I determinanti.

Queste note, basate sugli appunti delle lezioni, riepilogano rapidamente la definizione e le proprietà del determinante. Vengono inoltre illustrati i metodi di calcolo e alcune dimostrazioni. Per una trattazione completa si veda ad esempio il Capitolo 9 del testo Abate - de Fabritiis, Geometria analitica con elementi di algebra lineare.

1. Definizione e calcolo del determinante.

Lo scopo della teoria dei determinanti è di definire una funzione, chiamata *determinante*, sullo spazio delle matrici quadrate di ordine n, per ogni n, calcolabile facendo somme e prodotti delle entrate delle matrici. In particolare si desidera che il determinante di una matrice sia non nullo se e solo se la matrice è invertibile.

Per $n = 1$, ossia per matrici di ordine 1, lo scopo si ottiene semplicemente assegnando alla matrice (a) il valore $\det(a) = a$ per ogni scalare a. Si osservi che in questo caso alla matrice unità $I_1 = (1)$ si associa il numero $\det(I_1) = 1$.

Nel caso $n = 2$, ossia per matrici di ordine 2, osserviamo che richiedere che una matrice sia invertibile è equivalente a richiedere che sue righe non siano proporzionali. Dunque

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

è non singolare se e solo se le righe (a_{11}, a_{12}) e (a_{21}, a_{22}) non sono proporzionali e questo succede se e solo se $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$. Tenendo conto di quanto detto sopra, sembra ragionevole associare alla matrice A il numero $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Si osservi che anche in questo caso questa funzione associa alla matrice unità I_2 il numero 1. Il determinante delle matrici quadrate di ordine 2 definito in questo modo ha una semplice interpretazione geometrica. Su $\mathbb{R}^2$ si considerino due vettori v, w. I vettori v, w individuano un parallelogramma che denotiamo $P(v, w)$. Se in termini della base canonica e_1, e_2 si ha $v = v_1e_1 + v_2e_2$ e $w = w_1e_1 + w_2e_2$ e

$$A = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{pmatrix},$$

allora, con una semplice verifica geometrica, si dimostra (vedi Abate - de Fabritiis, *Geometria analitica con elementi di algebra lineare* pg. 145) che

$$\det(A) = \begin{cases} Area(P(v,w)) & \text{se si passa da } v \text{ a } w \text{ ruotando in senso antiorario} \\ \\ -Area(P(v,w)) & \text{se si passa da } v \text{ a } w \text{ ruotando in senso orario.} \end{cases}$$

In questo modo si ritrova geometricamente che se le righe della matrice di A sono proporzionali allora il determinate si annulla dato che in questo caso il parallelogramma $P(v, w)$ degenera a un segmento o a un punto.

Con queste motivazioni e con l'esempio delle matrici di ordine 2 in mente, diamo ora una definizione formale. Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ e si denoti $M_n = M_{n,n}(\mathbb{K})$ lo spazio delle matrice quadrate di ordine n con elementi in $\mathbb{K}$. Se $A \in M_n$ allora si può cosiderare A come collezione di n righe $A = (A_1, \ldots, A_n)$ oppure come collezione di n colonne $A = (A^1, \ldots, A^n)$

Definizione. Per ogni $n \geq 1$ un *determinante* è una funzione $d_n \colon M_n \to \mathbb{K}$ che ha le seguenti proprietà

(A) d_n si annulla sulle matrici che hanno due righe uguali, ossia

$$d_n(A_1, \ldots, A_n) = 0 \text{ se } A_i = A_j \text{ per } i \neq j.$$

(B) d_n è lineare in ciascuna riga, ossia fissato $j \in \{1, \ldots, n\}$ si deve avere

$$d_n(A_1, \ldots, A_j + A'_j, \ldots, A_n) = d_n(A_1, \ldots, A_j, \ldots, A_n) + d_n(A_1, \ldots, A'_j, \ldots, A_n)$$

$$d_n(A_1, \ldots, \lambda A_j, \ldots, A_n) = \lambda d_n(A_1, \ldots, A_j, \ldots, A_n).$$

(C) $d_n(I_n) = 1$.

