

Esercizi 9.10.2007

1. Siano \overrightarrow{OP} , \overrightarrow{OQ} e \overrightarrow{OR} vettori non complanari di \mathcal{V}_0^3 e siano $\overrightarrow{i} = \overrightarrow{OP} + 2\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{j} = 2\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}$ e $\overrightarrow{k} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}$.

(a) Dimostrare che i vettori \overrightarrow{i} , \overrightarrow{j} e \overrightarrow{k} non sono complanari.

(b) Trovare numeri a, b, c tali che $2\overrightarrow{OP} - 3\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OR} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j} + c\overrightarrow{k}$.

2. Dire quale dei seguenti insiemi è un sottospazio vettoriale o affine di \mathbf{R}^2 :

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 + 1 = 0 \right\}, \quad V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 1 = 0 \right\},$$

$$V_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 0 \right\}, \quad V_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 0 \right\},$$

$$V_5 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 = 0 \right\}, \quad V_6 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1 \right\},$$

$$V_7 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 = 1 \right\}, \quad V_8 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + 1 = 0 \right\}.$$

3. Si consideri al variare di $k \in \mathbf{R}$ il seguente sistema:

$$S_k : \begin{cases} (k+4)x + 3y = 3k \\ 4x + ky = 4 \\ 2x + y = 2. \end{cases}$$

Stabilire per quali $k \in \mathbf{R}$ il sistema S_k è compatibile e, quando esistono, trovare le soluzioni.

4. Stabilire se il sistema (sui complessi) è compatibile e, nel caso, trovare le soluzioni:

$$\begin{cases} z + iw = 1 + i \\ iz + w = 1 - i. \end{cases}$$

5. Si considerino i vettori di \mathbf{R}^3

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

e siano $V = \text{Span}(v_1, v_2)$, $U = \text{Span}(u_1, u_2)$.

(a) Dimostrare che $V = U$ (Consiglio: se $u_1, u_2 \in V$ allora $U \subset V \dots$).

(b) Stabilire per quali $x, y, z \in \mathbf{R}$ il vettore $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ è nel sottospazio V .

6. Per $t \in \mathbf{R}$, si considerino i vettori di \mathbf{R}^3

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ t^2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Dire per quali $t \in \mathbf{R}$ l'insieme $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di \mathbf{R}^3 .

(b) Quando \mathcal{B} è una base, trovare le coordinate del vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ relative a \mathcal{B} .

7. Si considerino i vettori di \mathbf{R}^4

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) dimostrare che $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ è una base di \mathbf{R}^4 .

(b) Trovare le coordinate relative alla base \mathcal{B} del vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.