambi gli scintillatori significava dunque il passaggio di una particella carica sufficientemente energetica.

Fissato un certo tempo  $t_0$ , definito dai contatori 1 e 2, si aspettava un tempo compreso tra gli 0,75 e i 2  $\mu s$ , e si guardava quanti erano i conteggi in 3 e 4. L'idea era questa: il muone sta viaggiando in una precisa direzione, ed è nato da un pione; se nell'interazione alla base della sua creazione la corrente era della forma V-A, il muone avrebbe dovuto nascere polarizzato longitudinalmente. Infatti, se ci mettiamo nel sistema di riposo del pione, necessariamente per la conservazione dell'impulso il muone e il neutrino procederanno in direzioni opposte:

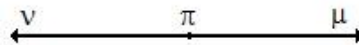


Figura 22.2: Decadimento del pione

La corrente è della forma  $\bar{\psi}\gamma_\mu \frac{(1-\gamma_5)}{2}\psi$ , dove  $\frac{(1-\gamma_5)}{2}$  è un *proiettore di chiralità*, ovvero proietta su stati di chiralità definita. Il termine *chiralità* richiama le mani, che sono immagini speculari l'una dell'altra; stati con chiralità ben definita ma opposta, hanno anche parità opposta.

La teoria delle interazioni deboli contiene il proiettore  $(1 - \gamma_5)$  nella corrente carica, quindi seleziona un ben preciso stato di chiralità: nella teoria comparirà uno solo dei due stati. Lo stato di chiralità definita, da un punto di vista meno preciso ma più intuitivo, a che fare con lo stato di *elicità* definita. L'elicità come sappiamo è la proiezione dello spin lungo la direzione dell'impulso:  $\Sigma = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|}$ ; per tutte le particelle con massa, l'elicità non è conservata per trasformazioni di Lorentz, infatti se in un dato sistema di riferimento abbiamo  $\vec{\sigma} \cdot \vec{p} > 0$ , possiamo effettuare una trasformazione di Lorentz e spostarci in un sistema dove la particella si muove in verso opposto: l'elicità avrà cambiato segno. Invece, se la massa di una particella è nulla non è possibile effettuare tale trasformazione e l'elicità diventa un buon numero quantico.

Parlando di interazioni deboli, si hanno correnti protone-neutrone, elettrone-neutrino, muone neutrino ecc.; tra tutte queste particelle, i neutrini sono quelli che hanno massa più piccola. Si parla sempre di massa diversa da zero, anche se piccola, quindi parlando di elicità per muoni e neutrini non si ha a che fare con proprietà invarianti di Lorentz; per la chiralità invece il discorso è diverso, poichè il termine  $(1 - \gamma_5)$  è scalare di Lorentz, e stati di chiralità definita restano tali in ogni sistema di riferimento.

Nel sistema del centro di massa del  $\pi^+$ , possiamo considerare in ogni caso il neutrino come ultrarelativistico, dato che la sua energia sarà comunque molto maggiore della sua massa. Si può dimostrare che nella teoria di Dirac l'elicità è ben approssimabile a un buon numero quantico nel caso in cui  $E \gg m$ ; nel limite  $m \rightarrow 0$  l'approssimazione è esatta, e l'elicità diventa un buon numero quantico al pari della chiralità.

Dunque, sebbene resti importante distinguere le due cose, la presenza di una particella ultrarelativistica fa sì che per essa elicità e chiralità siano in qualche modo collegate.

Il proiettore  $\frac{(1-\gamma_5)}{2}$  corrisponde a stati *left-handed*, o di chiralità negativa, mentre  $\frac{(1+\gamma_5)}{2}$  a stati *right-handed*, o di chiralità positiva. In questa nomenclatura è palese il fatto che stiamo confondendo i due concetti, poichè gli attributi left- e right-handed sono di solito usati parlando di elicità; tale mescolamento è tanto più giustificato quanto più l'energia della particella è maggiore della sua massa.

Per una particella ultrarelativistica, stati di chiralità negativa corrispondono ad elicità negativa, ovvero lo spin  $\vec{\sigma}$  è antiparallelo all'impulso  $\vec{p}$ :

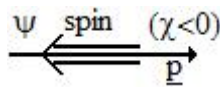


Figura 22.3: Particelle: chiralità negativa  $\rightarrow$  elicità negativa

Se invece si tratta di una antiparticella, l'avere chiralità negativa comporta una elicità positiva:

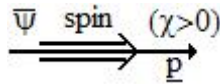


Figura 22.4: Antiparticelle: chiralità negativa  $\rightarrow$  elicità positiva

Questo significa che particelle e antiparticelle possono avere stessa chiralità, ma elicità opposte.

Tornando al decadimento del pione, considereremo il neutrino come *particella* ultrarelativistica, assumeremo quindi che abbia elicità negativa. L'interazione debole da parte sua è una interazione di contatto, dunque possiamo ragionevolmente supporre che il momento angolare orbitale del sistema sia zero. Essendo il pione uno pseudoscalare, quindi a spin nullo, per la conservazione del momento angolare anche il muone deve avere lo spin antiparallelo all'impulso:

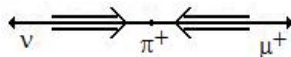


Figura 22.5: Decadimento del pione

Questa è la richiesta che viene dal momento angolare: poichè il neutrino ha massa molto minore della sua energia, possiamo supporre che compaia nell'interazione mediante uno stato di ben precisa elicità, dunque che sia polarizzato (MA E' UN'IPOTESI CHE COMPAIA IN STATI LEFT?). Questo fatto forza il muone ad essere polarizzato allo stesso modo, e a prima vista contrasterebbe col fatto che il muone è un'antiparticella, e ci aspetteremmo la sua chiralità negativa sfociasse in una elicità positiva. Vedremo però in seguito che questa obiezione è sbagliata, perchè il muone non è ultrarelativistico come il neutrino, e non è possibile applicargli l'aut-aut del neutrino. Ma resta il fatto che poichè il neutrino è polarizzato, anche il muone lo sarà.

I muoni generati dal decadimento dei pioni, che attraversano il carbone e si fermano nel bersaglio principale, saranno quindi muoni polarizzati. Anche il secondo decadimento, che avviene nel bersaglio

principale, è un decadimento debole, e anche lui avrebbe dovuto differenziare la direzione di emissione del positrone per la stessa correlazione di tipo  $\vec{\sigma} \cdot \vec{p}$  dell'esperimento di Madame Wu.

Semplifichiamo al massimo la teoria: immaginiamo che se il muone è polarizzato in direzione dell'impulso, il positrone di decadimento venga emesso nella stessa direzione.

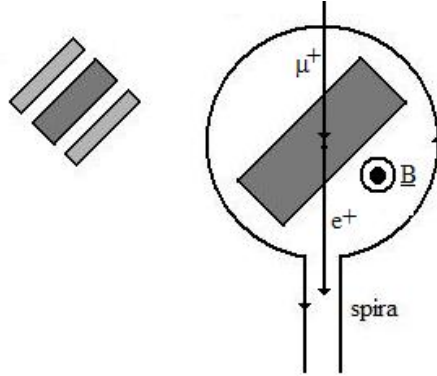


Figura 22.6: Utilità della spira

In tal caso, gli scintillatori in figura non dovrebbero rivelare nessuna particella carica. Tuttavia, se introduciamo un campo magnetico, questo provocherà la precessione dello spin del muone (precessione di Larmor), che precederà con frequenza di ciclotrone  $\omega = \frac{eB}{m_\mu}$ . Se guardiamo adesso i conteggi nel rivelatore, vedremo degli impulsi modulati, in funzione della corrente nel solenoide e a tempo di integrazione fissato. Il fatto che ci sia una modulazione è la riprova del fatto che il muone quando arriva è polarizzato: se i muoni in arrivo avessero spin orientato con distribuzione isotropa, tale distribuzione rimarrebbe isotropa anche in caso di una precessione.

Ma non solo; il fatto che si osservassero conteggi modulati significava due cose:

- il primo decadimento seleziona stati di elicità definita, i muoni *arrivano polarizzati* (quindi è corretto il termine V-A nella corrente debole);
- il decadimento del muone *risente della polarizzazione* del muone stesso; infatti se così non fosse, e la direzione di emissione fosse isotropa, non si osserverebbe modulazione, a prescindere dal fatto che i muoni arrivino polarizzati oppure no.

Dunque l'esperimento di Ledermann ha come conseguenza che l'interazione debole non rispetta la parità.

Torniamo adesso al nostro dubbio iniziale: come può il muone positivo, antiparticella, dopo che l'interazione ha selezionato i suoi stati a chiralità negativa, trovarsi in stati ad elicità negativa? La risposta sta nel fatto che nel sistema del centro di massa del pione, il muone è tutt'altro che relativistico, anzi è pressoché fermo; pertanto, per lui non valgono le considerazioni fatte per i neutrini: l'elicità in questo caso non è un buon numero quantico, in altre parole lo stato del muone in queste condizioni non è un autostato ad elicità positiva, ed esiste una probabilità non nulla di trovarlo in stati di elicità negativa. Se l'energia del muone crescesse all'infinito, tale probabilità diverrebbe sempre più piccola, al limite nulla.

$$|\mu^+(E \simeq m_\mu)\rangle = \alpha|\Sigma^+\rangle + \beta|\Sigma^-\rangle \Rightarrow |\langle\Sigma^-|\mu^+(E \simeq m_\mu)\rangle|^2 \neq 0$$

$$|\mu^+(E \rightarrow \infty)\rangle = |\Sigma^+\rangle \Rightarrow |\langle \Sigma^- | \mu^+(E \rightarrow \infty) \rangle|^2 = 0$$

Consideriamo adesso un altro caso, in cui l'interazione alla base del decadimento è la stessa; nel 99% dei casi il  $\pi^+$  decade nel modo che abbiamo visto, ovvero in  $\mu^+\nu_\mu$ , ma con branching ratio di  $10^{-4}$  decade in  $e^+ + \nu_e$ . Entrambi i decadimenti sono mediati da un bosone  $W^+$ , ma perchè il secondo è così raro? Con ragionamenti generali, il secondo decadimento sarebbe pure favorito: lo spazio delle fasi finale è maggiore, inoltre il decadimento avviene con stessa costante di accoppiamento  $G_f$ . Vediamo la cinematica del decadimento nel sistema del centro di massa del pione:

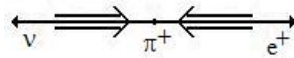


Figura 22.7: Decadimento del pione in  $e^+ + \nu_e$

Anche in questo caso, il neutrino detta legge, e tenderebbe a forzare il positrone ad avere elicità positiva, per la conservazione del momento angolare. Ma stavolta il positrone, dal basso del suo mezzo MeV, è molto più relativistico di quanto non fosse il muone ( $\sim 100MeV$ ), e pertanto molto più restio ad assumere elicità diverse da quella che gli competerebbe nel limite  $E \rightarrow \infty$ , ovvero elicità positiva. Tuttavia la massa dell'elettrone è diversa da zero, c'è una piccola proiezione di elicità negativa, e il decadimento, anche se raramente, avviene:

$$|e^+(\pi^+ \rightarrow \nu_e + e^+)\rangle = \alpha|\Sigma^+\rangle + \beta|\Sigma^-\rangle$$

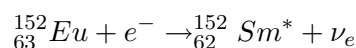
$$|\beta|^2 \ll |\alpha|^2$$

## 22.2 L'esperimento di Goldhaber

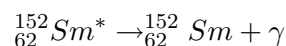
Mentre nell'esperimento di Ledermann (come in quello di Madame Wu) si verificò che le interazioni deboli violavano la parità, e le particelle emesse dovevano avere quindi una polarizzazione, nell'esperimento di Goldhaber si determinò viceversa quale fosse, in particolare si determinò l'elicità del neutrino.