È facile controllare che il determinante che abbiamo definito per le matrici di ordine 2 verifica le condizioni (A), (B), (C) della definizione. Prima di enunciare il risultato di esistenza per matrici di ordine arbitrario, dobbiamo introdurre una notazione.

Definizione. Se $A \in M_n$, si dice *minore* (i, j) di A la matrice $A_{ij} \in M_{n-1}$ ottenuta da A togliendo la i-esima riga e la j-esima colonna.

Teorema 1.1: *Per ogni $n \geq 1$ esiste un'unica funzione determinante $d_n \colon M_n \to \mathbb{K}$ che verifica le proprietà (A), (B), (C) e vale la seguente formula per ricorrenza per ogni matrice $A = (a_{ij}) \in M_n$:*

$$d_n(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} d_{n-1}(A_{i1}). \tag{1.1}$$

Non è difficile provare che il risultato è vero per $n = 2$. Il caso generale segue argomentando per induzione (per la dimostrazione si veda Abate - de Fabritiis, *Geometria analitica con elementi di algebra lineare* pgg. 152-53)). Qui ci limitiamo a fare qualche osservazione sul calcolo del determinante e sulle sue proprietà. Infatti la formula (1.1) diventa sempre più complicata al crescere di n e, d'altra parte, non abbiamo ancora verificato che la funzione determinante costruita in questo modo è in grado di "riconoscere" le matrici invertibili. Da questo momento in poi denoteremo funzione determinante con il simbolo det e per $A \in M_n$ scriveremo $\det(A) = d_n(A)$. Abbiamo la seguente

Proposizione 1.2: *Sia $A = (A_1, \ldots, A_n) \in M_n$ una matrice quadrata di ordine n. Allora*

(i) Se A ha una riga nulla allora $\det(A) = 0$.

(ii) Il valore del determinante non cambia se si somma a una riga un multiplo di un'altra, ossia per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ e per indici $i \neq j$ si ha

$$\det(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots, A_n) = \det(A_1, \ldots, A_i + \lambda A_j, \ldots, A_j, \ldots, A_n).$$

(iii) Il valore del determinante cambia segno se si scambiano due righe:

$$\det(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots, A_n) = -\det(A_1, \ldots, A_j, \ldots, A_i, \ldots, A_n).$$

(iv) Se S è una matrice triangolare superiore ottenuta da A mediante una riduzione di Gauss che comporta σ scambi di righe, allora

$$\det(A) = (-1)^\sigma \det(S).$$

(v) Se A ha le righe linearmente dipendenti allora $\det(A) = 0$.

(vi) Se S è una matrice triangolare superiore e siano $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{K}$ gli elementi sulla diagonale di S, allora

$$\det(S) = p_1 \ldots p_n.$$

(vii) A è invertibile se e solo se $\det(A) \neq 0$.

Dimostrazione: (i) Si ha $\det(A) = \det(A_1, \ldots, A_{j-1}, 0, A_{j+1}, \ldots, A_n) = 0$ dato che det è lineare in ciascuna riga a valori in $\mathbb{K}$ e quindi vale 0 sul vettore nullo.

(ii) Ancora utilizzando la linearità su ciascuna riga e la proprietà (A) dei determinanti, se $\lambda \in \mathbb{K}$, si ha

$$\begin{aligned}\det(A_1, \ldots, A_i + \lambda A_j, \ldots, A_j, \ldots, A_n) &= \det(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots, A_n) \\ &\quad + \lambda \det(A_1, \ldots, A_j, \ldots, A_j, \ldots, A_n) \\ &= \det(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots, A_n) = \det(A).\end{aligned}$$

