

Consigli per la risoluzione dei problemi

Una parte fondamentale di ogni corso di Fisica è la risoluzione di problemi. Risolvere problemi spinge a ragionare su idee e concetti e a comprenderli meglio attraverso la loro applicazione. Gli esempi qui riportati sono stati proposti agli studenti di Fisica Generale I negli ultimi anni come prove scritte d'esame. Essi illustrano, in ogni capitolo, casi tipici di risoluzione di problemi.

Il sommario all'inizio di ogni capitolo offre un breve quadro d'insieme delle idee più importanti per la soluzione dei problemi di quel capitolo. Benchè tale quadro sia molto utile come promemoria, per una adeguata comprensione degli argomenti si consiglia di utilizzare il testo di Fisica Generale I consigliato dal docente.

Riguardo alla soluzione dei problemi di Fisica, si consiglia quanto segue:

- 1) Leggere attentamente il testo del problema.
- 2) Preparare un elenco completo delle quantità date (note) e di quelle cercate (incognite)
- 3) Disegnare uno schema o un diagramma accurato della situazione. Nei problemi di dinamica, assicurarsi di aver disegnato tutte le forze che agiscono su un dato corpo (diagramma di corpo libero).
- 4) Dopo aver deciso quali condizioni e principi fisici utilizzare, esaminare le relazioni matematiche che sono valide nelle condizioni date. Assicurarsi sempre che tali relazioni siano applicabili al caso in esame. E' molto importante sapere quali sono le limitazioni di validità di ogni relazione o formula.
- 5) Molte volte le incognite sembrano troppe rispetto al numero di equazioni. In tal caso è bene chiedersi, ad esempio:
 - a) esistono altre relazioni matematiche ricavabili dalle condizioni del problema?
 - b) è possibile combinare alcune equazioni per eliminare alcune incognite?
- 6) E' buona norma risolvere tutte le equazioni algebricamente e sostituire i valori numerici soltanto alla fine. Conviene anche mantenere traccia delle unità di misura, poichè questo può servire come controllo.
- 7) Controllare se la soluzione trovata è dimensionalmente corretta.
- 8) Arrotondare il risultato finale allo stesso numero di cifre significative che compaiono nei dati del problema.
- 9) Ricordare che per imparare a risolvere bene i problemi è necessario risolverne tanti: la risoluzione dei problemi spesso richiede creatività, ma qualche volta si riuscirà a risolvere un problema prendendo spunto da un altro già risolto.

I - Cinematica del punto materiale

La cinematica degli oggetti puntiformi descrive il moto dei punti materiali.

La descrizione del moto di ogni punto materiale deve sempre essere fatta in relazione ad un particolare sistema di riferimento.

La posizione di un oggetto che si muove lungo una retta è data dall'equazione oraria:

$$x = x(t)$$

Si definiscono la velocità istantanea:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

e l'accelerazione istantanea:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

Se un oggetto si muove lungo una retta con accelerazione costante (moto uniformemente accelerato) si ha:

$$a = cost$$

e per integrazione, ponendo $v = v_0$ e $x = x_0$ per l'istante iniziale $t = t_0 = 0$, si otterrà:

$$v = v_0 + at$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

Gli oggetti che si muovono verticalmente vicino alla superficie terrestre, sia che cadano o che siano lanciati verticalmente verso l'alto o verso il basso, si muovono (se si può trascurare l'effetto della resistenza dell'aria) con accelerazione costante rivolta verso il basso. Questa accelerazione è dovuta alla gravità, ed è pari a circa $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

In generale, se \vec{r} è il vettore posizione del punto materiale, la velocità e l'accelerazione vettoriale istantanea sono date da:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \text{e} \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} .$$

Le equazioni cinematiche per il moto possono essere scritte per ciascuna delle componenti x , y e z , ossia:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} \\ \vec{v} &= v_x\hat{x} + v_y\hat{y} + v_z\hat{z} \\ \vec{a} &= a_x\hat{x} + a_y\hat{y} + a_z\hat{z} . \end{aligned}$$

Riassumiamo qui i casi più semplici:

Il moto dei proiettili si può scomporre, se si trascura la resistenza dell'aria, in due moti separati: la componente orizzontale del moto che ha velocità costante e la componente verticale che ha accelerazione costante e pari a g , come per i corpi in caduta libera (fintanto che il moto si svolge in prossimità della superficie terrestre).

Si ha un moto circolare uniforme quando una particella si muove lungo una circonferenza di raggio r con velocità costante; la particella sarà allora soggetta ad un'accelerazione radiale centripeta a_r , diretta verso il centro del cerchio, di intensità:

$$a_r = \frac{v^2}{r}$$

Se la velocità non è costante, vi sarà accelerazione sia centripeta sia tangenziale. Il moto circolare può anche essere scritto in termini di variabili angolari. In questo caso l'equazione oraria sarà

$$\theta = \theta(t)$$

con θ angolo misurato (in radianti) a partire da una data direzione di riferimento. La velocità angolare è data da:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

e l'accelerazione angolare da:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

La velocità e l'accelerazione lineare di un punto che si muove lungo una circonferenza di raggio r sono legate a ω e α da:

$$v = r\omega \quad a_t = r\alpha \quad a_r = r\omega^2$$

dove a_t e a_r sono le componenti tangenziale e radiale dell'accelerazione. La frequenza f è legata ad ω da $\omega = 2\pi f$ e al periodo T da $T = 1/f$.

Problema 1

Il sistema, mostrato in figura, è costituito da una massa m appoggiata su una guida rettilinea inclinata di un angolo θ rispetto all'orizzontale.

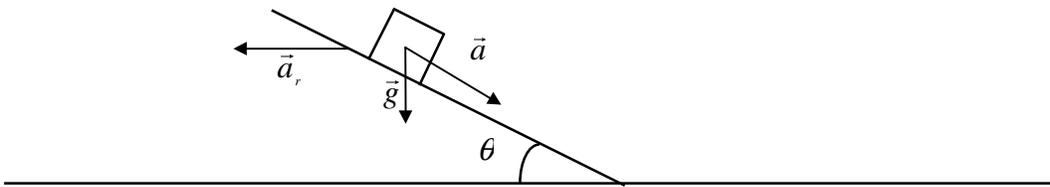
Calcolare l'accelerazione \vec{a}_i con la quale deve muoversi la guida orizzontalmente affinché la massa m cada verticalmente con accelerazione pari a \vec{g} .

$$[\theta = 30^\circ; g = 9.8 \text{ m/s}^2]$$

Suggerimento: tenere conto che \vec{g} è diretta solo verticalmente, mentre \vec{a}_i è diretta solo orizzontalmente.

Soluzione:

L'accelerazione della massa è \vec{g} rispetto ad un osservatore inerziale, e \vec{a} rispetto ad un riferimento non inerziale solidale con la guida.



L'accelerazione di gravità nel riferimento solidale con la guida è:

$$\vec{g}' = \vec{g} - \vec{a}_i$$

Indicato con a il modulo dell'accelerazione della massa nel riferimento solidale con la guida vale:

$$a = g \sin\theta + a_i \cos\theta$$

La componente orizzontale di \vec{a} deve equilibrare \vec{a}_i , quindi:

$$a_i = a \cos^2\theta + g \sin\theta \cos\theta$$

cioè:

$$a_i = \frac{g}{\tan\theta} = 5,7 \text{ m/s}^2$$

rivolta all'indietro.

Soluzione alternativa:

L'accelerazione totale deve essere \vec{g} , quindi deve valere:

$$\vec{g} = \vec{a} + \vec{a}_t$$

scrivendo quest'equazione in componenti si ottiene facilmente che:

$$a_t = \frac{g}{\operatorname{tg}\theta} = 5,7 \text{ m/s}^2$$

dove a e g sono i moduli delle accelerazioni.

Problema 2

Una palla è lanciata in avanti e verso l'alto da una quota h_0 sopra il suolo con velocità iniziale \vec{v}_0 . La palla rimbalza elasticamente (invertendo la componente orizzontale della velocità e mantenendo inalterata quella verticale) su un muro verticale posto alla distanza d dal lanciatore.

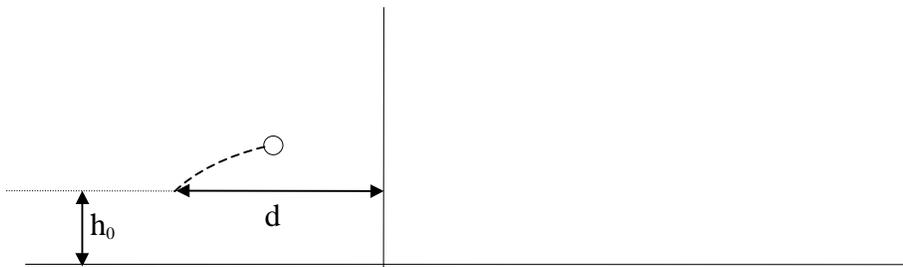
A quale altezza h dal suolo la palla colpisce il muro?

A quale altezza h' si trova la palla quando è di nuovo sulla verticale del lanciatore (che rimane fermo)?

Qual è la quota massima h_{max} raggiunta dalla palla?

Quesito: h_{max} è la stessa che sarebbe raggiunta se non ci fosse la parete verticale. Perché?

$$[h_0 = 2 \text{ m}; d = 4 \text{ m}; \vec{v}_0 = (10\hat{x} + 10\hat{y}) \text{ m/s}]$$



Soluzione:

a) La componente orizzontale della velocità v_{0x} è costante, quindi la palla raggiunge il muro nel tempo:

$$t = \frac{d}{v_{0,x}} = 0,4 \text{ s.}$$

In direzione verticale è l'accelerazione ad essere costante: $\vec{g} = -9,8 \hat{y} \text{ m/s}^2$. Perciò:

$$h = h_0 + v_{0,y} \frac{d}{v_{0,x}} - \frac{1}{2} g \left(\frac{d}{v_{0,x}} \right)^2 = 5,2 \text{ m}$$

b) La palla torna sul lanciatore dopo altri 0,4 s.

La componente verticale del moto è ancora uniformemente accelerata con velocità iniziale $v'_{0,y} = 6,08 \text{ m/s}$, e quota iniziale $h'_0 = 5,2 \text{ m}$.

Perciò la nuova quota è $h' = 6,9 \text{ m}$.

c) La quota massima h_{max} viene raggiunta quando la componente verticale della velocità si annulla (ciò avviene dopo il rimbalzo).

Essa è perciò data da:

$$h_{max} = h_0 + \frac{v_{0,y}^2}{2g} = 7,1 \text{ m.}$$

Risposta al quesito: h_{max} è la stessa che sarebbe raggiunta se non ci fosse la parete verticale, perché l'urto con tale parete non altera la componente verticale del moto.

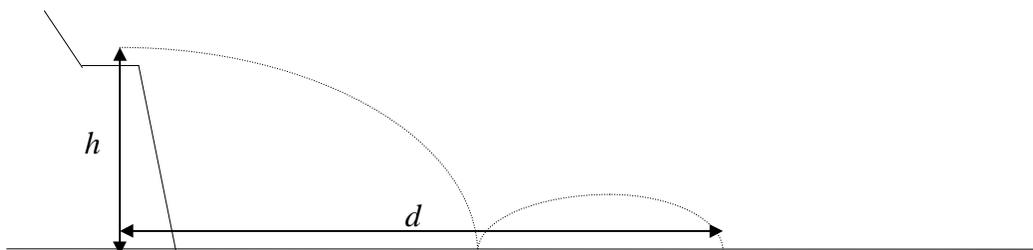
Problema 3

Un vecchio cannone viene fatto sparare orizzontalmente dalla cima di una montagna e la velocità \vec{v} della palla viene regolata in modo tale da farle colpire un bersaglio posto nella pianura sottostante solo al secondo rimbalzo. Nel rimbalzo la componente verticale della velocità $v_{0,y}$ si riduce di un fattore f e la componente orizzontale v_x rimane costante.

Qual è la velocità v_0 di uscita della palla del cannone per poter colpire un bersaglio distante d , se la montagna sulla cui cima è situato il cannone è alta h ?

Qual è la velocità v_0 di uscita della palla se si vuole colpire il bersaglio direttamente?

[$f=0,6$; $h = 1 \text{ km}$; $d = 9 \text{ km}$]



Suggerimento: calcolare la durata del moto in verticale ed ricordare che in tale tempo viene percorsa orizzontalmente la distanza d .

Soluzione:

a) La componente orizzontale del moto si mantiene costantemente uniforme, per cui basta calcolare la durata del moto verticale ed imporre che $d = v_x t$, cioè $v_x = d/t$.

Il primo impatto avviene dopo il tempo t_1 :

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 10\sqrt{2} \text{ s} = 14,1 \text{ s}$$

mentre il secondo impatto avviene con un ritardo t_2 :

$$t_2 = \frac{2v_y}{g} = 12\sqrt{2} \text{ s} = 17 \text{ s},$$

dove v_y è quella subito dopo l'urto:

$$v_y = g t_1 = 60\sqrt{2} = 84,9 \text{ m/s}.$$

Quindi:

$$v_x = \frac{d}{t_1 + t_2} = 289,3 \text{ m/s}.$$

b) La componente verticale del moto è uniformemente accelerata con accelerazione $\vec{g} = -9,8\hat{y} \text{ m/s}^2$, perciò il tempo impiegato dalla palla per raggiungere il suolo è:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

In questo tempo la palla percorre orizzontalmente la distanza $d = v_x t = 9 \text{ km}$, cioè:

$$v_x = \frac{d}{t} = d \sqrt{\frac{g}{2h}} = 630 \text{ m/s}.$$

II - Dinamica del punto

Le tre leggi del moto di Newton sono le leggi fondamentali per la descrizione del moto stesso.

La **prima legge di Newton** afferma che, se la forza risultante su un corpo puntiforme è zero, allora esso resta in quiete o si muove lungo una linea retta con velocità costante (moto rettilineo uniforme). La tendenza di un corpo a resistere ad un cambiamento del suo stato di moto si chiama inerzia. La massa è la misura dell'inerzia di un corpo.

La **seconda legge del moto di Newton** afferma che l'accelerazione di un corpo è direttamente proporzionale alla forza risultante che agisce su di esso e inversamente proporzionale alla sua massa. Sotto forma di equazione:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

La forza risultante su un oggetto indica il vettore somma di tutte le forze che agiscono su di esso. Nella sua formulazione più generale, la seconda legge di Newton afferma che la forza risultante agente su un corpo di massa m e velocità \vec{v} è data da:

$$\vec{F} = \frac{dm\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

ove $\vec{p} = m\vec{v}$ è la quantità di moto del corpo.

Solitamente (ma ci sono eccezioni) un corpo non perde né acquista massa durante il moto, e quindi vale

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}, \text{ come sopra.}$$

Se invece la massa del corpo è variabile, si avrà:

$$\vec{F} = m\vec{a} + \frac{dm}{dt}\vec{v}$$

La **terza legge del moto di Newton** afferma che se un primo corpo esercita una forza su un secondo corpo, allora il secondo corpo esercita sempre sul primo una forza uguale in intensità e direzione, ma di verso contrario.

La forza esercitata su un corpo dalla superficie liscia su cui è appoggiato agisce perpendicolarmente alla comune superficie di contatto e per questo si dice che è una forza normale. E' un tipo di forza vincolare, perché limita la libertà di movimento del corpo e la sua intensità dipende dalle altre forze che agiscono su quel corpo.

Per risolvere i problemi in cui compaiono forze su uno o più corpi è essenziale disegnare il diagramma di corpo libero per ogni singolo corpo, mettendo in evidenza tutte le forze che agiscono su quel corpo. Per ogni corpo la seconda legge di Newton può essere applicata a ciascuna componente della forza risultante.

Alcune forze importanti sono:

Forza peso. Il peso si riferisce alla forza di gravità che agisce su un dato corpo e vale $P = mg$; vettorialmente: $\vec{P} = -m\vec{g}$

Forza d'attrito. Quando un corpo è in movimento su una superficie scabra, la forza dovuta all'attrito (radente) dinamico agisce nella direzione opposta a quella del moto. La sua intensità è data da: $F_{ad} = \mu_d F_N$, relazione tra l'intensità della forza d'attrito, che agisce parallelamente alla superficie di contatto e l'intensità della forza normale F_N (spesso indicata anche con N) che agisce perpendicolarmente alla superficie stessa. Non è un'equazione vettoriale, poiché le due forze sono perpendicolari l'una all'altra. μ_d è detto coefficiente di attrito dinamico e dipende dai materiali con cui sono fatti i due oggetti. Per la forza d'attrito (radente) statico, il suo valore massimo è dato da: $F_{as} = \mu_s F_N$ con μ_s coefficiente d'attrito statico. Quando un corpo si muove con velocità sufficientemente bassa attraverso un fluido, subisce una forza d'attrito viscoso diretta nel verso opposto a quello del moto. La sua intensità è data da: $F_{av} = -\beta v$.

Forza elastica. Per tenere una molla compressa o tesa di una lunghezza x oltre quella di riposo è necessaria una forza:

$$\vec{F} = -k\vec{x}$$

dove k è la costante elastica della molla. Questa legge, nota come legge di Hooke, è valida per valori di x sufficientemente piccoli.

Forza centripeta. Una particella che ruota lungo una circonferenza di raggio r con velocità costante v è sottoposta in ogni momento ad una forza diretta verso il centro della traiettoria. Essa vale:

$$F = m \frac{v^2}{r} = m\omega^2 r; \text{ vettorialmente } \vec{F} = -m \frac{v^2}{r} \hat{r} = m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

Problema 1

Un uomo tira una slitta, inizialmente ferma, su cui siedono due bambini, sul suolo coperto di neve. La slitta viene tirata mediante una fune che forma un angolo θ con l'orizzontale (vedi figura). La massa totale dei bambini è M , mentre quella della slitta è m . Il coefficiente di attrito statico è μ_s , mentre il coefficiente di attrito dinamico è μ_d .

Si trovino la forza di attrito esercitata dal suolo sulla slitta e l'accelerazione del sistema slitta-bambini se la tensione \vec{T} della fune ha l'intensità:

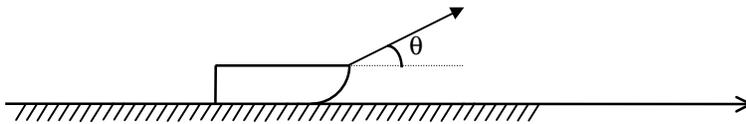
$$T = 100 \text{ N};$$

$$T = 140 \text{ N}.$$

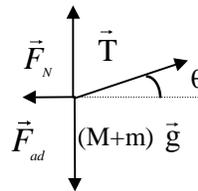
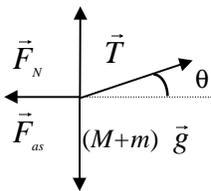
Mantenendo fisso l'angolo θ , determinare il valore minimo di T per sollevare totalmente la slitta.

[$\theta = 40^\circ$; $M = 45 \text{ kg}$; $m = 5 \text{ kg}$; $\mu_s = 0,20$; $\mu_d = 0,15$]

Suggerimento: disegnare il diagramma di corpo libero del sistema slitta-bambini, imporre la condizione di equilibrio per le componenti y delle forze e scrivere l'equazione del moto per le componenti x .



Soluzione:



Diagrammi di corpo libero

I) La forza normale al suolo è:

$$F_N = (M + m)g - T \sin \theta = 425,7 \text{ N.}$$

Quindi la forza di attrito statico è:

$$F_{as} = \mu_s F_N = \mu_s [(M + m)g - T \sin \theta] = 85,1 \text{ N,}$$

mentre la forza di attrito dinamico è:

$$F_{ad} = \mu_d F_N = \mu_d [(M + m)g - T \sin \theta] = 63,9 \text{ N.}$$

La componente orizzontale delle tensioni è $T_x = T \cos \theta = 76,6 \text{ N} < F_{as}$, per cui l'accelerazione è nulla.

II) La forza normale al suolo è:

$$F_N = (M + m)g - T \sin \theta = 400 \text{ N.}$$

Quindi la forza di attrito statico è:

$F_{as} = \mu_s F_N = \mu_s [(M + m)g - T \sin \theta] = 80 \text{ N}$, mentre la forza di attrito dinamico è:

$$F_{ad} = \mu_d F_N = \mu_d [(M + m)g - T \sin \theta] = 60 \text{ N}.$$

La componente orizzontale della tensione è $T_x = T \cos \theta = 107,2 \text{ N} > F_{as}$, quindi la slitta si muove con accelerazione

$$a = \frac{T \cos \theta - \mu_d [(M + m)g - T \sin \theta]}{M + m} = 0,9 \text{ m/s}^2.$$

Il valore di T per sollevare la slitta è quello che annulla \vec{F}_N :

$$T = \frac{(M + m)g}{\sin \theta} = 762,3 \text{ N}.$$

Problema 2

Due masse m_1 ed m_2 giacciono su un piano senza attrito e vengono spinte da una forza applicata dall'esterno \vec{F}_1 , che si esercita sulla massa m_1 (come in figura 1).

Si determinino intensità e direzione di ciascuna delle forze di interazione tra m_1 ed m_2 .

Supponendo che venga eliminata la forza \vec{F}_1 e che sulla massa m_2 agisca la forza applicata dall'esterno $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$ (figura 2), si determinino intensità e direzione di ciascuna delle forze di interazione in quest'ultimo caso.

Si spieghi perché il modulo delle forze di interazione è diverso nei due casi.

$$[F_1 = 12 \text{ N}; m_1 = 4 \text{ kg}; m_2 = 2 \text{ kg}; F_2 = 12 \text{ N}]$$

Suggerimento: si scriva l'equazione del moto considerando il punto materiale di massa $(m_1 + m_2)$. Si scrivano quindi le equazioni di corpo libero per ciascuna massa.

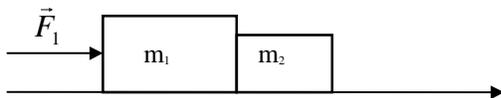


Fig. 1

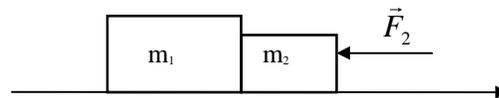
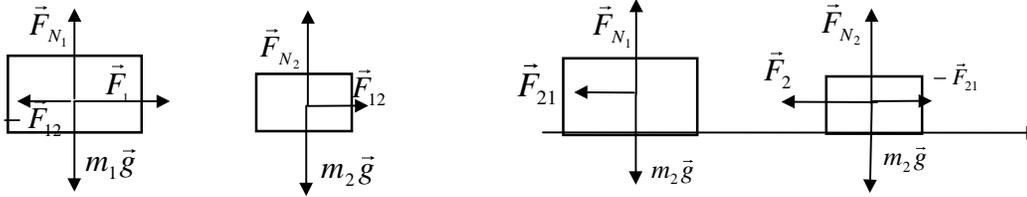


Fig. 2

Soluzione:



Diagrammi di corpo libero

a) L'accelerazione di m_1 ed m_2 è:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_1}{m_1 + m_2} = 2 \text{ m/s}^2$$

Ma allora la forza di interazione F_{12} esercitata da m_1 su m_2 vale $m_2 a = 4 \text{ N}$, mentre per il principio di azione e reazione la forza di interazione F_{21} esercitata da m_2 su m_1 vale $F_{21} = -F_{12} = 4 \text{ N}$

b) L'accelerazione vale ancora 2 m/s^2 , ma questa volta su m_2 agisce anche la forza $F_2 = -F_1$. quindi ora è $F_{21} = m_1 a = -8 \text{ N}$, ed $F_{12} = -F_{21} = 8 \text{ N}$.

c) In base alla seconda legge del moto di Newton la forza totale agente su ciascuna delle due masse è la stessa (a meno del verso) nei due casi esaminati. Però una delle due masse è accelerata dalla sola forza di interazione, e nel secondo caso si tratta della massa maggiore. E' ovvio che per produrre la stessa accelerazione in una massa maggiore, occorre una forza maggiore.

Problema 3

Una palla di massa m è fissata ad una sbarra verticale per mezzo di due funi prive di massa e lunghe ℓ . Le funi sono fissate alla sbarra a distanza d l'una dall'altra. Il sistema ruota attorno alla sbarra in modo da formare un triangolo equilatero (vedi figura). La tensione della fune più alta è \vec{T}_1 . Determinare:

la tensione \vec{T}_2 della fune in basso;

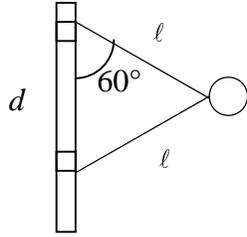
la risultante delle forze applicate alla palla nell'istante mostrato in figura;

la velocità della palla.

Studiare il problema sia dal punto di vista di un osservatore inerziale, sia dal punto di vista di un osservatore solidale con la palla.

$$[m = 1,34 \text{ kg}; \ell = 1,70 \text{ m}; d = 1,70 \text{ m}; T_1 = 35,0 \text{ N}]$$

Suggerimento: disegnare il diagramma di corpo libero per il punto materiale in ciascuno dei riferimenti utilizzati.