E' importante conoscere l'elicità del neutrino perchè è indice della presenza nella lagrangiana debole del termine  $(1 - \gamma_5)$  piuttosto che di  $(1 + \gamma_5)$ , ovviamente sfruttando il fatto che nel caso del neutrino elicità e chiralità sono pressochè sinonimi. Infatti, l'esperimento di Ledermann avrebbe dato gli stessi risultati anche se si fosse supposto all'inizio che la lagrangiana dovesse contenere il termine  $(1 + \gamma_5)$ : avremmo invertito di conseguenza le condizioni di chiralità ed elicità per particelle e antiparticelle, ma ciò non avrebbe inficiato la conclusione che le interazioni deboli violavano la parità.

Nell'esperimento di Goldhaber si considerò un radionuclide, l'europio  $^{152}_{63}Eu$ , che decade per cattura k in samario  $^{152}_{62}Sm$  con l'emissione di un neutrino:



Il nucleo di europio si trova in uno stato  $0^-$ , il samario è eccitato e si trova in uno stato  $1^-$ , dunque questa è una transizione di Gamow-Teller pura  $\Delta J = 1$ . Il neutrino, da parte sua, ha un'energia di circa  $840KeV$ . Il samario diseccita emettendo un fotone di energia circa  $960KeV$ , e finendo in uno stato  $0^+$ :



Il decadimento dell'europio avviene con una vita media di alcune ore, mentre quello del samario ha una vita media di circa  $70fs$ .

Come si fa da questi dati ad ottenere informazioni sull'elicità del neutrino emesso? Cominciamo dal fotografare il sistema: l'europio, pressoché fermo nel sistema del laboratorio, assorbe un elettrone. *Assumiamo* che il neutrino abbia elicità negativa (risultati inconsistenti significherebbero soltanto che l'assunzione giusta era quella opposta): questo forza il samario ( $J=1$ ) ad avere stessa polarizzazione del neutrino, infatti se teniamo conto che nello stato iniziale c'è solo l'europio ( $J=0$ ) e l'elettrone  $k$  ( $J=\frac{1}{2}$ ), il samario e il neutrino devono costituire uno stato con momento angolare  $\frac{1}{2}$ .

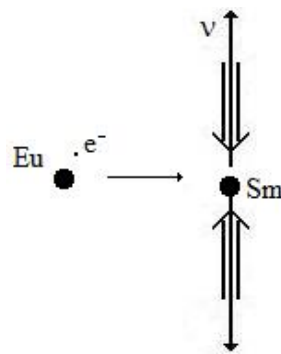


Figura 22.8: Cinematica del decadimento dell'europio

Il neutrino dopo l'emissione se ne va, mentre il samario si muove con la stessa polarizzazione del neutrino: abbiamo quindi associato la polarizzazione del neutrino, che non vediamo, a qualcosa che invece siamo in grado di osservare. In  $70fs$  il samario decade, ed emette il suo fotone con distribuzione isotropa; consideriamo per semplicità soltanto i fotoni emessi nella direzione di moto: per puro caso, le energie del neutrino emesso e del fotone sono circa le stesse (840 e 960 KeV), dunque nel caso di emissione nella direzione di moto il samario subisce un rinculo circa uguale e opposto a quello subito nel decadimento dell'europio, e praticamente si ferma. Il fotone viceversa è completamente polarizzato, per la conservazione del momento angolare:

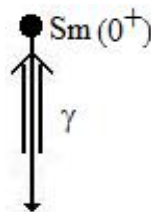


Figura 22.9: Fotone emesso dal samario

Dunque il samario ha consentito di trasferire la polarizzazione del neutrino alla polarizzazione del fotone. Misurare l'elicità del fotone equivale quindi a misurare l'elicità del neutrino.

Il problema adesso è sapere in che direzione si muove il samario, poiché vogliamo osservare i fotoni emessi nella sua direzione di moto. Sfrutteremo il fatto che il fotone, in certe condizioni, ha energia sufficiente per poter essere assorbito in modo risonante da altri nuclei di samario opportunamente collocati; le condizioni

sono proprio quelle in cui il samario resta fermo e il fotone si prende tutta l'energia del diseccitamento, e la probabilità di assorbimento risonante è massima. Se il samario acquistasse una energia cinetica, questo andrebbe a scapito dell'energia del fotone emesso che si porterebbe dietro meno di 960KeV.

Si posiziona allora un bersaglio di samario in una certa direzione, con dei rivelatori ai lati atti a rivelare i fotoni di diseccitamento emessi: se si rivelavano dei fotoni, erano con alta probabilità i fotoni giusti, ovvero quelli emessi nella direzione di moto del samario originario.

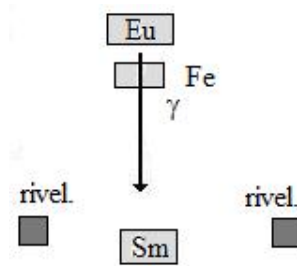


Figura 22.10: Assorbimento risonante

Lungo il percorso venne collocato uno strato di ferro, che veniva magnetizzato dai fotoni. Se gli elettroni del metallo hanno la stessa polarizzazione dei fotoni incidenti, c'è la possibilità di uno scattering di spin-flip, processo inibito in caso la polarizzazione sia opposta. La tecnica era questa: si contavano i fotoni in risonanza con una certa polarizzazione del ferro, e poi quest'ultima veniva invertita e si rieffettuava il conteggio. Quando c'è possibilità di spin-flip, il conteggio di fotoni risulta minore, dunque la polarizzazione degli elettroni del ferro coincide con quella dei fotoni. Come conclusione della misura, risultò che il neutrino aveva elicità -1, ed era quindi corretto il termine V-A nella corrente.



## Capitolo 23

### Mercoledì 5 marzo

#### 23.1 Dinamica relativistica

In meccanica classica sappiamo che se un sistema è isolato, si conserva il quadrimpulso spaziale:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0$$

Tale espressione non è covariante relativistica, in quanto coinvolge soltanto le tre componenti spaziali del quadrimpulso. Considerando che la componente temporale del quadrimpulso è proporzionale all'energia, e che l'energia per sistemi isolati si conserva anche in meccanica classica, una immediata generalizzazione potrebbe essere la riscrittura della formula classica sostituendo il tempo  $t$  con il tempo proprio  $\tau$ , e affiancandola alla conservazione dell'energia scritta nella forma

$$\frac{dp^0}{d\tau} = 0$$

Tuttavia bisogna tener presente che tale generalizzazione non è suggerita da principi primi, bensì la conservazione del quadrimpulso è prima di tutto una evidenza sperimentale. Viceversa, dal punto di vista teorico ci si può basare su criteri di similitudine, ad esempio l'invarianza per rotazioni della legge di conservazione può essere naturalmente sostituita dall'invarianza sotto il gruppo di Lorentz.

Ma è veramente una novità? Si potrebbe obiettare che  $p^0$  si conservava anche prima, e che la meccanica relativistica consista soltanto in una riscrittura più compatta di leggi già note nella meccanica classica. Tuttavia meccanica classica e relativistica presentano notevoli differenze concettuali, ben visibili considerando anche un sistema semplice come il seguente.

**Esempio:** supponiamo di avere due masse puntiformi e identiche, legate insieme da una molla lunga e compressa. Al tempo  $t=0$  la molla viene sbloccata e le due masse sono libere di allontanarsi. Non c'è attrito; dopo un certo tempo le due masse saranno ad una certa distanza, e si muoveranno in direzioni opposte con una certa velocità di modulo  $v$ ; per la meccanica classica, l'energia potenziale elastica contenuta nella molla si è tramutata in energia cinetica delle due masse.

Nel caso relativistico, si comincia dallo stato finale: abbiamo due particelle che si muovono in direzioni opposte con velocità  $v$ , e possiamo pensare di associare ad ognuna di esse un quadrimpulso ( $c=1$ ):

$$p_1^\mu = (m\gamma, m\gamma\vec{\beta})$$

$$p_2^\mu = (m\gamma, -m\gamma\vec{\beta})$$

Il quadrimpulso totale del sistema costituito dalle due masse sarà  $P^\mu = (2m\gamma, \vec{0})$ . La domanda è la seguente: chi è  $P^\mu$ ? Se il sistema è isolato, se  $P^\mu$  si conserva (ed è così che succede),  $P^\mu$  era lo stesso anche prima che la molla si sbloccasse e le masse si separassero. Se associamo ad un oggetto una massa inerziale coincidente alla componente temporale del suo quadrimpulso, nel suo sistema a riposo, dobbiamo concludere che la massa inerziale del sistema iniziale è  $2m\gamma$ . Sviluppando  $P^0$  all'ordine più basso (le velocità si suppongono molto minori di  $c$ ) si ha:

$$P^0 = 2m(1 + \frac{\beta^2}{2})$$

cioè la massa inerziale del sistema in interazione è

$$M \simeq 2m(1 + \frac{\beta^2}{2}) = 2m + 2m\frac{\beta^2}{2}$$

Ma questi discorsi sono stati fatti per il sistema **prima** che la molla sia sbloccata: in meccanica classica la massa del sistema era costituita dalle sole masse puntiformi, mentre stavolta oltre al termine  $2m$  compare nella massa inerziale anche un termine  $\frac{1}{2}(2m)\beta^2$ , che a molle sbloccate diventerà l'energia cinetica, e che prima avevamo chiamato *energia potenziale elastica* della molla. Trattando il problema in meccanica relativistica, siamo condotti dalla conservazione del quadrimpulso a concludere che l'energia potenziale di un sistema contribuisce alla sua massa inerziale. L'energia cinetica *no*: la massa del sistema è indipendente dal suo moto.