(iii) Si ha

$$\begin{aligned}0 &= \det(A_1, \ldots, A_i + A_j, \ldots, A_i + A_j, \ldots, A_n) \\ &= \det(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_i + A_j, \ldots, A_n) + \det(A_1, \ldots, A_j, \ldots, A_i + A_j, \ldots, A_n) \\ &= \det(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_i, \ldots, A_n) + \det(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots, A_n) \\ &\qquad + \det(A_1, \ldots, A_j, \ldots, A_i, \ldots, A_n) + \det(A_1, \ldots, A_j, \ldots, A_j, \ldots, A_n) \\ &= \det(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots, A_n) + \det(A_1, \ldots, A_j, \ldots, A_i, \ldots, A_n)\end{aligned}$$

e quindi (iii) segue.

(iv) È immediata da (ii) e(iii).

(v) Se A ha le righe linearmente dipendenti, allora una sua qualunque riduzione a scala ha una riga nulla e quindi (v) segue da (i) e (iv).

(vi) Usando la linearità del determinante nella prima riga si ha

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \\ &\quad + \det\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Dato che $\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$ ha le righe linearmente dipendenti, usado (v) e, ripetendo l'argomento, si ha

$$\begin{aligned}
\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} &= a_{11} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \\
&= a_{11} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \\
&\quad + a_{11} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \\
&= a_{11}a_{22} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} = \dots \\
&= a_{11}a_{22}\dots a_{nn} \det(I_n) = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.
\end{aligned}$$

(vii) Una matrice A è invertibile se e solo se una sua qualunque riduzione a scala ha tutti i pivot non nulli. Per (vi) questo succede se e solo se è non nullo il determinante di una qualunque riduzione a scala di A, che per (iv)ha valore assoluto uguale al valore assoluto deldeterminante di A. □

Il punto (vi) della Proposizione 1.2 fornisce un metodo di calcolo molto efficace per il determinante: è sufficiente ridurre a scala la matrice mediante una riduzione di Gauss tenendo il conto degli scambi di righe! Infatti se S è un'arbitraria riduzione a scala di A ottenuta mediante σ scambi di righe e $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{K}$ sono gli elementi sulla diagonale di S, allora, (vi) e (vi) della Proposizione 1.2 implicano che

$$\det(A) = (-1)^{\sigma} p_1 \dots p_n.$$

C'è un altro metodo di calcolo per i determinanti, i cosiddetti sviluppi di Laplace che generalizzano la formula (1.1). Precisamente abbiamo il seguente

Teorema 1.3: *Sia $A = (a_{ij}) \in M_n$ una matrice quadrata di ordine n.*

(i) per ogni $j_0 = 1, \dots, n$ fissato, vale la seguente formula detta sviluppo di Laplace del determinante lungo la colonna j_0-esima:

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j_0} a_{ij_0} det(A_{ij_0}). \tag{1.2}$$

(ii) per ogni $i_0 = 1, \ldots, n$ fissato, vale la seguente formula detta sviluppo di Laplace del determinante lungo la riga i_0-esima:

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i_0+j} a_{i_0 j} det(A_{i_0 j}). \tag{1.3}$$

Per una dimostrazione si veda Abate - de Fabritiis, *Geometria analitica con elementi di algebra lineare* pgg. 155-56. Argomentando per induzione (vedi Abate - de Fabritiis, *Geometria analitica con elementi di algebra lineare* pg. 156), dal Teorema 1.3 segue (quasi) immediatamente:

Teorema 1.4: *Sia $A \in M_n$ una matrice quadrata di ordine n. Allora* $\det(A) = \det(A^T)$.

Il Teorema 1.4 implica che gli enunciati riguardanti il determinante espressi in termini di righe si possono riformulare in termini di colonne. In particolare il determinante è una funzione lineare in ciascuna colonna e vale la seguente:

Proposizione 1.5: *Sia $A = (A^1, \ldots, A^n) \in M_n$ una matrice quadrata di ordine n.*

(i) Se A ha una colonna nulla allora $\det(A) = 0$.

