I Numeri Complessi.

Queste note, basate sugli appunti delle lezioni, riepilogano rapidamente alcune informazioni essenziali sui numeri complessi. Per una trattazione completa si veda ad esempio il Capitolo 4 del testo Abate - de Fabritiis, Geometria analitica con elementi di algebra lineare.

1. Il campo dei numeri complessi

Sull'insieme $\mathbb{R}^2$ delle coppie ordinate di numeri reali siano definite operazioni di somma e di prodotto mediante

$$(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v) \tag{1.1}$$

e

$$(x, y)(u, v) = (xu - yv, xv + yu). \tag{1.2}$$

Con le operazioni (1.1) e (1.2), $\mathbb{R}^2$ ha una struttura algebrica di campo che denoteremo $\mathbb{C}$ e chiameremo il campo dei numeri complessi. Infatti si vede subito che la somma di numeri complessi è associativa, commutativa che l'elemento neutro della somma è il numero complesso $0 = (0, 0)$. Inoltre l'opposto di (a, b) è $(-a, -b)$. Si ha inoltre che il prodotto è associativo, commutativo con elemento neutro il numero complesso $1 = (1, 0)$. Il reciproco di $(a, b) \neq (0, 0)$ è dato da

$$(a, b)^{-1} = \frac{(a, -b)}{a^2 + b^2} \tag{1.3}$$

Infine vale la proprietà distributiva

$$(a_1, b_1)((a_2, b_2) + (a_3, b_3)) = (a_1, b_1)(a_2, b_2) + (a_1, b_1)(a_3, b_3).$$

Il numero complesso $i = (0, 1)$ è tale che $i^2 = ii = -1$. A volte il numero i viene chiamato *unità immaginaria*. Evidentemente ogni numero complesso $z = (a, b)$ si ha

$$(a, b) = a + ib. \tag{1.4}$$

Allora per ogni numero complesso $z \in \mathbb{C}$ se $z = a + ib$ diremo che il numero (reale) $Re(z) = a$ è la *parte reale* di z e che il numero (reale) $Im(z) = b$ è la *parte immaginaria* di z. Il campo dei numeri reali $\mathbb{R}$ si identifica con il sottocampo di $\mathbb{C}$ dei numeri complessi con parte immaginaria nulla (al quale è ovviamente isomorfo). Diremo quindi che un numero complesso $z \in \mathbb{C}$ è *reale* se la parte immaginaria di z è nulla. Il *coniugato* di un numero complesso $z = a + ib$ è il numero $\overline{z} = a - ib$ e l'applicazione di $\mathbb{C}$ in sé definita da $z \mapsto \overline{z}$ si dice *coniugio*. Dunque $\mathbb{R}$ è esattamente l'insieme dei punti fissi del coniugio. Il coniugio è un automorfismo di $\mathbb{C}$ ossia

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w} \quad e \quad \overline{zw} = \overline{z}\ \overline{w}.$$

Inoltre il coniugio è involutivo, ossia $\overline{\overline{z}} = z$. È immediato verificare che

$$Re(z) = \frac{z + \overline{z}}{2} \quad e \quad Im(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}.$$

Il *modulo* di un numero complesso $z = a + ib$ è il numero reale

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2} = \sqrt{z\overline{z}}. \tag{1.5}$$

Segnaliamo alcune proprietà del modulo. È immediato dalla definizione che

$$|z| \geq 0 \quad e \quad |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0, \tag{1.6}$$

che

$$|zw| = |z||w|. \tag{1.7}$$

e che

$$|\overline{z}| = |z| = |-z|. \tag{1.8}$$

Dato che

$$|Re(z)|^2 \leq |Re(z)|^2 + |Im(z)|^2 = |z|^2 \qquad \text{e} \qquad |Im(z)|^2 \leq |Re(z)|^2 + |Im(z)|^2 = |z|^2$$

si ha

$$|Re(z)| \leq |z| \quad e \quad |Im(z)| \leq |z|. \tag{1.9}$$

Infine

$$|z + w| \leq |z| + |w| \quad e \quad |z - w| \geq ||z| - |w||. \tag{1.10}$$

Infatti

$$\begin{aligned} |z + w|^2 = (z + w)\overline{(z + w)} &= (z + w)(\overline{z} + \overline{w}) = |z|^2 + z\overline{w} + w\overline{z} + |w|^2 \\ &= |z|^2 + 2Re(z\overline{w}) + |w|^2 \leq |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2 \end{aligned}$$

e

$$|z| \leq |z - w| + |w| \qquad \text{e} \qquad |w| \leq |w - z| + |z| = |z - w| + |z|.$$

È molto utile rappresentare geometricamente i numeri complessi introducendo coordinate polari su $\mathbb{R}^2$. Per un punto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ abbiamo

$$(a, b) = (r \cos\theta, r \sin\theta)$$

dove $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ è la distanza di (a, b) dall'origine e, per $(a, b) \neq (0, 0)$, θ è l'angolo fra il semiasse reale positivo e la semiretta uscente dall'origine e passante per (a, b). Allora con la notazione di numero complesso, se $z = a + ib$, avremo la seguente *forma trigonometrica* per z:

$$z = |z|(\cos\theta + i \sin\theta).$$

Per $z \neq 0$ l'angolo θ è determinato a meno di multipli interi di 2π; ogni tale angolo θ si dice *argomento* di z e si scrive $\theta = \arg z$. In forma trigonometrica il prodotto di due numeri complessi ha una semplice interpretazione geometrica. Se $z = |z|(\cos\theta + i \sin\theta)$ e $w = |w|(\cos\phi + i \sin\phi)$ allora da un calcolo immediato segue

$$zw = |z||w|(\cos(\theta + \phi) + i \sin(\theta + \phi)). \tag{1.11}$$

Dunque il prodotto di due numeri complessi è il numero complesso che ha per modulo il prodotto dei moduli e per argomento la somma degli argomenti. Per evitare ambiguità in genere si fissa un intervallo di lunghezza 2π nel quale far variare l'argomento ad esempio l'intervallo $(-\pi, \pi]$. È molto utile usare la seguente notazione:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{1.12}$$

