

Esercizi 14.11.2006

23. Sia $V = M_2(\mathbf{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici reali quadrate di ordine 3. Si definisca $T: V \rightarrow V$ mediante $T(A) = A + A^T$

- (a) Dimostrare che T è un'applicazione lineare.
- (b) Determinare il rango di T e trovare una base per $Im(T)$.
- (c) Determinare la dimensione di $Ker(T)$ e trovare una sua base.
- (d) Dimostrare che $V = Im(T) \oplus Ker(T)$.

24. Si consideri l'applicazione $L: \mathbf{R}_3[x] \rightarrow M_2(\mathbf{R})$ definita da $L(p(x)) = \begin{pmatrix} p(0) & p(1) \\ p(-1) & p(2) \end{pmatrix}$

- (a) Dimostrare che L è un'applicazione lineare.
- (b) Dimostrare che L è un isomorfismo.

25. Sia $L: \mathbf{R}_3[x] \rightarrow \mathbf{R}$ l'unica applicazione lineare definita da

$$L\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = 2, \quad L\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 2, \quad L\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = 1, \quad L\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = 1$$

- (a) Determinare $L\left(\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\right)$.
- (b) Determinare il rango di L e trovare una base per $Im(L)$.
- (c) Determinare la dimensione di $Ker(L)$ e trovare una sua base.

26. Si considerino le seguenti rette del piano

$$\mathbf{r}: 7x - 3y + 5 = 0 \quad \mathbf{s}: x + y - 2 = 0 \quad \mathbf{t}: \begin{cases} x = 3t - 2 \\ y = 2t - 1 \end{cases}$$

Trovare le equazioni parametriche della retta parallela e della retta perpendicolare a \mathbf{r} passanti per il punto di intersezione di \mathbf{s} e \mathbf{t} .

27. Sia $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Si consideri l'applicazione $F: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ definita da $F(x) = x \wedge v$.

- (a) Dimostrare che F è un'applicazione lineare.
- (b) Determinare il rango di F e trovare una base per $Im(F)$.
- (c) Determinare la dimensione di $Ker(F)$ e trovare una sua base.
- (d) Dimostrare che $\mathbf{R}^3 = Im(F) \oplus Ker(F)$.

28. Per $\lambda \in \mathbf{R}$, sia $A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$. Al variare di λ trovare tutte le matrici $X \in M_{2,2}(\mathbf{R})$ tali che $A_\lambda X A_\lambda = A_\lambda$.

28. Calcolare le inverse delle seguenti matrici: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$.

29. Siano $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e sia $T: \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^4$ l'applicazione lineare definita da

$$T(e_1) = T(e_4) = \frac{1}{2}v_1 \quad \text{e} \quad T(e_2) = T(e_3) = \frac{1}{2}(v_2 - v_1)$$

dove $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ è la base canonica di \mathbf{R}^4 .

(a) Dimostrare che $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ è una base di \mathbf{R}^4 e trovare la matrice del cambio di base dalla base canonica \mathbf{R}^4 alla base \mathcal{B} .

(b) Trovare le matrici associate a T relativa alla base canonica di \mathbf{R}^4 e la matrice associata a T relativa alla base \mathcal{B} .

30. Si consideri l'applicazione $L: \mathbf{R}_3[x] \rightarrow \mathbf{R}_3[x]$ definita da $L(p(x)) = p(x+1) - p(x)$.

(a) Dimostrare che L è lineare e trovare la matrice associata a T relativa alla base $\{1, x, x^2, x^3\}$.

(b) Trovare basi per $\text{Ker}L$ e per $\text{Im}L$.

(c) Se $D: \mathbf{R}_3[x] \rightarrow \mathbf{R}_3[x]$ è l'endomorfismo definito da $D(p(x)) = p'(x)$, trovare il sottospazio di $\mathbf{R}_3[x]$ dove $D = L$ e trovare una base per $\text{Im}(D) \cap \text{Im}(L)$.

31. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ e si consideri l'applicazione $T: M_{3,3}(\mathbf{R}) \rightarrow M_{3,3}(\mathbf{R})$ definita da $T(X) = A^{-1}XA - X$. Si dimostri che T è lineare e trovare una base per $\text{Ker}T$.

32. Calcolare le radici cubiche di $z = \frac{1-i}{1+i}$

33. Al variare di $\lambda \in \mathbf{C}$, trovare tutte le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x + iy = 1 \\ ix - y + z = 1 \\ 2x + 2iy = \lambda \end{cases}$$

34. Rispetto a un riferimento affine fissato dello spazio, si considerino le rette

$$\mathbf{r}: \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 0 \end{cases} \quad \mathbf{s}: \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases} \quad \mathbf{u}: \begin{cases} 4x + 5y - 5z = 0 \\ y - z = 4 \end{cases}.$$

(a) Dimostrare che \mathbf{r} e \mathbf{s} sono sghembe.

(b) Determinare la retta parallela alla retta \mathbf{u} e incidente le rette \mathbf{r} e \mathbf{s} .

35. Rispetto a un riferimento affine fissato dello spazio, si considerino le rette

$$\mathbf{r}: \begin{cases} y = 0 \\ x = z \end{cases} \quad \mathbf{s}: \begin{cases} x + y = z \\ y = 2z \end{cases}$$

Trovare equazioni parametriche e equazioni cartesiane del piano contenente \mathbf{r} e parallelo a \mathbf{s} .