(ii) Il valore del determinante non cambia se si somma a una colonna un multiplo di un'altra, ossia per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ e per indici $i \neq j$ si ha

$$\det(A^1, \ldots, A^i, \ldots, A^j, \ldots, A^n) = \det(A^1, \ldots, A^i + \lambda A^j, \ldots, A^j, \ldots, A^n).$$

(iii) Il valore del determinante cambia segno se si scambiano due colonne:

$$\det(A^1, \ldots, A^i, \ldots, A^j, \ldots, A^n) = -\det(A^1, \ldots, A^j, \ldots, A^i, \ldots, A^n).$$

Concludiamo il paragrafo calcolando in due modi diversi il determinante di una matrice.

Esempio. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il determinante di A riducendola a scala mediante un'eliminazione di Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & -5 & -6 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{\text{scambio}\\ \text{di righe}}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -5 & -6 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -11 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{\text{scambio}\\ \text{di righe}}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -11 & -12 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 21 \end{pmatrix}.$$

Dunque, utilizzando Proposizione 1.2 e osservando che nella riduzione a scala abbiamo operato 2 scambi di righe, possiamo concludere che

$$\det(A) = (-1)^2(1 \cdot -1 \cdot 1 \cdot -2 \cdot 21) = 42.$$

Calcoliamo ora il determinante di A combinando le altre tecniche che abbiamo introdotto:

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \underset{\substack{\text{sommando alle altre}\\ \text{multipli prima riga}}}{=} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & -5 & -6 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{\text{sviluppo di Laplace}\\ \text{prima colonna}}}{=} (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 2 \\ -5 & -5 & -6 & -2 \\ -1 & -1 & -1 & -4 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{\text{sottraendo prima}\\ \text{colonna alla seconda}}}{=} \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ -5 & 0 & -6 & -2 \\ -1 & 0 & -1 & -4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{\text{sviluppo di Laplace}\\ \text{seconda colonna}}}{=} (-1)^{2+1} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -5 & -6 & -2 \\ -1 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{\text{sommando terza}\\ \text{riga alla seconda}}}{=} -\det \begin{pmatrix} -5 & -6 & -2 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{\substack{\text{sottraendo prima}\\ \text{colonna alla terza}}}{=} -\det \begin{pmatrix} -5 & -6 & 3 \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{\text{sviluppo di Laplace}\\ \text{seconda riga}}}{=} -(-1)^{1+2}(-2)\det \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = (-2)(-18-3) = 42.$$

2. Determinante e prodotti di Matrici.

Il determinante rispetta la struttura moltiplicativa delle matrici. Vale infatti il seguente importante:

Teorema 2.1: (di Binet) *Siano* $A, B \in M_n$. *Allora* $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Dimostrazione: Se $\det(B) = 0$ la tesi è immediata. In questo caso infatti la matrice B non è invertibile e quindi esiste un vettore $v \neq 0_n$ in $\mathbb{K}^n$ tale che $Bv = 0_n$. Dunque si ha anche $ABv = 0_n$ e quindi la matrice AB non è invertibile e $\det(AB) = 0 = \det(A)\det(B)$. Supponiamo allora che $\det(B) \neq 0$. Si definisca la funzione $D\colon M_n \to \mathbb{K}$ mediante

$$D(A) = \frac{\det(AB)}{\det(B)}.$$

La tesi seguirà anche in questo caso provando che $D(A) = \det(A)$. A tal fine basterà dimostrare che la funzione D verifica le condizioni (A), (B(, (C) della definizione di determinante. Dato che $D(I_n) = \frac{\det(I_n B)}{\det(B)} = \frac{\det(B)}{\det(B)} = 1$ e quindi (C) è immediato. Se la matrice $A = (A_1, \dots, A_n$ ha una riga nulla $A_i = 0$ allora, dato che

$$AB = (A_1B, \dots, A_{i-1}B, 0B, A_{i+1}B, \dots, A_nB = (A_1B, \dots, A_{i-1}B, 0, A_{i+1}B, \dots, A_nB),$$