Dato che la (1.11) implica che $e^{i\theta}e^{i\phi} = e^{i(\theta+\phi)}$, la notazione (1.12)è coerente con le usuali proprietà dell'esponenziale.

Per quanto riguarda potenze (intere positive) di un numero complesso si ha il seguente elementare

Teorema 1.1: *Siano* $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) = |z|e^{i\theta} \in \mathbb{C}$ *e* $n \geq 1$ *un numero intero. Allora si ha la seguente formula di* De Moivre*:*

$$z^n = |z|^n(\cos n\theta + i\sin n\theta). \tag{1.13}$$

Dimostrazione: La (1.13) si dimostra per induzione su n usando (1.11). Evidentemente è vera per $n = 1$. Supponiamo che sia vera per $n - 1$ e calcoliamo la potenza n-esima:

$$\begin{aligned} z^n &= |z|^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n = |z|^n(\cos\theta + i\sin\theta)^{n-1}(\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= |z|^n(\cos(n-1)\theta + i\sin(n-1)\theta)(\cos\theta + i\sin\theta) = |z|^n(\cos n\theta + i\sin n\theta). \end{aligned}$$

Il campo complesso è il campo numerico “adatto” allo studio della risolubilità delle equazioni algebriche

$$P(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0 = 0. \tag{1.14}$$

Un numero complesso z_0 si dice radice del polinomio $P(z)$ se $P(z_0) = 0$.

Ricordiamo che dati dati un polinomio $P(z)$ di grado n e un polinomio $D(z)$ di grado $d \leq n$ esiste un polinomio $Q(z)$ di grado $n-d$ e un polinomio $R(z)$ di grado $r < d$ chiamato *resto* tale che

$$P(z) = Q(z)D(z) + R(z). \tag{1.15}$$

Si dice che il polinomio $Q(z)$ *divide* $P(z)$ se il resto è il polinomio nullo: $R(z) = 0$. Se z_0 è una radice del polinomio $P(z)$, allora il polinomio $z - z_0$ *divide* $P(z)$. Infatti se z_0 è una radice e si pone $D(z) = z - z_0$ in (1.14), allora $R(z)$ è un polinomio di grado 0 e quindi $R(z) = R_0$ è costante e $R_0 = P(z_0) - Q(z_0)D(z_0) = 0$. Si dice *molteplicità* della radice z_0 di $P(z)$ il più grande intero positivo m tale che $(z - z_0)^m$ divide $P(z)$. Di conseguenza un'equazione del tipo (1.14)ha *al più* n radici contate con la loro molteplicità.

Come tutti sanno un'equazione del tipo (1.14) per un polinomio con coefficienti reali non sempre ha radici reali. Invece nel campo complesso si ha il seguente importante teorema dovuto a Gauss:

Teorema 1.2: (Teorema Fondamentale dell'Algebra) *Se* $P(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$ *è un polinomio di grado* n *con coefficienti complessi, esistono esattamente* n *radici (contate con la loro molteplicità) di* $P(z)$.

Una dimostrazione di questo teorema che usa solo le nozioni di analisi matematica del primo anno si può trovare nelle pagine 80-82 di Abate - de Fabritiis. In questa sede ci accontentiamo trovare le radici di un numero complesso ossia di risolvere l'equazione $w^n = z$:

Teorema 1.3: *Sia $n \geq 1$ un numero intero. L'equazione $w^n = 0$ ha soluzione unica $w = 0$ con molteplicità n. Per $0 \not= z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) = |z|e^{i\theta} \in \mathbb{C}$, le soluzioni dell'equazione $w^n = z$ sono gli n numeri complessi distinti*

$$\begin{aligned} &w_0 = |z|^{1/n}(\cos\theta_0 + i\sin\theta_0) = |z|^{1/n}e^{i\theta_0} \\ &,\dots, \\ &w_{n-1} = |z|^{1/n}(\cos\theta_{n-1} + i\sin\theta_{n-1}) = |z|^{1/n}e^{i\theta_{n-1}} \end{aligned} \tag{1.16}$$

dove, per $j = 0, \dots, n-1$, si ha $\theta_j = \frac{\theta + 2\pi j}{n}$.

Dimostrazione: La prima parte dell'enunciato è ovvia. Per quanto riguarda la seconda si osservi che i numeri $w_0, \dots, w_{n-1}$ in (1.16) sono tutti distinti (sono i vertici di un n-ennagono regolare inscritto nel cerchio di centro l'origine e raggio $|z|^{1/n}$) e che, usando (1.13), per ogni $j = 0, \dots, n-1$ si ha immediatamente che $w_j^n = z$. $\square$