Il determinante.

Queste note, basate sugli appunti delle lezioni, riepilogano rapidamente la definizione e le proprietà del determinante. Vengono inoltre illustrati i metodi di calcolo e alcune dimostrazioni. Per una trattazione completa si veda ad esempio il Capitolo 9 del testo Abate - de Fabritiis, Geometria analitica con elementi di algebra lineare.

1. Definizione e calcolo del determinante.

Lo scopo della teoria dei determinanti è di definire una funzione, chiamata *determinante*, sullo spazio delle matrici quadrate di ordine n, per ogni n, calcolabile facendo somme e prodotti delle entrate delle matrici. In particolare si desidera che il determinante di una matrice sia non nullo se e solo se la matrice è invertibile.

Per $n = 1$, ossia per matrici di ordine 1, lo scopo si ottiene semplicemente assegnando alla matrice (a) il valore $\det(a) = a$ per ogni scalare a. Si osservi che in questo caso alla matrice unità $I_1 = (1)$ si associa il numero $\det(I_1) = 1$.

Nel caso $n = 2$, ossia per matrici di ordine 2, osserviamo che richiedere che una matrice sia invertibile è equivalente a richiedere che sue righe non siano proporzionali. Dunque

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

è non singolare se e solo se le righe (a_{11}, a_{12}) e (a_{21}, a_{22}) non sono proporzionali e questo succede se e solo se $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$. Tenendo conto di quanto detto sopra, sembra ragionevole associare alla matrice A il numero $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Si osservi che anche in questo caso questa funzione associa alla matrice unità I_2 il numero 1. Il determinante delle matrici quadrate di ordine 2 definito in questo modo ha una semplice interpretazione geometrica. Su $\mathbb{R}^2$ si considerino due vettori v, w. I vettori v, w individuano un parallelogramma che denotiamo $P(v, w)$. Se in termini della base canonica $\{e_1, e_2\}$ si ha $v = v_1e_1 + v_2e_2$ e $w = w_1e_1 + w_2e_2$ e

$$A = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{pmatrix},$$

allora, con una semplice verifica geometrica, si dimostra (vedi Abate - de Fabritiis, *Geometria analitica con elementi di algebra lineare* pg. 145) che

$$\det(A) = \begin{cases} Area(P(v,w)) & \text{se si passa da } v \text{ a } w \text{ ruotando in senso antiorario} \\ \\ -Area(P(v,w)) & \text{se si passa da } v \text{ a } w \text{ ruotando in senso orario.} \end{cases}$$

In questo modo si ritrova geometricamente che se le righe della matrice di A sono proporzionali allora il determinate si annulla dato che in questo caso il parallelogramma $P(v, w)$ degenera a un segmento o a un punto.

Con queste motivazioni e con l'esempio delle matrici di ordine 2 in mente, diamo ora una definizione formale. Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ e si denoti $M_n = M_{n,n}(\mathbb{K})$ lo spazio delle matrice quadrate di ordine n con elementi in $\mathbb{K}$. Se $A \in M_n$ allora si può cosiderare A come collezione di n righe $A = (A_1, \ldots, A_n)$ oppure come collezione di n colonne $A = (A^1, \ldots, A^n)$

Definizione. Per ogni $n \geq 1$ un *determinante* è una funzione $d_n \colon M_n \to \mathbb{K}$ che ha le seguenti proprietà

(A) d_n si annulla sulle matrici che hanno due righe uguali, ossia

$$d_n(A_1, \ldots, A_n) = 0 \text{ se } A_i = A_j \text{ per } i \neq j.$$

(B) d_n è lineare in ciascuna riga, ossia fissato $j \in \{1, \ldots, n\}$ si deve avere

$$d_n(A_1, \ldots, A_j + A'_j, \ldots, A_n) = d_n(A_1, \ldots, A_j, \ldots, A_n) + d_n(A_1, \ldots, A'_j, \ldots, A_n)$$

$$d_n(A_1, \ldots, \lambda A_j, \ldots, A_n) = \lambda d_n(A_1, \ldots, A_j, \ldots, A_n).$$

(C) $d_n(I_n) = 1$.

È facile controllare che il determinante che abbiamo definito per le matrici di ordine 2 verifica le condizioni (A), (B), (C) della definizione. Prima di enunciare il risultato di esistenza per matrici di ordine arbitrario, dobbiamo introdurre una notazione.

Definizione. Se $A \in M_n$, si dice *minore* (i, j) di A la matrice $A_{ij} \in M_{n-1}$ ottenuta da A togliendo la i-esima riga e la j-esima colonna.