anche AB ha una riga nulla e quindi $D(A) = 0$. Infine, usando

$$\begin{aligned}(A_1B, \dots, (A_i + A_i')B, \dots, A_nB &= (A_1B, \dots, A_iB, \dots, A_nB)\\ &\quad + (A_1B, \dots, A_i'B, \dots, A_nB)\end{aligned}$$

e

$$(A_1B, \dots, (\lambda A_i)B, \dots, A_nB = \lambda(A_1B, \dots, A_iB, \dots, A_nB),$$

si ha anche che D è lineare sulla riga i–esima per ogni $i = 1, \dots, n$. □

Un'osservazione fondamentale per le applicazioni è il seguente immediato corollario del Teorema di Binet:

Corollario 2.2: *Sia* $A \in M_n$ *e* $B \in GL_n$ *una matrice invertibile. Allora*
(i) $\det(B^{-1}) = \frac{1}{\det(B)}$.
(i) $\det(B^{-1}AB) = \det(A)$. *In particolare matrici associata allo stesso endomorfismo, relativamente a base diverse, hanno lo stesso determinante.*

Il Teorema di Binet si applica anche alla teoria dei sistemi lineari. Tradizionalmente la teoria dei sistemi lineari veniva basata sui determinanti e lo strumento centrale era costituito dal seguente risultato che si può ricavare (vedi Abate - de Fabritiis, *Geometria analitica con elementi di algebra lineare* pg. 160) come conseguenza del Teorema di Binet:

Teorema 2.3: (di Cramer) *Siano* $A = (A^1, \dots, A^n) \in GL_n$ *una matrice invertibile,* $b \in \mathbb{K}^n$ *e* $B_i \in M_n$ *le matrici ottenute sostituendo la i-esima colonna di* A *con* b*:* $B_i = (A^1, \dots, A^{i-1}, b, A^{i+1}, \dots, A^n)$. *Allora l'unica soluzione* $x = (x_1, \dots, x_n)$ *del sistema* $Ax = b$ *è data da:*

$$x_i = \frac{\det(B_i)}{\det(A)} \qquad \forall i = 1, \dots, n. \tag{2.1}$$

In generale, per sistemi di ordine molto grande, la regola di Cramer è decisamente meno efficiente del metodo di riduzione a scala. Capita comunque che, nella pratica, occorra stare attenti come cercheremo di illustrarre con un esempio.

Esempio. Per qualunque numero k si consideri il sistema

$$\begin{cases} [(k+2)^2+1]x + (k+1)^2 y = 1 \\ (k+1)^2 x + (k^2+1) y = 0 \end{cases}$$

Se A è la matrice dei coefficienti del sistema si ha

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} [(k+2)^2+1] & (k+1)^2 \\ (k+1)^2 & k^2+1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2(k+2) & 2k \\ (k+1)^2 & k^2+1 \end{pmatrix}$$
$$= \det\begin{pmatrix} 4 & 2k \\ 2k & k^2+1 \end{pmatrix} = 4.$$

Dunque, utilizzando la regola di Cramer la soluzione $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ è data da

$$x = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & (k+1)^2 \\ 0 & k^2+1 \end{pmatrix}}{\det(A)} = \frac{k^2+1}{4} \qquad y = \frac{\det\begin{pmatrix} [(k+2)^2+1] & 1 \\ (k+1)^2 & 0 \end{pmatrix}}{\det(A)} = -\frac{(k+1)^2}{4}.$$

Naturalmente si può risolvere il sistema utilizzando il metodo della riduzione a scala. Operando sulla matrice A, abbiamo la seguente riduzione di Gauss:

$$\begin{pmatrix} [(k+2)^2+1] & (k+1)^2 \\ (k+1)^2 & k^2+1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} [(k+2)^2+1] & (k+1)^2 \\ 0 & k^2+1-\frac{(k+1)^4}{(k+2)^2+1} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} (k+2)^2+1 & (k+1)^2 \\ 0 & \frac{4}{(k+2)^2+1} \end{pmatrix}.$$