La differenza tra questo esempio visto dalla meccanica classica o da quella relativistica, mostra una differenza per quanto riguarda la comprensione dell'identità di  $p^0$ : in un caso energia potenziale, nell'altro come massa inerziale.

Sperimentalmente si può fare questo esperimento: misuriamo con grande precisione la massa del protone e dell'elettrone, e successivamente misuriamo la massa dell'idrogeno: per la meccanica classica la massa dell'idrogeno ha lo stesso valore della somma delle masse di protone ed elettrone, mentre la meccanica relativistica ci dice che:

$$m_p + m_e - m_H = 13,6 \frac{eV}{c^2}$$

Come è possibile misurarla? nel caso atomico, per molecole e atomi valgono le stesse considerazioni, tuttavia c'è una difficoltà sperimentale legata al fatto che la massa dell'idrogeno è dell'ordine del GeV, mentre il difetto di massa è di una decina di elettronvolt: è difficile accorgersi di tale difetto se non si usano strumenti sufficientemente precisi.

Esistono casi un pò più plateali: ad esempio, se si prende il nucleo dell'elio, costituito da due protoni e due neutroni, si verifica che:

$$m_{He} - 2(m_p + m_n) = -28,3 MeV$$

e stavolta il difetto di massa inizia ad essere più visibile. Nel caso di nuclei dall'idrogeno all'uranio, se andiamo a misurare qual'è il difetto di massa rapportato al numero di nucleoni, otteniamo un grafico del tipo mostrato in figura.

Il ferro risulta essere il nucleo più stabile in assoluto. Se abbiamo un radionuclide oltre il ferro, la fissione di tale nucleo produce energia: i frammenti avranno un numero di nucleoni minore che corrisponderà a sistemi più legati, e l'energia in eccesso verrà emessa. Prima del ferro, viceversa, si ottiene energia dai processi di fusione.

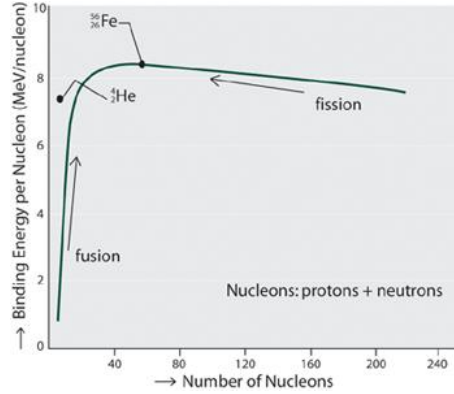


Figura 23.1: Energia di legame per nucleone

### 23.1.1 urti

Consideriamo adesso una situazione pratica in cui è coinvolto il quadrimpulso. Nei processi d'urto di solito si può considerare il sistema isolato, poichè essi avvengono usualmente in tempi brevi, entro i quali le interazioni non hanno il tempo di influenzare significativamente il sistema e il suo quadrimpulso. Anche l'eventuale presenza di campi elettrici e magnetici non influenza di norma l'urto, bensì eventualmente il moto delle particelle urtanti successivo o precedente ad esso.

**Esempio:** consideriamo una massa  $M$  ferma, e una massa  $m$  in moto con velocità  $\vec{v}$ , che la urta. Distingueremo tra tre tipi di urto:

- *Elastico*: quando le due particelle prodotte nello stato finale hanno stessa massa di quelle nello stato iniziale. Ad esempio,  $p + e^- \rightarrow p + e^-$ .
- *Quasi elastico*: nello stato finale si hanno ancora due particelle, ma hanno masse diverse da quelle iniziali. Ad esempio,  $A + B \rightarrow C + D$ .
- *Anelastico*: il numero di particelle nello stato finale non è 2.

In meccanica newtoniana si usa la conservazione dell'impulso spaziale e dell'energia, mentre in meccanica relativistica quello che si conserva è il quadrimpulso. Per la particella in moto si ha:

$$p_1^\mu = (E, \vec{p}) \quad E^2 = p^2 + m^2$$

mentre per la particella ferma:

$$p_2^\mu = (M, \vec{0})$$

Il quadrimpulso totale del sistema, nel laboratorio, è dato da:

$$P^\mu = (E + M, \vec{p})$$

Costruiamo adesso la massa invariante del sistema:

$$s = (E + M)^2 - \vec{p}^2 \equiv P^\mu P_\mu$$

$$s = E^2 + 2EM + M^2 - \vec{p}^2 = m^2 + M^2 + 2EM$$

Poichè  $s$  è un invariante, la quantità  $m^2 + M^2 + 2EM$  è conservata nel processo. Vediamo quali sono le possibili situazioni finali, date le condizioni iniziali (ovvero data la massa invariante  $s$ ):

1. Il primo punto di vista è quello del laboratorio, ma i calcoli sono complicati dal punto di vista algebrico;
2. l'altro punto di vista è quello del centro di massa:
  - con una trasformazione di Lorentz ci spostiamo dal sistema del laboratorio a quello del centro di massa;
  - lì analizziamo il problema e otteniamo dei risultati;
  - con la trasformazione di Lorentz inversa trasportiamo tali risultati indietro nel sistema del laboratorio.

Per definizione, il sistema del centro di massa è il sistema in cui il quadrimpulso ha componenti spaziali nulle:  $\vec{p} = 0$ . Assumiamo che la particella incidente sulla particella ferma si muova in direzione  $z$ , allora il quadrimpulso totale (nel lab) è:

$$P^\mu = (E + M, 0, 0, p)$$

In linea di principio non esiste una sola trasformazione di Lorentz che ci porta nel centro di massa, ma diventa unica se imponiamo che la trasformazione di Lorentz in questione non ruoti gli assi. L'espressione della matrice di Lorentz che effettua la trasformazione è la seguente:

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

I parametri  $\beta$  e  $\gamma$  vanno scelti in maniera opportuna. Se applichiamo la matrice  $\Lambda^\mu{}_\nu$  al quadrivettore  $P^\mu$  otteniamo:

$$\Lambda^\mu{}_\nu P^\nu = \begin{pmatrix} \gamma(E + M) - \beta\gamma p \\ 0 \\ 0 \\ -\beta\gamma(E + M) + \gamma p \end{pmatrix}$$

Poichè vogliamo andare nel sistema del centro di massa, si deve avere  $-\beta\gamma(E + M) + \gamma p = 0 \Rightarrow \beta = \frac{p}{E+M}$ . Osserviamo che questo risultato poteva essere ottenuto immediatamente osservando che il quadrimpulso del sistema è il quadrimpulso di un oggetto con massa  $\sqrt{s}$  e che si muove con una certa velocità  $\beta$ :  $P^\mu = (\sqrt{s}\gamma, \sqrt{s}\gamma\vec{\beta}) = (E + M, 0, 0, p)$ , dunque  $\beta = \frac{\sqrt{s}\gamma\beta}{\sqrt{s}\gamma} \equiv \frac{p}{E+M}$ , cioè il modulo di  $\vec{\beta}$  è semplicemente il rapporto tra il modulo dell'impulso spaziale e l'energia.

la forma di  $P^\mu$  nel sistema del centro di massa sarà ovviamente  $P^\mu = (\sqrt{s}, \vec{0})$ , ma adesso siamo interessati a determinare il quadrimpulso delle due particelle nel sistema del centro di massa, per far questo, è necessario esplicitare i parametri  $\beta$  e  $\gamma$  della matrice di Lorentz.

**Osservazione:** nella trasformazione di Lorentz non entrano singolarmente i due parametri  $\gamma$  e  $\beta$  bensì  $\gamma$  e la combinazione  $\gamma\beta$ . Si ha allora:

$$\frac{1}{\gamma^2} = 1 - \beta^2 = 1 - \frac{p^2}{(E+M)^2} = \frac{(E+M)^2 - p^2}{(E+M)^2} = \frac{s}{(E+M)^2}$$

Da cui si ha:

$$\gamma_{cm} = \frac{(E+M)}{\sqrt{s}} \Rightarrow (\beta\gamma)_{cm} = \frac{p}{\sqrt{s}}$$

e la matrice di Lorentz può ed essere esplicitata:

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \frac{(E+M)}{\sqrt{s}} & 0 & 0 & -\frac{p}{\sqrt{s}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{p}{\sqrt{s}} & 0 & 0 & \frac{(E+M)}{\sqrt{s}} \end{pmatrix}$$

Applicando tale matrice a  $p_1^\mu$  e  $p_2^\mu$  si ottiene:

$$p_1'^\mu = \begin{pmatrix} \frac{(E+M)}{\sqrt{s}} & 0 & 0 & -\frac{p}{\sqrt{s}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{p}{\sqrt{s}} & 0 & 0 & \frac{(E+M)}{\sqrt{s}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(E+M)}{\sqrt{s}}E - \frac{p^2}{\sqrt{s}} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{Ep}{\sqrt{s}} + \frac{p(E+M)}{\sqrt{s}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m^2+ME}{\sqrt{s}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{pM}{\sqrt{s}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{s}} \begin{pmatrix} m^2 + ME \\ 0 \\ 0 \\ pM \end{pmatrix}$$

$$p_2'^\mu = \begin{pmatrix} \frac{(E+M)}{\sqrt{s}} & 0 & 0 & -\frac{p}{\sqrt{s}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{p}{\sqrt{s}} & 0 & 0 & \frac{(E+M)}{\sqrt{s}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{s}} \begin{pmatrix} M(E+M) \\ 0 \\ 0 \\ -Mp \end{pmatrix}$$

Nel sistema del centro di massa, abbiamo le due particelle che si scontrano e mantengono la stessa massa (urto elastico). In realtà, possiamo descrivere le variabili cinematiche delle particelle facendo intervenire solo degli invarianti relativistici: questo dimostra che l'impulso spaziale, prima e dopo l'urto, non cambia.