Teorema 1.1: *Per ogni $n \geq 1$ esiste un'unica funzione determinante $d_n \colon M_n \to \mathbb{K}$ che verifica le proprietà (A), (B), (C) e vale la seguente formula per ricorrenza per ogni matrice $A = (a_{ij}) \in M_n$:*

$$d_n(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} d_{n-1}(A_{i1}). \tag{1.1}$$

Non è difficile provare che il risultato è vero per $n = 2$. Il caso generale segue argomentando per induzione (per la dimostrazione si veda Abate - de Fabritiis, *Geometria analitica con elementi di algebra lineare* pgg. 152-53)). Si osservi che il determinante di matrici di qualunque ordine ha un significato geometrico che generalizza quello per matrici di ordine 2. In particolare si può dimostrare che per vettori u, v, w di $\mathbb{R}^3$, se in termini della base canonica $\{e_1, e_2, e_3\}$ si ha $u = u_1e_1 + u_2e_2 + u_3e_3$, $v = v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3$ e $w = w_1e_1 + w_2e_2 + w_3e_3$ e

$$A = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix},$$

allora $|\det(A)|$ è il volume del parallelogramma definito dai vettori u, v, w (vedi Abate - de Fabritiis, *Geometria analitica con elementi di algebra lineare* pgg. 239-40)

Qui ci limitiamo a fare qualche osservazione sul calcolo del determinante e sulle sue proprietà. Infatti la formula (1.1) diventa sempre più complicata al crescere di n e, d'altra parte, non abbiamo ancora verificato che la funzione determinante costruita in questo modo è in grado di "riconoscere" le matrici invertibili. Da questo momento in poi denoteremo funzione determinante con il simbolo det e per $A \in M_n$ scriveremo $\det(A) = d_n(A)$. Abbiamo la seguente

Proposizione 1.2: *Sia* $A = (A_1, \ldots, A_n) \in M_n$ *una matrice quadrata di ordine* n. *Allora*

(i) *Se* A *ha una riga nulla allora* $\det(A) = 0$.

(ii) *Il valore del determinante non cambia se si somma a una riga un multiplo di un'altra, ossia per ogni* $\lambda \in \mathbb{K}$ *e per indici* $i \neq j$ *si ha*

$$\det(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots, A_n) = \det(A_1, \ldots, A_i + \lambda A_j, \ldots, A_j, \ldots, A_n).$$

(iii) *Il valore del determinante cambia segno se si scambiano due righe:*

$$\det(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots, A_n) = -\det(A_1, \ldots, A_j, \ldots, A_i, \ldots, A_n).$$

(iv) *Se* S *è una matrice triangolare superiore ottenuta da* A *mediante una riduzione di Gauss che comporta* σ *scambi di righe, allora*

$$\det(A) = (-1)^{\sigma} \det(S).$$

(v) *Se* A *ha le righe linearmente dipendenti allora* $\det(A) = 0$.

(vi) *Se* S *è una matrice triangolare superiore e siano* $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{K}$ *gli elementi sulla diagonale di* S, *allora*

$$\det(S) = p_1 \ldots p_n.$$

(vii) A *è invertibile se e solo se* $\det(A) \neq 0$.

Dimostrazione: (i) Si ha $\det(A) = \det(A_1, \ldots, A_{j-1}, 0, A_{j+1}, \ldots, A_n) = 0$ dato che det è lineare in ciascuna riga a valori in $\mathbb{K}$ e quindi vale 0 sul vettore nullo.

(ii) Ancora utilizzando la linearità su ciascuna riga e la proprietà (A) dei determinanti, se $\lambda \in \mathbb{K}$, si ha

$$\begin{aligned}
\det(A_1, \ldots, A_i + \lambda A_j, \ldots, A_j, \ldots, A_n) &= \det(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots, A_n) \\
&\quad + \lambda \det(A_1, \ldots, A_j, \ldots, A_j, \ldots, A_n) \\
&= \det(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots, A_n) = \det(A).
\end{aligned}$$

(iii) Si ha

$$\begin{aligned}
0 &= \det(A_1, \ldots, A_i + A_j, \ldots, A_i + A_j, \ldots, A_n) \\
&= \det(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_i + A_j, \ldots, A_n) + \det(A_1, \ldots, A_j, \ldots, A_i + A_j, \ldots, A_n) \\
&= \det(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_i, \ldots, A_n) + \det(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots, A_n) \\
&\qquad + \det(A_1, \ldots, A_j, \ldots, A_i, \ldots, A_n) + \det(A_1, \ldots, A_j, \ldots, A_j, \ldots, A_n) \\
&= \det(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots, A_n) + \det(A_1, \ldots, A_j, \ldots, A_i, \ldots, A_n)
\end{aligned}$$

e quindi (iii) segue.