Per k molto grande, procedendo come sempre nell'eliminazione di Gauss, può accadere che una calcolatrice, o anche una macchina raffinata usata in modo ingenuo, dia una seconda riga nulla come risultato (provare per credere, per calcolatrici tascabili basta prendere $k = 1000$!!!) portando quindi a una conclusione decisamente sbagliata. In effetti la ragione di questo fenomeno è molto semplice: dato che $\lim_{k\to\infty} \frac{4}{(k+2)^2+1} = 0$, anche se il determinante della riduzione a scala di A ha determinante 4, per k abbastanza grande, il valore di $\frac{2}{k^2+4k+5}$ (calcolato come $\frac{2}{k^2+4k+5} = k^2+1-\frac{(k+1)^4}{(k+2)^2+1}$) è tanto vicino a 0 che viene approssimato (e confuso) con 0!

Il Teorema di Cramer può essere utilizzato per dimostrare una formula per la matrice inversa. Ricordiamo che se $A \in M_n$, il *minore* (i,j) di A è la matrice $A_{ij} \in M_{n-1}$ ottenuta da A togliendo la i-esima riga e la j-esima colonna. Vale allora la seguente:

Proposizione 2.4: *Sia $A = (a_{ij}) \in GL_n$. Se $A^{-1} = (x_{ij})$ allora vale la seguente formula:*

$$x_{ij} = \frac{1}{\det(A)}(-1)^{i+j}\det(A_{ji}). \tag{2.2}$$

Dimostrazione: Come già osservato la colonna j-esima della matrice A^{-1} è la soluzione X^j del sistema $AX^j = e_j$ dove, come al solito, e_j denota il j-esimo vettore della base canonica di $\mathbb{K}^n$. Dunque, se $X^j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix}$, secondo la formula di Cramer (2.1), si ha:

$$x_{ij} = \frac{\det(B_i)}{\det(A)}$$

dove $B_i = (A^1, \dots, A^{i-1}, e_j, A^{i+1}, \dots, A^n)$. Sviluppando il determinante, si ha

$$\det(B_i) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i-1} & 0 & a_{1i+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j-11} & \dots & a_{j-1i-1} & 0 & a_{j-1i+1} & \dots & a_{j-1n} \\ a_{j1} & \dots & a_{ji-1} & 1 & a_{ji+1} & \dots & a_{jn} \\ a_{j+11} & \dots & a_{j+1i-1} & 0 & a_{j+1i+1} & \dots & a_{j+1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{11} & \dots & a_{1i-1} & 0 & a_{1i+1} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix} = (-1)^{i+j} \det(A_{ji})$$

e quindi la tesi. □

La formula (2.2) diventa al crescere di n rapidamente troppo complicata e quindi per calcolare l'inversa è molto più semplice utilizzare l'eliminazione di Gauss. D'altra parte per matrici di ordine 2 la (2.2) permette di scrivere l'inversa immediatamente. Se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ è invertibile, ossia se $\det(A) = ad - bc \neq 0$, allora

$$A^{-1} = \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right)^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Concludiamo queste note citando un teorema che in molti casi risulta utile per calcolare il rango di una matrice. Prima un po' di nomenclatura. Sia $A = (a_{ij})$ una matrice con m righe e n colonne. Diremo che $B = (b_{kl})$ è una *sottomatrice* di ordine r di A, se esistono indici $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq m$ e $1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq n$, tali che

$$b_{kl} = a_{i_k j_l} \quad \forall \;\; k, l = 1, \dots, r.$$

Teorema 2.5: *Il rango di A è r se e solo se esiste una sottomatrice di ordine r di A con determinante diverso da 0 e tutte le sottomatrici di A di ordine maggiore di r hanno determinante uguale a zero.*

Per la dimostrazione si veda Abate - de Fabritiis, *Geometria analitica con elementi di algebra lineare* pg. 161.