Lo stato iniziale, nel sistema del centro di massa, avrà un impulso  $\vec{p}$  uguale in modulo per entrambe le particelle, sia esso  $\pm\vec{a}$ :

$$p_{1i}^\mu = (\sqrt{m^2 + \vec{a}^2}, \vec{a})$$

$$p_{2i}^\mu = (\sqrt{M^2 + \vec{a}^2}, -\vec{a})$$

Dopo l'urto, siamo sempre nel sistema del centro di massa, e le particelle avranno un nuovo impulso,  $\pm\vec{b}$ :

$$p_{1f}^\mu = (\sqrt{m^2 + \vec{b}^2}, \vec{b})$$

$$p_{2f}^\mu = (\sqrt{M^2 + \vec{b}^2}, -\vec{b})$$

La conservazione della parte temporale del quadrimpulso ci dice che  $\sqrt{m^2 + \vec{a}^2} + \sqrt{M^2 + \vec{a}^2} = \sqrt{m^2 + \vec{b}^2} + \sqrt{M^2 + \vec{b}^2}$ , da cui  $|\vec{a}| = |\vec{b}|$  poichè la funzione radice è monotona crescente. Tuttavia a questo livello non

conosciamo nè  $\vec{a}$  nè  $\vec{b}$ . L'energia del sistema dopo l'urto è  $\sqrt{m^2 + \vec{b}^2} + \sqrt{M^2 + \vec{b}^2}$ , e dovrà coincidere con  $\sqrt{s}$ , la massa invariante calcolata prima dell'urto. Questo permette di esprimere  $|\vec{b}|$  in termini di  $m$ ,  $M$  ed  $s$ , tutti *invarianti*:

$$\begin{aligned}
s &= m^2 + b^2 + M^2 + b^2 + 2\sqrt{(m^2 + \vec{b}^2)(M^2 + \vec{b}^2)} \\
\Rightarrow (s - m^2 - M^2 - 2b^2)^2 &= 4m^2M^2 + 4b^4 + 2(m^2 + M^2)b^2 \\
\Rightarrow (s - m^2 - M^2)^2 + 4b^4 - 4b^2(s - m^2 - M^2) &= 4m^2M^2 + 4b^4 + 4(m^2 + M^2)b^2 \\
\Rightarrow (s - m^2 - M^2)^2 - 4b^2s + 4b^2(m^2 + M^2) &= 4m^2M^2 + 4(M^2 + m^2)b^2 \\
\Rightarrow b^2 = \frac{(s - m^2 - M^2)^2 - 4m^2M^2}{4s} \Rightarrow b &= \frac{\sqrt{(s - m^2 - M^2)^2 - 4m^2M^2}}{2\sqrt{s}} (\equiv Mp)
\end{aligned}$$

Può accadere che  $b$  non esista, se l'argomento della radice risulta minore di zero, ma vediamo che nel caso di urto elastico questo non accade:

$$\begin{aligned}
s - m^2 - M^2 &\geq 2mM \\
s &\geq m^2 + M^2 + 2mM = (m + M)^2 \\
\sqrt{s} &\geq m + M
\end{aligned}$$

ma questo è sempre verificato. Se il processo è quasi elastico, la condizione  $s - (m + M)^2 \geq 0$  è sempre verificata, mentre per quelle finali potrebbe non esserlo; tale condizione rappresenta quindi un vincolo cinematico per un eventuale decadimento.

## Capitolo 24

### Lunedì 10 marzo

Esplicitamente, i quadrimpulsi delle due particelle nel sistema del centro di massa sono:

$$(E, p) \rightarrow p' = \Lambda(E, p) = \frac{1}{\sqrt{s}}(EM + m^2, 0, 0, Mp)$$

$$(M, 0) \rightarrow P' = \Lambda(M, 0) = \frac{1}{\sqrt{s}}(EM + M^2, 0, 0, -Mp)$$

Analogamente si può scrivere le energie delle particelle nel centro di massa, in modo che gli impulsi si possano scrivere tramite invarianti:

$$\frac{EM + m^2}{\sqrt{s}} = \sqrt{m^2 + b^2}$$

Come avevamo visto,  $b$  poteva essere espresso in termini di invarianti.

$$\begin{aligned} m^2 + b^2 &= m^2 + \frac{(s - m^2 - M^2)^2 - 4m^2 M^2}{4s} = \frac{4sm^2 + (s - m^2 - M^2)^2 - 4m^2 M^2}{4s} = \frac{(s + m^2 - M^2)^2}{4s} \\ \Rightarrow \frac{EM + m^2}{\sqrt{s}} &= \frac{s + m^2 - M^2}{2\sqrt{s}} \end{aligned}$$

Per l'altra massa, dato che nel centro di massa si ha simmetria rispetto alle masse, possiamo scrivere immediatamente:

$$\frac{EM + M^2}{\sqrt{s}} = \frac{s + M^2 - m^2}{2\sqrt{s}}$$

Nel centro di massa, le due particelle si scontrano, e dopo l'urto procederanno in versi opposti, in una direzione che forma con quella iniziale un certo angolo  $\theta_{cm}$ : senza perdere in generalità, possiamo pensare di descrivere il processo in un piano, definito dalle due direzioni di moto iniziale e finale (escludendo quindi il caso banale dello scattering in avanti, in cui le direzioni coincidono e non è possibile definire un piano).

Vogliamo scrivere il quadrimpulso della particella di massa  $m$ , nel centro di massa, dopo l'urto; banalmente, esso è dato da:

$$p' \equiv (\sqrt{m^2 + b^2}, 0, b \sin \theta_{cm}, b \cos \theta_{cm})$$

Per l'altra particella basta sostituire  $m^2$  con  $M^2$ , e  $\theta_{cm}$  con  $\theta_{cm} + \pi$ . Adesso però ci interessa riottenere delle informazioni nel sistema del laboratorio, in cui effettuiamo le misure; dovremo effettuare la trasformazione

di Lorentz inversa:

$$\Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

da cui si ha che:

$$E'_{lab} = \sqrt{m^2 + b^2} \left( \frac{E + M}{\sqrt{s}} \right) + \frac{p}{\sqrt{s}} b \cos \theta_{cm}$$

A parte  $\theta_{cm}$ , tutte le grandezze che compaiono nell'espressione dell'energia nel laboratorio possono essere scritte tramite invarianti. Per le altre componenti del quadrimpulso risulta:

$$p'_x{}^{lab} = 0$$

$$p'_y{}^{lab} = b \sin \theta_{cm}$$

$$p'_z{}^{lab} = \sqrt{m^2 + b^2} \left( \frac{p}{\sqrt{s}} \right) + \frac{E + M}{\sqrt{s}} b \cos \theta_{cm}$$

Osserviamo che pur essendo tornati nel laboratorio, nell'espressione del quadrimpulso per la particella di massa  $m$  compare come parametro l'angolo di scattering nel centro di massa,  $\theta_{cm}$ . Tale angolo varia nel sistema del centro di massa tra 0 e  $\pi$ ; in tale sistema di riferimento la curva parametrica degli impulsi in funzione di  $\theta_{cm}$  si disegna come:

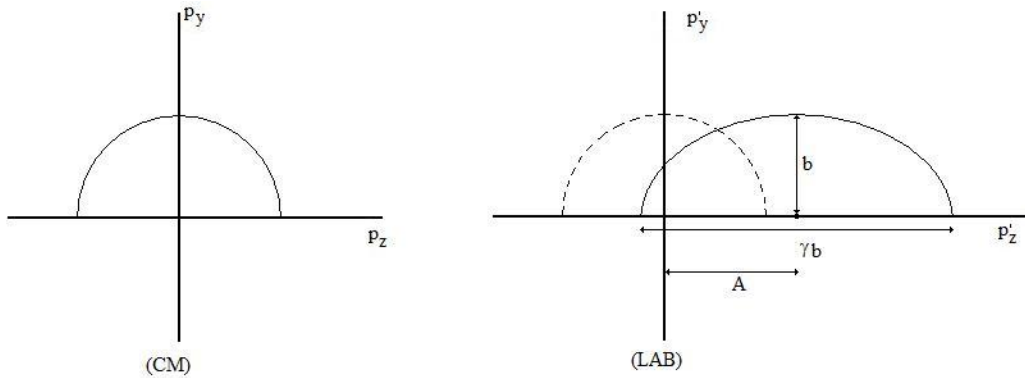


Figura 24.1: Ellisse di Blaton

L'impulso spaziale nel laboratorio corrisponde ad un punto dell'ellisse nel disegno a destra, detta **ellisse di Blaton**; essa è interessante perchè consente graficamente di passare dal centro di massa al laboratorio. Tale ellisse può essere disegnata in due modi, come si può vedere in figura.

La relazione  $A < \gamma b$  non è senza significato:

$$\frac{p}{\sqrt{s}} \sqrt{m^2 + b^2} < \gamma b$$

ma  $\gamma = \frac{E+M}{\sqrt{s}}$  e  $b = \frac{Mp}{\sqrt{s}}$ , quindi

$$\frac{p}{\sqrt{s}} \frac{EM + m^2}{\sqrt{s}} < \frac{E + M}{\sqrt{s}} \frac{Mp}{\sqrt{s}}$$



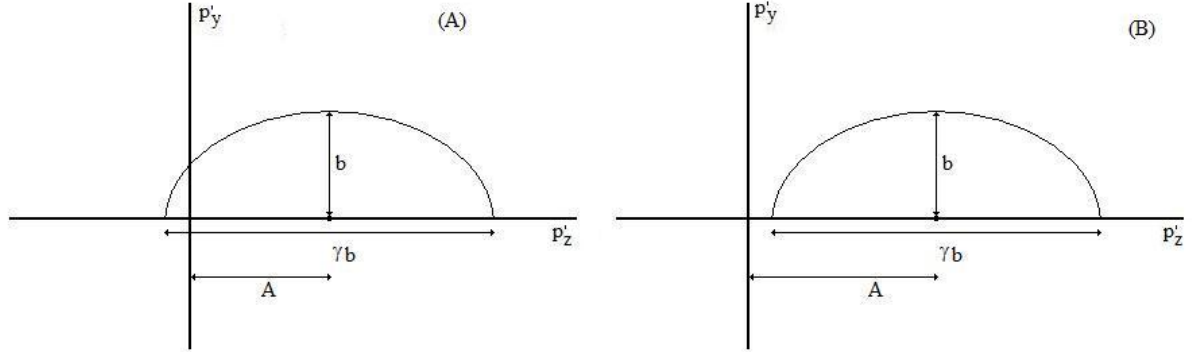


Figura 24.2: Caso  $A < \gamma b$  e  $A > \gamma b$

$$\Rightarrow m^2 < M^2$$

La condizione  $A < \gamma b$  implica allora  $m < M$ ; dal punto di vista fisico questo è significativo ma può essere reso ancora più esplicito:

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{p}{\sqrt{s}}}_{lab} \underbrace{\sqrt{m^2 + b^2}}_{cm} &< \underbrace{\frac{E + M}{\sqrt{s}}}_{lab} \underbrace{b}_{cm} \\ \frac{p}{E + M} &< \frac{b}{\sqrt{m^2 + b^2}} \end{aligned}$$

Il quadrimpulso nel laboratorio del sistema complessivo era  $(E + M, \vec{p})$ , dunque  $\frac{p}{E+M}$  è il  $\beta$  del centro di massa del sistema, ovvero la velocità con cui il centro di massa si muove nel laboratorio. Analogamente  $\beta_0 = \frac{b}{\sqrt{m^2 + b^2}}$  è il rapporto tra il modulo dell'impulso della particella  $m$  nel centro di massa e la sua energia, quindi la sua velocità. Allora la relazione  $\frac{p}{E+M} < \frac{b}{\sqrt{m^2 + b^2}}$  si può riscrivere come  $\beta_{cm} < \beta_0$  e si traduce in termini di ellisse di Blaton con il caso (A) in figura: la particella nel centro di massa si muove ad una velocità maggiore di quella con cui si muove il centro di massa stesso, nel laboratorio. Cerchiamo adesso di capire quali angoli di scattering sono permessi nel laboratorio, sulla base dell'ellisse di Blaton:

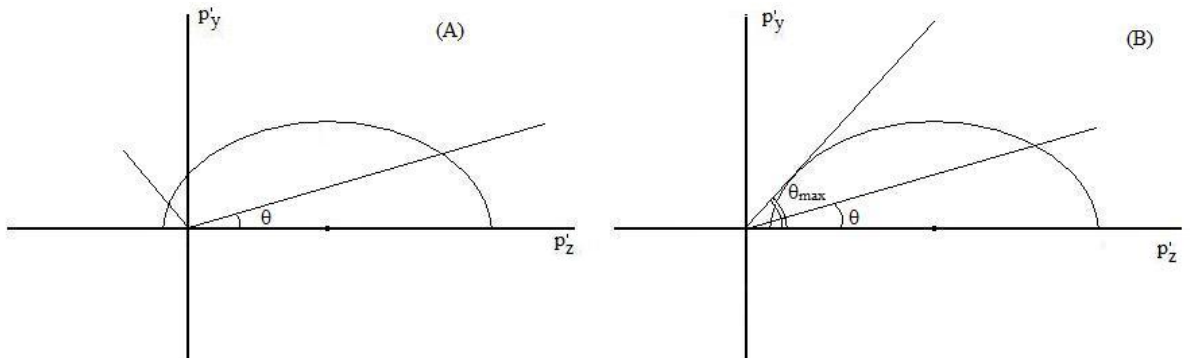


Figura 24.3: Angoli nel sistema del laboratorio

Nel primo caso,  $\beta_{cm}$  è più piccolo di  $\beta_0$  (che peraltro è completamente determinata dalle condizioni iniziali).

Siccome la trasformazione di Lorentz coinvolge una velocità minore di quella della particella nel centro di massa, non siamo in grado di vedere le particelle andare sempre in uno stesso verso, pertanto tutti gli angoli sono possibili. Tuttavia, anche se nel centro di massa lo scattering fosse isotropo, quindi la distribuzione angolare piatta, nel laboratorio questo non sarebbe comunque in generale verificato.

Ad esempio, nel secondo caso non tutti i valori di  $\theta_{lab}$  sono possibili, ma solo alcuni nel primo quadrante, fino ad un massimo costituito da  $\theta_{max}$ . Cerchiamo di vedere adesso il legame tra  $\theta_{cm}$  e  $\theta_{lab}$ :

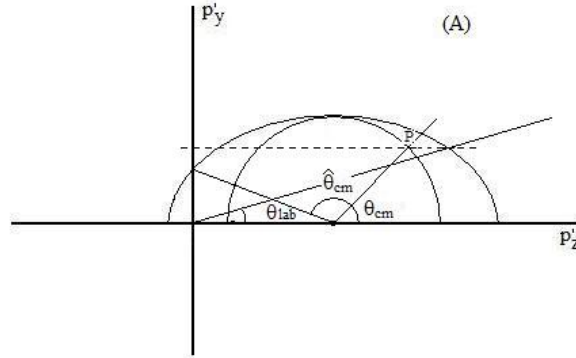


Figura 24.4: Legame tra  $\theta_{cm}$  e  $\theta_{lab}$  nel caso (A)

I punti del semicerchio sono punti possibili per quanto riguarda il moto nel sistema del centro di massa. Il punto P definisce uno scattering con angolo  $\theta_{cm}$ , quindi un quadrimpulso:

$$p_y'^{cm} = b \sin \theta$$

$$p_z'^{cm} = b \cos \theta$$

La componente y non cambia, ma a priori sarebbero possibili due scelte per la componente z, dato uno stesso angolo: sceglieremo comunque quella di destra, perchè per angoli del centro di massa compresi tra 0 e  $\pi$  il coseno è positivo, e poichè la componente z nel lab è data da  $\sqrt{m^2 + b^2} \left( \frac{p}{\sqrt{s}} \right) + \frac{E+M}{\sqrt{s}} b \cos \theta_{cm}$ , il contributo del coseno va ad aumentare quello costante. Osserviamo che quando  $\theta_{cm}$  ha superato  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\theta_{lab}$  è ancora nel primo quadrante, e l'angolo che determina un  $\theta_{lab} = \frac{\pi}{2}$  è contrassegnato con  $\hat{\theta}_{cm}$ . In questo caso comunque si ha una corrispondenza 1 a 1 tra gli angoli nel sistema del centro di massa e quelli nel laboratorio.

Immaginiamo che lo scattering sia isotropo nel centro di massa: tutte le direzioni saranno allora equivalenti. I decadimenti che hanno  $\theta_{cm}$  tra 0 e  $\pi$  saranno gli stessi di quelli con  $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ , mentre nel laboratorio per  $0 < \theta_{cm} < \frac{\pi}{2}$  si ha  $0 < \theta_{lab} < \theta_{max}$  dove  $\theta_{max} = \arctan \frac{b}{A}$ . Riscriviamo  $\frac{b}{A}$  come:

$$A = \frac{p}{\sqrt{s}} \sqrt{m^2 + b^2} = E_{cm} \gamma \beta$$

$$\frac{b}{A} = \frac{b}{E_{cm} \gamma \beta} = \frac{\beta_0}{\gamma \beta} \Rightarrow \tan \theta_{max} = \frac{\beta_0}{\gamma \beta}$$

Se assumiamo che sia il centro di massa che la particella siano relativistici, allora sia  $\beta$  che  $\beta_0$  sono vicini ad 1, e  $\tan \theta_{max} \sim \frac{1}{\gamma}$ , e troviamo che tutte le particelle tendono a concentrarsi in avanti, come effetto del boost di Lorentz.

Una volta impostata questa cinematica, si può applicare all'urto quasi elastico oppure ai decadimenti. Immaginiamo una particella che decade, ad esempio:

$$K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$$

Il  $K^+$  si muove con una certa velocità; se ci mettiamo nel sistema del centro di massa e studiamo la cinematica del muone e del neutrino, possiamo descriverla a partire da tre informazioni: la massa invariante del sistema, la massa del muone, e la massa del neutrino. La massa invariante del sistema iniziale, poichè è presente solo il  $K^+$ , è semplicemente  $\sqrt{s} = M_K$ . La trasformazione di Lorentz del caso precedente si modifica in questo modo:

$$\gamma = \frac{E + M}{\sqrt{s}}$$

dove  $(E + M)$  diventa l'energia del  $K^+$  nel laboratorio.

$$\beta\gamma = \frac{p}{\sqrt{s}}$$

dove  $p$  è il modulo dell'impulso spaziale del  $K^+$ .

Nel caso del decadimento del  $\pi^0$  in due fotoni, se il  $\pi^0$  è sufficientemente relativistico valgono le stesse considerazioni anche per la distribuzioni dei fotoni; il  $\beta_0$ , ovvero la velocità delle particelle urtate (in questo caso emesse) nel sistema del centro di massa, è pari a 1 per i fotoni, dunque  $\tan \theta_{max} = \frac{1}{\gamma\beta}$ , e l'angolo  $\theta_{max}$  raccoglie metà dei fotoni emessi. Ovviamente, nel caso in cui si producano fotoni, consideriamo sempre casi in cui  $\beta_0 > \beta_{cm}$ , quindi siamo sempre nel caso (A).

Per quanto riguarda il caso (B), viceversa, non esiste una corrispondenza 1 a 1 tra l'angolo nel centro di massa e l'angolo nel laboratorio:

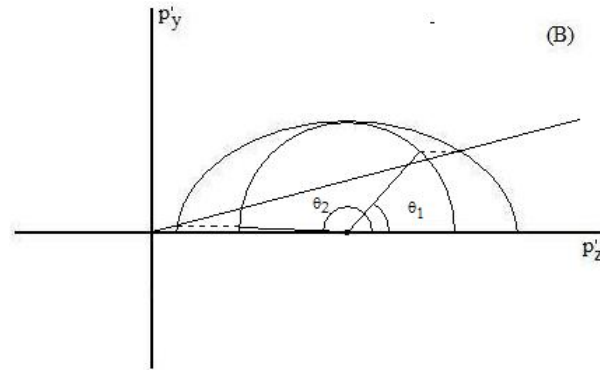


Figura 24.5: Legame tra  $\theta_{cm}$  e  $\theta_{lab}$  nel caso (B)

Vediamo infatti che a uno stesso angolo  $\theta_{lab}$  corrispondono due impulsi con stessa direzione ma moduli differenti, legati a due angoli  $\theta_a$  e  $\theta_2$  nel centro di massa.

## Capitolo 25

### Martedì 11 marzo

Applichiamo il diagramma di Blaton al caso del decadimento  $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ , con vita media di circa  $10^{-16}s$ . La domanda è la seguente: che vincoli cinematici ci sono tra i due fotoni? Se vogliamo essere sicuri di rivelare due fotoni, dobbiamo prima di tutto avere un rivelatore in grado di separare i due segnali (ovvero un rivelatore con una sufficiente *granularità*), e questo ha una sua rilevanza nella progettazione dell'apparato sperimentale. In ogni caso, lo stato finale è a due particelle, ed ha una massa invariante corrispondente a quella del  $\pi^0$ . Il diagramma di Blaton è nella condizione (A) poichè i fotoni hanno sicuramente  $\beta_0 > \beta_{cm}$ ; nel sistema del centro di massa i fotoni vengono sempre emessi in direzioni opposte quindi con un angolo di  $\pi$ , mentre nel laboratorio questo non è sempre vero, ma l'angolo massimo tra i due è comunque  $\pi$ , che si ottiene quando i due fotoni vengono emessi ortogonalmente alla direzione di moto del  $\pi^0$ . La condizione di angolo minimo, viceversa, si ha in  $\tan \theta \sim \theta \sim \frac{2\beta_0}{\gamma\beta} \sim \frac{2}{\gamma}$ , cioè non è possibile osservare fotoni ad angoli minori di  $\frac{2}{\gamma}$ .