Soluzione:

La differenza fra ciò che vede un osservatore inerziale rispetto ad uno non inerziale solidale con la palla è che mentre quest'ultimo vede la palla ferma mantenuta in equilibrio da una forza **centrifuga** $\vec{F}_{c.f.}$, l'osservatore inerziale vede la palla in moto circolare uniforme, sottoposta ad un'accelerazione **centripeta**.

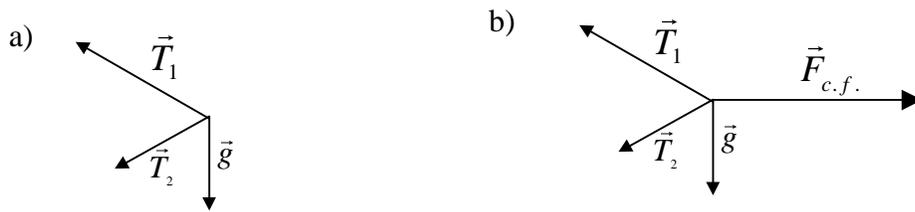


Diagramma di corpo libero a) nel riferimento inerziale e b) nel riferimento non inerziale solidale con la palla

a) Nel riferimento non inerziale, la tensione \vec{T}_2 bilancia la risultante di \vec{T}_1 , della forza centrifuga e della forza peso:

$$\vec{T}_2 + \vec{T}_1 + m \frac{v^2}{\ell \frac{\sqrt{3}}{2}} \hat{r} + m\vec{g} = 0$$

dove si è tenuto conto che il triangolo è equilatero e che $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

La componente verticale dell'equazione non contiene la forza centrifuga:

$$\frac{T_2}{2} = \frac{T_1}{2} - mg$$

dove si è utilizzata la nota relazione $\cos 60^\circ = 0,5$. Si trova dunque il modulo $T_2 = 8,7$ N.

b) Nel riferimento non inerziale la risposta è banale: zero.

Nel riferimento inerziale, invece, la risultante delle forze applicate alla palla è la forza centripeta:

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + m\vec{g} = -\frac{mv^2}{\ell \frac{\sqrt{3}}{2}} \hat{r}$$

La componente orizzontale dell'equazione vettoriale di partenza, valida in entrambi i riferimenti, è:

$$(T_1 + T_2)\ell \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{mv^2}{\ell \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

fornisce:

$$v = \sqrt{\frac{(T_1 + T_2)\ell \frac{3}{4}}{m}} = 6,5 \text{ m/s}$$

Problema 4

Un blocco di massa m_2 poggia su un blocco di massa m_1 che è posto su un tavolo privo di attrito (vedere figura). I coefficienti di attrito statico e dinamico fra i due blocchi sono rispettivamente μ_s e μ_d .

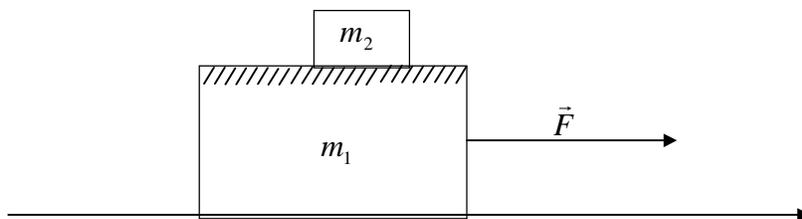
Quanto vale la massima forza $|\vec{F}|$ che si può applicare senza che il blocco m_2 strisci su m_1 ?

Se il valore di $|\vec{F}|$ è doppio di quello trovato nel precedente quesito, si trovino sia l'accelerazione assoluta di ciascun blocco sia la forza di attrito agente su ciascun blocco.

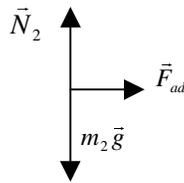
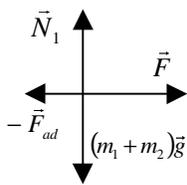
Un osservatore inerziale vede il blocco m_2 muoversi verso destra (direzione di \vec{F}) o verso sinistra?

[$m_2 = 2 \text{ kg}$; $m_1 = 4 \text{ kg}$; $\mu_s = 0,3$; $\mu_d = 0,2$]

Suggerimento: disegnare il diagramma di corpo libero per ciascun corpo in condizione di moto di m_1 e imporre la condizione di equilibrio di m_2 rispetto ad m_1 (moto relativo).



Soluzione:



Diagrammi di corpo libero (in un riferimento inerziale, con m_2 in moto rispetto ad m_1)

a) In un riferimento inerziale, in assenza di attrito con il tavolo la massa m_2 si muove con m_1 , quindi la forza di attrito statico che agisce su m_2 deve essere pari a:

$$m_2 \mu_s g = \frac{F m_2}{m_1 + m_2}$$

da cui:

$$F = \mu_s g (m_1 + m_2) = 17,7 \text{ N}$$

b) Posto $F = 17,7 \times 2 \text{ N} = 35,4 \text{ N}$, la massa m_2 scivola su m_1 esercitando su di essa la forza di attrito dinamico $F_{ad} = m_2 g \mu_d$, per cui:

$$a_{m_1} = \frac{F - m_2 \mu_d g}{m_1} = 7,9 \text{ m/s}^2$$

dove a_{m_1} è l'accelerazione della massa m_1 .

La forza di attrito dinamico vale naturalmente $m_2 \mu_d g = 3,9 \text{ N}$.

Nel riferimento solidale con la massa m_1 , la massa m_2 subisce sia la forza di attrito dinamico, sia la forza fittizia $-m_2 a_{m_1}$. Quindi in tale riferimento l'accelerazione a_r vale:

$$a_r = \mu_d g - a_{m_1} = -5,9 \text{ m/s}^2$$

mentre in un riferimento inerziale vale:

$$a = a_r + a_{m_1} = 2 \text{ m/s}^2$$

c) Come si evince dal punto b), mentre nel riferimento non inerziale l'accelerazione è diretta verso sinistra (nel verso negativo delle ascisse), in un riferimento inerziale l'accelerazione è positiva, quindi diretta verso destra.

Problema 5

La curva sopraelevata di un'autostrada è stata progettata per una velocità v_{max} . Il raggio della curva è r . In una brutta giornata il traffico percorre l'autostrada alla velocità v .

Quanto vale l'angolo θ di sopraelevazione?

Quanto deve essere il minimo coefficiente d'attrito μ_s che consente di superare la curva senza scivolare verso il basso?

Usando tale coefficiente, con quale velocità massima v'_{max} è possibile percorrere la curva senza scivolare verso l'alto?

[$v_{max} = 95$ km/h; $r = 210$ m; $v = 52$ km/h]

Suggerimento: utilizzare un sistema di riferimento (non inerziale) solidale con l'automobile, scrivere l'equazione del moto ed imporre la condizione di equilibrio.

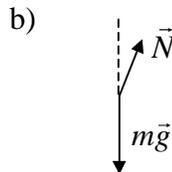
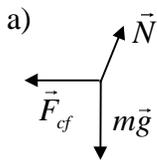


Diagramma di corpo libero a) in un riferimento non inerziale e b) in uno inerziale

Soluzione:

a) In un riferimento inerziale la componente orizzontale della reazione vincolare \vec{N} fornisce la forza centripeta, mentre la sua componente verticale equilibra la forza peso:

$$\begin{cases} N \sin \theta = m \frac{v^2}{r} \\ N \cos \theta = mg \end{cases}$$

Quindi:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{v_{max}^2}{rg} = 0,3$$

Con questo angolo, nel sistema di riferimento solidale con l'automobile è soddisfatta la condizione di equilibrio della componente parallela alla strada delle forze in gioco, in assenza di attrito:

$$m \frac{v_{max}^2}{r} \cos \theta = mg \sin \theta$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{v_{max}^2}{rg} = 0,3$$

b) Con la pioggia, a velocità $v < v_{max}$, la macchina tende a scivolare verso il basso, per cui la condizione di equilibrio diviene:

$$mg \sin(\theta) = m \frac{v^2}{r} \cos(\theta) + \mu_s \left[mg \cos(\theta) + m \frac{v^2}{r} \sin(\theta) \right]$$

Quindi il coefficiente d'attrito vale:

$$\mu_s = \frac{g \operatorname{tg}(\theta) - \frac{v^2}{r}}{g + \frac{v^2}{r} \operatorname{tg}(\theta)} = 0,2$$

c) A velocità $v'_{max} > v_{max}$, tende a prevalere la forza centrifuga, e la macchina tende a sbandare verso l'alto.

Quindi la condizione di equilibrio è:

$$mg \sin(\theta) + \mu_s \left[mg \cos(\theta) + m \frac{v_{max}'^2}{r} \sin(\theta) \right] = m \frac{v_{max}'^2}{r} \cos(\theta)$$

Per cui:

$$v'_{max} = \sqrt{gr \frac{[\sin(\theta) + \mu_s \cos(\theta)]}{[\cos(\theta) - \mu_s \sin(\theta)]}} = 128,5 \text{ km/h}$$

Problema 6

Un corpo di massa M è posto su un piano inclinato di un angolo θ con l'orizzontale ed è connesso ad una coppia di corpi di ugual massa m tramite una corda ideale, che passa per una puleggia senza attrito e di massa trascurabile, come illustrato in figura.

C'è però attrito fra la massa M ed il piano inclinato.

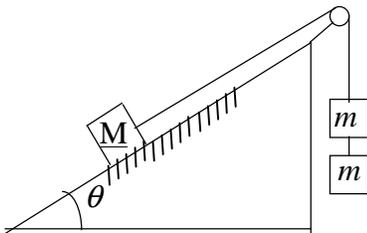
Calcolare il valore della forza di attrito statico necessaria a far rimanere in quiete il sistema;

esprimere in funzione di m , M , θ il minimo valore del coefficiente di attrito statico fra M ed il piano inclinato, μ_s , necessario affinché il sistema rimanga in condizioni statiche;

calcolare esplicitamente il valore minimo di μ_s quando $m=M/2$ e $\theta = 45^\circ$.

Quesito:

Per quale valore dell'angolo θ il sistema (per $m < M/2$) resterebbe in condizioni statiche anche senza attrito?



Soluzione:

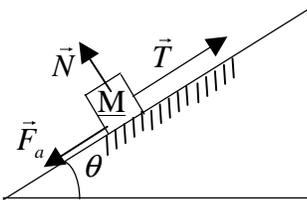


Diagramma di corpo libero per M

a) Condizione di equilibrio:

$$\begin{cases} T = 2mg \\ T = Mg \sin \theta + \mu_s Mg \cos \theta \end{cases}$$

pertanto:

$$\mu_s M g \cos(\theta) = 2mg - M g \sin(\theta)$$

b) Coefficiente di attrito statico:

$$\mu_s = \frac{2m}{M \cos(\theta)} - \tan(\theta)$$

c) Se $m = M/2$ e $\theta = 45^\circ$, $\mu_s = 0,4$

Risposta al quesito:

La condizione di equilibrio in assenza di attrito è:

$$\begin{cases} T = 2mg \\ T = M g \sin \theta \end{cases}$$

da cui:

$$\theta = \arcsin \frac{2m}{M}$$

Si noti che per $m > M/2$ il sistema non può essere in equilibrio senza l'attrito.

Problema 7

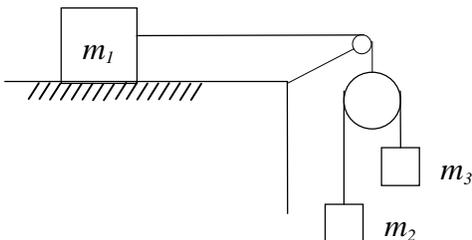
I corpi di massa m_1 , m_2 ed m_3 sono collegati come in figura. Le carrucole e le funi sono ideali. Quali valori può assumere il coefficiente di attrito statico μ_s fra tavolo e corpo di massa m_1 affinché m_1 non si muova?

Calcolare l'accelerazione dei due corpi m_2 ed m_3 quando è soddisfatta la condizione di cui al punto a).

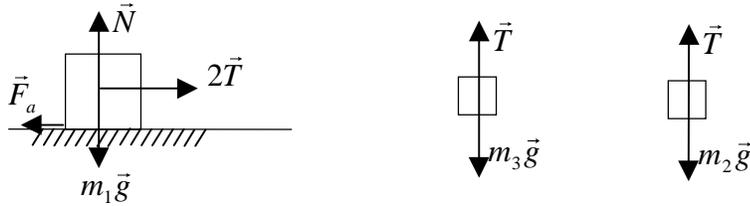
In assenza di attrito fra il tavolo ed m_1 , calcolare l'accelerazione dei corpi m_1 , m_2 ed m_3 .

[$m_1 = 10$ kg; $m_2 = 2$ kg; $m_3 = 3$ kg]

Suggerimento: scrivere l'equazione di equilibrio per m_1 e quella per il moto di m_2 ed m_3 .



Soluzione:



Diagrammi di corpo libero.

a) e b) Condizione di equilibrio di m_1 :

$$m_1 g \mu_s = 2T$$

Le accelerazioni di m_2 ed m_3 hanno somma nulla, per cui le equazioni del moto di m_2 ed m_3 si possono scrivere in termini della sola accelerazione a di m_3 :

$$\begin{cases} T - m_3 g = m_3 a \\ T - m_2 g = m_2 (-a) \end{cases} \quad \text{cioè:} \quad \begin{cases} T - m_3 g = m_3 a \\ m_2 g - T = m_2 a \end{cases}$$

dove l'asse verticale del riferimento è orientato verso l'alto.

L'accelerazione di m_3 vale:

$$a = \frac{m_2 - m_3}{m_3 + m_2} g = -2 \text{ m/s}^2 \text{ (verso il basso).}$$

Tensione della fune che lega m_2 ed m_3 :

$$T = m_3(g + a) = \frac{2m_2 m_3}{m_3 + m_2} g = 23,5 \text{ N}$$

Coefficiente di attrito statico:

$$\mu_s = \frac{2T}{gm_1} = 0,5$$

c) In assenza di attrito, siano a_1 , a_2 e a_3 le accelerazioni delle tre masse in un riferimento inerziale.

Vale allora:

$$\begin{cases} m_1 a_1 = 2T \\ m_2 (a_2 + a_1) = T - m_2 g \\ m_3 (a_3 + a_1) = T - m_3 g \end{cases}$$

$a_2 + a_1$ e $a_1 + a_3$ sono le accelerazioni delle masse m_2 ed m_3 nel riferimento solidale con la seconda carrucola¹, riferimento in cui è valido il calcolo precedente, nonché la condizione:

$$a_2 + a_1 = -(a_3 + a_1)$$

che in precedenza ci ha consentito di scrivere le equazioni del moto di m_2 ed m_3 in termini della sola accelerazione di m_3 .

Eliminando le tensioni delle corde, si ottiene:

$$\begin{cases} 2a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ \left(m_2 - \frac{m_1}{2}\right)a_1 + m_2 a_2 = -m_2 g \\ \left(m_3 - \frac{m_1}{2}\right)a_1 + m_3 a_3 = -m_3 g \end{cases}$$

Quindi, risolvendo il sistema si trova:

$$\begin{cases} a_1 = \frac{4m_2 m_3}{m_1(m_3 + m_2)} g \\ a_2 = \frac{m_1(m_3 - m_2) - 4m_2 m_3}{m_1(m_3 + m_2)} g \\ a_3 = \frac{m_1(m_2 - m_3) - 4m_2 m_3}{m_1(m_3 + m_2)} g \end{cases}$$

$a_1 = 4,7 \text{ m/s}^2$, $a_2 = -2,7 \text{ m/s}^2$, $a_3 = -6,7 \text{ m/s}^2$ (m_1 si muove in avanti, m_2 ed m_3 verso il basso).

Si noti che nel riferimento non inerziale solidale con la carrucola mobile (che scende), le accelerazioni di m_2 ed m_3 hanno lo stesso modulo (2 m/s^2), ma m_3 scende ed m_2 sale.

Problema 8

¹ Si ricordi che se \vec{a}_I è l'accelerazione di un corpo rispetto ad un riferimento inerziale, la sua accelerazione \vec{a}_{NI} rispetto ad un riferimento non inerziale di accelerazione \vec{a}_t è data da: $\vec{a}_{NI} = \vec{a}_I - \vec{a}_t$.

Nel dispositivo schematizzato in figura, il corpo A (di massa m_A), poggiato su un piano orizzontale liscio, è collegato da un filo inestensibile al corpo B (di massa m_B) ed è saldato all'estremità di una molla di costante elastica k . L'altra estremità della molla è fissata ad un gancio solidale con il piano e le masse del filo, della molla e della carrucola sono trascurabili rispetto a quelle dei corpi A e B . Il corpo B viene abbassato lungo la verticale, rispetto alla sua posizione di equilibrio e lasciato libero di muoversi. Calcolare:

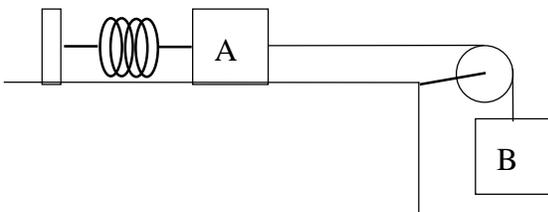
di quanto si è allungata la molla nella posizione di equilibrio del sistema;

l'equazione del moto del sistema formato dalle due masse;

il periodo delle oscillazioni compiute dal sistema (sia di A che di B).

[$m_A = 2 \text{ kg}$; $m_B = 2 \text{ kg}$; $k = 200 \text{ N/m}$]

Suggerimento: si scrivano le equazioni del moto di m_A ed m_B , usando ad esempio la variabile x come spostamento generico della massa m_B dalla sua posizione di equilibrio.



Soluzione:

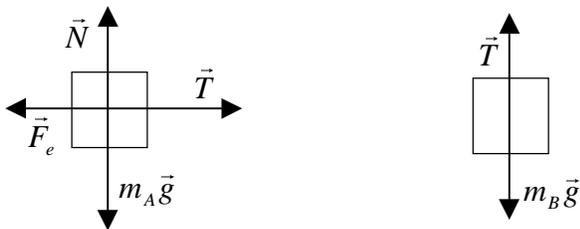


Diagramma di corpo libero per A e B .

a) detto x l'allungamento della molla, la condizione di equilibrio è $kx = m_B g$, da cui:

$$x = \frac{m_B g}{k} = 9,8 \text{ cm.}$$

b) le equazioni del moto di ciascuna massa sono:

$$\begin{cases} m_B g - T(x) = m_B a(x) \\ T(x) - kx = m_A a(x) \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} m_B g - T(x) = m_B \frac{d^2 x}{dt^2} \\ T(x) - kx = m_A \frac{d^2 x}{dt^2} \end{cases}$$

per cui l'equazione globale del sistema, in funzione dell'allungamento della molla, è:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m_A + m_B} x = \frac{m_B g}{m_A + m_B}$$

la cui soluzione è un moto armonico. Si noti che la variabile x descrive le oscillazioni sia di m_A che di m_B attorno alle rispettive posizioni di equilibrio.

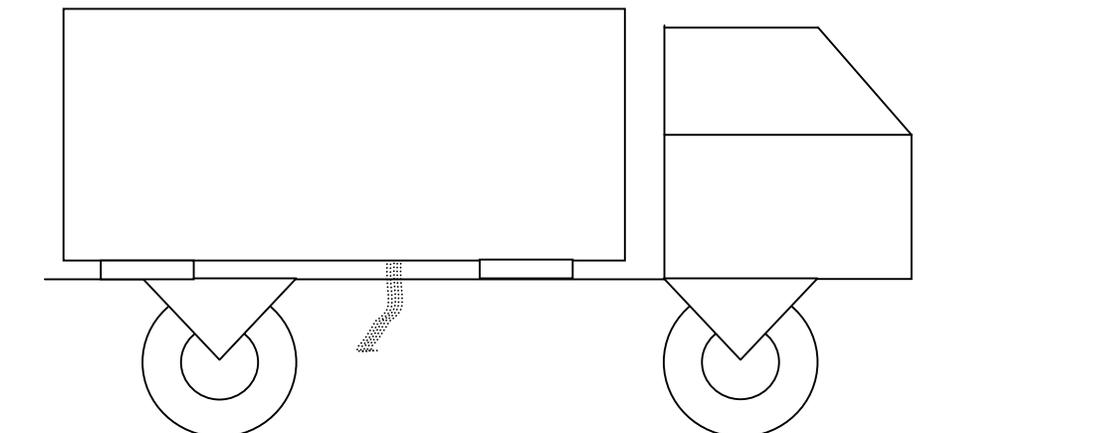
c) il periodo dell'oscillatore è:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m_A + m_B}{k}} = 0,9 \text{ s}$$

Problema riepilogativo

Un'autobotte di massa a vuoto M trasporta una massa m_0 di acqua distillata lungo tratto di autostrada piano e rettilineo, senza vento. La velocità dell'autobotte è inizialmente v_0 e la forza di attrito statico agente sulle sue ruote in direzione e verso della velocità è f_s . Ad un tratto sul fondo del cassone si apre una piccola crepa attraverso cui l'acqua cade al suolo, staccandosi dal cassone con velocità relativa ad esso perpendicolare alla strada. La perdita è di k litri di acqua al minuto. L'autista del camion, ignaro della perdita, tiene fermo il piede sull'acceleratore, per cui la forza di attrito statico rimane costante. A quale velocità si troverà il camion dopo un tempo t_0 dall'inizio della perdita?

[$f_s = 1 \text{ N}$; $m_0 = 32000 \text{ kg}$; $k = 1,2 \text{ l/min}$; $\rho_{\text{H}_2\text{O}} = 1 \text{ kg/dm}^3$; $M = 8000 \text{ kg}$; $v_0 = 72 \text{ km/h}$; $t_0 = 15'$]



Soluzione:

Fissiamo un riferimento solidale con la strada che abbia l'asse x lungo l'autostrada nel verso della velocità dell'autobotte, e l'asse y verticale diretto verso l'alto.

Prima che si apra la crepa, si ha semplicemente una massa $M + m_0$ che si muove a velocità costante, soggetta lungo l'asse delle ascisse alle sole forze f_s ed attrito viscoso dell'aria. Queste due forze devono ovviamente bilanciarsi, per cui il coefficiente d'attrito viscoso β del camion nell'aria è dato da:

$$(M + m_0) \frac{d^2 x}{dt^2} = 0 = f_s - \beta v_0$$

cioè:

$$\beta = \frac{f_s}{v_0} = 0,05 \text{ kg/s}$$

Quando si apre la crepa, l'autobotte perde, in un intervallo di tempo infinitesimo dt , la quantità di moto $v_0 k dt$ e la massa $k dt$. In formula:

$$(M + m_0 - k dt) v_0(t + dt) - (M + m_0) v_0(t) = -k dt v_0(t)$$

Perciò la nuova velocità dell'autobotte (al tempo $t + dt$) è:

$$\frac{(M + m_0 - k dt) v_0(t)}{(M + m_0 - k dt)} = v_0(t + dt)$$

cioè la velocità rimane inalterata, e l'accelerazione è nulla, anche se il camion perde quantità di moto.

Il problema può anche essere risolto utilizzando la forma generale della seconda legge della dinamica, valida per sistemi a massa variabile:

$$\vec{F} = m\vec{a} + \frac{dm}{dt} \vec{v}$$

dove $m(t)$ è la massa dell'autobotte al tempo t dall'inizio della perdita, e la forza totale agente sull'autobotte è:

$$\vec{F} = (f_s - \beta v) \hat{x} + \vec{f}_a$$

con \vec{f}_a = forza di reazione esercitata dall'acqua sul camion.

Nel riferimento solidale con l'autobotte, la forza di reazione è verticale, per cui non influenza la componente orizzontale del moto. Inoltre, in tale riferimento $v = 0$, quindi:

$$f_s - \beta v = ma$$

(anche a è nulla, ma è solo la forza fittizia).

La condizione iniziale è $f_s - \beta v_0 = 0$, per cui inizialmente $a(0) = 0$. Ma $v(0 + dt) = v_0 + a(0) = v_0$, cioè v non cambia, e $a(0 + dt) = \frac{f_s - \beta v(0 + dt)}{m} = \frac{f_s - \beta v_0}{m} = 0$, vale a dire che a rimane nulla. Quindi il moto resta uniforme con velocità v_0 .

III - Lavoro ed energia. Conservazione dell'energia.

Il lavoro W compiuto da una forza \vec{F} variabile che agisce su un punto materiale spostandolo da un punto A ad un punto B lungo una linea γ è dato da:

$$W = \int_{A,\gamma}^B \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

dove $d\vec{l}$ è lo spostamento infinitesimo lungo il percorso della particella.

L'energia cinetica di una particella di massa m che si muove con velocità \vec{v} è data da:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

Il teorema dell'energia cinetica afferma che il lavoro totale compiuto su un punto materiale dalla forza risultante per spostarlo da un punto A ad un punto B è uguale alla variazione di energia cinetica del punto materiale:

$$W = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = \Delta E_c$$

Il lavoro fatto da una forza conservativa su di una particella dipende solo dai due punti di partenza e di arrivo e non dal cammino percorso dalla particella. Il lavoro fatto da una forza conservativa è recuperabile, cosa che non è vera per una forza non conservativa, come l'attrito.

