Geometria – A.A. 2006/07

Esercizi 1.12.2006

36. Si consideri l'endomorfismo $T\colon \mathbf{R}_3[t] \to \mathbf{R}_3[t]$ definito da $T(p(t) = tp'(t) + p(t+1)$. (a) Trovare la matrice di T relativa alla base $\{1, t, t^2, t^3\}$, calcolare il polinomio caratteristico di T e calcolare i suoi autovalori.
(b) Stabilire se T è diagonalizzabile e, in caso positivo, trovare una base diagonalizzante per T.

37. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.
(a) Calcolare il polinomio caratteristico di A e calcolare i suoi autovalori.
(b) Trovare una base per gli autospazi relativi agli autovalori di A e stabilire se A è diagonalizzabile.

38. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
(a) Calcolare il polinomio caratteristico di A e calcolare i suoi autovalori.
(b) Trovare una base per gli autospazi relativi agli autovalori di A e stabilire se A è diagonalizzabile e, nel caso trovare una matrice diagonalizzante per A.

39. Si consideri su $\mathbf{R}^4$ il prodotto scalare canonico. Trovare una base ortonormale per il sottospazio

$$V = \{x \in \mathbf{R}^4 | x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$

e completarla a una base ortonormale di $\mathbf{R}^4$.

40. Siano $V = M_2(\mathbf{R})$ lo spazio delle matrici reali quadrate di ordine 2 e sia $T\colon V \to \mathbf{R}$ l'applicazione lineare, chiamata *traccia* definita da $T\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right) = a_{11} + a_{22}$.
(a) Dimostrare che la funzione $< \cdot, \cdot >\colon V \times V \to \mathbf{R}$ definita da $< A, B >= T(B^T A)$ è un prodotto scalare definito positivo su V
(b) Trovare una base ortonormale di V rispetto a questo prodotto scalare.
(c) Trovare il complemento ortogonale del sottospazio di V generato dalla matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

41. Si definisca $< \cdot, \cdot >\colon \mathbf{R}_2[t] \times \mathbf{R}_2[t] \to \mathbf{R}$ mediante $< p(t), q(t) >= \int_0^1 p(t)q(t)dt$.
(a) Dimostrare che la funzione $< \cdot, \cdot >$ è un prodotto scalare definito positivo su $\mathbf{R}_2[t]$
(b) Trovare una base ortonormale per $\mathbf{R}_2[t]$ relativo a questo prodotto scalare.

42. Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} i & -1 \\ 2i & -i \end{pmatrix}$$

Trovare autovalori e basi per i corrispondenti autospazi di L_A, L_B, L_C.

43. Sia $D\colon \mathbf{R}_3[t] \to \mathbf{R}_3[t]$ l'applicazione che associa a un polinomio la sua derivata seconda. Trovare autovalori e autospazi di D e dimostrare che D non è diagonalizzabile.

43. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Trovare autovalori e autospazi di A e una matrice ortogonale B tale che $B^T AB$ sia diagonale.

44. Per $z \in \mathbf{C}$, se $A_z = \begin{pmatrix} 1 & z \\ \bar{z} & 1 \end{pmatrix}$, si trovi una matrice unitaria U tale che $U^H A_z U$ sia diagonale.