Se abbiamo uno stato finale a due particelle, e  $\sqrt{s}$  è ben definita, nel sistema del centro di massa abbiamo una energia delle particelle completamente definita:

$$E_{cm} = \sqrt{m^2 + b^2}$$

Dunque per un processo di scattering o decadimento, nel centro di massa l'energia delle particelle è unica, e nel caso del pione ad esempio ognuno dei due fotoni aveva energia pari a  $\frac{\sqrt{s}}{2}$ . Tuttavia noi effettuiamo le misure nel laboratorio, e dobbiamo sapere quali valori di energia possiamo aspettarci; la trasformazioni di Lorentz inversa dà una distribuzione in energia legata a  $\theta_{cm}$ :

$$\begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{cm} \\ 0 \\ b \sin \theta_{cm} \\ b \cos \theta_{cm} \end{pmatrix}$$

da cui si ha che  $E' = \gamma E_{cm} + \gamma\beta b \cos \theta_{cm}$ . Come prima osservazione, non c'è dubbio che mentre nel centro di massa l'energia è unica, nel laboratorio si ha una distribuzione angolare rispetto a  $\theta_{cm}$ , pertanto l'energia nel laboratorio avrà un massimo e un minimo dati da

$$E_{max} = \gamma(E_{cm} + \beta b)$$

$$E_{min} = \gamma(E_{cm} - \beta b)$$

Ma poichè

$$\gamma = \frac{E + M}{\sqrt{s}}$$

$$\gamma\beta = \frac{p}{\sqrt{s}}$$

$$b = \frac{Mp}{\sqrt{s}}$$

$$E_{cm} = \frac{EM + M^2}{\sqrt{s}}$$

$$\Rightarrow E_{max} = \frac{E + M}{\sqrt{s}} \frac{EM + m^2}{\sqrt{s}} + \frac{p^2 M}{s} = \frac{E^2 M + EM^2 + m^2 E + M \overbrace{m^2 + p^2}^{=E} M}{s} = E \frac{\overbrace{2EM + m^2 + M^2}^{=s}}{s} = E$$

Dunque l'energia massima corrisponde ad  $E$ , e ce lo aspettavamo poichè questo corrisponde allo scattering in avanti, in cui la particella sostanzialmente continua a viaggiare indisturbata. Se scriviamo  $E_{max} = E = \hat{E} + \frac{Mp^2}{s}$ , abbiamo immediatamente che

$$E_{min} = \gamma E_{cm} - \overbrace{\gamma\beta b}^{\frac{Mp^2}{s}} = \hat{E} - \frac{Mp^2}{s} = E - 2\frac{Mp^2}{s}$$

Per l'altra particella, poichè l'energia si deve conservare, se prima dell'urto avevamo una energia  $E + M$  ce la dobbiamo avere anche dopo l'urto, quindi

$$E_{min}^{(2)} = E + M - E_{max}^{(1)} = M$$

$$E_{max}^{(2)} = E + M - E_{min}^{(1)} = M + 2\frac{Mp^2}{s}$$

dunque la particella urtata che inizialmente era ferma, o resta ferma oppure acquista energia. **Osservazione:** lo spread (distribuzione) delle particelle è lo stesso, ovvero l'energia di entrambe le particelle sta in un intervallo di valori di ampiezza  $2\frac{Mp^2}{s}$ .

Finora nei nostri ragionamenti abbiamo sempre ricollegato quantità nel laboratorio all'angolo nel centro di massa  $\theta_{cm}$ , tuttavia non siamo in grado di misurarlo, e dobbiamo fare delle ipotesi sulla distribuzione angolare nel centro di massa. Se ipoteticamente  $\theta_{cm}$  fosse uno solo, anche l'energia delle particelle nel laboratorio sarebbe univocamente determinata. La distribuzione nel centro di massa, se la particella è scalare o pseudoscalare, non ha direzioni privilegiate, dunque possiamo assumere per la probabilità di emissione ad un certo angolo:

$$d\mathcal{P} = \frac{1}{4\pi} d\Omega = \frac{1}{4\pi} \sin\theta d\theta d\phi$$

Ci occupiamo solo dell'angolo azimutale poichè abbiamo visto che con una ridefinizione degli assi è sempre possibile ridursi al moto in un piano, dunque integriamo sull'angolo  $\phi$ :

$$d\mathcal{P} = \frac{1}{2} \sin\theta d\theta = \frac{1}{2} d(-\cos\theta)$$

Ricordando che  $E' = \gamma E_{cm} + \gamma \beta b \cos \theta_{cm}$ , otteniamo la distribuzione in energia:

$$dE' = \gamma \beta b d(\cos \theta)$$

ma noi vogliamo sapere qual'è la probabilità di ottenere un certo valore di  $E'$ , sapendo che la distribuzione è isotropa nel centro di massa:

$$\frac{d\mathcal{P}}{dE'} = \left| \frac{d\mathcal{P}}{d(-\cos \theta)} \right| \left| \frac{d(-\cos \theta)}{dE'} \right| = \frac{1}{2} \frac{1}{\gamma \beta b}$$

dove i moduli sono stati aggiunti per avere una probabilità positiva. Risulta allora

$$\frac{d\mathcal{P}}{dE'} = \frac{1}{2\gamma \beta b}$$

ovvero la distribuzione è costante; nel caso del  $\pi^0$ , poichè la massa dei fotoni è nulla,  $b$  è semplicemente  $\frac{m_{\pi^0}}{2}$ , e  $\gamma \beta$  si riferisce al moto del  $\pi^0$  nel laboratorio. La distribuzione è detta anche *a cassetta*:

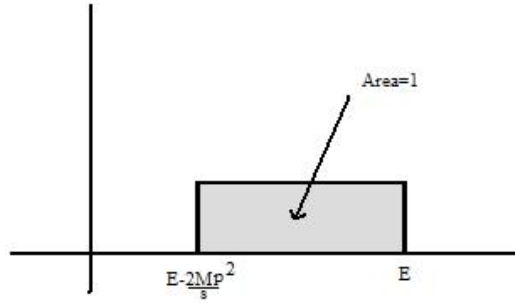


Figura 25.1: Distribuzione a cassetta

Se il decadimento non fosse stato isotropo, sarebbero comparsi dei fattori non costanti in  $\frac{d\mathcal{P}}{dE'}$ .

## 25.1 Urto quasi elastico

Nel caso di urto quasi elastico si può ancora usare il concetto di massa invariante del sistema, ma la differenza è tra il modulo degli impulsi delle particelle prima e dopo. Ricordiamo infatti che l'espressione dell'impulso nel centro di massa era:

$$b = \frac{\sqrt{(s - m^2 - M^2)^2 - 4m^2M^2}}{2\sqrt{s}}$$

In questo caso, anche considerando scattering in avanti, lo stato di moto delle particelle non può più rimanere invariato proprio perchè le particelle finali cambiano. Per un urto quasi elastico la quantità sotto radice deve essere positiva, e questo pone un vincolo cinematico alla reazione:

$$\sqrt{s} \geq m + M$$

## 25.2 Urto anelastico

Nel caso di urto anelastico nello stato finale c'è una sola particella, oppure più di due. La soglia di una reazione adesso si esprime prendendo un quadrimpulso per lo stato finale in cui le particelle sono tutte *ferme* nel sistema del centro di massa:

$$p^\mu = (m_1 + m_2 + \dots + m_n, \vec{0})$$

$$\Rightarrow \sqrt{s} \geq m_1 + m_2 + \dots + m_n$$

Nell'urto anelastico così come viene presentato nei corsi di meccanica, abbiamo sempre visto che si conserva l'impulso ma non l'energia meccanica (per la dissipazione). Nel caso relativistico però l'energia si conserva sempre, e abbiamo visto che la componente  $p^0$  del quadrimpulso contiene anche l'energia interna, quindi urto elastico e urto anelastico sono equivalenti dal punto di vista della conservazione dell'energia.

### 25.2.1 Una particella

Consideriamo ad esempio un processo di urto tra due particelle che ha come prodotto una unica particella; questo è tutt'altro che un problema accademico, basti pensare al processo ( $A$  è un nucleo):

$$\gamma + A \rightarrow A^*$$

dove con  $A^*$  abbiamo indicato il nucleo eccitato. Questo processo è possibile se il quadrimpulso finale di  $A^*$  è la somma di  $k^\mu$ , l'impulso del fotone, e  $p^\mu$ , il quadrimpulso del nucleo iniziale. Cosa accade: dato un quadrimpulso finale  $p_f^\mu$ , esso definisce completamente il moto del fotone iniziale (supponendo il nucleo iniziale fermo). Infatti il fotone avrà quadrimpulso  $k^\mu = (E, \vec{E})$ , il nucleo  $p_i^\mu = (M, \vec{0})$ , mentre il nucleo eccitato avrà una massa pari a  $M^*$ , dunque scrivendo la massa invariante:

$$s = 2EM + M^2 = M^2 = M^{*2}$$

$$\Rightarrow E = \frac{(M^*)^2 - M^2}{2M} = \frac{(M^* - M)(M^* + M)}{2M} \equiv \frac{(M^* - M)(M^* - M + 2M)}{2M} = (M^* - M) \left[ 1 + \frac{M^* - M}{2M} \right]$$

riconosciamo nel termine  $\frac{M^* - M}{2M}$  l'energia cinetica del nucleo  $A^*$ . Per la conservazione dell'impulso spaziale risulta che  $\vec{p}_{M^*} = \vec{E}$ , dunque nel limite in cui trascuriamo l'energia del fotone rispetto alle masse dei nuclei (ad esempio fotoni ottici) possiamo scrivere che  $|\vec{p}_{M^*}| = |\vec{E}| = E = |M^* - M|$ , dunque  $\frac{p_{M^*}^2}{2M^*} = \frac{(M^* - M)^2}{2M^*} \sim \frac{(M^* - M)^2}{2M}$ . Dunque fornendo  $M$  ed  $M^*$ , l'energia del fotone è completamente determinata e a rigore sarebbe necessario sparare fotoni con energia esattamente pari alla separazione tra i livelli, per osservare una determinata transizione. In realtà alla fine il nucleo  $A^*$  è instabile e non ha una massa definita se non entro una certa larghezza, per questo e per il principio di indeterminazione possono contribuire alla transizione fotoni all'interno di un certo range di energie.

