Geometria – A.A. 2006/07

Esercizi 20.10.2006

8. Si considerino i polinomi $p_1(t) = t^2 + 1$, $p_2(t) = t^2 - 1$ e $p_3(t) = t^2 + 3t + 1$.

(a) Dimostrare che $\mathcal{C} = \{p_1(t), p_2(t), p_3(t)\}$ è una base di $\mathbf{R}_2[t]$.

(b) Esprimere il polinomio $At^2 + Bt + C$ come combinazione lineare dei polinomi della base $\mathcal{C}$.

9. Al variare di $t \in \mathbf{R}$ si considerino i seguenti vettori di $\mathbf{R}^3$:

$$u_t = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ -1 \end{pmatrix}, v_t = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ t^2 - 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare per quali $t \in \mathbf{R}$ i vettori u_t, v_t sono linearmente indipendenti.

(b) Quando u_t, v_t sono linearmente indipendenti, trovare condizioni su x, y, z affiché $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in Span\,(u_t, v_t)$.

10. Si considerino tre vettori di $\mathbf{R}^3$:

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

con la proprietà che

$$u_1 + u_2 + u_3 = v_1 + v_2 + v_3 = w_1 + w_2 + w_3 = 0.$$

Dimostrare che $\{u, v, w\}$ **non** è una base di $\mathbf{R}^3$

11. Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbf{R}^4$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3, \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 | x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 0 \right\}, \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3, \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 | x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \right\}.$$

(a) Trovare una base per $U \cap W$ e completarla a basi per U e W.

(b) Trovare sottospazi di $\mathbf{R}^4$ supplementari per ciascuno dei sottospazi $U \cap W$, U e W.

12. Stabilire per quali $\lambda \in \mathbf{R}$ il seguente sistema è compatibile e, quando esistono, trovare le soluzioni:

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ \lambda x + y - z = 0 \\ x - y + \lambda z = \lambda. \end{cases}$$

13. Si considerino i polinomi $p_k(t) = (t - k)^3$, $q_k(t) = (t + k)^3$ e $r_k(t) = 2t^3 + 6kt$ al variare di $k \in \mathbf{R}$ e sia $U_k = Span(p_k(t), q_k(t), r_k(t))$.

(a) Trovare una base $\mathcal{B}_k$ per U_k e determinare $k \in \mathbf{R}$ in modo da avere $\dim(U_k) = 2$.

(b) Al variare di $k \in \mathbf{R}$ completare $\mathcal{B}_k$ a una base di $\mathbf{R}_3[t]$.

14. Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbf{R}^3$

$$U = Span\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad V_t = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 | tx_1 + (t^2 - 1)x_2 + x_3 = O \right\}.$$

Determinare per quali $t \in \mathbf{R}$ si ha $\mathbf{R}^3 = U \bigoplus V_t$.