Geometria – A.A. 2006/07

Esercizi 27.10.2006

15. Sia $L_t\colon \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione definita per ogni $t \in \mathbf{R}$ da

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2 + x_3 + x_4, x_1 + 2x_2 - x_3, 3x_1 + x_3 + tx_4).$$

(a) Dimostrare che L_t è una applicazione lineare per ogni $t \in \mathbf{R}$.

(b) Per ogni $t \in \mathbf{R}$ calcolare $rg(L_t)$, $\dim(KerL_t)$ e trovare basi per $KerL_t$ e ImL_t

16. Sia $T\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare tale che

$$T\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix},\quad T\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad T\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

Determinare $T\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)$ per $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ arbitrario.

17. Si considerino le applicazioni lineari $T\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ e $S\colon \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$ definite rispettivamente da

$$T\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\-1 & -3 & -3\\1 & -3 & 0\\-1 & 5 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad S\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\right) = 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4.$$

(a) Trovare basi per ImT, $KerS$, $ImT \cap KerS$.

(b) Trovare supplementari per ImT, $KerS$, $ImT \cap KerS$.

18. Siano $x = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ due vettori di $\mathbf{R}^2$ tali che per ogni $t \in \mathbf{R}$ si ha $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \neq tx + (1-t)y$. Se $T\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ è un'applicazione lineare tale che $T(x) = x$ e $T(y) = y$ dimostrare che $T = Id$ ossia che $T(z) = z$ per ogni $z \in \mathbf{R}^2$.
Consiglio: dimostrare che x, y sono linearmente indipendenti e che quindi $\{x, y\}$ è una base (perché?), dunque......

19. Sia $\mathbf{R}[x]$ lo spazio dei polinomi reali (di grado arbitrario) e siano $D\colon \mathbf{R}[x] \to \mathbf{R}[x]$ e $T\colon \mathbf{R}[x] \to \mathbf{R}[x]$ le applicazioni definite rispettivamente da

$$D\left(\sum_{j=0}^{n} a_j x^j\right) = \sum_{j=1}^{n} j a_j x^{j-1} \qquad \text{e} \qquad T\left(\sum_{j=0}^{n} a_j x^j\right) = \sum_{j=0}^{n} \frac{a_j}{j+1} x^{j+1}.$$

(a) Dimostrare che D e T sono lineari.

(b) Dimostrare che D è suriettiva ma non iniettiva.

(c) Dimostrare che T è iniettiva ma non suriettiva.

(d) Dimostrare che $D \circ T = Id_{\mathbf{R}[x]}$ mentre $T \circ D \neq Id_{\mathbf{R}[x]}$.

20. Sia $V = \mathbf{R}_2[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi reali di grado al più 2. Si consideri inoltre la base $\mathcal{B} = \{\mathbf{1}, x, x^2\}$ e di Ve la base $\mathcal{B}^* = \{\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2\}$ del duale V^* duale della base $\mathcal{B}$.

(a) Se $\delta_0, \delta_1, \delta_2\colon V \in \mathbf{R}$ sono i funzionali lineari rispettivamente definiti, per $p(x) \in V$ da

$$\delta_0(p(x)) = p(0) \qquad \delta_1(p(x)) = p(1) \qquad \delta_2(p(x)) = p(2),$$

esprimere $\delta_0, \delta_1, \delta_2$ come combinazione linerari dei vettori della base $\mathcal{B}^*$ e dimostrare che $\mathcal{C}^* = \{\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2\}$ è una base di V^*.

(b) Trovare la base $\mathcal{C}$ di V di cui $\mathcal{C}^*$ è la base duale.

21. Nel piano, fissato un riferimento cartesiano ortogonale $RC(0, x, y)$, trovare le coordinate del punto di intersezione delle altezze del triangolo che ha vertici $P = (0, 1), Q = (2, 2), R = (4, 1)$.

22. Nel piano, fissato un riferimento cartesiano ortogonale $RC(0, x, y)$, trovare l'equazione delle rette parallele e che distano 3 dalla retta passante per i punti $P = (1, 1)$ e $Q = (4, 2)$.