Associato ad una forza conservativa si introduce il concetto di variazione di energia potenziale.

Sotto l'azione di una forza conservativa \vec{F} si definisce la variazione di energia potenziale come l'opposto del valore del lavoro compiuto dalla forza:

$$\Delta E_p = E_{pB} - E_{pA} = - \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

Solo le variazioni dell' E_p sono significative dal punto di vista della fisica, per cui si può sostituire $E_p(x)$ con $E_p(x) + C$, con C costante arbitraria, ogni volta che conviene.

Quando agiscono solo forze conservative, l'energia meccanica totale E , definita come la somma delle energie cinetica e potenziale, si conserva:

$$E = E_c + E_p = \text{costante.}$$

Se agiscono anche forze non conservative, entrano in gioco altri tipi di energia. Quando si includono tutte le forme d'energia, l'energia si conserva sempre (legge di conservazione dell'energia).

Esempi di forze conservative per le quali si parla di energia potenziale sono:

forza peso e sua energia potenziale. Quest'ultima vale mgy per una particella posta ad un'altezza y al di sopra di un riferimento orizzontale scelto ad arbitrio.

Forza elastica ($\vec{F} = -k\vec{x}$); energia potenziale elastica $E_p = 1/2kx^2$ per una molla con costante elastica k , allungata o compressa di una lunghezza x rispetto alla posizione di riposo.

Forza gravitazionale (descritta dalla legge di gravitazione universale di Newton). L'energia potenziale di una particella di massa m dovuta alla forza gravitazionale esercitata su di essa dalla Terra è data da:

$$E_p(r) = -\gamma \frac{mM_T}{r}$$

dove M_T è la massa della Terra ed r la distanza della particella dal centro della Terra ($r \geq$ raggio della Terra). $E_p(\infty) = 0$ è il riferimento di zero per E_p .

Problema 1

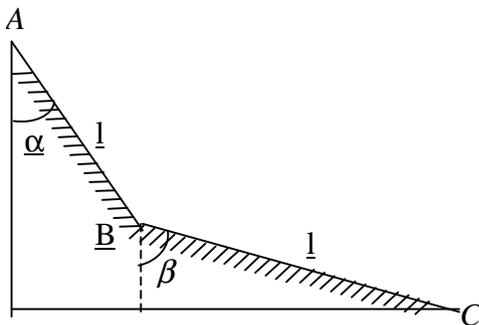
Un punto materiale di massa m scende (partendo da fermo) lungo la sagoma in figura, che è opportunamente raccordata nel punto B in modo che la velocità del punto materiale in B cambi in direzione ma non in modulo. Il coefficiente di attrito dinamico tra punto materiale e piani vale μ_d . Sapendo che la velocità nel tratto BC è costante:

Quanto tempo impiega il punto materiale per scendere da A a C ?

Quanto vale il lavoro compiuto dalla forza di attrito?

Risolvere la parte b) sia usando la definizione di lavoro, sia ricordando che il lavoro compiuto dalla forza di attrito è uguale alla variazione dell'energia meccanica tra A e B .

[$AB = BC = l = 2$ m; $\alpha = 30^\circ$; $\mu_d = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $g = 9,8$ m/s²; $m = 0,5$ kg]



Soluzione:

Innanzitutto calcoliamo β . Poiché la velocità nel tratto BC è costante, la forza di attrito uguaglia la componente del peso parallela a BC :

$$\mu_d m g \sin \beta = m g \cos \beta$$

Da cui:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{\mu_d}$$

a) L'accelerazione della massa m nel tratto da A a B è data da:

$$(\cos \alpha - \mu_d \sin \alpha) g = a = 5,8 \text{ m/s}^2.$$

Quindi il tempo richiesto da A a B è:

$$t = \sqrt{\frac{2l}{a}} = \sqrt{\frac{2l}{(\cos \alpha - \mu_d \sin \alpha) g}} = 0,8 \text{ s}$$

mentre in B la velocità è: $v_B = at = 4,6 \text{ m/s}$.

Il tempo t' impiegato per percorrere BC è $l/v_B = 0,4 \text{ s}$, quindi il tempo totale t_t è $t_t = t + t' = 1,2 \text{ s}$.

b) Il lavoro compiuto dalla forza di attrito è:

$$W = \mu_d m g (\sin \alpha + \sin \beta) l = 7,7 \text{ J}$$

Oppure, il lavoro compiuto dalla forza di attrito si può ottenere dalla variazione dell'energia meccanica:

$$W = \Delta E = mgl(\cos \alpha + \cos \beta) - \frac{1}{2} m v_B^2 = 7,7 \text{ J},$$

dove $mgl(\cos \alpha + \cos \beta)$ è l'energia potenziale del punto A rispetto al punto C .

Si noti che nel tratto BC varia solo l'energia potenziale.

Problema 2

Un cavallo tira una slitta su una strada ripida, coperta di neve. La slitta ha una massa m ed il coefficiente di attrito dinamico fra la slitta e la neve è μ_d . Se il cavallo tira parallelamente alla superficie della strada ed eroga una potenza P :

quanto vale la velocità (costante) massima v_{max} con cui il cavallo riesce a tirare la slitta?

Che frazione della potenza del cavallo viene spesa per compiere lavoro contro la forza d'attrito?

Che frazione viene spesa per compiere lavoro contro la forza di gravità?

[pendenza 1:7; $m = 300$ kg; $\mu_d = 0,12$; $P = 746$ W]

Soluzione:

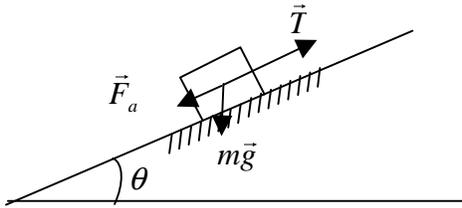


Diagramma di corpo libero

Se la velocità è costante, la tensione T della fune vale:

$$T = \mu_d mg \cos \theta + mg \sin \theta = mg(\mu_d \cos \theta + \sin \theta) = 765 \text{ N.}$$

La potenza P è il prodotto scalare della forza T per la velocità v , che nel nostro caso sono parallele:

$$P = Tv = mg(\mu_d \cos \theta + \sin \theta)v_{\max}$$

Quindi:

a) v_{\max} è:

$$v_{\max} = \frac{P}{mg(\mu_d \cos \theta + \sin \theta)} = 0,98 \text{ m/s}$$

b) il rapporto fra la potenza dissipata dall'attrito e quella del cavallo è uguale al rapporto delle forze:

$$\frac{mg\mu_d \cos \theta}{mg\mu_d \cos \theta + \sin \theta} = \frac{1}{1 + \frac{\text{tg } \theta}{\mu_d}} = 46\%.$$

il rapporto fra la potenza della gravità e quella del cavallo è:

$$\frac{mg \sin \theta}{mg\mu_d \cos \theta + \sin \theta} = \frac{1}{1 + \frac{\mu_d}{\text{tg } \theta}} = 54\%.$$

Problema 3

Un secchio pieno d'acqua di massa complessiva m_0 viene portato da un pozzo nel mezzo di un cortile fino alla cima di una torre alta h . Essendo però bucato, quando arriva sulla torre contiene solo metà dell'acqua che conteneva inizialmente. Supponendo che la velocità di salita sulla torre e la perdita in massa $\frac{dm}{dt}$ del secchio siano costanti, e che il peso del secchio vuoto possa essere trascurato, determinare il lavoro compiuto esprimendolo in joule.

$[m_0 = 3,78 \text{ kg}; h = 50 \text{ m}]$

Suggerimento:

Si ricordi che, detto x il tratto percorso dal secchio e v la sua velocità,

$$\frac{dm}{dx} = \frac{dm}{dt} * \frac{dt}{dx} = \frac{dm}{dt} * \frac{1}{v} = \text{costante},$$

per cui $m(x)$ è una funzione lineare.

Soluzione:

Osservato che $m(x)$ è una funzione lineare, con $m(0) = m_0$ e $m(h) = m_0/2$, si ha:

$$m(x) = m_0 \left(1 - \frac{x}{2h} \right).$$

Il lavoro è dunque dato da:

$$W = \int_0^h F \cdot dx = \int_0^h gm(x) \cdot dx = m_0 g \int_0^h \left(1 - \frac{x}{2h} \right) \cdot dx$$

Calcolando l'integrale, si trova:

$$W = m_0 g \frac{3}{4} h = 1389,2 \text{ J}$$

Problema 4

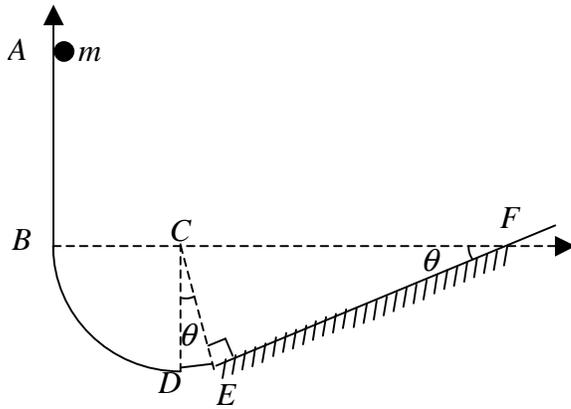
Una guida $ABDEF$ è tenuta in un piano verticale xy . I tratti AB (di lunghezza h) ed EF sono rettilinei, mentre il tratto BDE è circolare, di centro C , raggio R , e angolo al centro $\pi/2 + \theta$. Un corpo puntiforme di massa m , in grado di scorrere senza attrito lungo la guida, viene rilasciato nel punto A con velocità iniziale nulla.

Determinare la velocità del corpo nei punti B, D, E, F , supponendo che non vi sia attrito lungo tutta la guida.

Calcolare la reazione della guida nel punto D .

Se il tratto EF presenta un coefficiente di attrito dinamico μ_d , determinare l'energia cinetica del corpo nel punto F .

Perchè le velocità in B ed in F risultano essere uguali nel quesito a)?



Soluzione:

a) Per il teorema dell'energia cinetica, in B vale:

$$\frac{1}{2}mv_B^2 = mgh$$

Quindi la velocità del punto materiale in B è:

$$v_B = \sqrt{2gh}$$

Il dislivello fra A e D è $R + h$, quindi:

$$\frac{1}{2}mv_D^2 = mg(h + R)$$

e:

$$v_D = \sqrt{2g(h + R)}$$

Il dislivello fra A ed E è $h + R \cos \theta$, quindi:

$$\frac{1}{2}mv_E^2 = mg(h + R \cos \theta)$$

e:

$$v_E = \sqrt{2g(h + R \cos \theta)}$$

Il punto materiale si trova in F alla stessa quota che in B , per cui ha la stessa energia meccanica (che in assenza di attrito si conserva) e la stessa energia potenziale, quindi anche la stessa energia cinetica e la stessa velocità.

b) La reazione vincolare in D deve sia bilanciare per intero il peso del corpo puntiforme, sia fornire la forza centripeta necessaria per mantenere il corpo in traiettoria:

$$\vec{F}_N = \left(mg + \frac{mv_D^2}{R} \right) \hat{y} = \left[mg + m \frac{2g(h+R)}{R} \right] \hat{y}$$

c) Detta l la lunghezza di EF , l'energia meccanica del punto materiale in F è data dall'energia totale in B diminuita del lavoro compiuto dalla forza di attrito dinamico lungo EF :

$$E_F = \frac{1}{2}mv_B^2 - l\mu_d mg \cos\theta = \frac{1}{2}mv_F^2$$

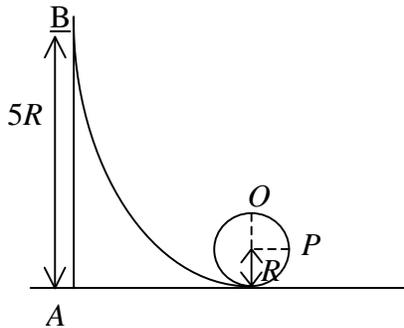
Problema 5

Una massa m scivola senz'attrito lungo la guida indicata in figura. Il raggio della circonferenza è R .

Se la massa parte da ferma dal punto B ($AB = 5R$), quanto vale la reazione vincolare nel punto P ?

Qual è l'altezza minima da cui deve partire la massa affinché, nella posizione O , la reazione vincolare sia nulla?

Quesito: Riscrivere le domande a) e b) supponendo di studiare il problema nel sistema di riferimento non inerziale associato alla massa.



Soluzione:

a) In un riferimento inerziale, la reazione vincolare in P deve solamente fornire la forza centripeta che mantiene m in traiettoria:

$$F_P = \frac{mv_P^2}{R}$$

Preso come quota di riferimento per l'energia potenziale quella del punto A , dalla conservazione dell'energia meccanica si trova:

$$\frac{mv_P^2}{2} = mg5R - mgR = 4mgR$$

Da cui:

$$F_p = 8mg$$

b) In un riferimento inerziale, la reazione vincolare in O è nulla se la forza centripeta che mantiene m in traiettoria è fornita interamente dalla gravità:

$$mg = \frac{mv_o^2}{R}$$

Detta x l'altezza cercata, e sostituendo nell'equazione di conservazione dell'energia ($\frac{mv_o^2}{2} + 2mgR = mgx$):

$$\frac{mgR}{2} + 2mgR = mgx$$

cioè:

$$x = \frac{R}{2} + 2R = \frac{5}{2}R$$

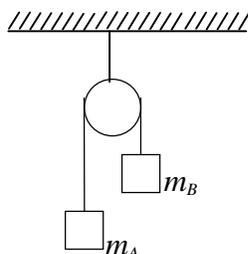
a) Nel riferimento non inerziale solidale con m , la reazione vincolare in P deve solamente equilibrare la forza centrifuga per mantenere m in traiettoria. Ciò porta ad un calcolo identico a quello già svolto, perchè l'unica differenza tra forza centrifuga e centripeta è un segno che non influisce sul calcolo medesimo.

b) Nel riferimento non inerziale solidale con m , la reazione vincolare in O è nulla se la forza centrifuga agente su m è equilibrata interamente dalla gravità. Ancora una volta, e per lo stesso motivo del punto a), il calcolo è identico a quello già svolto nel riferimento inerziale.

Problema 6

Il sistema indicato in figura (macchina di Atwood) è inizialmente a riposo con la massa m_A a terra e la massa m_B ad altezza h da terra. Determinare la velocità con cui m_2 tocca terra e la tensione della fune, trascurando l'attrito e l'inerzia della carrucola.

Suggerimento: Questo problema, analogo al n° 7 del capitolo II, può essere risolto utilizzando la legge di conservazione dell'energia meccanica. Per calcolare la tensione della fune è comunque necessario scrivere l'equazione di corpo libero per una delle due masse.



Soluzione:

Equazioni di corpo libero:

$$\begin{cases} m_B g - T = m_B a \\ T - m_A g = m_A a \end{cases}$$

Risolvendo il sistema, si trova l'accelerazione di A e B (in modulo):

$$a = \frac{m_B - m_A}{m_B + m_A} g$$

Quindi la tensione della fune è:

$$T = m_A (a + g) = m_A g \frac{2m_B}{m_B + m_A}$$

Poichè il moto delle due masse è uniformemente accelerato con velocità iniziale nulla, la velocità terminale di B è:

$$v = \sqrt{2ah} = \sqrt{2 \frac{m_B - m_A}{m_B + m_A} gh}$$

Si può determinare v anche dalla conservazione dell'energia, osservando che inizialmente le energie cinetiche sono nulle e l'energia potenziale del sistema, rispetto al suolo, è $m_B gh$, mentre alla fine le due masse hanno velocità di ugual modulo:

$$m_B gh = m_A gh + \frac{m_A + m_B}{2} v^2$$

cioè:

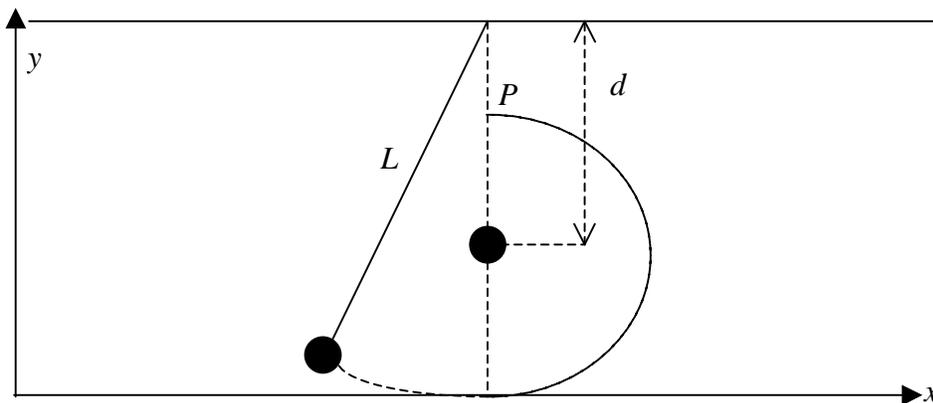
$$v = \sqrt{\frac{2(m_B - m_A)gh}{m_A + m_B}}$$

Problema 7

Un pendolo di lunghezza L oscilla in un piano verticale. La corda urta un piolo fissato ad una distanza d al di sotto del punto di sospensione (vedere figura)

Se il pendolo è lasciato libero da un'altezza h al di sotto del piolo, quale altezza h^* raggiunge dopo aver urtato il piolo?

Se il pendolo è lasciato libero dalla posizione orizzontale ($\theta = 90^\circ$) e descrive una circonferenza completa centrata nel piolo, quale deve essere il valore minimo di d ?



Soluzione:

a) Per conservazione dell'energia, $h^* = h$.

b) Conservazione dell'energia nel punto P (figura):

$$mgL = mg2(L-d) + \frac{1}{2}mv^2$$

In P la forza centripeta deve essere almeno uguale alla gravità:

$$mg = \frac{mv^2}{L-d}$$

quindi:

$$mgL = mg2(L-d) + \frac{1}{2}mg(L-d)$$

Sviluppando i calcoli:

$$d = \frac{3}{5}L$$

Problema 8

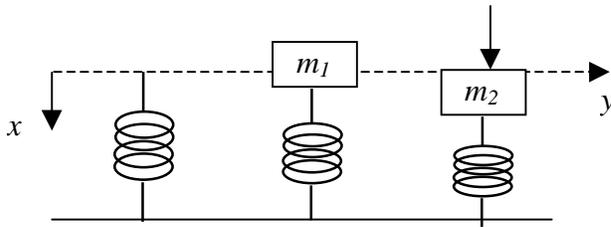
Un estremo di una molla priva di massa è posto su di una superficie piatta, con l'altro estremo che punta verso l'alto (vedi fig. 1a). Una massa m_1 è posta delicatamente sopra la molla e permette di comprimere la molla di x_1 , ad una nuova posizione di equilibrio (fig. 1b). Successivamente, la massa m_1 viene rimossa e sostituita con una massa m_2 . La molla è poi compressa con le mani cosicchè l'estremo della molla si trova in una posizione x_2 rispetto alla posizione originale di riposo (quella occupata dalla molla senza nessuna massa appoggiata) (vedi fig. 1c). La molla è poi rilasciata.

Quanto vale la costante k della molla?

Qual è la massima energia cinetica della massa?

[$m_1 = 1,0$ kg; $m_2 = 2,0$ kg; $x_1 = 17$ cm; $x_2 = 42$ cm]

Quesito: risolvere il problema sia scrivendo l'equazione del moto del punto materiale, sia scrivendo la conservazione dell'energia meccanica.



Soluzione:

a) Riferita l'energia potenziale gravitazionale all'asse delle ascisse (figura), la costante elastica della molla vale:

$$k = \frac{m_1 g}{x_1} = 57,6 \text{ N/m}$$

b) Per conservazione dell'energia, la massima energia cinetica della massa m_2 corrisponde alla minima energia potenziale. L'energia potenziale ha un andamento parabolico:

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2 - m_2 g x = \frac{m_1 g}{2 x_1} x^2 - m_2 g x$$

Questa parabola ha il vertice in:

$$\begin{cases} x^* = \frac{m_2 g}{k} = \frac{m_2 x_1}{m_1} \\ E_{p \min} = \frac{m_2^2 g}{2 m_1} x_1 - \frac{m_2^2 g}{m_1} x_1 = -\frac{m_2^2 g}{2 m_1} x_1 \end{cases}$$

L'energia totale è data da:

$$E_{c \max} = E_{mecc} - E_{p \min} = E_{piniz} - E_{p \min}$$

quindi l'energia cinetica massima è:

$$E_{c \max} = \frac{1}{2} k x_2^2 - m_2 g x_2 + \frac{m_2^2 g}{2 m_1} x_1 = \frac{m_1 g}{2 x_1} x_2^2 - m_2 g x_2 + \frac{m_2^2 g}{2 m_1} x_1 = 0,2 \text{ J}$$

Il problema può essere risolto anche utilizzando direttamente l'equazione del moto:

$$m_2 \ddot{x} + kx = m_2 g$$

La soluzione generale è:

$$x = A \sin(\omega t + \phi) + \frac{m_2 g}{k}$$

(si noti che $x^* = \frac{m_2 g}{k}$ è la soluzione di equilibrio dell'equazione del moto, mentre $A \sin(\omega t + \phi)$ è l'oscillazione generica: la molla oscilla attorno alla posizione di equilibrio x^* anzichè attorno ad $x = 0$).

Imponendo le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} x(0) = A \sin \phi + \frac{m_2 g}{k} = x_2 \\ v(0) = \omega A \cos \phi = 0 \end{cases}$$

si ottiene:

$$\begin{cases} x(t) = \left(x_2 - \frac{m_2 g}{k} \right) \cos \omega t + \frac{m_2 g}{k} \\ v(t) = -\omega \left(x_2 - \frac{m_2 g}{k} \right) \sin \omega t \end{cases}$$

ove:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_2}}$$

La velocità è massima per $\sin \omega t = 1$ o -1 , cioè quando l'energia cinetica vale:

$$E_c = \frac{1}{2} m_2 \omega^2 \left(x_2 - \frac{m_2 g}{k} \right)^2 = \frac{1}{2} k \left(x_2 - \frac{m_2 g}{k} \right)^2 = 0,2 \text{ J}$$

IV - Conservazione della quantità di moto; sistemi a più corpi ed urti

Per una particella si definisce quantità di moto la grandezza:

$$\vec{p} = m\vec{v} .$$

La seconda legge della dinamica, nella sua forma più generale, si scrive:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

dove \vec{F} è la forza totale agente sulla particella.

L'impulso di una forza che agisce per breve tempo su una particella (forza impulsiva) si definisce come:

$$\vec{I} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F} dt = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \Delta\vec{p},$$

cioè l'impulso di una forza impulsiva è uguale alla variazione della quantità di moto della particella. Per un sistema di particelle o per un corpo esteso (distribuzione continua di materia) il centro di massa (CM) si definisce come:

$$x_{CM} = \frac{\sum m_i x_i}{M}, \quad y_{CM} = \frac{\sum m_i y_i}{M}, \quad z_{CM} = \frac{\sum m_i z_i}{M}$$

dove m_i è la massa dell' i -esima particella di coordinate (x_i, y_i, z_i) in un sistema di riferimento inerziale ed M è la massa totale del sistema.

Oppure, nel caso di un corpo esteso:

$$x_{CM} = \frac{1}{M} \int_M x dm, \quad y_{CM} = \frac{1}{M} \int_M y dm, \quad z_{CM} = \frac{1}{M} \int_M z dm$$

Il teorema del centro di massa (o 1^a equazione cardinale della dinamica dei sistemi) è scritto come:

$$M\vec{a}_{CM} = \vec{F}^{(E)}$$

ossia il centro di massa si muove come una particella singola di massa M sulla quale agisce la stessa forza esterna risultante $\vec{F}^{(E)}$.

Per un sistema di particelle, la quantità di moto totale è:

$$\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i = M\vec{v}_{CM} = \vec{P}_{CM}$$

Il teorema del centro di massa si può scrivere anche:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{(E)}$$

Quando la forza risultante esterna per un sistema è zero (sistema isolato), la quantità di moto totale resta costante (legge di conservazione della quantità di moto di un sistema isolato).

La legge di conservazione della quantità di moto è molto utile nel trattare la classe di fenomeni noti come urti.

In un'urto, due o più corpi interagiscono tra loro per un tempo molto breve con una forza molto grande rispetto alle altre, sicchè si può considerare il sistema isolato. Pertanto negli urti la quantità di moto totale si conserva. Anche l'energia totale si conserva, ma questa conservazione può non essere utile a risolvere il problema se avvengono trasformazioni di energia da cinetica a non cinetica.

Un urto che conserva l'energia cinetica totale del sistema prende il nome di urto elastico.

Invece, un urto che non conserva l'energia cinetica totale del sistema si dice anelastico.