(iv) È immediata da (ii) e(iii).

(v) Se A ha le righe linearmente dipendenti, allora una sua qualunque riduzione a scala ha una riga nulla e quindi (v) segue da (i) e (iv).

(vi) Usando la linearità del determinante nella prima riga si ha

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$
$$+ \det\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Dato che $\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$ ha le righe linearmente dipendenti, usado (v) e, ripetendo l'argomento, si ha

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11}\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$
$$= a_{11}\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$
$$+ a_{11}\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$
$$= a_{11}a_{22}\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} = \dots$$
$$= a_{11}a_{22}\dots a_{nn}\det(I_n) = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

(vii) Una matrice A è invertibile se e solo se una sua qualunque riduzione a scala ha tutti i pivot non nulli. Per (vi) questo succede se e solo se è non nullo il determinante di una qualunque riduzione a scala di A, che per (iv) ha valore assoluto uguale al valore assoluto del determinante di A. □

Il punto (vi) della Proposizione 1.2 fornisce un metodo di calcolo molto efficace per il determinante: è sufficiente ridurre a scala la matrice mediante una riduzione di Gauss tenendo il conto degli scambi di righe! Infatti se S è un'arbitraria riduzione a scala di A ottenuta mediante σ scambi di righe e $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{K}$ sono gli elementi sulla diagonale di S, allora, (vi) e (vi) della Proposizione 1.2 implicano che

$$\det(A) = (-1)^{\sigma} p_1 \dots p_n.$$

C'è un altro metodo di calcolo per i determinanti, i cosiddetti sviluppi di Laplace che generalizzano la formula (1.1). Precisamente abbiamo il seguente

Teorema 1.3: *Sia $A = (a_{ij}) \in M_n$ una matrice quadrata di ordine n.*

(i) *per ogni $j_0 = 1, \dots, n$ fissato, vale la seguente formula detta sviluppo di Laplace del determinante lungo la colonna j_0-esima:*

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j_0} a_{ij_0} det(A_{ij_0}). \tag{1.2}$$

(ii) *per ogni $i_0 = 1, \dots, n$ fissato, vale la seguente formula detta sviluppo di Laplace del determinante lungo la riga i_0-esima:*

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i_0+j} a_{i_0 j} det(A_{i_0 j}). \tag{1.3}$$

Per una dimostrazione si veda Abate - de Fabritiis, *Geometria analitica con elementi di algebra lineare* pgg. 155-56. Argomentando per induzione (vedi Abate - de Fabritiis, *Geometria analitica con elementi di algebra lineare* pg. 156), dal Teorema 1.3 segue (quasi) immediatamente:

Teorema 1.4: *Sia $A \in M_n$ una matrice quadrata di ordine n. Allora* $\det(A) = \det(A^T)$.

Il Teorema 1.4 implica che gli enunciati riguardanti il determinante espressi in termini di righe si possono riformulare in termini di colonne. In particolare il determinante è una funzione lineare in ciascuna colonna e vale la seguente:

Proposizione 1.5: *Sia $A = (A^1, \dots, A^n) \in M_n$ una matrice quadrata di ordine n.*

(i) *Se A ha una colonna nulla allora* $\det(A) = 0$.

(ii) *Il valore del determinante non cambia se si somma a una colonna un multiplo di un'altra, ossia per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ e per indici $i \neq j$ si ha*

$$\det(A^1, \dots, A^i, \dots, A^j, \dots, A^n) = \det(A^1, \dots, A^i + \lambda A^j, \dots, A^j, \dots, A^n).$$

(iii) *Il valore del determinante cambia segno se si scambiano due colonne:*

$$\det(A^1, \dots, A^i, \dots, A^j, \dots, A^n) = -\det(A^1, \dots, A^j, \dots, A^i, \dots, A^n).$$

Concludiamo il paragrafo calcolando in due modi diversi il determinante di una matrice.