### 25.2.2 Tre particelle

Vdiamo adesso come è possibile determinare la soglia di un urto binario in cui nello stato finale si abbiano tre particelle; consideriamo ad esempio l'urto tra due protoni, che a come prodotto altri due protoni, più una terza particella  $X$ :

$$p + p \rightarrow p + p + X$$

Vogliamo dunque sapere qual'è la soglia di energia per produrre X, data la sua massa; calcoliamo per prima cosa la massa invariante a destra e a sinistra:

$$\begin{aligned} 2M^2 + 2ME &\geq (2M + m_X)^2 \\ \Rightarrow 2\gamma M^2 + 2M^2 &\geq 4M^2 + m^2 + 4mM \\ \Rightarrow m^2 + 4mM + 2M^2(1 - \gamma) &\leq 0 \end{aligned}$$

dividiamo tutto per  $M^2$ :

$$\frac{m^2}{M^2} + 4\frac{m}{M} + 2(1 - \gamma) \leq 0$$

Fissato  $\gamma$ , questa è una disequazione di secondo grado in  $m$ ; risulta che la massa della particella X deve soddisfare la seguente equazione:

$$\lambda_{12} = -2 \pm \sqrt{4 + 2(\gamma - 1)} = -2 \pm \sqrt{2(1 + \gamma)} =$$

Il rapporto  $\frac{m}{M}$  deve essere quindi essere compreso tra  $-2 - \sqrt{2(1 + \gamma)}$  e  $-2 + \sqrt{2(1 + \gamma)}$ , ma poichè è sempre positivo possiamo scrivere:

$$0 \leq \frac{m}{M} \leq -2 + \sqrt{2(1 + \gamma)}$$

Dato  $\gamma$ , la massa più piccola che è possibile produrre è:

$$m_{threshold} = M(-2 + \sqrt{2(1 + \gamma)})$$

Questo risultato è interessante poichè assume due aspetti nel limite ultrarelativistico e in quello di bassa energia. Nel limite ultrarelativistico ( $\gamma \gg 1$ ) risulta infatti che la massa della particella che è possibile produrre cresce con la radice di  $\gamma$ ; ad esempio, al CERN esisteva un acceleratore di protoni a  $450\text{GeV}$ , quindi  $\gamma = \frac{E+M_p}{M_p} \sim 450 \gg 1$ , tuttavia risulta che  $m_{threshold} \simeq 1\text{GeV}(-2 + \sqrt{900}) \sim 28\text{GeV}$ ; dunque c'è un grosso spreco, proprio dovuto alla dipendenza dalla radice quadrata di  $\gamma$  nella massa producibile. Si ha infatti che il baricentro stesso del sistema iniziale  $p + p$  ha un  $\gamma$  elevato, e poichè il moto del centro di massa si deve conservare non è possibile supporre la produzione le particelle nello stato finale, nel centro di massa, come ferme. E' questo il motivo per cui in generale si preferisce costruire dei *collisionatori* (collider): si tratta di acceleratori in cui le particelle che partecipano sono tutte in moto; idealmente da  $450\text{GeV}$  è possibile generare una massa di  $2 \cdot 450\text{GeV}$ , anche se in realtà non succede perchè si deve tenere in conto tanti altri fattori. Ad esempio, consideriamo il caso della produzione dello  $Z^0$  tramite collisioni tra protoni e antiprotoni: in realtà lo  $Z^0$  viene prodotto non da uno scontro tra protone e antiprotone, ma da uno scontro tra due dei quark e degli antiquark di cui sono costituiti; di fatto, l'energia dei quark in generale non sarà quella dei protoni, considerando anche il fatto che un pò di energia è portata via dai gluoni. In definitiva, anche se sulla base di ragionamenti ingenui sarebbero sufficienti fasci di protoni e antiprotoni di  $\sim \frac{90}{2} = 45\text{GeV}$  di energia, in realtà lo  $Z^0$  non si vede se non se ne forniscono almeno 420. Viceversa, tramite urti tra elettroni e positroni, i quali non sono costituiti da quark e il problema precedente non sussiste, è possibile osservare lo  $Z^0$  anche con fasci di  $45\text{GeV}$ .



## Capitolo 26

### Mercoledì 12 marzo

#### 26.1 L'osservazione dello $Z^0$

La tecnica utilizzata per osservare lo  $Z^0$  prende il nome di metodo della **massa trasversa**. Supponiamo che in una interazione si produca una particella, ad esempio il bosone vettore  $W^\pm$ , tramite lo scontro di due fasci di protoni e antiprotoni ciascuno di  $420\text{GeV}$ . L'antiprotone è fatto da 3 antiquark, mentre il protone da 3 quark; per la formazione di un  $W^\pm$  si devono scontrare un quark e un antiquark di tipo diverso, ad esempio un  $d$  e un  $\bar{u}$  danno origine a un  $W^-$ . Tuttavia i quark nel protone non sono fermi, per cui gli stati finali sono complessi e tra essi dobbiamo riconoscere il  $W$ , analizzando i prodotti di decadimento.

Sappiamo che la 'carta d'identità' di una particella è la sua massa, inoltre un segno distintivo di un probabile decadimento del  $W^\pm$  è la presenza di leptoni a partire da urti adronici (come quelli tra  $p$  e  $\bar{p}$ ). Per il  $W^+$ , i decadimenti più probabili sono  $e^+ + \nu_e$  ed  $\mu^+ + \nu_\mu$ , all'incirca con stessi pesi data l'esiguità delle loro masse rispetto a quella del  $W^+$ .

Tuttavia il problema fondamentale è costituito dal neutrino: il decadimento non è cinematicamente chiuso perchè una delle particelle che vi partecipano non può essere rivelata e quindi non si possono ottenere informazioni riguardo il suo quadrimpulso.

Viceversa, lo  $Z^0$  si ottiene dall'annichilazione di due quark dello stesso tipo, e con una frequenza molto minore di quella con cui si può produrre il  $W^\pm$ . Nel caso del decadimento  $Z^0 \rightarrow e^+ + e^-$ , il decadimento è anche chiuso, ma spesso e volentieri compaiono dei neutrini. Si introduce allora il concetto di massa trasversa, ogni volta che si ha un decadimento a due corpi di cui una particella è osservabile e l'altra no.

Nel caso del  $W^+ \rightarrow e^+ + \nu_e$ , dato che la massa del neutrino è ampiamente trascurabile rispetto alle altre masse in gioco, si può pensare di considerare la trasformata per crossing del positrone  $W^+ + e^- \rightarrow \nu_e$ , e a questo punto costruire la quantità  $(P_W - P_e)^2$  che deve essere pari a  $m_\nu^2$ , cioè  $\sim 0$ . Purtroppo però non conosciamo  $P_W$ , dato che il  $W^+$  si può muovere lungo la direzione di moto (definita in direzione e verso dalla traiettoria degli antiprotoni) in modo per lo più ignoto, dato che non conosciamo lo stato di moto dei quark all'interno dei protoni e degli antiprotoni. In altre parole, possiamo affermare che il  $W^+$  si muoverà lungo l'asse  $z$ , ma non conosciamo la sua velocità.

Come si fa allora? Con una trasformazione di Lorentz (che non conosciamo, ma sicuramente esiste) ci mettiamo nel sistema di quiete del  $W^+$ , in cui esso decade ed emette le due particelle in una certa direzione, che formerà un angolo  $\theta_{cm}$  con la direzione dell'asse  $z$ . Nel sistema di quiete possiamo determinare il

quadrimpulso del positrone; trascurando sia la massa del positrone che del muone rispetto a quella del  $W^+$ , possiamo supporre che le due particelle si dividano circa a metà la sua energia, dunque:

$$p_e^\mu = \frac{M}{2}(1, \hat{n})$$

dove  $\hat{n}$  è un versore che indica la direzione di moto. Senza perdita di generalità possiamo scegliere  $\hat{n}$  nel piano  $yz$ , dunque

$$p_e^\mu = \frac{M}{2}(1, 0, \sin \theta_{cm}, \cos \theta_{cm})$$

e di conseguenza per il neutrino avremo

$$p_\nu^\mu = \frac{M}{2}(1, 0, -\sin \theta_{cm}, -\cos \theta_{cm})$$

Tuttavia come al solito noi siamo nel sistema del laboratorio, e dobbiamo capire qual'è l'informazione legata al decadimento, in questo sistema. La trasformazione di Lorentz inversa ci potrebbe riportare dal quadrimpulso nel sistema del centro di massa a quello del laboratorio, ma non ne conosciamo il  $\beta$ . In ogni caso possiamo scrivere formalmente:

$$\frac{M}{2} \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sin \theta_{cm} \\ \cos \theta_{cm} \end{pmatrix}$$

$$E' = \frac{M}{2}\gamma(1 + \beta \cos \theta_{cm})$$

$$p'_y = \frac{M}{2} \sin \theta_{cm}$$

$$p'_z = \frac{M}{2}\gamma(\beta + \cos \theta_{cm})$$

Non conoscendo nè  $\gamma$  nè  $\beta$ , non possiamo utilizzare nè  $E'$  nè  $p'_z$ , dunque non resta che utilizzare l'impulso trasverso, che tuttavia contiene l'angolo  $\theta_{cm}$ . Se ipoteticamente osservassimo un unico decadimento del  $W^+$ , e guardassimo l'impulso trasverso trovando un risultato compreso tra 0 e 40 GeV, potremmo concludere che c'è la possibilità di aver rivelato proprio il decadimento di un  $W^+$ ; osserviamo che energie inferiori a 40 GeV sono condizione necessaria affinché si possa pensare ad un  $W^+$ , ma non sufficiente, perchè non possiamo ancora avere la certezza, con un solo evento, che si tratti proprio della particella cercata. Allora si prende un certo numero di dati, e se ne studia la distribuzione, sfruttando anche il fatto che considerando l'impulso trasverso tra il sistema del laboratorio e quello di riposo del  $W^+$  non c'è perdita di informazione.

Per costruire la massa trasversa si isola un positrone tra tutti i prodotti di decadimento; se misuriamo il quadrimpulso del positrone, si ha  $p^\mu = (p, \vec{p})$ , dopodichè misuriamo tutto il resto, e chiudiamo l'evento il modo che l'impulso spaziale totale sia nullo; quello che manca per annullare l'impulso spaziale lo identifichiamo con l'impulso spaziale del neutrino, che viceversa avrà un quadrimpulso (detto quadrimpulso *missing*)  $q^\mu = (q, \vec{q})$ ; non conosciamo tale quadrimpulso, ma facciamo l'ipotesi di aver misurato ogni altra cosa. Per il positrone consideriamo l'impulso trasverso e definiamo:

$$p_T^\mu = (p_T, \vec{p}_T)$$

in questa definizione abbiamo implicitamente considerato nulla la massa del positrone. L'utilità di considerare l'impulso trasverso è che in ogni caso le particelle longitudinali, ovvero quelle nella direzione del fascio, non potrebbero comunque essere osservate per l'impossibilità fisica di sistemare dei rivelatori lungo il fascio. Facciamo lo stesso anche per il quadrimpulso del neutrino, dopodichè costruiamo la massa invariante trasversa:

$$M_T^2 = 2p_T q_T (1 - \cos \phi)$$

Ci aspettiamo che grosso modo gli impulsi spaziali del positrone e del neutrino siano opposti, dato che l'impulso trasverso era nullo prima e quindi lo deve essere ancora; questo significa che  $\phi$  deve essere intorno a  $\pi$ , dunque  $\cos \phi \sim -1$ . Allora se si verificano queste due ipotesi principali:

- Il  $W^+$  decade;
- Abbiamo ricostruito bene gli impulsi di tutte le particelle a parte il neutrino;

allora avremo che

$$\begin{aligned} M_T^2 &= 4\left(\frac{M}{2} \sin \theta_{cm}\right)^2 \\ \Rightarrow M_T^2 &= M^2 \sin^2 \theta_{cm} \\ \Rightarrow M_T &= M \sin \theta_{cm} \end{aligned}$$

Si studia allora un certo numero di eventi (dalla decina al centinaio), e si cerca di capire se questi sono proprio eventi provenienti dal  $W^+$ , facendo la distribuzione in massa trasversa. Ci aspettiamo che tale distribuzione, dovendo provenire da un oggetto di massa  $M$ , dia tutti eventi con massa trasversa minore degli 81 GeV del  $W^+$ . Determiniamo adesso la distribuzione di probabilità in massa trasversa:

$$\frac{d\mathcal{P}}{dM_T}$$

Per determinarla faremo una ipotesi, però tenendo sempre in mente che è falsa, e supporremo che gli eventi nel centro di massa siano isotropi, dunque:

$$\begin{aligned} d\mathcal{P} &= \frac{1}{2} \sin \theta_{cm} d\theta_{cm} \\ \Rightarrow \frac{d\mathcal{P}}{d\theta_{cm}} &= \frac{1}{2} \sin \theta_{cm} \\ \frac{d\mathcal{P}}{dM_T} &= \frac{d\mathcal{P}}{d\theta_{cm}} \frac{1}{\frac{dM_T}{d\theta_{cm}}} \end{aligned}$$

Tuttavia la funzione  $M_T = M \sin \theta_{cm}$  non è iniettiva tra 0 e  $\pi$ , dunque esistono due possibili angoli,  $\theta_{cm}^+$  e  $\theta_{cm}^-$ , che possono dare luogo alla stessa massa trasversa, riscriveremo allora la probabilità come:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{P}}{dM_T} &= \frac{d\mathcal{P}}{d\theta_{cm}} \Big|_{\theta_{cm}^+} \frac{1}{\frac{dM_T}{d\theta_{cm}} \Big|_{\theta_{cm}^+}} + \frac{d\mathcal{P}}{d\theta_{cm}} \Big|_{\theta_{cm}^-} \frac{1}{\frac{dM_T}{d\theta_{cm}} \Big|_{\theta_{cm}^-}} \\ \Rightarrow \frac{d\mathcal{P}}{dM_T} &= \frac{1}{2} \sin \theta_{cm} \left( \frac{1}{M \cos \theta_{cm} \Big|_{\theta_{cm}^+}} + \frac{1}{M \cos \theta_{cm} \Big|_{\theta_{cm}^-}} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \sin \theta_{cm} \left( \frac{1}{M \sqrt{1 - \sin^2 \theta_{cm}|_{\theta_{cm}^+}}} + \frac{1}{M \sqrt{1 - \sin^2 \theta_{cm}|_{\theta_{cm}^-}}} \right) = \sin \theta_{cm} \left( \frac{M}{M} \right) \left( \frac{1}{M \sqrt{1 - \sin^2 \theta_{cm}}} \right) = \\
&= \frac{M_T}{M} \frac{1}{\sqrt{M^2 - M_T^2}}
\end{aligned}$$

Introduciamo la variabile adimensionale  $\mu = \frac{M_T}{M}$ , tale che  $0 \leq \mu \leq 1$ , da cui

$$M_T = \mu M \Rightarrow dM_T = M d\mu$$

$$\Rightarrow \frac{d\mathcal{P}}{M d\mu} = \mu \frac{1}{M \sqrt{1 - \mu^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{d\mathcal{P}}{d\mu} = \frac{\mu}{\sqrt{1 - \mu^2}}$$

Questa distribuzione per  $\mu = 1$  fa divergere la probabilità, si scopre dunque che il grafico è del tipo

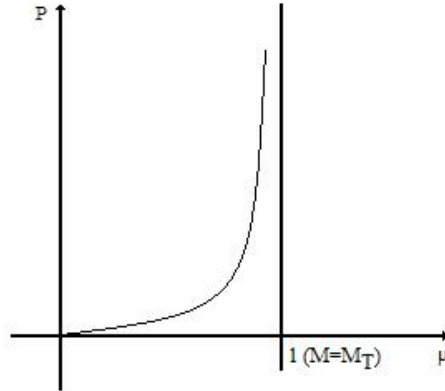


Figura 26.1: Distribuzione di probabilità nella variabile adimensionale  $\mu$

In assenza di errori sperimentali, la distribuzione sarebbe di questo tipo, con un asintoto verticale corrispondente alla massa effettiva del  $W^+$  e detto **picco jacobiano** a causa del cambio di variabile che abbiamo effettuato. In realtà il  $W^+$  ha una sua larghezza intrinseca, e ci sono delle incertezze sperimentali nella misurazione dell'impulso, questo fa sì che ciò che si misura non sia effettivamente  $\mu$ , ma una seconda quantità  $m$ , legata a  $\mu$  da una funzione di tipo probabilità condizionale:

$$P(m|\mu) \sim e^{-\frac{(\mu-m)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{d\mathcal{P}}{dm} = \int \frac{\mu}{\sqrt{1 - \mu^2}} P(\mu|m) d\mu$$

Se non avessimo errori, la funzione di probabilità condizionale sarebbe una delta di Dirac:  $P(m|\mu) = \delta(\mu - m)$ ; il fatto che sia invece una gaussiana fa sì che il picco si allarghi e non ci sia più una divergenza nella probabilità:

Torniamo adesso sui nostri passi e rivediamo l'ipotesi di isotropia nel sistema di riposo del  $W^+$ ; osserveremo

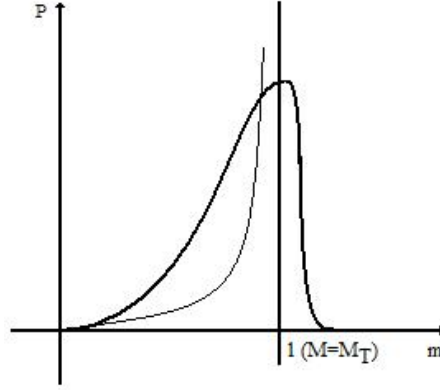


Figura 26.2: Distribuzione di probabilità nella variabile adimensionale  $m$

che anche cambiando ipotesi, il picco jacobiano resterà tale e quale. Il bosone mediatore  $W^+$  è una particella vettoriale, e nasce completamente polarizzato poichè l'interazione debole seleziona gli stati di chiralità negativa, e al momento della formazione del  $W^+$ , i quark  $u$  e  $\bar{d}$  che lo creano sono ampiamente ultrarelativistici e per loro si può parlare indistintamente di chiralità o di elicità. Il quark  $u$ , essendo una particella, si ritrova infatti ad avere chiralità negativa, e quindi anche elicità negativa, il quark  $\bar{d}$  viceversa avrà elicità positiva, essendo una antiparticella. Dunque il  $W^+$  si deve ritrovare uno spin 1 diretto lungo l'asse  $z$ :

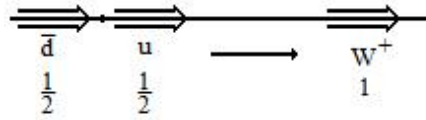


Figura 26.3: Polarizzazione del  $W^+$

Non possiamo conoscere l'elicità del  $W^+$  perchè non sappiamo se va avanti o indietro, tuttavia possiamo ricostruire un evento di decadimento nel suo sistema di riposo: positrone e neutrino (anche per iquali è possibile identificare chiralità ed elicità) vengono emessi in una direzione che forma un certo angolo  $\theta_{cm}$  con l'asse  $z$ , angolo che poi va a definire la massa trasversa  $M_T$ :

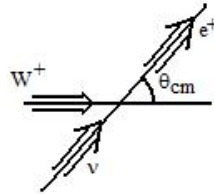


Figura 26.4: Caso favorito

A priori, la retta  $e^+\nu$  può essere orientata con qualunque angolo, ma quella con  $\theta_{cm}$  piccoli è favorita perchè il positrone ha elicità positiva, mentre il neutrino negativa; per angoli  $\theta_{cm} > \frac{\pi}{2}$  il positrone è costretto ad avere elicità negativa, e il neutrino positiva, dunque questa situazione è sfavorita.

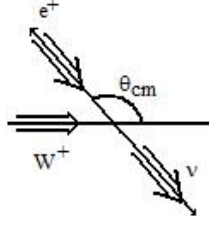


Figura 26.5: Caso sfavorito

La distribuzione di probabilità in funzione dell'angolo ha la forma:

$$\frac{d\mathcal{P}}{d\theta_{cm}}|_{W^+} = \frac{3}{8}(1 + \cos \theta_{cm})^2 \sin \theta_{cm} d\theta_{cm}$$

Nel caso del  $W^-$  possiamo fare dei discorsi analoghi, ma in tal caso l'emissione favorita è quella per  $\theta_{cm} > \frac{\pi}{2}$ , dunque la distribuzione di probabilità è:

$$\frac{d\mathcal{P}}{d\theta_{cm}}|_{W^-} = \frac{3}{8}(1 - \cos \theta_{cm})^2 \sin \theta_{cm} d\theta_{cm}$$

Se non si osserva il segno della carica, quindi si rivelano indistintamente elettroni e positroni, la distribuzione è la media delle due:

$$\frac{d\mathcal{P}}{d\theta_{cm}}|_{W^\pm} = \frac{3}{8}(1 + \cos^2 \theta_{cm}) \sin \theta_{cm} d\theta_{cm}$$

vediamo dunque che rispetto al caso isotropo, in cui la parte angolare era costituita solo da  $\sin \theta_{cm} d\theta_{cm}$ , adesso compare anche un termine  $\cos^2 \theta_{cm} \sin \theta_{cm} d\theta_{cm}$ . Ricordando che  $\sin \theta_{cm} = \mu = \frac{M_T}{M}$ , possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{P}}{d\theta_{cm}} &= \frac{d\mathcal{P}}{d\mu} \frac{d\mu}{d\theta_{cm}} = \frac{d\mathcal{P}}{d\mu} \cos \theta_{cm} \\ \Rightarrow \frac{d\mathcal{P}}{d\mu} &= \frac{1}{\cos \theta_{cm}} \frac{d\mathcal{P}}{d\theta_{cm}} = \frac{3}{8} \frac{1}{\sqrt{1 - \mu^2}} (1 + 1 - \mu^2) \mu = \frac{3}{8} \frac{\mu}{\sqrt{1 - \mu^2}} (2 - \mu^2) \end{aligned}$$

Ovvero osserviamo che permane la divergenza per  $\mu = 1$ .