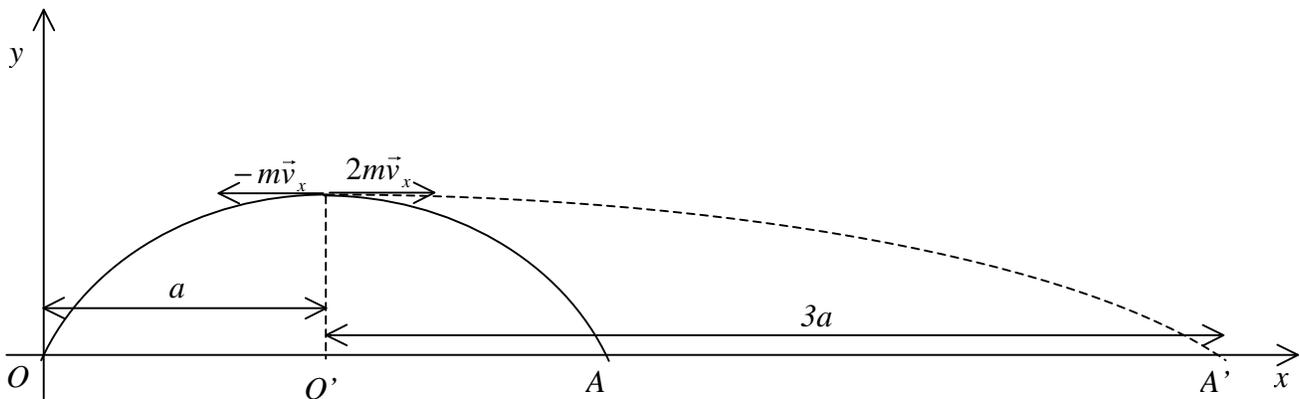
Se a seguito dell'urto i due corpi restano attaccati tra loro, formando un corpo unico, l'urto si dice completamente anelastico.

Problema 1

Un proiettile di massa $2m$, lanciato dal suolo con una certa angolazione, quando raggiunge l'apice della traiettoria esplose in due frammenti di egual massa m .

Sapendo che uno dei due frammenti torna al punto di partenza ripercorrendo la traiettoria iniziale, determinare la posizione in cui cade l'altro e stabilire se essi toccano o meno terra nello stesso istante.

Suggerimento: la quantità di moto si conserva.



Soluzione:

Il moto del centro di massa del sistema delle due parti in cui si è diviso il proiettile è la continuazione del moto del proiettile integro. I due frammenti toccano terra nello stesso istante perchè la componente verticale del moto è la stessa per entrambi. Detta v_x la componente orizzontale della velocità del

proiettile, nel punto culminante la sua quantità di moto è orizzontale e vale $2mv_x$. La velocità del frammento che torna indietro, nell'istante dell'esplosione, è $-v_x$ quindi la sua quantità di moto vale $-mv_x$, e quella dell'altro frammento deve essere $2mv_x - (-mv_x) = 3mv_x$. Quindi il secondo frammento parte con velocità $3v_x$.

Detto t il tempo di volo, il frammento che torna al punto di partenza percorre la distanza:

$$O'O = v_x t = a$$

mentre il frammento che prosegue percorre:

$$O'A' = 3v_x t = 3a$$

ed il centro di massa:

$$O'A = v_x t = a$$

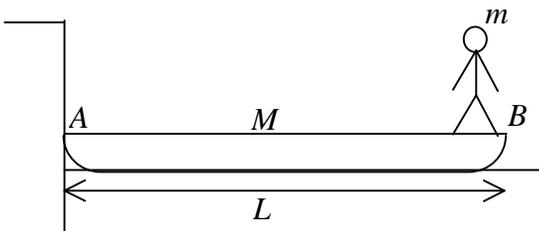
Il frammento che prosegue cade dunque in A' con ascissa $4a$.

Problema 2

Una chiatta di massa M e lunghezza L è ferma in acqua tranquilla, senza alcun ancoraggio, con un estremo A a contatto con la parete del molo (figura). In questa situazione un uomo di massa m sta sulla chiatta all'altezza del suo estremo opposto B . Ad un certo punto l'uomo comincia a camminare ed arriva all'estremo A , dove si ferma. Se si trascura l'attrito della chiatta sull'acqua, di quanto si allontana l'estremo A dal molo?

[$M = 150$ kg; $L = 5$ m; $m = 75$ kg]

Suggerimento: lo spostamento della barca rispetto alla banchina è uguale a quello del centro di massa rispetto alla barca



Soluzione 1:

Poichè il sistema è isolato, la quantità di moto totale rimane nulla, vale a dire che il centro di massa rimane fermo, rispetto alla banchina. L'ascissa del centro di massa soddisfa inizialmente a:

$$x_{CM} = \frac{Mg \frac{L}{2} + mgL}{(m+M)g} = \frac{L(M+2m)}{2(M+m)}$$

Detta x l'ascissa finale di A , l'ascissa del centro di massa soddisfa (alla fine):

$$x_{CM} = \frac{xmg + Mg \left(\frac{L}{2} + x \right)}{(m+M)g} = \frac{x(m+M) + M \frac{L}{2}}{m+M} = x + \frac{M \frac{L}{2}}{m+M}$$

Uguagliando i secondi membri delle due equazioni si ottiene:

$$\frac{mL + M \frac{L}{2}}{m+M} = x + \frac{M \frac{L}{2}}{m+M}$$

cioè:

$$x = \frac{mL}{m+M} = 1,67 \text{ m}$$

Soluzione 2:

Si ricordi che il sistema è isolato (soluzione 1).

Posto:

\vec{v}_1 = velocità dell'uomo rispetto alla banchina (massa m)

\vec{v}_2 = velocità della barca rispetto alla banchina (massa M)

vale:

$$M\vec{v}_2 + m\vec{v}_1 = 0$$

cioè:

$$v_2 = -\frac{m}{M} |v_1|$$

Lo spazio percorso dall'uomo è:

$$|x_1| = |v_1| t$$

Lo spazio percorso dalla barca è:

$$x_2 = \frac{v_2}{|v_1|} |x_1| = \frac{m}{M} |x_1|$$

ma

$$|x_1| + x_2 = |x_1| + \frac{m}{M} |x_1| = L$$

Quindi:

$$|x_1| = L \frac{M}{M+m} = 3,33 \text{ m.}$$

La posizione dell'uomo rispetto alla banchina è:

$$L - |x_1| = 1,67 \text{ m.}$$

Soluzione 3:

Detta v la velocità (negativa) dell'uomo (che ha massa m) e V la velocità della barca (di massa M) rispetto alla banchina, vale:

$$MV + mv = 0$$

Ma, detta v_r la velocità dell'uomo relativa alla barca, è:

$$v = v_r + V$$

Quindi:

$$m(v_r + V) = -MV$$

$$v_r = -V \frac{m+M}{m}$$

Nel tempo t in cui l'uomo percorre L con velocità relativa alla barca v_r , il centro di massa della barca si sposta di x (distanza finale di A dalla banchina):

$$\frac{L}{t} = \frac{x}{t} \frac{M+m}{m}$$

Quindi:

$$x = L \frac{m}{M + m} = 1,67 \text{ m.}$$

Problema 3

Un bambino, in piedi su una slitta A di massa m_A , avvicina a se' una seconda slitta B di massa m_B tirandola mediante una fune di massa trascurabile fissata alla slitta B . Le due slitte, inizialmente ferme, si muovono su un piano orizzontale con coefficiente di attrito dinamico μ_d tra le slitte e suolo.

Qual è l'accelerazione a_{CM} del centro di massa del sistema formato dalle due slitte?

Se in un riferimento inerziale l'accelerazione a_B della slitta B è in modulo doppia dell'accelerazione a_A della slitta A , quanto vale la forza F_{AB} che il bambino esercita sulla fune (tensione della fune)?

[$m_A = 50 \text{ kg}$; $m_B = 42 \text{ kg}$; $\mu_d = 0,2$]

Suggerimento: disegnare il diagramma di corpo libero del sistema slitte-bambino



Soluzione:

a) Equazione del moto del centro di massa:

$$(m_A + m_B) \vec{a}_{CM} = \vec{F}^{(E)}$$

con la forza esterna data dalla risultante degli attriti $\vec{F}^{(E)} = \vec{F}_A + \vec{F}_B$. Quindi:

$$(m_A + m_B) \vec{a}_{CM} = \vec{F}_A + \vec{F}_B$$

Essendo il problema monodimensionale:

$$(m_A + m_B) a_{CM} = F_A - F_B$$

cioè:

$$a_{CM} = \frac{F_A - F_B}{(m_A + m_B)} = \frac{N_A - N_B}{(m_A + m_B)} \mu_d = 0,17 \text{ m/s}^2$$

da B verso A .

b) Per definizione di centro di massa si può scrivere:

$$(m_A + m_B) \vec{a}_{CM} = m_A \vec{a}_A + m_B \vec{a}_B$$

che, nell'ipotesi $|\vec{a}_B| = 2|\vec{a}_A|$, comporta:

$$(m_A + m_B) a_{CM} = (2m_B - m_A) a_A$$

cioè:

$$a_A = \frac{m_A + m_B}{2m_B - m_A} a_{CM} = 0,5 \text{ m/s}^2$$

e:

$$|a_B| = 2|a_A| = 0,9 \text{ m/s}^2$$

Note le accelerazioni, lo sono anche le forze:

$$\begin{cases} m_B a_B = F_{BA} - F_B \\ -m_A a_A = F_A - F_{AB} \end{cases}$$

ovvero:

$$\begin{cases} F_{BA} = F_B + m_B a_B \\ F_{AB} = m_A a_A + F_A \end{cases}$$

che fornisce:

$$F_{AB} = F_{BA} = 123,5 \text{ N}$$

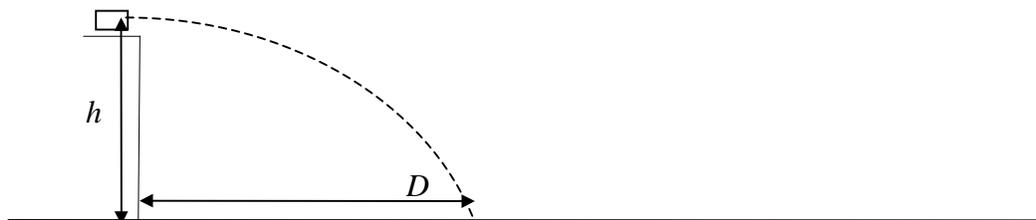
Problema 4

Un cannone di massa M spara orizzontalmente, dalla sommità di una torre di altezza h , un proiettile di massa m e velocità v_0 che raggiunge il suolo ad una distanza D dalla base della torre (fig. 1).

Trascurando la resistenza dell'aria, calcolare in termini di D la forza \vec{F} orizzontale e costante che un sistema di ammortizzatori deve esercitare sul cannone affinché, per il rinculo, esso arretri di un tratto d prima di fermarsi.

Suggerimento: la quantità di moto si conserva

Soluzione:



Moto del proietto:

$$\begin{cases} D = v_0 t \\ h = \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema, si trova v_0 :

$$v_0 = \sqrt{\frac{g}{2h}} D$$

La quantità di moto iniziale di rinculo del cannone, per la conservazione della quantità di moto, è $Mv = mv_0$.

L'energia cinetica iniziale del cannone è data dal lavoro compiuto dalla forza costante nel tratto d :

$$Fd = \frac{(mv_0)^2}{2M} = \frac{m^2 g D^2}{4Mh}$$

e la forza è dunque:

$$F = \frac{(mv_0)^2}{2Md} = \frac{m^2 g D^2}{4Mhd}$$

Problema 5

In un incrocio un'automobile A di massa m_A urta un'automobile B di massa m_B . I rilievi della polizia rivelano che, subito prima dell'urto, l'automobile A viaggiava verso est, mentre B era diretta a nord (figura). Dopo l'urto, i rottami delle due auto sono rimasti uniti ed i loro pneumatici hanno lasciato strisciate di slittamento lunghe d in direzione α prima di arrestarsi.

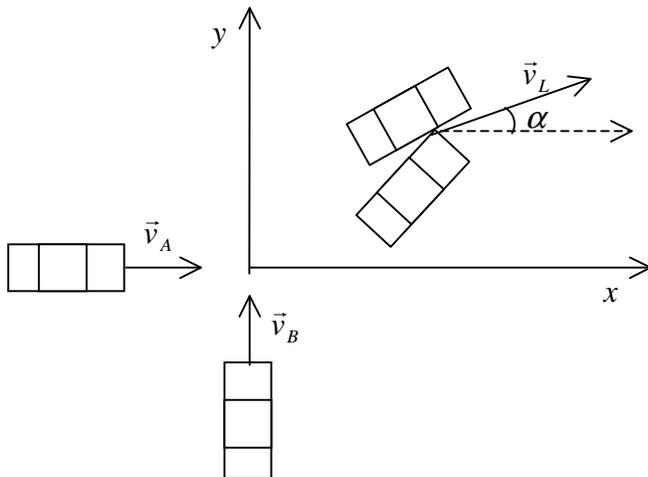
Calcolare le velocità \vec{v}_A e \vec{v}_B di ciascuna automobile prima dell'urto.

Una delle automobili superava il limite legale di velocità v_L ?

Si supponga che le ruote di entrambe le automobili siano rimaste bloccate dopo l'urto e che il coefficiente di attrito dinamico fra le ruote bloccate e la pavimentazione sia μ_d .

[$m_A = 1100$ kg; $m_B = 1300$ kg; $d = 18,7$ m; $v_L = 90$ km/h; $\alpha = 30^\circ$ da est verso nord; $\mu_d = 0,80$]

Suggerimento: la conservazione della quantità di moto è una relazione vettoriale



Soluzione:

a) L'urto è completamente anelastico, per cui la quantità di moto si conserva, mentre l'energia cinetica no.

Il modulo v' della velocità subito dopo l'urto, si calcola dalle strisciate (l'energia cinetica dopo l'urto è stata dissipata dall'attrito):

$$(m_A + m_B)g\mu_d d = \frac{1}{2}(m_A + m_B)v'^2$$

cioè:

$$v' = \sqrt{2g\mu_d d} = 17 \text{ m/s}$$

D'altra parte, la conservazione della quantità di moto si scrive (per componenti):

$$\begin{cases} m_A v_A = (m_A + m_B)v' \cos \alpha \\ m_B v_B = (m_A + m_B)v' \sin \alpha \end{cases}$$

da cui:

$$v_A = \frac{m_A + m_B}{m_A} v' \cos \alpha = 32,3 \text{ m/s} = 116,5 \text{ km/h}$$

diretta verso est,

$$v_B = \frac{m_A + m_B}{m_B} v' \sin \alpha = 15,8 \text{ m/s} = 56,9 \text{ km/h}$$

diretta verso nord.

b) L'auto A superava il limite dei 90 km/h.

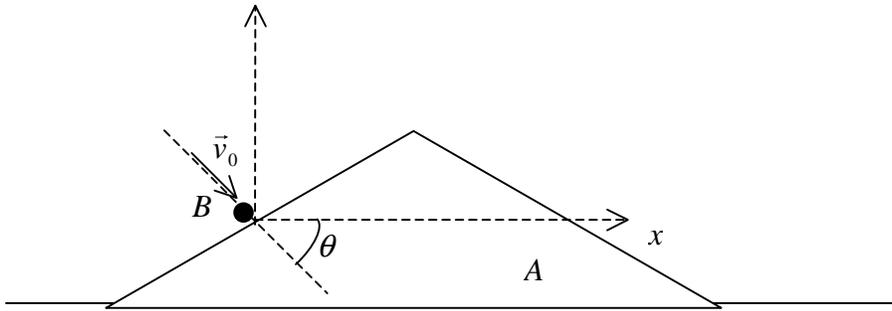
Problema 6

Il corpo A mostrato in figura, di massa M_A e struttura prismatica, appoggiato su un piano orizzontale liscio, viene colpito da un corpo puntiforme B di massa M_B e velocità $|\vec{v}_0|$. Sapendo che dopo l'urto il corpo B rimbalza verticalmente raggiungendo l'altezza h rispetto al punto di impatto mentre A trasla sul piano di appoggio, si determinino la direzione ed il verso del vettore \vec{v}_0 .

Si supponga che l'urto sia elastico.

$$[M_A = 100 \text{ kg}; M_B = 50 \text{ g}; |\vec{v}_0| = 5 \text{ m/s}; h = 80 \text{ cm}]$$

Suggerimento: la componente orizzontale della quantità di moto si conserva, quella verticale no



Soluzione:

In questo problema si conservano la componente orizzontale della quantità di moto e l'energia, per cui, dette v_A e v_B le velocità di A e B subito dopo l'urto, vale:

$$\begin{cases} M_B v_0 \cos \theta = M_A v_A \\ \frac{1}{2} M_B v_0^2 = \frac{1}{2} M_B v_B^2 + \frac{1}{2} M_A v_A^2 \\ \frac{1}{2} M_B v_B^2 = M_B gh \end{cases}$$

ove θ è l'angolo di impatto mostrato in figura, mentre la terza equazione vale per il moto di B dopo l'urto.

Sostituendo la terza equazione nella seconda, si ricava:

$$\begin{cases} M_B v_0 \cos \theta = M_A v_A \\ \frac{1}{2} M_B v_0^2 = M_B gh + \frac{1}{2} M_A v_A^2 \end{cases}$$

e quindi:

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{M_B M_A (v_0^2 - 2gh)}}{M_B v_0} = \sqrt{\frac{M_A (v_0^2 - 2gh)}{M_B v_0^2}} = 0,863$$

$$\theta = 30,3^\circ$$

V - Meccanica rotazionale del corpo rigido

Un corpo rigido può ruotare oltre che traslare. Il moto traslatorio è descritto specificando quello del centro di massa.

Rotazione intorno ad un asse fisso.

Quando un corpo rigido (idealizzato come un insieme di punti materiali le cui mutue distanze sono fisse) ruota intorno ad un asse fisso, ogni suo punto è fermo rispetto agli altri. Pertanto le rotazioni intorno ad un asse fisso si possono descrivere mediante un solo angolo θ : Se un punto ruota di θ , gli altri sono costretti a ruotare dello stesso angolo.

Di conseguenza, tutti i punti del corpo rigido hanno la stessa velocità angolare:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

e la stessa accelerazione angolare:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Sia $\vec{\omega}$ che $\vec{\alpha}$ sono vettori con la direzione dell'asse di rotazione (preso di solito come asse z) ed il verso dato dalla regola della mano destra.

Si definisce momento d'inerzia del corpo rigido rispetto all'asse di rotazione la grandezza:

$$I = \sum m_i R_i^2$$

dove R_i è la distanza dall'asse del punto m_i .

La definizione può essere estesa ad un corpo continuo:

$$I = \int_M R^2 dm$$

Uno strumento utile per la valutazione del momento d'inerzia è il teorema di Huygens-Steiner (o dell'asse parallelo). Questo teorema afferma che il momento d'inerzia di un corpo rispetto ad un asse qualsiasi è dato da:

$$I = I_{CM} + Md^2$$

dove I_{CM} è il momento d'inerzia rispetto all'asse parallelo a quello dato e passante per il centro di massa, M la massa del corpo a d la distanza tra i due assi.

Il momento angolare (o momento della quantità di moto) L_z di un corpo in rotazione attorno all'asse fisso z è dato da:

$$L_z = I_z \omega$$

Per rotazioni di un corpo rigido simmetrico attorno ad un asse di simmetria, il momento angolare è:

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

Quando un corpo rigido ruota attorno ad un asse che non è di simmetria, il momento angolare \vec{L} può non essere parallelo e concorde rispetto alla velocità angolare $\vec{\omega}$ nel qual caso il corpo è in una condizione di squilibrio dinamico e la direzione del momento angolare \vec{L} varia nel tempo (anche se $\vec{\omega}$ è costante: è questo il caso della precessione di \vec{L}).

Il teorema del momento angolare (2^a equazione cardinale della dinamica dei sistemi di punti) è, nella forma più semplice:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{(E)}$$

con $\vec{M}^{(E)}$ momento totale delle forze esterne calcolato rispetto al polo O . Anche \vec{L} è calcolato rispetto allo stesso polo. Il polo O deve essere fisso rispetto al riferimento scelto.

Nei moti di rotazione attorno ad un asse fisso il concetto di forza è letteralmente sostituito da quello di momento della forza, quello di massa dal momento d'inerzia, e l'accelerazione è quella angolare. Tra queste grandezze vige infatti un'analogia relazione che lega forza, massa ed accelerazione:

$$M_z^{(E)} = \frac{d}{dt}(I_z \omega) = I_z \alpha$$

Se $M_z^{(E)}$ è costante, allora anche α è costante e le equazioni del moto rotatorio divengono:

$$\begin{cases} \alpha = \text{costante} \\ \omega = \omega_0 + \alpha t \\ \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \end{cases}$$

e:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

dove ω_0 e θ_0 sono i valori iniziali ($t = t_0 = 0$) della velocità angolare e dell'angolo che definisce la posizione iniziale. Queste equazioni sono analoghe a quelle del moto rettilineo uniforme in una dimensione.

L'energia cinetica di rotazione di un corpo rigido che ruota attorno ad un asse fisso z è:

$$E_c = \frac{1}{2} I_z \omega^2$$

mentre il lavoro fatto dal momento $\vec{M}^{(E)}$ assume la forma:

$$W = \int_{\theta_0}^{\theta} M_z^{(E)} d\theta$$

Se $M_z^{(E)}$ è costante, allora: $W = M_z^{(E)}(\theta - \theta_0)$

Il teorema lavoro – energia è dato da:

$$W = \int_{\theta_0}^{\theta} M_z^{(E)} d\theta = E_c - E_{c0}$$

Se il momento risultante delle forze agenti sul corpo è nullo, cioè $d\vec{L}/dt = 0$, allora:

$$\vec{L} = \text{costante.}$$

Questa è la legge di conservazione del momento angolare per un corpo in rotazione. Se il momento d'inerzia è costante (come per un singolo corpo rigido) la conservazione del momento angolare equivale all'affermazione che la velocità angolare $\vec{\omega}$ è costante nel tempo.

Per sistemi più complessi, in cui il momento d'inerzia può variare (basta che ci siano due corpi rigidi interagenti), la conservazione del momento angolare è uno strumento potente nella soluzione di problemi e può caratterizzare il sistema dinamico ad ogni istante.

Il momento risultante delle forze esterne

$$\vec{M}^{(E)} = \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(E)})$$

sarà automaticamente nullo per i sistemi isolati, ma può essere nullo anche quando $\vec{F}^{(E)} \neq 0$, essendo in tal caso essenziale la scelta del polo rispetto al quale si calcolano i momenti delle forze.

Rototraslazione senza strisciamento.

Nel rotolamento il moto traslatorio è combinato con quello rotatorio. Oggetti con raggio r che rotolano senza strisciare hanno la velocità angolare ω e la velocità del centro di massa v_{CM} legate dalla relazione:

$$v_{CM} = r\omega$$

L'energia cinetica di un corpo che rotola senza strisciare è la somma della sua energia cinetica rotazionale attorno all'asse di rotazione baricentrico e di quella traslazionale del centro di massa:

$$E_c = \frac{1}{2}(I_{CM} + Mr^2)\omega^2 = \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{CM}^2$$

Statica del corpo rigido.

La statica può essere vista come un caso limite della dinamica: quello in cui "tutto è fermo", anche se ci sono forze.

Le condizioni da applicare sono quindi due:

$$\sum_i \vec{F}_i^{(E)} = 0 \quad \text{per non avere moti di traslazione}$$

$$\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(E)} = 0 \quad \text{per sopprimere le rotazioni}$$

Per applicare queste condizioni è necessario conoscere non solo le forze esterne, ma anche i loro punti di applicazione. La gravità agisce come se fosse applicata al centro di massa del corpo rigido. Il polo rispetto al quale si calcolano i momenti delle forze deve essere scelto con cura, onde semplificare al massimo la risoluzione del problema. Conviene anche scegliere un riferimento cartesiano opportuno: alle due equazioni vettoriali dell'equilibrio corrispondono sei equazioni scalari.

Problema 1

Determinare le lunghezze dei pendoli semplici aventi medesimo periodo di oscillazione di due pendoli composti quadrati di lato l e vincolati a ruotare attorno all'asse orizzontale passante per il punto medio di uno dei lati e perpendicolare a questo lato.

I due quadrati sono formati:

uno da quattro masse puntiformi uguali collocate nei vertici ed unite da asticelle rigide di massa trascurabile

l'altro da quattro aste rigide omogenee ed uguali.

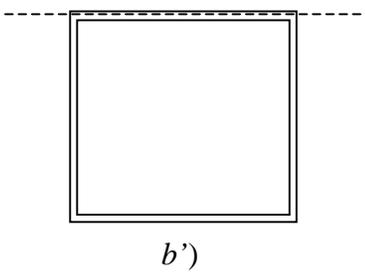
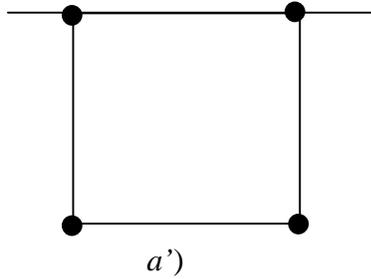
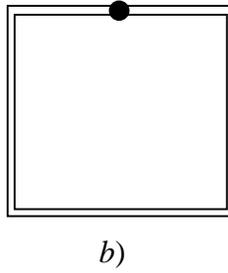
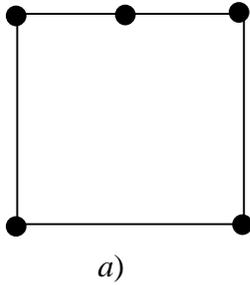
Come cambierebbero i risultati se i pendoli fossero vincolati a ruotare attorno ad uno dei lati del quadrato?