Esempio. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il determinante di A riducendola a scala mediante un'eliminazione di Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & -5 & -6 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{\textit{scambio}\\ \textit{di righe}}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -5 & -6 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -11 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{\textit{scambio}\\ \textit{di righe}}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -11 & -12 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 21 \end{pmatrix}.$$

Dunque, utilizzando Proposizione 1.2 e osservando che nella riduzione a scala abbiamo operato 2 scambi di righe, possiamo concludere che

$$\det(A) = (-1)^2(1 \cdot -1 \cdot 1 \cdot -2 \cdot 21) = 42.$$

Calcoliamo ora il determinante di A combinando le altre tecniche che abbiamo introdotto:

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \underset{\substack{\textit{sommando alle altre} \\ \textit{multipli prima riga}}}{=} \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & -5 & -6 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{\textit{sviluppo di Laplace} \\ \textit{prima colonna}}}{=} (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 2 \\ -5 & -5 & -6 & -2 \\ -1 & -1 & -1 & -4 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{\textit{sottraendo prima} \\ \textit{colonna alla seconda}}}{=} \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ -5 & 0 & -6 & -2 \\ -1 & 0 & -1 & -4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{\textit{sviluppo di Laplace} \\ \textit{seconda colonna}}}{=} (-1)^{2+1} \cdot 1 \cdot \det\begin{pmatrix} -5 & -6 & -2 \\ -1 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{\textit{sommando terza} \\ \textit{riga alla seconda}}}{=} -\det\begin{pmatrix} -5 & -6 & -2 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{\substack{\textit{sottraendo prima} \\ \textit{colonna alla terza}}}{=} -\det\begin{pmatrix} -5 & -6 & 3 \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{\textit{sviluppo di Laplace} \\ \textit{seconda riga}}}{=} -(-1)^{1+2}(-2)\det\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = (-2)(-18-3) = 42.$$

2. Determinante e prodotto di Matrici.

Il determinante rispetta la struttura moltiplicativa delle matrici. Vale infatti il seguente importante:

Teorema 2.1: (di Binet) *Siano* $A, B \in M_n$. *Allora* $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Dimostrazione: Se $\det(B) = 0$ la tesi è immediata. In questo caso infatti la matrice B non è invertibile e quindi esiste un vettore $v \neq 0_n$ in $\mathbb{K}^n$ tale che $Bv = 0_n$. Dunque si ha anche $ABv = 0_n$ e quindi la matrice AB non è invertibile e $\det(AB) = 0 = \det(A)\det(B)$. Supponiamo allora che $\det(B) \neq 0$. Si definisca la funzione $D\colon M_n \to \mathbb{K}$ mediante

$$D(A) = \frac{\det(AB)}{\det(B)}.$$

La tesi seguirà anche in questo caso provando che $D(A) = \det(A)$. A tal fine basterà dimostrare che la funzione D verifica le condizioni (A), (B), (C) della definizione di determinante. Dato che $D(I_n) = \frac{\det(I_nB)}{\det(B)} = \frac{\det(B)}{\det(B)} = 1$ e quindi (C) è immediata. Se la matrice A ha due righe uguali, ossia $A = (A_1, \dots A_i, \dots A_j, \dots, A_n)$ con $A_i = A_j$ per $i \neq j$, allora, dato che

$$AB = (A_1B, \dots, A_iB, \dots, \dots A_jB, \dots, A_nB),$$

anche AB ha due righe uguali e quindi $D(A) = 0$. Infine, usando

$$\begin{aligned}(A_1B, \dots, (A_i + A'_i)B, \dots, A_nB = (A_1B, \dots, A_iB, \dots, A_nB)\\ + (A_1B, \dots, A'_iB, \dots, A_nB)\end{aligned}$$

e

$$(A_1B, \dots, (\lambda A_i)B, \dots, A_nB = \lambda(A_1B, \dots, A_iB, \dots, A_nB),$$

si ha anche che D è lineare sulla riga i–esima per ogni $i = 1, \dots, n$. □

Un'osservazione fondamentale per le applicazioni è il seguente immediato corollario del Teorema di Binet:

Corollario 2.2: *Sia $A \in M_n$ e $B \in GL_n$ una matrice invertibile. Allora*
(i) $\det(B^{-1}) = \frac{1}{\det(B)}$.
(i) $\det(B^{-1}AB) = \det(A)$. *In particolare matrici associata allo stesso endomorfismo, relativamente a base diverse, hanno lo stesso determinante.*

Il Teorema di Binet si applica anche alla teoria dei sistemi lineari. Tradizionalmente la teoria dei sistemi lineari veniva basata sui determinanti e lo strumento centrale era costituito dal seguente risultato che si può ricavare (vedi Abate - de Fabritiis, *Geometria analitica con elementi di algebra lineare* pg. 160) come conseguenza del Teorema di Binet:

Teorema 2.3: (di Cramer) *Siano $A = (A^1, \dots, A^n) \in GL_n$ una matrice invertibile, $b \in \mathbb{K}^n$ e $B_i \in M_n$ le matrici ottenute sostituendo la i-esima colonna di A con b: $B_i = (A^1, \dots, A^{i-1}, b, A^{i+1}, \dots, A^n)$. Allora l'unica soluzione $x = (x_1, \dots, x_n)$ del sistema $Ax = b$ è data da:*

$$x_i = \frac{\det(B_i)}{\det(A)} \qquad \forall i = 1, \dots, n. \tag{2.1}$$

In generale, per sistemi di ordine molto grande, la regola di Cramer è decisamente meno efficiente del metodo di riduzione a scala. Capita comunque che, nella pratica, occorra stare attenti come cercheremo di illustrarre con un esempio.

Esempio. Per qualunque numero k si consideri il sistema

$$\begin{cases} [(k+2)^2+1]x + (k+1)^2y = 1 \\ (k+1)^2x + (k^2+1)y = 0 \end{cases}$$

Se A è la matrice dei coefficienti del sistema si ha

$$\begin{aligned}\det(A) &= \det\begin{pmatrix} [(k+2)^2+1] & (k+1)^2 \\ (k+1)^2 & k^2+1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2(k+2) & 2k \\ (k+1)^2 & k^2+1 \end{pmatrix} \\ &= \det\begin{pmatrix} 4 & 2k \\ 2k & k^2+1 \end{pmatrix} = 4.\end{aligned}$$

Dunque, utilizzando la regola di Cramer la soluzione $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ è data da

$$x = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & (k+1)^2 \\ 0 & k^2+1 \end{pmatrix}}{\det(A)} = \frac{k^2+1}{4} \qquad y = \frac{\det\begin{pmatrix} [(k+2)^2+1] & 1 \\ (k+1)^2 & 0 \end{pmatrix}}{\det(A)} = -\frac{(k+1)^2}{4}.$$

Naturalmente si può risolvere il sistema utilizzando il metodo della riduzione a scala. Operando sulla matrice A, abbiamo la seguente riduzione di Gauss:

$$\begin{pmatrix} [(k+2)^2+1] & (k+1)^2 \\ (k+1)^2 & k^2+1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} [(k+2)^2+1] & (k+1)^2 \\ 0 & k^2+1-\frac{(k+1)^4}{(k+2)^2+1} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} (k+2)^2+1 & (k+1)^2 \\ 0 & \frac{4}{(k+2)^2+1} \end{pmatrix}.$$

Per k molto grande, procedendo come sempre nell'eliminazione di Gauss, può accadere che una calcolatrice, o anche una macchina raffinata usata in modo ingenuo, dia una seconda riga nulla come risultato (provare per credere, per calcolatrici tascabili basta prendere $k = 1000$!!!) portando quindi a una conclusione decisamente sbagliata. In effetti la ragione di questo fenomeno è molto semplice: dato che $\lim_{k\to\infty} \dfrac{4}{(k+2)^2+1} = 0$, anche se il determinante della riduzione a scala di A ha determinante 4, per k abbastanza grande, il valore di $\frac{2}{k^2+4k+5}$ (calcolato come $\frac{2}{k^2+4k+5} = k^2+1-\frac{(k+1)^4}{(k+2)^2+1}$) è tanto vicino a 0 che viene approssimato (e confuso) con 0!

Il Teorema di Cramer può essere utilizzato per dimostrare una formula per la matrice inversa. Ricordiamo che se $A \in M_n$, il *minore* (i,j) di A è la matrice $A_{ij} \in M_{n-1}$ ottenuta da A togliendo la i-esima riga e la j-esima colonna. Vale allora la seguente:

Proposizione 2.4: *Sia $A = (a_{ij}) \in GL_n$. Se $A^{-1} = (x_{ij})$ allora vale la seguente formula:*

$$x_{ij} = \frac{1}{\det(A)}(-1)^{i+j}\det(A_{ji}). \tag{2.2}$$

Dimostrazione: Come già osservato la colonna j-esima della matrice A^{-1} è la soluzione X^j del sistema $AX^j = e_j$ dove, come al solito, e_j denota il j-esimo vettore della base canonica di $\mathbb{K}^n$. Dunque, se $X^j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix}$, secondo la formula di Cramer (2.1), si ha:

$$x_{ij} = \frac{\det(B_i)}{\det(A)}$$

dove $B_i = (A^1, \dots, A^{i-1}, e_j, A^{i+1}, \dots, A^n)$. Sviluppando il determinante, si ha

$$\det(B_i) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i-1} & 0 & a_{1i+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j-11} & \dots & a_{j-1i-1} & 0 & a_{j-1i+1} & \dots & a_{j-1n} \\ a_{j1} & \dots & a_{ji-1} & 1 & a_{ji+1} & \dots & a_{jn} \\ a_{j+11} & \dots & a_{j+1i-1} & 0 & a_{j+1i+1} & \dots & a_{j+1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{11} & \dots & a_{1i-1} & 0 & a_{1i+1} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix} = (-1)^{i+j}\det(A_{ji})$$

e quindi la tesi. □

Al crescere di n, la formula (2.2) diventa rapidamente troppo complicata e quindi per calcolare l'inversa è molto più semplice utilizzare l'eliminazione di Gauss. D'altra parte per matrici di ordine 2 la (2.2) permette di scrivere l'inversa immediatamente. Se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ è invertibile, ossia se $\det(A) = ad - bc \neq 0$, allora

$$A^{-1} = \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right)^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

In molti casi risulta utile utilizzare i determinanti per calcolare il rango di una matrice. Prima un po' di nomenclatura. Sia $A = (a_{ij})$ una matrice con m righe e n colonne. Diremo che $B = (b_{kl})$ è una *sottomatrice* di ordine r di A, se esistono indici $1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq m$ e $1 \leq j_1 < \ldots < j_r \leq n$, tali che

$$b_{kl} = a_{i_k j_l} \qquad \forall \;\; k, l = 1, \ldots, r.$$

Vale il seguente risultato noto in letteratura come il "Teorema degli orlati":

Teorema 2.5: *Il rango di A è r se e solo se esiste una sottomatrice di ordine r di A con determinante diverso da* 0 *e tutte le sottomatrici di A di ordine maggiore di r hanno determinante uguale a zero.*

Per la dimostrazione si veda Abate - de Fabritiis, *Geometria analitica con elementi di algebra lineare* pg. 161.

In queste note, seguendo il testo Abate - de Fabritiis, *Geometria analitica con elementi di algebra lineare*, abbiamo introdotto il determinante in modo assiomatico ossia come una funzione che verifica certe proprietà. Questo approccio, dovuto storicamente a Weierstrass, ha il vantaggio di semplificare alcune dimostrazioni ma "nasconde" alcune importanti informazioni combinatoriche. L'impostazione classica è basata proprio su considerazioni combinatoriche. Diamo solo un veloce cenno per introdurre un'osservazione che ci sarà utile in seguito. Ricordiamo che dato l'insieme $F_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, un'applicazione biettiva $\sigma\colon F_n \to F_n$ si dice *permutazione*. Si denota con S_n il gruppo di tutte le permutazioni dell'insieme di n elementi F_n. Si vede facilmente che S_n ha $n!$ elementi. Le particolari permutazioni che lasciano fissi tutti gli elementi di F_n tranne due che vengono scambiati, si dicono *trasposizioni*. È noto che ogni permutazione σ può essere espressa come combinazione di trasposizioni. Questa espressione per σ non è unica ma si dimostra che, per ogni permutazione σ, il numero di trasposizioni che servono per ottenere σ mediante composizione è sempre o pari o dispari. Si definisce *segno della permutazione* σ il numero

$$\epsilon(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{se occorre un numero pari di trasposizioni per costruire } \sigma \\ -1 & \text{se occorre un numero dispari di trasposizioni per costruire } \sigma. \end{cases}$$

Con queste notazioni la *formula di Leibniz* per il determinante di una matrice $A = (a_{ij})$ di ordine n è data da

$$det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)}.$$

Una conseguenza immediata della formula di Leibniz è la seguente ossevazione:

Proposizione 2.6: *Il determinante di una matrice A quadrata di ordine n è somma di $n!$ addendi ciascuno dei quali ha valore assoluto uguale al valore assoluto del prodotto di n entrate della matrice A scelte una per ogni riga di A in modo che ciascuna sia su una colonna diversa.*

La Proposizione 2.6 è una ovvia conseguenza della formula di Leibniz, ma segue anche facilmente per induzione da una delle espressioni di Laplace per il determinante.