Indicare con m la massa totale del pendolo.

Suggerimento: il periodo di un pendolo composto è:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_p}{mgd}}$$

con I_p momento d'inerzia del pendolo rispetto all'asse di oscillazione e d distanza del centro di massa dall'asse.



Soluzione:

Asse perpendicolare al piano del foglio (fig. a) e b)):

detti I_p il momento d'inerzia delle masse puntiformi e I_c quello delle aste omogenee, si trova:

$$\begin{cases} I_p = \frac{m}{4} \left[\left(\frac{l}{2} \right)^2 + \left(\frac{l}{2} \right)^2 + \frac{5}{4} l^2 + \frac{5}{4} l^2 \right] = \frac{3}{4} m l^2 \\ I_c = 4 \left(\frac{m l^2}{4 \cdot 12} + \frac{m l^2}{4 \cdot 4} \right) + m \frac{l^2}{4} = \frac{7}{12} m l^2 \end{cases}$$

Per la valutazione di I_c si è prima calcolato il momento d'inerzia rispetto al centro di massa e poi si è utilizzato il teorema dell'asse parallelo.

Il braccio della forza peso è la distanza d del centro di massa dall'asse:

$$d = \frac{l}{2}$$

Il periodo del pendolo è:

$$\begin{cases} T_p = 2\pi \sqrt{\frac{I_p}{mgd}} = 2\pi \sqrt{\frac{3l}{2g}} = 2\pi \sqrt{\frac{l'_p}{g}} \\ T_c = 2\pi \sqrt{\frac{I_c}{mgd}} = 2\pi \sqrt{\frac{7l}{6g}} = 2\pi \sqrt{\frac{l'_c}{g}} \end{cases}$$

con T_p, T_c, l'_p, l'_c periodi e lunghezze dei pendoli semplici equivalenti.
Quindi:

$$\begin{cases} l'_p = \frac{3l}{2} \\ l'_c = \frac{7l}{6} \end{cases}$$

Asse orizzontale passante per il punto medio di uno dei lati (fig. a') e b')):

detti I_p il momento d'inerzia delle masse puntiformi e I_c quello delle aste omogenee, si trova:

$$\begin{cases} I_p = 2 \frac{m}{4} l^2 = \frac{1}{2} m l^2 \\ I_c = 2 \left(\frac{m}{4} \frac{l^2}{12} + \frac{m}{4} \frac{l^2}{4} \right) + m \frac{l^2}{4} = \frac{5}{12} m l^2 \end{cases}$$

Per la valutazione di I_c si è prima calcolato il momento d'inerzia rispetto al centro di massa e poi si è utilizzato il teorema dell'asse parallelo.

Il braccio della forza peso è la distanza d del centro di massa dall'asse:

$$d = \frac{l}{2}$$

Il periodo del pendolo è:

$$\begin{cases} T_p = 2\pi \sqrt{\frac{I_p}{mgd}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{l'_p}{g}} \\ T_c = 2\pi \sqrt{\frac{I_c}{mgd}} = 2\pi \sqrt{\frac{5l}{6g}} = 2\pi \sqrt{\frac{l'_c}{g}} \end{cases}$$

con T_p, T_c, l'_p, l'_c periodi e lunghezze dei pendoli semplici equivalenti. Quindi:

$$\begin{cases} l'_p = l \\ l'_c = \frac{5l}{6} \end{cases}$$

Problema 2

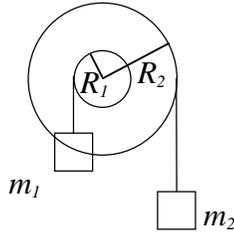
Due corpi sono appesi mediante fili ideali a due pulegge solidali fra loro e girevoli attorno ad un asse comune, come illustrato in figura. Il momento d'inerzia complessivo è I ed i raggi dei dischi sono R_1 ed R_2 . I fili non slittano nelle gole delle pulegge.

a) nota m_1 , si trovi m_2 tale che il sistema sia in equilibrio

b) posta delicatamente una massa m_3 sopra m_1 , si trovino l'accelerazione angolare dei dischi e le tensioni dei fili.

[$m_1 = 24$ kg; $m_3 = 12$ kg; $R_1 = 1,2$ m; $R_2 = 0,4$ m; $I = 40$ kgm²]

Suggerimento: utilizzare i momenti delle forze.



Soluzione:

a) La condizione di equilibrio è:

$$m_1 g R_1 = m_2 g R_2$$

da cui:

$$m_2 = m_1 \frac{R_1}{R_2} = 72 \text{ kg.}$$

b) Le equazioni del moto del sistema dopo l'aggiunta di m_3 sopra m_1 , sono:

$$\begin{cases} (m_1 + m_3)g - T_1 = (m_1 + m_3)a_1 \\ T_2 - m_2 g = m_2 a_2 \\ R_1 T_1 - R_2 T_2 = I \alpha \\ \alpha = \frac{a_1}{R_1} = \frac{a_2}{R_2} \end{cases}$$

cioè, eliminando le accelerazioni lineari:

$$\begin{cases} T_1 + (m_1 + m_3)R_1 \alpha = (m_1 + m_3)g \\ T_2 - m_2 R_2 \alpha = m_2 g \\ R_1 T_1 - R_2 T_2 - I \alpha = 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema, si trova:

$$\begin{cases} T_1 = \frac{(m_1 + m_3)(m_2 R_2^2 + m_2 R_2 R_1 + I)}{(m_1 + m_3)R_1^2 + m_2 R_2^2 + I} g = 294 \text{ N} \\ T_2 = \frac{(m_1 + m_3)(R_1 R_2 + R_1^2) + I}{(m_1 + m_3)R_1^2 + m_2 R_2^2 + I} m_2 g = 745 \text{ N} \\ \alpha = \frac{(m_1 + m_3)R_1 - m_2 R_2}{(m_1 + m_3)R_1^2 + m_2 R_2^2 + I} g = 1,4 \text{ rad/s}^2 \end{cases}$$

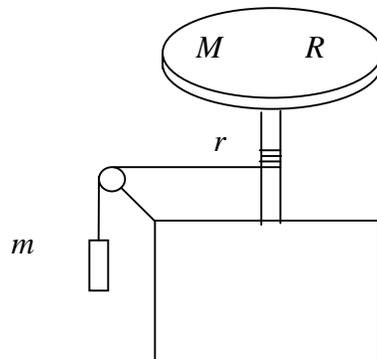
Problema 3

Una ruota di Prandtl (figura) è formata da un disco di raggio R e massa M e da un cilindro di raggio r e momento d'inerzia trascurabile rispetto all'asse di rotazione. Non c'è attrito ed il filo inestensibile non slitta sull'albero. All'istante $t = 0$, la massa m , inizialmente in quiete, viene lasciata scendere.

- Calcolare il tempo t_0 affinché la massa m percorra l'altezza h .
- Calcolare il numero corrispondente di giri compiuti dalla ruota.
- Sul bordo della ruota è attaccato un magnetino di massa m_0 e dimensioni trascurabili che esercita una forza F sul disco. Verificare se al tempo t_0 il magnetino è ancora attaccato al disco.

[$M = 0,5 \text{ kg}$; $R = 0,2 \text{ m}$; $r = 2 \text{ cm}$; $m = 1 \text{ kg}$; $h = 2 \text{ m}$; $m_0 = 0,01 \text{ kg}$; $F = 5 \text{ N}$]

Suggerimento: il momento d'inerzia del magnetino è trascurabile. Quando la ruota è in rotazione sul magnetino agisce la forza centrifuga.



Soluzione:

- Momento d'inerzia I della ruota di Prandtl:

$$I = MR^2 = 0,01 \text{ kgm}^2$$

Equazioni del moto del sistema (a = accelerazione di m , T = tensione del filo, α = accelerazione angolare):

$$\begin{cases} mg - T = ma \\ Tr = I\alpha \\ \alpha = \frac{a}{r} \end{cases}$$

Eliminando l'accelerazione angolare e la tensione del filo:

$$mgr = mar + I \frac{a}{r}$$

cioè:

$$a = \frac{mr^2}{mr^2 + I} g$$

Dunque:

$$t_0 = \sqrt{\frac{2h}{a}} = \sqrt{\frac{2h}{g} \frac{mr^2 + I}{mr^2}} = 3,2 \text{ s}$$

b) Il numero di giri n è fornito da un puro calcolo geometrico:

$$n = \frac{h}{2\pi r} = 15,9 \text{ giri.}$$

c) Il momento d'inerzia del magnetino è trascurabile rispetto a quello della ruota di Prandtl, quindi non ne altera la velocità di rotazione. Perciò, la forza centrifuga agente sul magnetino è:

$$m_0 \omega^2 R = m_0 \frac{(at_0)^2}{R} = 7,5 \text{ N}$$

per cui il magnetino si è già staccato. Si può usare anche la conservazione dell'energia:

$$\begin{cases} m_0 gh = \frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{1}{2} I \frac{v^2}{r^2} \\ F = m_0 \frac{v^2}{r} \end{cases}$$

cioè:

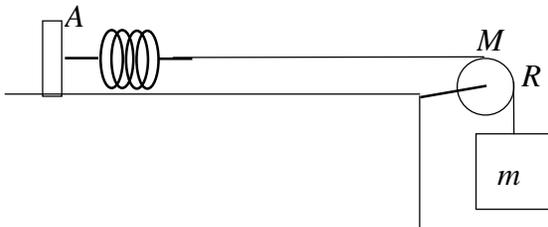
$$F = m_0 \frac{2m_0 ghr}{m_0 r^2 + I} = 7,5 \text{ N}$$

Problema 4

Nel sistema indicato in figura la molla, di massa trascurabile, ha costante elastica k ; la carrucola, costituita da un cilindro omogeneo di massa M e raggio R , ruota senza attrito attorno all'asse O disposto orizzontalmente. Il filo che collega la molla, un cui estremo è fissato A , alla massa m , è inestensibile, di massa trascurabile e non slitta sulla carrucola.

- Calcolare l'allungamento x_0 della molla in condizioni di equilibrio.
- Calcolare il periodo delle piccole oscillazioni della massa m nel suo moto verticale.

Suggerimento: scrivere l'equazione del moto verticale della massa m e quella della rotazione del cilindro intorno all'asse fisso.



Soluzione:

Detto x lo scostamento della molla dalla posizione di equilibrio (che è anche l'allungamento della molla), positivo verso il basso, si ha:

$$\begin{cases} mg - T(x) = m\ddot{x} \\ [T(x) - kx]R = I\ddot{\theta} \\ \ddot{\theta} = \frac{\ddot{x}}{R} \\ I = \frac{1}{2}MR^2 \end{cases}$$

da cui:

$$\begin{cases} (mg - m\ddot{x} - kx)R = I \frac{\ddot{x}}{R} \\ I = \frac{1}{2}MR^2 \end{cases}$$

Questa è l'equazione dell'oscillatore armonico forzato:

$$\frac{M + 2m}{2}\ddot{x} + kx = mg$$

a) All'equilibrio $\ddot{x} = 0$, per cui:

$$x_0 = \frac{mg}{k}$$

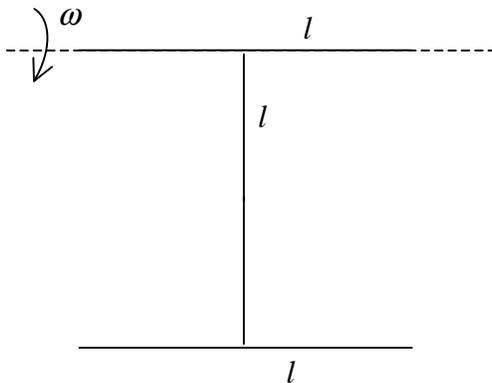
b) La soluzione è data dalla somma dell'oscillazione libera e della soluzione all'equilibrio x_0 . Il periodo è perciò lo stesso dell'oscillatore libero:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2m + M}{2k}}$$

Problema 5

Un corpo rigido è costituito da tre sbarrette sottili identiche di massa m e lunghezza l , collegate fra loro a formare una H (figura). Il corpo può ruotare attorno ad un asse orizzontale passante per una delle gambe della H. Partendo da fermo con la H in un piano orizzontale, il corpo ruota sotto l'azione della forza peso. Determinare la velocità angolare del corpo nel momento in cui il piano dell'H è verticale.

Suggerimento: calcolare il momento d'inerzia totale.



Soluzione:

Il braccio della forza gravitazionale è la distanza del centro di massa dall'asse, che, essendo il corpo omogeneo, coincide con il centro geometrico e vale perciò $l/2$.
Detto I il momento d'inerzia, vale:

$$I = \frac{1}{3} ml^2 + ml^2 = \frac{4}{3} ml^2$$

Allora la conservazione dell'energia si scrive:

$$3mg \frac{l}{2} = \frac{1}{2} \frac{4}{3} ml^2 \omega^2$$

cioè:

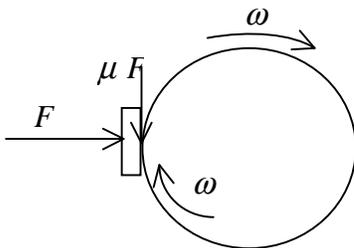
$$\omega = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Problema 6

Una ruota di massa m e raggio r è assimilabile ad un disco omogeneo e ruota senza attrito in un piano verticale attorno ad un asse fisso passante per il suo centro con una velocità angolare ω . Per fermare la ruota, si preme un pattino contro il suo bordo esercitando una forza radiale F . Se prima di fermarsi la ruota compie n giri, qual è il coefficiente d'attrito μ , fra il pattino ed il bordo della ruota?

[$m = 1,4$ kg; $r = 23,0$ cm; $\omega = 840$ giri/min; $F = 130,0$ N; $n = 2,8$]

Suggerimento: Calcolare il lavoro della forza di attrito e uguagliarlo alla variazione di energia cinetica della ruota.



Soluzione:

Teorema dell'energia cinetica:

$$\frac{1}{2} I \omega^2 = \mu F r 2\pi n$$

Dove I è il momento d'inerzia della ruota. Quindi:

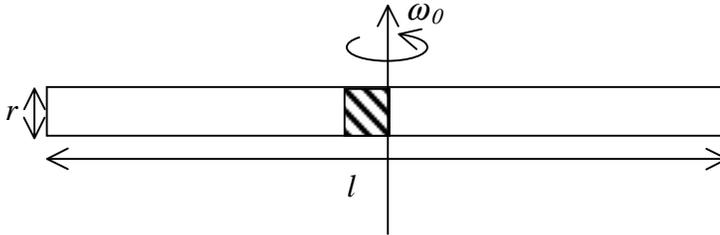
$$\mu = \frac{I \omega^2}{4\pi n F r} = \frac{m r \omega^2}{8\pi n F} = 0,27$$

Problema 7

Un sottile tubo rigido ed omogeneo, di massa M , ha al suo centro un cilindretto molto corto di massa m (da considerarsi puntiforme) e diametro appena inferiore a quello del tubo. Il cilindretto può scorrere senza attrito dentro al tubo. Inizialmente il sistema ruota senza attrito con velocità angolare ω_0 intorno ad un asse verticale baricentrico. Ad un certo momento, per una lievissima perturbazione (vedere figura), il cilindretto si sposta dalla posizione iniziale e viene espulso dal

tubo. In assenza di forze esterne, qual è la velocità angolare ω del tubo, quando il cilindretto fuoriesce?

Suggerimento: Il momento d'inerzia del tubo sottile rispetto ad un diametro centrale può essere assimilato a quello di una sbarretta rigida.



Soluzione:

Conservazione del momento angolare:

$$I\omega_0 = \left(I + m \frac{l^2}{4} \right) \omega$$

Dove I è il momento d'inerzia del tubo:

$$I = \frac{Ml^2}{12}$$

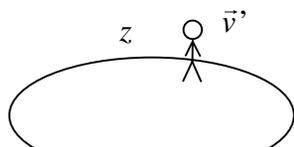
Ma allora:

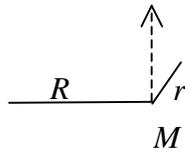
$$\omega = \frac{I\omega_0}{I + m \frac{l^2}{4}} = \frac{M}{M + 3m} \omega_0$$

Problema 8

Su una piattaforma circolare omogenea inizialmente ferma in posizione orizzontale di massa M e raggio R , girevole senza attrito attorno all'asse verticale centrale z , sta fermo a distanza r dal centro un uomo di massa m (vedi figura). Ad un certo istante l'uomo comincia a correre lungo la circonferenza di raggio r con velocità \vec{v}' rispetto alla piattaforma. Determinare la velocità angolare ω con cui ruota la piattaforma.

Suggerimento: ω è chiaramente misurata in un riferimento inerziale.





Soluzione:

Detta ω_u la velocità angolare dell'uomo in un riferimento inerziale, vale:

$$\begin{cases} \vec{v}' = \vec{r} \times (\vec{\omega}_u - \vec{\omega}) \\ mr^2 \omega_u - \frac{1}{2} MR^2 \omega = 0 \end{cases}$$

con $\vec{\omega}$ ed $\vec{\omega}_u$ di verso opposto. Passando ai moduli nella prima equazione:

$$\begin{cases} v' = r(\omega_u + \omega) \\ mr^2 \omega_u - \frac{1}{2} MR^2 \omega = 0 \end{cases}$$

Da ciò si ottiene:

$$\omega = \frac{mrv'}{\left(mr^2 + \frac{1}{2} MR^2 \right)}$$

Problema 9

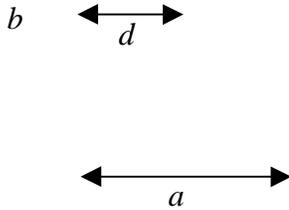
La porta rettangolare mostrata in figura ha massa M , lati di lunghezza a e b ed è vincolata a ruotare in un piano verticale attorno al lato maggiore b . La porta, inizialmente ferma, viene colpita orizzontalmente da un proiettile di massa m e dimensioni trascurabili, ad una distanza d dal suo asse di rotazione. La velocità del proiettile prima dell'urto è v ed esso si conficca nella porta. Sapendo che il momento delle forze d'attrito vale M_f , determinare:

- La velocità angolare ω con cui la porta ruota subito dopo l'urto.
- L'angolo totale di rotazione θ della porta dovuto all'urto.

$$[M = 2 \text{ kg}; a = 1,5 \text{ m}; b = 2 \text{ m}; m = 50 \text{ g}; d = \frac{2}{3} a; v = 30 \text{ m/s}; M_f = \frac{1}{3} \text{ Nm}]$$

Suggerimento: il momento d'inerzia della porta rispetto ad un asse parallelo a quello specificato e passante per il baricentro vale $I_0 = \frac{1}{12} Ma^2$.





Soluzione:

Momento d'inerzia iniziale della porta rispetto all'asse b :

$$I_i = I_0 + M \left(\frac{a}{2} \right)^2 = \frac{1}{3} M a^2$$

Momento d'inerzia finale (dopo l'urto) della porta rispetto all'asse b :

$$I_f = I_0 + M \left(\frac{2a}{3} \right)^2 = \frac{1}{9} (3M + 4m) a^2$$

a) Conservazione del momento angolare:

$$mv \frac{2}{3} a = I_f \omega$$

cioè:

$$\omega = mv \frac{2a}{3I_f} = \frac{6mv}{a(3M + 4m)} = 0,97 \text{ rad/s}$$

b) Teorema dell'energia cinetica:

$$\frac{1}{2} I_f \omega^2 = M_f \theta$$

Vale a dire:

$$\theta = \frac{I_f \omega^2}{2M_f} = \frac{2m^2 v^2}{(3M + 4m)M_f} = 2,18 \text{ rad}$$

Problema 10

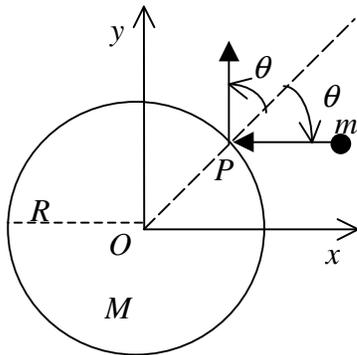
Un disco omogeneo di massa M e raggio R , inizialmente fermo, è libero di ruotare senza attrito attorno ad un asse fisso z orizzontale passante per il suo centro O . Un proiettile puntiforme di massa m viene lanciato con velocità v_0 (nel piano del disco) contro il disco, e lo urta in un punto P

individuato da un angolo θ . In seguito all'urto il proiettile rimbalza con velocità v'_0 in una direzione che forma con la radiale in P il medesimo angolo θ . Poiché l'urto sia elastico, determinare:

- c) La velocità angolare ω del disco dopo l'urto.
 d) il rapporto fra la massa del proiettile m e quella del disco M .

[$R = 30$ cm; $v_0 = 30$ m/s; $\theta = 60^\circ$; $v'_0 = 2$ m/s]

Suggerimento: Il sistema è formato da disco più proiettile, perciò scegliere come polo il punto O e tener conto del momento angolare del proiettile.



Soluzione:

I principi di conservazione del momento angolare e dell'energia sono:

$$\begin{cases} Rm \sin \theta (v_0 - v'_0) = I\omega \\ \frac{1}{2} m (v_0^2 - v'^2_0) = \frac{1}{2} I\omega^2 \end{cases}$$

a) Il rapporto delle due equazioni non contiene le masse:

$$\omega = \frac{v_0 + v'_0}{R \sin \theta} = 46,2 \text{ rad/s}$$

b) Nota ω , il rapporto delle masse si ottiene facilmente da una delle due equazioni di partenza:

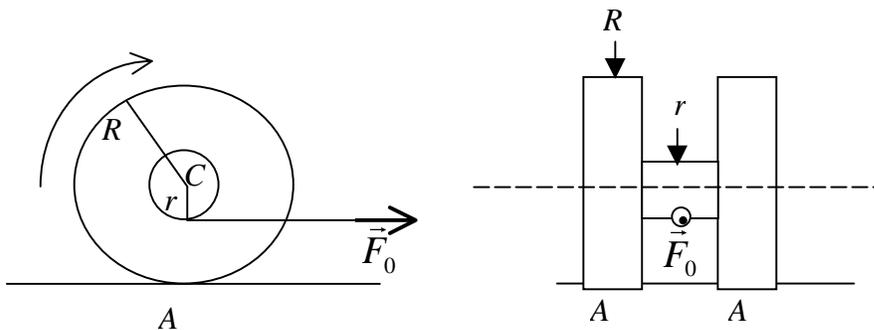
$$\frac{m}{M} = \frac{R\omega}{2 \sin \theta (v_0 - v'_0)} = \frac{v_0 + v'_0}{2 \sin^2 \theta (v_0 - v'_0)} = 1$$

Problema 11

Un rocchetto omogeneo di massa M raggio di gola r e raggio esterno R rotola senza strisciare su un piano orizzontale. L'asse AA è l'asse di istantanea rotazione (figura). Al filo avvolto sul rocchetto è applicata una forza costante \vec{F}_0 orizzontale, che si pensa situata sempre nel piano verticale passante per il centro di massa C del rocchetto. Trovare quanto valgono:

- l'accelerazione \vec{a}_c del centro di massa;
- la forza di attrito radente \vec{F}_a complessiva sul rocchetto (è attrito statico o dinamico?);
- l'accelerazione angolare del rocchetto;
- dire se il filo si avvolge o si svolge e perchè.

Suggerimento: Calcolare il momento d'inerzia totale del rocchetto.



Soluzione 1:

Equazioni del moto del centro di massa e della rotazione attorno al centro di massa:

$$\begin{cases} \vec{F}_0 + \vec{F}_a = M\vec{a}_c \\ \vec{r} \times \vec{F}_0 + \vec{R} \times \vec{F}_a = \frac{1}{2}MR^2\vec{\alpha} \end{cases}$$

Cioè, scelto come verso positivo dell'asse di rotazione quello entrante nel foglio:

$$\begin{cases} F_0 - F_a = Ma_c \\ -rF_0 + RF_a = \frac{1}{2}MRa_c \end{cases}$$

Nella seconda equazione si è usata la condizione $a_c = R\alpha$ (rotolamento senza strisciamento). Risolvendo il sistema si ottiene:

$$\begin{cases} a_c = \frac{2}{3} \frac{R-r}{MR} F_0 \\ F_a = \frac{2r+R}{3R} F_0 \end{cases}$$

Le risposte ai quesiti a) e b) si ottengono aggiungendo che \vec{a}_c è parallela a \vec{F}_0 , mentre \vec{F}_a è antiparallela a \vec{F}_0 . Inoltre l'attrito è statico, altrimenti il rocchetto striscerebbe.

c) L'accelerazione angolare è data dalla condizione di rotolamento senza strisciamento:

$$\alpha = \frac{a_c}{R}$$

d) Il filo si arrotola, perchè deve rimanere teso mentre il rocchetto rotola senza strisciare.

Soluzione 2:

Traslazione del centro di massa e rotazione attorno al punto di contatto:

$$\begin{cases} \vec{F}_0 + \vec{F}_a = M\vec{a}_c \\ (-\vec{r} + \vec{R}) \times \vec{F}_0 = \left(\frac{1}{2} MR^2 + MR^2 \right) \vec{\alpha} \end{cases}$$

Per calcolare il momento d'inerzia rispetto all'asse di contatto, si è usato il teorema di Huygens-Steiner. Orientando l'asse di rotazione nello stesso verso della soluzione 1 ed impiegando ancora una volta la condizione di rotolamento senza strisciamento $a_c = R\alpha$, si ricava:

$$\begin{cases} F_0 - F_a = Ma_c \\ (R-r)F_0 = \frac{3}{2} MRa_c \end{cases}$$

La soluzione del sistema è molto semplice, e fornisce:

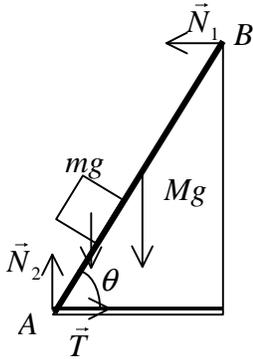
$$\begin{cases} a_c = \frac{2}{3} \frac{R-r}{MR} F_0 \\ F_a = \frac{2r+R}{3R} F_0 \end{cases}$$

Problema 12

Un bambino di massa m si sposta lungo una scala a pioli di massa M e lunghezza L . Non c'è attrito su entrambe le estremità della scala, che è trattenuta in basso da una corda ideale orizzontale che si spezza oltre una tensione massima T_{max} (figura).

- a) Qual è la tensione della corda quando il bambino dista $d = L/3$ dall'estremità inferiore della scala?
- b) Qual è la distanza massima d_{max} dall'estremità inferiore della scala che il bambino può raggiungere senza rompere la corda?

Suggerimento: utilizzare le equazioni dell'equilibrio del corpo rigido.



Soluzione:

Equilibrio delle forze e dei momenti delle forze rispetto a B :

$$\begin{cases} N_1 = T \\ N_2 = (m + M)g \\ TL \sin \theta + \left[m(L - d) + M \frac{L}{2} \right] g \cos \theta = N_2 L \cos \theta \end{cases}$$

a) La tensione della fune si trova risolvendo il sistema scritto sopra:

$$T = \left(m \frac{d}{L} + \frac{M}{2} \right) g \cot \theta$$

b) Basta uguagliare a T_{max} la tensione della fune trovata in a) e risolvere in d_{max} :

$$d_{max} = \left(\frac{T_{max}}{mg \cot \theta} - \frac{M}{2m} \right) L$$

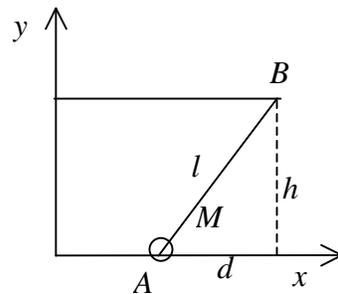
Problema 13

Un cavo ideale orizzontale (figura) sostiene un'asta uniforme, di lunghezza l e massa M , incernierata in A e con l'estremo B ad altezza h sopra A .

- a) Quanto vale la tensione del cavo?
- b) Se il cavo viene tagliato, quanto vale l'accelerazione angolare dell'asta nell'istante in cui il cavo viene tagliato?
- c) Quanto vale la velocità angolare dell'asta quando essa raggiunge la posizione orizzontale?

[$M = 50 \text{ kg}$; $l = 5 \text{ m}$; $h = 4 \text{ m}$]

Suggerimento: il momento d'inerzia dell'asta rispetto all'asse passante per l'estremità è: $I = \frac{1}{3}Ml^2$.



Soluzione:

- a) Equilibrio dei momenti rispetto ad A:

$$Mg \frac{d}{2} = Th$$

cioè:

$$T = Mg \frac{d}{2h} = 184 \text{ N}$$

- b) Momento d'inerzia dell'asta rispetto ad A:

$$I = \frac{1}{3}Ml^2$$

L'accelerazione angolare è data da:

$$\alpha = \frac{M^{(E)}}{I}$$

Accelerazione angolare iniziale:

$$\alpha = Mg \frac{d}{2I} = \frac{3gd}{2l^2} = 1.8 \text{ rad/s}^2$$

c) Conservazione dell'energia meccanica:

$$mg \frac{h}{2} = \frac{1}{2} \frac{ml^2}{3} \omega^2$$

Velocità angolare quando l'asta tocca terra:

$$\omega = \sqrt{\frac{3gh}{l^2}} = 2,2 \text{ rad/s}$$

VI - Elettrostatica nel vuoto

Forza e carica elettrica

La legge di Coulomb asserisce che la forza elettrica tra due cariche puntiformi q_1 e q_2 poste a distanza r_{12} l'una dall'altra nel vuoto è data da:

$$\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

con k = costante elettrostatica = $8,99 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}$

ϵ_0 = costante dielettrica del vuoto = $8,85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$.

Quando sono presenti più cariche elettriche, vale il principio di sovrapposizione:

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$$

La forza esercitata da una distribuzione continua di cariche (volumetrica, superficiale o lineare) su una carica puntiforme è ottenuta integrando gli effetti delle cariche infinitesime che costituiscono la particolare distribuzione.

Il campo elettrico

Una qualunque distribuzione di cariche crea un campo elettrico nello spazio circostante. Considerando una carica di prova q_0 sufficientemente piccola collocata nel campo, il vettore campo elettrico \vec{E} è definito come:

$$\vec{E} = \lim_{q_0 \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q_0}$$

La forza che agisce su una carica puntiforme q' posta in un dato campo elettrico \vec{E} è:

$$\vec{F} = q' \vec{E}$$

Il campo elettrico generato in un punto P da una singola carica puntiforme q_i nella posizione r_i è:

$$\vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_{i0}^2} \hat{r}_{i0}$$

dove r_{i0} è la distanza tra la carica q_i ed il punto P mentre \hat{r}_{i0} è il versore diretto lungo la congiungente q_i e P ed orientato da q_i a P .

L'intensità del campo elettrico generato da più cariche è data dal principio di sovrapposizione:

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$$

Il campo generato da una distribuzione continua di cariche, si ottiene invece per integrazione.

Potenziale elettrico

Il campo generato da una carica puntiforme è centrale e pertanto conservativo; si può dunque introdurre il concetto di differenza di potenziale:

$$V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

con \vec{E} campo elettrico creato dalla carica puntiforme e γ una qualunque linea tra A e B immersa nel campo.

Il potenziale elettrico alla distanza r da una carica puntiforme q situata nell'origine è dato da:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

se si assegna il valore zero al potenziale a distanza infinita. Per un sistema di cariche puntiformi, il potenziale è dato da:

$$V = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_{i0}}$$

dove la somma è estesa a tutte le cariche ed r_{i0} è la distanza dell' i -esima carica dal punto P dove si deve calcolare il potenziale.

Per una distribuzione continua finita di carica:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_Q \frac{dq}{r}$$

Se la distribuzione di carica non è finita non si deve usare la formula sopra, perchè in essa è implicito che il potenziale all'infinito è nullo. Si deve pertanto ricorrere alla definizione di differenza di potenziale (p. es. nel caso del piano indefinito uniformemente carico).

Se è noto il potenziale, il campo elettrico può essere determinato tramite:

$$\vec{E} = -\text{grad}V = -\nabla V$$

La legge di Gauss

Il flusso elettrico dovuto al campo elettrico \vec{E} che attraversa una superficie qualsiasi è:

$$\phi(\vec{E}) = \int_{\Sigma} \vec{E} \cdot \hat{u}_n d\Sigma$$

La legge di Gauss lega il flusso elettrico attraverso una superficie chiusa alla carica totale racchiusa nella superficie stessa:

$$\phi(\vec{E}) = \int_{\Sigma} \vec{E} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

La legge di Gauss è equivalente alla legge di Coulomb per interazioni statiche ma, diversamente dalla legge di Coulomb, vale anche per campi non statici.

La legge di Gauss è anche uno strumento potente per determinare i campi elettrici dovuti a distribuzioni di carica con un elevato grado di simmetria.

I conduttori

1. Il campo elettrostatico all'interno di un conduttore è nullo
2. Il campo elettrostatico immediatamente fuori da un conduttore è perpendicolare alla superficie e assume il valore $\sigma/2\epsilon_0$, dove σ è la densità superficiale di carica locale (che non è necessariamente costante)

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{u}_n$$

3. Un conduttore, se non presenta cavità non conduttrici contenenti una carica, può avere una carica solo sulla superficie esterna.

Energia potenziale elettrostatica di un sistema di cariche

L'energia potenziale di un sistema di cariche puntiformi è:

$$U_e = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$$

che può essere riscritta come:

$$U_e = \frac{1}{2} \sum_i q_i v_i$$

dove v_i rappresenta il potenziale generato nella posizione della carica q_i da tutte le altre cariche. Quando si ha a che fare con un sistema macroscopico continuo si scriverà l'integrale:

$$U_e = \frac{1}{2} \int_V \rho(x, y, z) V(x, y, z) d\tau$$

dove $\rho(x, y, z)$ rappresenta la densità di carica, $V(x, y, z)$ rappresenta il potenziale in (x, y, z) , $d\tau$ l'elemento di volume intorno al punto (x, y, z) .

Si può anche scrivere:

$$U_e = \int \frac{\epsilon_0 E^2}{2} d\tau = \int u_e d\tau$$

dove l'integrale indefinito è esteso a tutto lo spazio e:

$$u_e = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$$

è la densità di energia elettrostatica.

Condensatori

I condensatori sono dispositivi per l'accumulo di carica elettrica e di energia e consistono tipicamente di due conduttori con cariche uguali ed opposte q (induzione completa).

Indicando con ΔV la differenza di potenziale, la capacità di un condensatore è definita come:

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

L'energia potenziale accumulata in un condensatore può essere scritta come:

$$U_e = \frac{q^2}{2C} = C \frac{V^2}{2} = \frac{qV}{2}$$

Condensatori collegati in parallelo equivalgono ad un unico condensatore con capacità:

$$C = C_1 + C_2 + \dots + C_n$$

Condensatori collegati in serie equivalgono ad un unico condensatore con capacità data da:

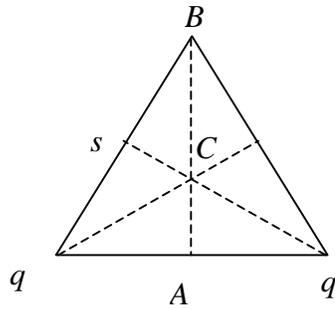
$$C = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}}$$

Problema 1

Considerate tre cariche positive uguali di valore q poste ai vertici di un triangolo equilatero di lato s (vedere figura), determinare:

- La forza che agisce sulla carica che si trova nel vertice B .
- Il campo elettrico totale E_0 nel punto medio della base A .
- Il campo elettrico e il potenziale nel punto C in cui si intersecano le bisettrici dei tre angoli del triangolo.

Suggerimento: Si ricordi che per le forze ed i campi elettrici vale il principio di sovrapposizione.



Soluzione:

a) La forza è la risultante di quelle esercitate dalle altre due cariche:

$$F = |\vec{F}_1 + \vec{F}_2| = F_1 \sqrt{2 \left(1 + \cos \frac{\pi}{3} \right)} = \sqrt{3} F_1 = \sqrt{3} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{s^2}$$

b) Il campo elettrico in A è dato solo da quello generato dalla carica in B perchè le altre due generano campi uguali ed opposti:

$$\vec{E}_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{s^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2} \vec{j} = \frac{1}{3\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{s^2} \vec{j}$$

dove si è tenuto conto che AB è l'altezza del triangolo equilatero e si è indicato con \vec{j} il versore da A verso B.

c) C è equidistante dalle tre cariche. Il campo elettrico in C è nullo per simmetria, mentre il potenziale è il triplo di quello generato da una sola carica:

$$V = \frac{3}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\frac{s}{\sqrt{3}}} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{s}$$

Ove $s/\sqrt{3}$ è la distanza BC.

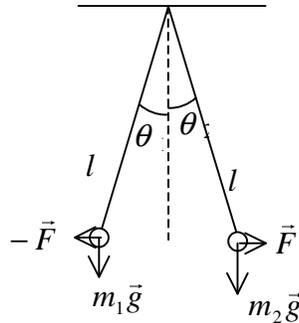
Problema 2

Due piccole sfere cariche sono appese a due corde di ugual lunghezza l (come in figura), che formano due piccoli angoli θ_1 e θ_2 con la verticale.

a) Assumendo per le cariche $q_1 = Q$, $q_2 = 2Q$ e per le masse $m_1 = m_2 = m$, si determini il rapporto θ_1/θ_2 .

- b) Assumendo ancora per le cariche $q_1 = Q$, $q_2 = 2Q$ ma per le masse $m_1 = m$, $m_2 = 2m$, si ridetermini il rapporto θ_1/θ_2 .
- c) Si determini sia nel caso a) che nel caso b) la distanza d tra le due sfere cariche in funzione delle grandezze note.

Suggerimento: Usare le approssimazioni valide per piccoli angoli.



Soluzione:

La tensione di ciascuna corda bilancia la componente lungo la corda di tutte le altre forze, quindi non resta che bilanciare le componenti ortogonali alla corda della forza di gravità e di quella elettrica agenti su ciascuna carica.

La forza elettrica vale in tutti i casi:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q^2}{d^2}$$

a) Essendo $m_1 = m_2 = m$, in base alla figura si trova facilmente che:

$$\begin{cases} mg \sin \theta_1 = F \cos \theta_1 \\ mg \sin \theta_2 = F \cos \theta_2 \end{cases}$$

cioè:

$$\tan \theta_1 = \tan \theta_2 = \frac{F}{mg}$$

da cui:

$$\theta_1 = \theta_2$$

b) Essendo $m_1 = m$ ed $m_2 = 2m$, si ha che:

$$\begin{cases} mg \sin \theta_1 = F \cos \theta_1 \\ 2mg \sin \theta_2 = F \cos \theta_2 \end{cases}$$

cioè:

$$\frac{\theta_1}{\theta_2} \approx \frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = 2$$

ove si è tenuto conto che gli angoli sono piccoli.

c) La distanza è data da:

$$d = l(\sin \theta_1 + \sin \theta_2) \approx l(\tan \theta_1 + \tan \theta_2) \approx l(\theta_1 + \theta_2)$$

dunque, per $m_1 = m_2 = m$ è:

$$d \approx 2l \frac{F}{mg} = \frac{2l}{mg} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q^2}{d^2}$$

cioè:

$$d = \sqrt[3]{\frac{lQ^2}{mg} \frac{1}{\pi\epsilon_0}}$$

dunque, per $m_1 = m$ ed $m_2 = 2m$ è:

$$d \approx l \frac{F}{mg} \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} l \frac{F}{mg} = \frac{3}{2} \frac{l}{mg} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q^2}{d^2}$$

cioè:

$$d = \sqrt[3]{\frac{lQ^2}{mg} \frac{3}{4\pi\epsilon_0}}$$

Problema 3

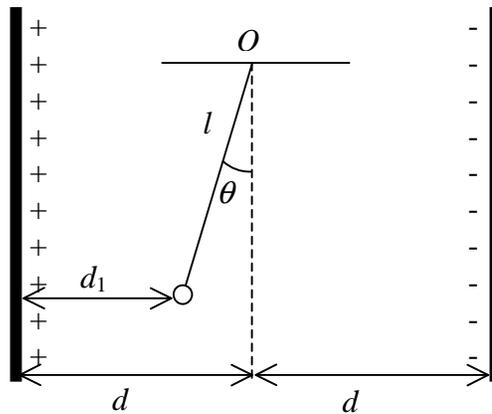
Una sferetta puntiforme di massa m e carica q è sospesa ad un punto O mediante un filo lungo l , in prossimità di una distribuzione piana infinita di cariche con densità superficiale σ (vedere figura).

- d) Calcolare la distanza di equilibrio d_1 della sferetta dal piano carico sapendo che la distanza fra il piano carico ed il punto O è d .
- e) Calcolare la distanza di equilibrio d_2 della sferetta dal piano carico nel caso in cui venga posto un secondo piano con densità superficiale $-\sigma$ in posizione speculare.

f) Come varia d_2 se si raddoppia la distanza del piano carico negativamente dal punto O ?

$$[m = 10 \text{ g}; q = -2 \text{ } \mu\text{C}; l = 10 \text{ cm}; \sigma = 86,7 \text{ pC/cm}^2; d = 10 \text{ cm}; \epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2\text{N}^{-1}\text{m}^{-2}]$$

Suggerimento: la tensione del filo assume qualsiasi valore necessario affinché il filo non si allunghi



Soluzione:

a) La forza elettrica F è orizzontale, mentre il peso è verticale: la loro risultante deve essere diretta lungo il filo, cioè forma un angolo θ con la verticale, cioè con il peso. Dunque:

$$\frac{F}{mg} = \tan \theta = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{q}{mg} = 1$$

Dalla geometria del problema si ricava:

$$d_1 = d - l \sin \theta = d - l \frac{\tan \theta}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} = 2,93 \text{ cm.}$$

b) Il campo raddoppia, dunque anche la forza elettrica e la tangente di θ raddoppiano. Quindi:

$$d_2 = d - l \frac{2}{\sqrt{1+4}} = d - l \frac{2}{\sqrt{5}} = 1,06 \text{ cm.}$$

c) Il campo generato da un piano carico indefinito è indipendente dalla distanza. Perciò spostando il piano non cambia nulla.

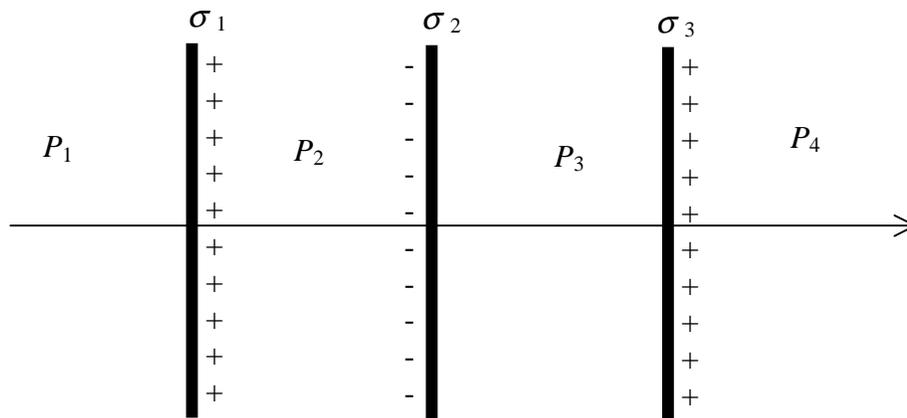
Problema 4

Tre piani indefiniti paralleli sono uniformemente carichi con densità superficiale $\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_2 = -\sigma$, $\sigma_3 = \sigma$ (vedere figura). Determinare il campo elettrostatico nello spazio esterno ai piani e nelle intercapedini tra i piani.

$$[\sigma = 88,6 \text{ nC/m}^2; d = 10 \text{ cm}; \epsilon_0 = 8,86 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2\text{N}^{-1}\text{m}^{-2}]$$

Suggerimento: il campo elettrico generato da un piano indefinito uniformemente carico è:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}, \text{ con } \hat{n} \text{ versore normale al piano.}$$



Soluzione:

Prendendo come positivo il verso dell'asse disegnato in figura, basta eseguire le somme algebriche dei campi dei vari piani:

1. In P_1 e P_4 il campo è nullo.

2. In P_2 è:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = 10 \text{ kV/m}$$

3. In P_3 è:

$$E = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} = -10 \text{ kV/m}$$

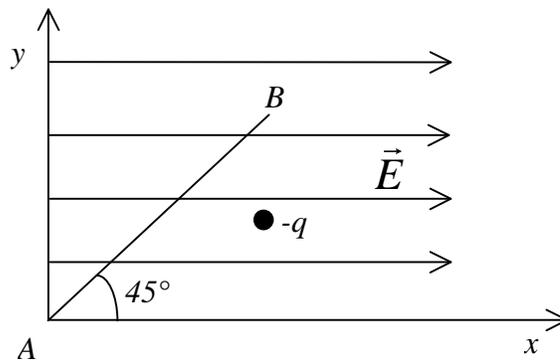
Problema 5

Il campo elettrico \vec{E} è uniforme in tutti i punti del piano (x, y) come in figura.

a) Dimostrare che detto campo è conservativo.

- b) Calcolare la differenza di potenziale fra i punti A e B ed il lavoro compiuto per spostare la carica negativa $-q$ dal punto A al punto B .
- c) Determinare se l'energia potenziale calcolata in A è diversa da quella in B e se $U_A - U_B$ è positivo o negativo.

Suggerimento: per dimostrare che il campo elettrico è conservativo, si può usare sia la condizione di circuitazione nulla, sia quella di rotore nullo.



Soluzione:

a) La forza elettrica \vec{F} è orizzontale e costante, quindi il lavoro è il prodotto di F per la componente orizzontale dello spostamento totale ed è positivo quando ci si sposta nel verso positivo delle x , negativo quando ci si sposta nel verso opposto. Se si calcola la circuitazione, lo spostamento totale è a nullo priori, quindi la circuitazione è nulla. Ergo il campo è conservativo.

b) Detta d la distanza AB , per quanto osservato nel punto a), essendo il potenziale il lavoro per unità di carica, si ricava:

$$V_B - V_A = Ed \cos 45^\circ = \frac{Ed}{\sqrt{2}}.$$

Il lavoro dal punto A al punto B è semplicemente il prodotto della differenza di potenziale per la carica:

$$W_{AB} = -q (V_B - V_A) = -qEd \cos 45^\circ = -\frac{qEd}{\sqrt{2}}.$$

c) Per introdurre l'energia potenziale occorre fissare un'ascissa di riferimento. Prendendo per semplicità quella del punto A , è evidente che, mentre U_A è nulla, U_B è uguale a W_{AB} , quindi negativa.

Pertanto, $U_A - U_B$ è positivo (la carica è negativa).

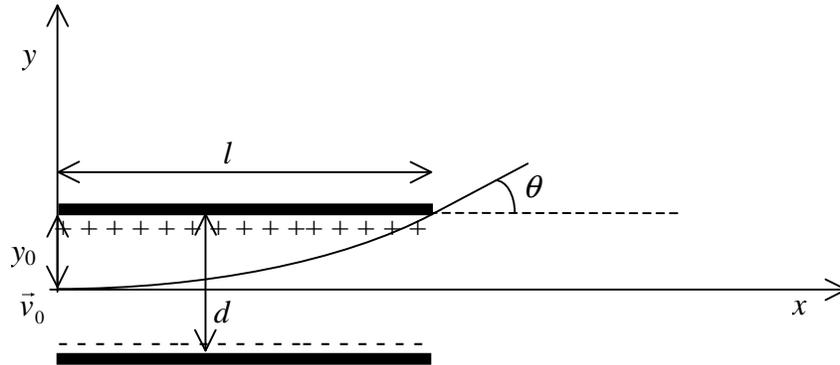
Problema 6

In un tubo catodico, un elettrone è accelerato orizzontalmente da una differenza di potenziale V_c . Dopo aver subito questa accelerazione esso viene fatto passare attraverso due piastre piane parallele orizzontali lunghe l e poste alla distanza d , fra le quali è mantenuta una differenza di potenziale V (figura).

- Nel riferimento della figura, qual è il valore di y_0 tale che gli elettroni sfiorino l'estremità della piastra positiva quando escono dalle piastre stesse?
- Con quale angolo θ si muovono gli elettroni dopo aver attraversato le piastre?

[$V_c = 20$ kV; $V = 200$ V; $l = 6$ cm; $d = 1$ cm; e/m elettrone = $1,7 \cdot 10^{11}$ C/kg]

Suggerimento: si trascurino la forza di gravità e la velocità dell'elettrone quando parte dal filamento del tubo catodico.



Soluzione:

Le due piastre sono lunghe rispetto alla loro distanza, perciò si può approssimare il campo elettrico fra di esse con quello (uniforme) dovuto a piastre infinite e dato da V/d .

La velocità \vec{v}_0 all'ingresso delle due piastre ($x = 0$) è data dalla conservazione dell'energia nel cannone elettronico:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = eV_c$$

cioè:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2e}{m}V_c} = 82,5 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

con v_0 diretta lungo l'asse x .

- a) Il moto fra le due piastre ha la componente x uniforme di velocità \vec{v}_0 e la componente y uniformemente accelerata con accelerazione:

$$a = \frac{e V}{m d}.$$

Perciò y_0 è la distanza percorsa in direzione y nel tempo impiegato a percorrere una distanza l in direzione x :

$$y_0 = \frac{1}{2} \frac{e V}{m d} \left(\frac{l}{v_0} \right)^2 = \frac{V}{V_c} \frac{l^2}{4d} = 0,9 \text{ mm}$$

- b) La tangente di θ è data dal rapporto delle componenti della velocità all'uscita dalle piastre. La componente x è ancora v_0 , mentre la componente y è quella raggiunta nel tempo di volo l/v_0 :

$$v_y = \frac{e V l}{m d v_0}$$

Dunque la tangente di θ è:

$$\tan \theta = \frac{v_y}{v_0} = \frac{e V l}{m d v_0^2} = \frac{V}{2V_c} \frac{l}{d} = 0,03$$

Con un simile valore, θ è circa uguale alla sua tangente.

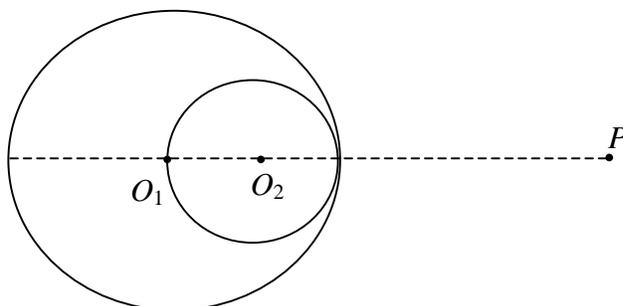
Problema 7

In una sfera uniformemente carica con densità ρ e centro in O_1 , è praticata una cavità sferica di centro O_2 , con superficie tangente alla superficie esterna e passante per O_1 , all'interno della quale c'è il vuoto.

Determinare l'espressione della forza \vec{F} esercitata su una carica puntiforme q posta:

- nel punto P a distanza D da O_1 , rappresentato in figura
- nel centro O_2 della cavità.

Suggerimento: si ricordi che $0 = \rho - \rho$.



Soluzione:

Occorre usare il principio di sovrapposizione con un po' di originalità: come detto nel suggerimento, $0 = \rho + (-\rho)$ vale a dire che la sfera con una cavità vuota è equivalente ad una sfera piena più una cavità riempita di cariche negative di densità uniforme $-\rho$.

a) Per il punto esterno P , le due distribuzioni sferiche sono equivalenti a due cariche puntiformi Q_1 e Q_2 poste nei loro centri O_1 ed O_2 :

$$\begin{cases} Q_1 = \frac{4}{3}\pi\rho R^3 \\ Q_2 = -\frac{4}{3}\pi\rho\left(\frac{R}{2}\right)^3 = -\frac{Q_1}{8} \end{cases}$$

Le distanze da P sono ovviamente D e $D - R/2$, per cui la forza richiesta vale:

$$\vec{F} = \frac{qQ_1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{D^2} - \frac{1}{8\left(D - \frac{R}{2}\right)^2} \right] \hat{P} = \frac{q}{3\epsilon_0} \rho R^3 \left[\frac{1}{D^2} - \frac{1}{2(2D - R)^2} \right] \hat{P}$$

dove \hat{P} è il versore orientato da O_1 a P .

b) Dentro una sfera di densità di carica costante, il campo elettrico è:

$$\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r}$$

Ma O_2 è il centro della sfera piccola, quindi c'è solo il campo generato dalla sfera grande, per cui la forza vale:

$$\vec{F} = \frac{\rho q}{6\epsilon_0} R \hat{P}$$

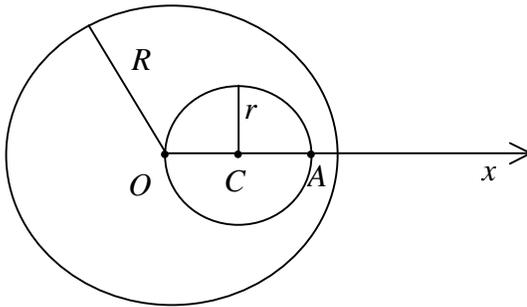
perchè la distanza dei centri è $R/2$.

Problema 8

Si consideri una distribuzione sferica omogenea (raggio R) di cariche positive (carica totale Q), che presenta una cavità sferica (raggio $r = R/4$) come in figura.

Calcolare il campo elettrostatico \vec{E} nei punti O , C , ed A .

Suggerimento: si ricordi la sovrapposizione degli effetti.



Soluzione:

Densità di carica:

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi\left(R^3 - \frac{R^3}{64}\right)} = \frac{48}{63} \frac{Q}{\pi R^3}$$

Per il principio di sovrapposizione, il sistema è equivalente a due sfere piene di densità di carica ρ e raggio R e densità di carica $-\rho$ e raggio r . Dunque nei tre punti richiesti il campo è parallelo all'asse x e:

a) in O :

$$\vec{E} = \frac{-\rho r}{3\epsilon_0} \hat{x} = -\frac{4}{21} \frac{Q}{\pi\epsilon_0 R^2} \hat{x}$$

b) in C :

$$\vec{E} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \hat{x} = \frac{4}{21} \frac{Q}{\pi\epsilon_0 R^2} \hat{x}$$

c) in A :

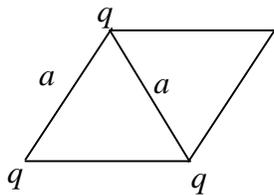
$$\vec{E} = \left(\frac{\rho 2r}{3\epsilon_0} - \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \right) \hat{x} = \frac{4}{21} \frac{Q}{\pi\epsilon_0 R^2} \hat{x}$$

Problema 9

Tre particelle di carica q sono poste in tre dei vertici di un rombo avente i lati e la diagonale minore di lunghezza a (figura). Determinare:

- l'energia potenziale elettrostatica di questa distribuzione di carica
- il lavoro da compiere sul sistema per portare una quarta particella, pure di carica q , dall'infinito fino al vertice libero del rombo
- il valore del campo elettrico \vec{E} nel quarto vertice.

Suggerimento: si ricordi che il potenziale generato da una carica puntiforme q in un punto P a distanza r dalla carica vale $V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$, con la condizione $V_\infty = 0$ per $r \rightarrow \infty$.



Soluzione:

- Basta sommare le energie potenziali dovute alle tre coppie di cariche puntiformi:

$$U_e = 3 \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a}$$

- E' semplicemente il prodotto della quarta carica per il potenziale generato dalle tre cariche puntiformi nel quarto vertice, cambiato di segno:

$$W = -q \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a\sqrt{3}} \right) = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a} \left(2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

- Basta sommare vettorialmente i campi dovuti alle tre cariche puntiformi:

$$\vec{E} = \left(2 \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 3a^2} \right) \hat{d} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \frac{3\sqrt{3} + 1}{3} \hat{d}$$

ove \hat{d} è il versore diretto come la diagonale maggiore, uscente dal vertice carico.

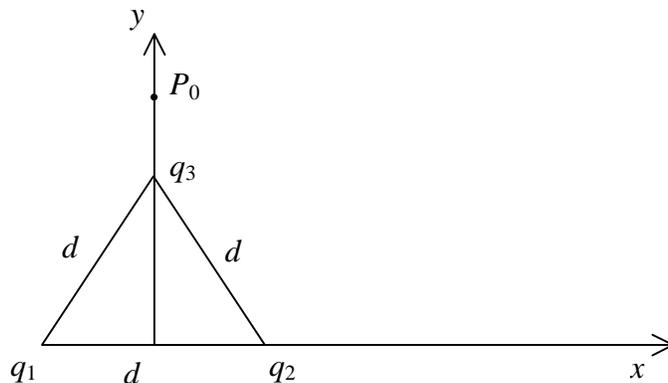
Problema 10

Tre cariche puntiformi sono nei vertici di un triangolo equilatero di lato d . Le cariche q_1 e q_2 sono negative e valgono $q_1 = q_2 = -q$, mentre la carica q_3 è positiva e vale $q_3 = 2q$. Calcolare il potenziale elettrico V_0 nel punto P_0 di coordinate x_0 e y_0 sia direttamente sia nell'approssimazione di dipolo.

[$d = 10$ cm; $q = 1$ μ C; $x_0 = 0$; $y_0 = 40$ cm]

Suggerimento: si ricordi che il potenziale generato da un dipolo a distanza $r \gg d$ vale $V = \frac{p \cos \alpha}{4\pi\epsilon_0 r^2}$,

con \vec{p} momento di dipolo e α angolo formato da \vec{p} e \vec{r} .



Soluzione:

a) Il potenziale elettrico è la somma di quelli generati dalle tre cariche:

$$V_0 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + y_0^2}} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + y_0^2}} + \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0 (y_0 - d)}$$

cioè:

$$V_0 = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{(y_0 - d)} - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + y_0^2}} \right] = 15,3 \text{ kV}$$

b) Il momento di dipolo totale è parallelo all'asse y , e vale:

$$p = qd\sqrt{3} = 1,73 \cdot 10^{-7} \text{ Cm}$$

perchè è la somma di due dipoli uguali diretti come i lati obliqui del triangolo. Il dipolo risultante si può considerare posto nel baricentro geometrico del triangolo $x_b = 0$, $y_b = \frac{d}{2\sqrt{3}} = 2,9$ cm:

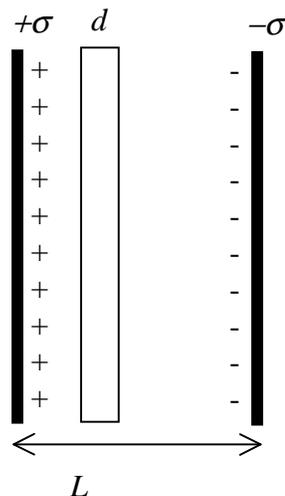
$$V_0 = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 \left(y_0 - \frac{d}{2\sqrt{3}} \right)^2} = \frac{qd\sqrt{3}}{4\pi\epsilon_0 \left(y_0 - \frac{d}{2\sqrt{3}} \right)^2} = 11,3 \text{ kV}$$

Problema 11

La distanza tra le armature di un condensatore piano carico (densità di carica superficiale σ) disconnesso dalla batteria è L . Una lastra piana conduttrice viene inserita tra le armature del condensatore, parallelamente ad esse (figura). Lo spessore della lastra è $d < L$; la lastra è elettricamente neutra.

- c) Quanto vale la densità di carica indotta sulla superficie della lastra?
- d) Di quanto varia percentualmente la differenza di potenziale tra le armature del condensatore dopo che la lastra metallica è stata introdotta?

Suggerimento: si ricordi la formula dei condensatori collegati in serie.



Soluzione:

a) La densità di carica è $+\sigma$ sulla faccia della lastra rivolta verso l'armatura negativa, $-\sigma$ sull'altra faccia.

b) Dobbiamo confrontare la differenza di potenziale di un condensatore di capacità:

$$C = \epsilon_0 \frac{S}{L}$$

dove S è la superficie di un'armatura, con la differenza di potenziale di una serie di due condensatori (caricati con la stessa carica di quello originario) di capacità

$$C_1 = \epsilon_0 \frac{S}{L_1} \text{ e } C_2 = \epsilon_0 \frac{S}{L_2}$$

rispettivamente (L_1 e L_2 sono ovviamente le larghezze dei due condensatori).
La capacità serie è:

$$C_s = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{\epsilon_0 S}{L_1 + L_2}$$

con la condizione $L_1 + L_2 = L - d$.

Dunque:

$$\frac{\Delta V_s - \Delta V}{\Delta V} = \frac{\frac{q}{C_s} - \frac{q}{C}}{\frac{q}{C}} = \frac{\frac{\epsilon_0 S}{L} - \frac{\epsilon_0 S}{L-d}}{\frac{\epsilon_0 S}{L-d}} = -\frac{d}{L}$$

vale a dire che la differenza di potenziale diminuisce in percentuale sul valore iniziale.

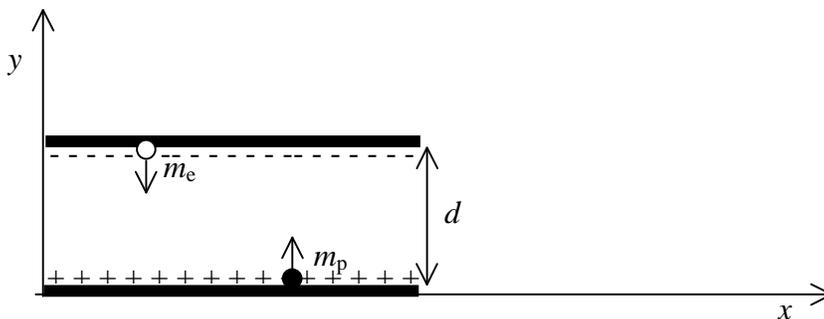
Problema 12

Tra le armature di un condensatore piano è applicata una differenza di ΔV . La distanza tra le armature è d . Nell'istante in cui un elettrone (massa m_e) si stacca, con velocità iniziale nulla, dall'armatura di carica negativa, un protone (massa m_p) si stacca, con velocità iniziale pure nulla, da quella di carica positiva (figura). Determinare:

- c) il rapporto tra le velocità delle due particelle quando urtano le armature
- d) a quale distanza y dall'armatura positiva le due cariche si incrociano.

$$[V = 1600 \text{ V}; d = 4 \text{ cm}; m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}; m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}]$$

Suggerimento: si trascurino la forza di gravità e l'interazione tra le cariche.



Soluzione:

Campo elettrico:

$$E = \frac{\Delta V}{d}$$

Accelerazioni:

$$a_e = \frac{-e}{m_e} E = -\frac{e}{m_e} \frac{\Delta V}{d}$$

per l'elettrone, e:

$$a_p = \frac{e}{m_p} E = \frac{e}{m_e} \frac{\Delta V}{d}$$

per il protone.

a) Applicando la formula che lega la velocità di un moto rettilineo uniformemente accelerato alla posizione, si ha:

$$\begin{cases} v_e = \sqrt{2a_e d} \\ v_p = \sqrt{2a_p d} \end{cases}$$

da cui:

$$\frac{v_e}{v_p} = \sqrt{\frac{a_e}{a_p}} = \sqrt{\frac{m_p}{m_e}} = 42.8$$

b) Equazioni del moto delle due particelle:

$$\begin{cases} y_e = \frac{1}{2} a_e t^2 + d \\ y_p = \frac{1}{2} a_p t^2 \end{cases}$$

Le particelle si incrociano quando $y_e = y_p$, cioè:

$$t = \sqrt{\frac{2d}{a_p - a_e}}; y_p = \frac{1}{2} a_p \frac{2d}{a_p - a_e} = \frac{a_p}{a_p - a_e} d = \frac{m_e}{m_p + m_e} d = 22 \mu\text{m}.$$

CAPITOLO 1

DIPOLI ELETTRICI E DIELETTICI

Dipoli elettrici

Momento di dipolo elettrico di due cariche puntiformi $q_1 = -q$ e $q_2 = +q$ poste in \vec{r}_1 ed $\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \vec{a}$:

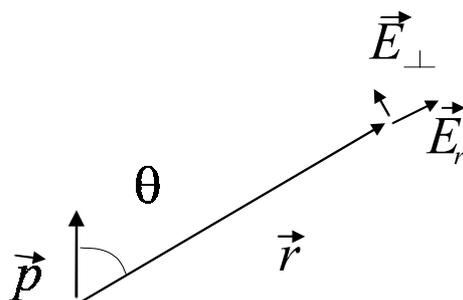
$$\vec{p} = q_1 \vec{r}_1 + q_2 \vec{r}_2 \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = q\vec{a}. \quad (1), (1')$$

L'equazione (1) si estende immediatamente ad un sistema costituito da un numero qualsiasi di cariche: se il sistema è complessivamente neutro, il suo momento di dipolo elettrico risulta indipendente dall'origine degli assi coordinati.

Potenziale V e campo elettrico \vec{E} creati da un dipolo puntiforme:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos\theta}{r^2}; \quad (2)$$

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos\theta}{r^3}; E_{\perp} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin\theta}{r^3} \quad (3)$$



(dipolo *puntiforme* è ovviamente un'astrazione: le (2) e (3) vengono usate in pratica quando a è trascurabile rispetto ad r e diventano rigorose nel limite $a/r \rightarrow 0$).

Energia potenziale U di un dipolo puntiforme in campo esterno

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E}. \quad (4)$$

Momento $\vec{\tau}$ e risultante \vec{R} delle forze esercitate dal campo:

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E} \quad (5)$$

$$R_i = \vec{p} \cdot \text{grad}E_i, \quad i = x, y, z. \quad (6)$$

Commenti. In pratica i dipoli hanno dimensioni finite; per quanto riguarda le equazioni (4), (5) e (6) osserviamo che:

- 1) applicarle a dipoli con a finito equivale a trascurare i termini contenenti a^2 . Per mostrarlo ricaviamo la (4) scrivendo U come somma delle energie potenziali delle cariche:

$$U = -qV(\vec{r}_1) + qV(\vec{r}_1 + \vec{a}) = q[V(\vec{r}_1 + \vec{a}) - V(\vec{r}_1)] = q\left[\frac{\partial V}{\partial x_1} a_x + \frac{\partial V}{\partial y_1} a_y + \frac{\partial V}{\partial z_1} a_z + O(a^2)\right]$$

$$\cong q \operatorname{grad} V \cdot \vec{a} = q\vec{a} \cdot (-\vec{E}) = -\vec{p} \cdot \vec{E}.$$

Le (5) e (6) si ricavano in modo analogo, ricordando che un campo elettrico applica ad una generica carica q posta in \vec{r} la forza $\vec{F} = q\vec{E}(\vec{r})$.

- 2) Nell'espressione $\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$, conviene calcolare il campo \vec{E} e la risultante \vec{R} al centro C del dipolo, e supporre che la forza \vec{R} sia applicata in C .
- 3) Osserviamo infine che su scala macroscopica una molecola può essere considerata puntiforme e che nell'approssimazione di dipolo puntiforme il campo creato dal dipolo e le forze esercitate sul dipolo da un campo esterno dipendono unicamente da \vec{p} : non è quindi necessario conoscere l'esatta distribuzione delle cariche. Se la molecola è ionizzata occorre anche conoscere la sua carica q : su scala macroscopica sia q che \vec{p} possono essere considerati puntiformi.

Dielettrici - definizioni

I materiali isolanti (o dielettrici) si polarizzano in presenza di un campo elettrico. Si definisce *polarizzazione* il momento di dipolo per unità di volume:

$$\vec{P} = \frac{\sum \vec{p}_i}{\Delta v} \quad (7)$$

dove \vec{p}_i è il momento di dipolo della generica molecola presente nel volume Δv . Se il mezzo è isotropo \vec{P} risulta parallelo e concorde con \vec{E} :

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E} \quad (8)$$

dove χ è una grandezza adimensionata detta *suscettività elettrica* (o *dielettrica*) del mezzo.

Induzione dielettrica (o *spostamento elettrico* o *densità di flusso elettrico*):

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (9)$$

Costante dielettrica relativa o *permettività relativa*:

$$\epsilon_r = 1 + \chi \quad (10)$$

Relazioni utili

Sulla superficie di un corpo polarizzato è presente una *carica di polarizzazione* con densità superficiale:

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n} \quad (11)$$

dove \hat{n} è il versore normale alla superficie rivolto verso l'esterno. Se la polarizzazione non è uniforme è presente anche una *carica di volume* con densità:

$$\rho_p = -\operatorname{div} \vec{P}. \quad (12)$$

La *densità di energia* del campo elettrico all'interno di un dielettrico è:

$$u_E = \frac{1}{2} \epsilon_o \epsilon_r E^2 \quad (13)$$

Dalle equazioni (8), (9) e (10) si deduce:

$$\vec{D} = \epsilon_o \epsilon_r \vec{E}. \quad (14)$$

Quando si applica la legge di Gauss in presenza di dielettrici occorre tenere anche conto delle cariche di polarizzazione:

$$\epsilon_o \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = q + q_p \quad (15)$$

dove q è la carica presente sui conduttori (carica libera), q_p quella di polarizzazione. È però possibile scrivere la legge di Gauss nella forma equivalente:

$$\int \vec{D} \cdot d\vec{S} = q \quad (15')$$

dove non compare la carica di polarizzazione.

Nella definizione di capacità $C=q/V$ di un condensatore, q è la sola carica presente sulle armature conduttrici, anche se al suo interno sono presenti cariche di polarizzazione.

Problema 1

Si consideri il sistema costituito da una carica q e positiva posta nell'origine O di un sistema cartesiano e da un dipolo elettrico puntiforme di momento $\vec{p} = p\hat{x}$, posto nel punto $A=(a, 0, 0)$. Si calcoli:

- La forza \vec{F} esercitata dal dipolo su q ;
- Il momento $\vec{\tau}$ e la risultante \vec{R} delle forze esercitate dalla carica q sul dipolo.

Suggerimenti. a) $\vec{F} = q\vec{E}$, dove \vec{E} è il campo elettrico creato dal dipolo nel punto in cui si trova la carica. Per valutare θ nell' Eq.3 si faccia attenzione al verso di \vec{r} ; b) per il calcolo di $\vec{\tau}$ è sufficiente calcolare il campo elettrico \vec{E} creato dalla carica q nel punto A ; per il calcolo di \vec{R} , che dipende dalle derivate di \vec{E} , è *necessario conoscere \vec{E} anche nei punti vicini ad A* , cioè in pratica esprimere le componenti di \vec{E} in funzione delle coordinate cartesiane di un generico punto $P=(x, y, z)$. Solo dopo aver ricavato le derivate si possono sostituire (x, y, z) con i loro valori in A .

Soluzione:

- Nelle equazioni (3), che definiscono il campo \vec{E} creato da un dipolo in un generico punto, θ è l'angolo fra \vec{p} e il vettore \vec{r} che va dal dipolo al punto considerato. Sia \vec{p} che \vec{r} sono paralleli all'asse x ma hanno versi opposti, quindi $\theta = \pi$. Dalle (3) si ottiene immediatamente:

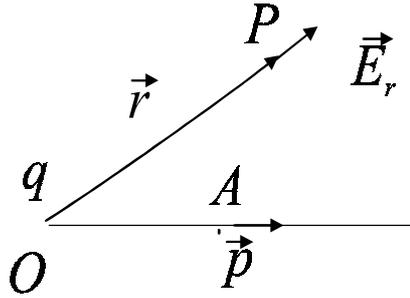
$$E_r = -\frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{2p}{a^3}; \quad E_{\perp} = 0.$$

Il vettore \vec{E} e la forza $\vec{F} = q\vec{E}$ sono paralleli ad \vec{r} ma hanno verso opposto, perché E_r è negativo. La forza è quindi *attrattiva* ed ha modulo

$$F = \frac{2pq}{4\pi\epsilon_0 a^3}.$$

b) Il campo \vec{E} creato dalla carica q nel punto A è parallelo a \vec{p} , quindi:

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E} = 0$$



Per il calcolo della risultante \vec{R} occorre calcolare \vec{E} in un generico punto $P=(x, y, z)$. Poichè la carica q che crea il campo è nell'origine degli assi, si ha semplicemente;

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \vec{r}$$

dove $\vec{r} = (x, y, z)$, $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$. Si ottiene:

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ R_x &= \vec{p} \cdot \text{grad}E_x = p\hat{x} \cdot \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial E_x}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial E_x}{\partial z} \hat{z} \right) = \\ &= p \frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{pq}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{3}{2} \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \cdot 2x \right]. \end{aligned}$$

Possiamo ora sostituire le generiche coordinate (x, y, z) con i loro valori in A . Si ottiene:

$$R_x = \frac{pq}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a^3} - \frac{3}{a^3} \right) = -\frac{2pq}{4\pi\epsilon_0 a^3}.$$

Con calcoli analoghi si trova: $R_y = R_z = 0$. La risultante delle forze agenti sul dipolo elettrico è *opposta* alla forza \vec{F} calcolata in a), in accordo con il principio di azione e reazione.

Commenti. Il calcolo qui svolto spiega il fatto che un corpo elettricamente carico (la carica q) attira i corpi circostanti elettricamente neutri: il campo \vec{E} creato da q polarizza il corpo ed *attrae* il dipolo \vec{p} così creato. La forza risulta attrattiva anche se q è negativa perché cambiano segno sia q che p . Più in generale la forza esercitata da un campo \vec{E} su un dielettrico è tale da portarlo *dove il campo è più intenso*.

Problema 2

Su un tavolo è appoggiato un corpuscolo di volume v , elettricamente neutro ed isolante, costituito da un materiale isotropo di densità ρ . Al di sopra del corpuscolo e sulla sua verticale è posta una carica q praticamente puntiforme. Quando la distanza fra carica e corpuscolo è inferiore ad un valore limite d , il corpuscolo si solleva. Si calcoli la costante dielettrica del materiale.

$$[\rho = 2 \text{ g / cm}^3; d = 1 \text{ cm}; q = 10^{-8} \text{ C}; \text{ accelerazione di gravità } g = 9.8 \text{ m / s}^{-2}]$$

Suggerimento. L'attrazione elettrostatica fra carica e corpuscolo è dovuta alla polarizzazione di quest'ultimo, indotta dal campo elettrico creato dalla carica. Alla distanza d la forza di attrazione elettrostatica \vec{F}_e è uguale ed opposta alla forza peso \vec{F}_p . Si consiglia di risolvere prima il Problema 1, e di calcolare nell'ordine il campo \vec{E} creato da q , la polarizzazione \vec{P} del materiale, la forza \vec{F}_e ; uguagliando \vec{F}_e ad \vec{F}_p si ottiene la suscettività $\chi = \epsilon_r - 1$ del materiale. Per il calcolo numerico si utilizzino unità del S.I..

Soluzione:

Il campo elettrico creato da q_0 alla distanza d ha modulo:

$$E = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q}{d^2}.$$

La polarizzazione indotta nel materiale ha modulo $P = \chi \epsilon_0 E$, ed il suo momento di dipolo dielettrico ha modulo:

$$p = Pv = \chi \epsilon_0 E v = \frac{\chi q v}{4\pi d^2}.$$

La forza elettrostatica ha modulo (v. Problema 1):

$$F_e = \frac{2qp}{4\pi \epsilon_0 d^3} = \frac{2q}{4\pi \epsilon_0 d^3} \frac{\chi q v}{4\pi d^2},$$

e la forza peso ha modulo $F_p = mg = \rho v g$. Uguagliando F_e ad F_p si ottiene:

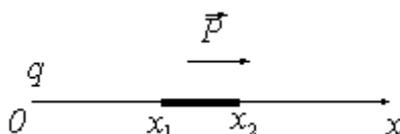
$$\begin{aligned} \chi \equiv \epsilon_r - 1 &= \frac{\rho g \cdot 4\pi \epsilon_0 \cdot 4\pi d^5}{2q^2} = \\ &= \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 9.8 (1/9 \cdot 10^{-9}) \cdot 12.6 \cdot 10^{-10}}{2 \cdot 10^{-16}} = 13.72. \end{aligned}$$

Commenti. La misura di forze in campi non uniformi costituisce uno dei fondamentali metodi di misura della suscettività elettrica χ e della suscettività magnetica χ_m ; per χ (ed ϵ_r) è però di norma preferibile ricorrere a misure di capacità.

Problema 3

Un corpo uniformemente polarizzato, con polarizzazione $\vec{P} = P \hat{x}$, ha la forma di un cilindro molto sottile, di sezione S (v. Figura).

- Si calcoli la forza $d\vec{F}$ esercitata sulla carica q , posta in $x = 0$, da un elemento infinitesimo del cilindro, di lunghezza dx .
- Si mostri che la forza \vec{F} esercitata su q dall'intero cilindro è uguale a quella che esercitano due cariche poste alle sue estremità x_1 e x_2 del cilindro e si calcolino i valori q_1 e q_2 di queste cariche.



Suggerimento. Per quanto riguarda la domanda a), questo problema è una semplice variante del Problema 1: occorre solo valutare il momento di dipolo elettrico $d\vec{p}$ del tratto dx di cilindro. La domanda b) richiede l'integrazione della forza $d\vec{F}$ calcolata in a).

Soluzione:

- Dalla definizione di \vec{P} si ottiene:

$$d\vec{p} = \vec{P}dv = P\hat{x} \cdot Sdx.$$

La forza $d\vec{F}$ è (si veda il Problema 1, punto a):

$$d\vec{F} = \frac{2q \cdot d\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 x^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2qP\hat{x} S dx}{x^3}$$

dove x è l'ascissa dell'elemento considerato.

-

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \int_1^2 d\vec{F} = \frac{2qPS}{4\pi\epsilon_0} \hat{x} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{x^3} = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{PSq}{r_1^2} + \frac{PSq}{r_2^2} \right] \hat{x}. \end{aligned}$$

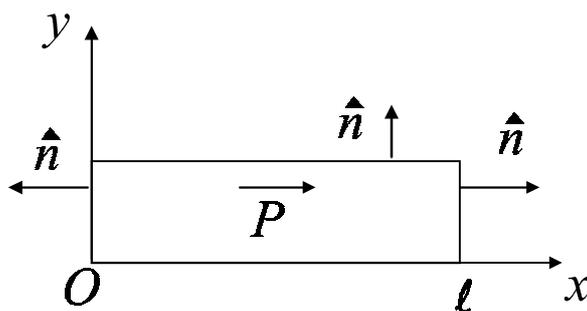
Due cariche $q_1 = -PS$ e $q_2 = +PS$ poste in x_1 ed x_2 esercitano una forza identica.

Commenti. 1) Si noti il simbolismo usato per indicare differenziali e limiti di integrazione, ed il fatto che il vettore \hat{x} può essere portato fuori dall'integrale perché costante rispetto alla variabile di integrazione.
2) Le cariche q_1 e q_2 sono evidentemente le cariche di polarizzazione, ed hanno densità superficiale $-P$ e $+P$ rispettivamente.

Problema 4

In un cilindro sottile, di lunghezza ℓ e sezione S , è presente un dielettrico polarizzato con polarizzazione \vec{P} diretta lungo l'asse x . Si dica dove sono localizzate le cariche di polarizzazione e se ne calcoli il valore nei due casi:

- \vec{P} è uniforme;
- $\vec{P} = ax\hat{x}$ dove a è una costante.



Soluzione:

- In un corpo uniformemente polarizzato le cariche di polarizzazione di volume sono nulle e quelle di superficie hanno densità $\sigma = \vec{P} \cdot \hat{n}$. Quindi:
 $\sigma = 0$ sulle superfici laterali;
 $\sigma = -P$ sulla base a sinistra;
 $\sigma = +P$ sulla base a destra.

Le cariche totali sulle due basi sono $-q$ e $+q$ con $q = \sigma S = PS$.

- Sulla base di sinistra il vettore \vec{P} e la carica di polarizzazione sono nulli; sulla base di destra \vec{P} è diverso da zero e concorde con \hat{n} : la carica di polarizzazione q è positiva ed uguale a σS , dove $\sigma = P(\ell) = a\ell$. La carica di volume ha densità:

$$\rho = -\text{div}\vec{P} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\left(\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z}\right) = -a.$$

La carica totale di volume si ottiene moltiplicando ρ per il volume ℓS e risulta esattamente opposta alla carica presente sulla base di destra.

Commenti.

- Il campo elettrico creato da un corpo polarizzato può essere calcolato valutando prima le cariche di polarizzazione e calcolando poi il campo da queste creato. Per la prima parte, può essere utile controllare l'esattezza dei calcoli verificando che: a) le cariche di polarizzazione abbiano somma nulla; b) il loro momento di dipolo elettrico sia uguale al valore che si ottiene integrando \vec{P} su tutto il volume occupato dal corpo. Il primo controllo è stato fatto. Il secondo è molto facile nel caso di polarizzazione \vec{P} uniforme (caso a): il momento di dipolo è dato semplicemente dal prodotto di \vec{P} per il volume, quindi:

$$\vec{p} = \vec{P} \cdot S\ell.$$

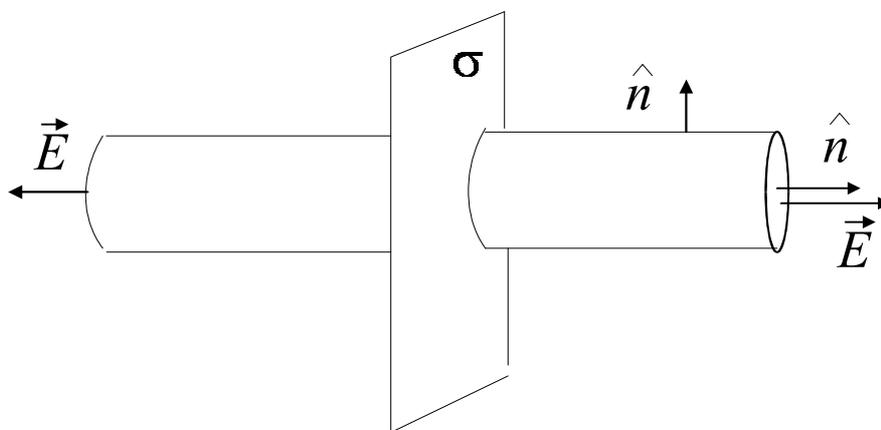
È immediato verificare che \vec{p} coincide con il momento di dipolo elettrico delle due cariche $-q$ e $+q$ calcolate in a).

- Il calcolo qui fatto serve in qualche modo a giustificare le relazioni (11) e (12), che non sono affatto intuitive.

- 3) Le polarizzazioni qui considerate, in particolare la polarizzazione uniforme, sono realistiche solo se si ignora la struttura atomico-molecolare del mezzo e si considerano dei *valori medi* di \vec{P} , mediati su volume Δv grandi rispetto alle dimensioni molecolari (ovviamente anche per le cariche di polarizzazione e per i campi elettrici da queste creati si otterranno solo dei valori medi). Infatti all'interno di una singola molecola la polarizzazione, la densità di carica ed il campo elettrico sono sempre fortemente disuniformi.

Problema 5

Si calcoli il campo creato da una carica positiva distribuita con densità σ uniforme su di una superficie piana praticamente illimitata (cioè in pratica su un foglio, di spessore



trascurabile, costituito da un materiale conduttore), supponendo che nello spazio circostante:

- non sia presente nessun materiale;
- sia presente un dielettrico con costante dielettrica relativa ϵ_r .

Soluzione:

- Si applichi la legge di Gauss al cilindro disegnato in figura, pensando che, per motivi di simmetria, il campo \vec{E} deve essere perpendicolare al piano e che il campo a sinistra deve potersi ottenere da quello a destra per riflessione speculare (vedi Appendice A). La carica interna al cilindro vale σS (S è l'area della sezione del cilindro) ed è uguale ad ϵ_0 volte il flusso. Il flusso di \vec{E} attraverso la superficie laterale è nullo perché \vec{E} è perpendicolare a \hat{n} , il flusso attraverso ciascuna base vale $\vec{E} \cdot \hat{n} S = ES$ (carica positiva implica flusso positivo, cioè \vec{E} concorde con \hat{n}). Risulta quindi $\sigma S = 2\epsilon_0 ES$, cioè

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

- Basta applicare la legge di Gauss nella forma (15') procedendo come in a) ed utilizzare poi l'equazione $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$. Si ottiene immediatamente:

$$D = \sigma / 2; E = \frac{\sigma}{2\epsilon_r \epsilon_o}.$$

Commenti.

- 1) La presenza del dielettrico riduce il campo di un fattore ϵ_r perché sulla superficie del dielettrico a contatto con il conduttore sono presenti cariche di polarizzazione negative (intuitivamente, la carica positiva σ attira gli elettroni e respinge i nuclei del dielettrico: vicino al conduttore vi è quindi un lieve eccesso di cariche negative).
- 2) Se il foglio di materiale conduttore ha spessore grande rispetto alle dimensioni molecolari, la carica è equidistribuita sulle due superfici. Detta σ la densità su *ciascuna superficie*, risulta:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_r \epsilon_o} \hat{n}.$$

Problema 6

Una sfera conduttrice elettricamente carica ha centro in O ed è immersa in un dielettrico, omogeneo ed isotropo. Supposte note la carica q presente sulla sfera e la costante ϵ_r del dielettrico:

- a) Si calcolino i vettori \vec{D} , \vec{E} , \vec{P} in un generico punto esterno alla sfera;
- b) Le cariche di polarizzazione di volume e di superficie.

Suggerimento. La carica q si distribuisce con densità uniforme sulla superficie della sfera e crea un campo elettrico con simmetria sferica. I vettori \vec{D} , \vec{E} , \vec{P} sono quindi diretti radialmente ed il loro modulo è costante su una generica superficie sferica con centro in O . Si calcoli prima \vec{D} applicando la legge di Gauss nella forma (15').

Soluzione:

- a) Per calcolare il vettore \vec{D} in un generico punto P distante r da O si applica la legge di Gauss alla superficie sferica Σ di raggio r e centro O . Su questa superficie $\vec{D} = D(r)\hat{r}$ e quindi

$$\oint_{\Sigma} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \oint_{\Sigma} D(r)\hat{r} \cdot (dS \hat{r}) = D(r) \oint_{\Sigma} dS = D(r) \cdot 4\pi r^2.$$

Uguagliando l'integrale a q si ottiene immediatamente:

$$D(r) = \frac{q}{4\pi r^2}.$$

Anche i vettori \vec{E} , \vec{P} sono diretti lungo \vec{r} ed hanno modulo:

$$E(r) = \frac{D}{\epsilon_r \epsilon_o} = \frac{q}{4\pi \epsilon_r \epsilon_o r^2}$$

$$P(r) = \epsilon_o \chi E = (\epsilon_r - 1) \frac{q}{4\pi \epsilon_r r^2}.$$

- b) Sulla superficie del dielettrico, coincidente con quella della sfera conduttrice, è presente una carica di polarizzazione di densità superficiale:

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n} = P(R) \hat{r} \cdot (-\hat{r}) = -P(R) = -\frac{(\epsilon_r - 1)q}{4\pi\epsilon_r R^2}$$

(\hat{n} è uguale a $-\hat{r}$ perché è orientato verso l'esterno del dielettrico). La carica totale di polarizzazione q_p presente sulla superficie si ottiene moltiplicando σ_p per la superficie della sfera:

$$q_p = \sigma_p \cdot 4\pi R^2 = -\frac{(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r} q \Rightarrow q + q_p = \frac{q}{\epsilon_r}.$$

La densità di carica di volume è:

$$\rho_p = -\text{div}\vec{P} = -\text{div}\left[\frac{(\epsilon_r - 1)q}{4\pi\epsilon_r} \frac{\hat{r}}{r^2}\right] = -\frac{(\epsilon_r - 1)q}{4\pi\epsilon_r} \text{div}\left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right)$$

Si tratta di calcolare la divergenza della funzione:

$$\vec{f}(\vec{r}) = \frac{\hat{r}}{r^2} = \frac{\vec{r}}{r^3}.$$

Ricordando che il vettore \vec{r} ha componenti cartesiane x , y , z e che $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ si ottiene:

$$\begin{aligned} f_x &= x(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \\ \frac{\partial f_x}{\partial x} &= (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} - x \frac{3}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2} 2x = \\ &= r^{-3} \left(1 - 3 \frac{x^2}{r^2}\right). \end{aligned}$$

Le altre derivate hanno espressioni analoghe; risulta in definitiva

$$\text{div}\vec{f} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} = r^{-3} \left[\left(1 - 3 \frac{x^2}{r^2}\right) + \left(1 - 3 \frac{y^2}{r^2}\right) + \left(1 - 3 \frac{z^2}{r^2}\right) \right] = 0.$$

Commenti.

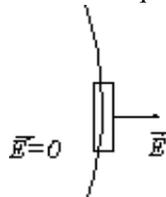
- 1) La carica di polarizzazione è presente solo all'interfaccia fra dielettrico e conduttore ed ha segno opposto a q : la carica totale ed il campo \vec{E} risultano ridotti di un fattore ϵ_r . Per conduttori di forma generica immersi in un dielettrico omogeneo ed isotropo il calcolo è più complesso ma il risultato è identico: il campo \vec{E} in ogni punto è ϵ_r volte minore di quello che si otterrebbe in assenza del dielettrico.
- 2) Se ci si avvicina alla superficie della sfera conduttrice, o meglio se si fa tendere r al raggio della sfera, il campo \vec{E} tende al valore:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_r \epsilon_0} \hat{n}$$

dove $\sigma = q / (4\pi r^2)$ è la densità superficiale di carica sulla sfera. Si ritrova la stessa relazione tra \vec{E} e σ già ricavata per una superficie piana (v. Problema 5, commento 2). La relazione è valida per conduttori di forma qualsiasi, dove \vec{E} è il campo contiguo al conduttore (*teorema di Coulomb*); se ci allontaniamo dal conduttore, il campo \vec{E} può cambiare sia in modulo che in direzione, ma i cambiamenti sono trascurabili fino a che la distanza dal conduttore è trascurabile rispetto ai raggi di

curvatura della superficie. Per dimostrare il teorema di Coulomb basta applicare la legge di Gauss al cilindretto rappresentato in figura, con le basi parallele alla superficie, pensando che:

- all'interno del conduttore il campo elettrico è nullo;
- all'esterno del conduttore e nelle sue immediate vicinanze il campo \vec{E} è ortogonale alla superficie (si ricordi che la superficie di un conduttore in equilibrio elettrostatico è equipotenziale e che le



linee di flusso di \vec{E} sono ortogonali alle superfici equipotenziali; o, più intuitivamente, si pensi che un'eventuale componente tangenziale di \vec{E} sulla superficie del conduttore metterebbe in moto le sue cariche superficiali).

CAPITOLO 2

CIRCUITI IN CORRENTE CONTINUA

Definizioni

Dato un conduttore filiforme ed una sua sezione normale S si definisce:

$$\text{Corrente elettrica} \quad i = \frac{Q}{t} \quad (1)$$

dove Q è la carica che attraversa la sezione S del conduttore nel tempo t ;

$$\text{Densità di corrente} \quad j = i / S \quad (2)$$

$$\text{Resistenza di un tratto di conduttore} \quad R = \frac{V}{i} \quad (3)$$

dove V è la differenza di potenziale (d.d.p.) tra gli estremi del tratto considerato ed i è la corrente che lo percorre; se il tratto ha sezione S costante e lunghezza ℓ , si definisce:

$$\text{Resistività elettrica} \quad \rho = R S / \ell \quad (4)$$

(R caratterizza le proprietà conduttive del tratto di conduttore, ρ quelle del materiale)

$$\text{Forza elettromotrice (f.e.m.) di un generatore} \quad \mathcal{E} = \frac{\mathcal{L}}{q} \quad (5)$$

dove \mathcal{L} è il lavoro del generatore sulla carica q .

Commento. Il lavoro della forza $\vec{F} = q\vec{E}$ esercitata da un campo elettrostatico sull'intero circuito è nulla; per mantenere la corrente in un circuito è quindi necessaria la presenza di altre forze (*forze impresse* che derivano da un campo *elettromotore* $\vec{E}^* = \vec{F}/q$, la cui natura dipende dal tipo di generatore): \mathcal{L} è il lavoro di queste ultime e può non coincidere con il lavoro del generatore sulle cariche che lo attraversano (si vedano i Problema 3 e 4).

Relazioni utili

La densità di corrente è il modulo del vettore

$$\vec{j} = nq\vec{v} \quad (6)$$

dove n è il numero delle particelle in moto nell'unità di volume, q la loro carica, \vec{v} la loro velocità media (o di *deriva*); se alla corrente contribuiscono particelle di tipo diverso

$$\vec{j} = n_1q_1\vec{v}_1 + n_2q_2\vec{v}_2 + \dots \quad (7)$$

Il vettore \vec{j} in un generico punto del conduttore è legato al campo elettrico \vec{E} in quel punto dalla relazione

$$\vec{E} = \rho \vec{j} . \quad (8)$$

La corrente i che attraversa una generica superficie ideale è

$$i = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (9)$$

Resistenza equivalente:

Per conduttori in serie:

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + \dots ; \quad (10)$$

Per conduttori in parallelo:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots . \quad (11)$$

Potenza:

La potenza trasferita dalla corrente ad un generico utilizzatore è:

$$P = V i \quad (12)$$

dove V è la d.d.p. ai capi dell'utilizzatore; se si tratta di un resistore:

$$P = V i = R i^2 = \frac{V^2}{R} \quad (\text{Legge di Joule}) \quad (13)$$

La potenza fornita dalle forze impresse di un generatore è:

$$P = \mathcal{E} i \quad (14)$$

dove ℓ è la lunghezza del filo, S la sua sezione e ρ la resistività del conduttore.

Equazione delle maglie:

Per un circuito con una f.e.m. \mathcal{E} ed una resistenza R :

$$\mathcal{E} = R i . \quad (15)$$

Problema 1

Un filo di rame di sezione S è percorso da corrente i . Supponendo che vi sia un elettrone di conduzione per ogni atomo di rame, si calcoli la sua velocità di deriva.

[$S = 5 \text{ mm}^2$; $i = 30 \text{ A}$; densità del rame $\rho = 8.89 \text{ g / cm}^3$; numero atomico del rame 63.5 u.a.]

Soluzione:

Dalle definizioni di densità di corrente si ottiene:

$$j = i / S ,$$
$$v_d = \frac{j}{-ne}$$

dove $-e$ è la carica dell'elettrone, n il numero di elettroni per unità di volume. Per calcolare n ricordiamo che $\rho = \text{massa/volume}$ e che il numero di Avogadro è $6.02 \cdot 10^{23} / \text{mole}$; una mole di rame pesa 63.5 g ed occupa quindi un volume:

$V = \frac{63.5 \text{ g}}{8.89 \text{ g / cm}^3} = 7.14 \text{ cm}^3$. In questo volume sono presenti $6.02 \cdot 10^{23}$ atomi, quindi la densità di atomi è pari a:

$$n = \frac{6.02 \cdot 10^{23} \text{ atomi}}{7.14 \text{ cm}^3} = 0.843 \cdot 10^{23} \text{ atomi / cm}^3 .$$

Esprimendo tutte le grandezze in unità del sistema internazionale (S.I.), si ottiene:

$$j = \frac{15 \text{ A}}{5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2} = 6 \cdot 10^6 \text{ A / m}^2 ;$$

$$v_d = \frac{j}{-ne} = -4.4 \cdot 10^{-4} \text{ m / s} .$$

(il segno - indica che \vec{v}_d è opposto a \vec{j}).

Commenti.

- Si noti il valore estremamente piccolo della velocità di deriva degli elettroni, se confrontata con la loro velocità media di agitazione termica (che è dell'ordine dei chilometri al secondo), benché la corrente sia estremamente elevata (superiore ai valori consigliati per motivi di sicurezza in conduttori di rame con sezione di 5 mm^2). È per questo motivo che il rame, come tutti i metalli buoni conduttori, segue la legge di Ohm. In altri conduttori (ad es. nei gas rarefatti) le velocità di deriva possono diventare confrontabili con quelle di agitazione: il conduttore non segue più la legge di Ohm.
- Le considerazioni fatte per ricavare n possono essere espresse in forma letterale:

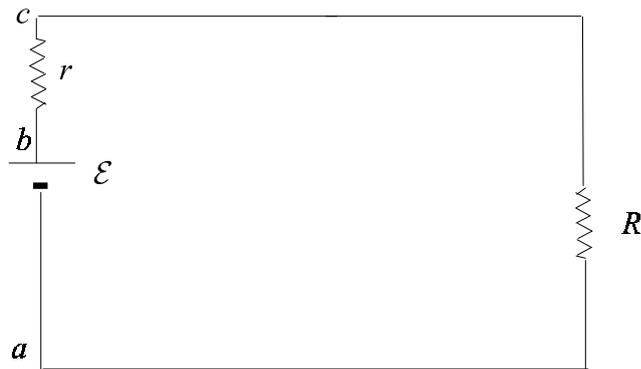
$$\frac{\text{atomi / m}^3}{\text{atomi / mole}} = \frac{\text{massa / m}^3}{\text{massa / mole}} \text{ ovvero } \frac{n}{N_A} = \frac{\rho}{M}$$

(ricordiamo che 63.5 unità atomiche corrispondono ad una massa molare $M = 63.5 \text{ g / mole}$).

Problema 2

Si ricavi la d.d.p. V_{bc} ai capi della resistenza r nel circuito rappresentato in figura.

[$\mathcal{E} = 12V$; $R = 22\Omega$; $r = 2\Omega$]



Soluzione:

Dall'equazione delle maglie si ottiene:

$$\mathcal{E} = (R + r)i ,$$
$$V_{bc} = ri = \frac{r}{r + R} \mathcal{E} = \frac{2\Omega}{24\Omega} 12V = 1V .$$

Commenti. Il dispositivo è alla base del funzionamento del *partitore di tensione* e del *potenziometro*, che vengono utilizzati per ottenere d.d.p. comprese tra 0 e \mathcal{E} quando si dispone di un generatore di tensione di f.e.m. \mathcal{E} .

Problema 3

In una pila Daniell l'energia è fornita dalla reazione esoenergetica $CuSO_4 + Zn \rightarrow ZnSO_4 + Cu$.

a) Sapendo che ogni reazione fornisce un'energia di $3.5 \cdot 10^{-19} J$ ed una carica $q = 2e$, si calcoli la f.e.m. \mathcal{E} della pila.

Supponendo che la pila abbia resistenza interna $r = 1\Omega$ e venga chiusa su una resistenza esterna $R = 9\Omega$, si calcoli:

b) la corrente i nel circuito;

c) la d.d.p. V ai morsetti della pila.

Suggerimenti. Per il calcolo della f.e.m. si ricorra alla sua equazione di definizione. Per il quesito (b) si indichi con i la corrente e si invochi il principio di conservazione dell'energia: la potenza fornita dalla reazione chimica deve uguagliare la potenza dissipata per effetto Joule nelle resistenze r e R .

Soluzione:

a) Dalla definizione di \mathcal{E} si ricava immediatamente:

$$\mathcal{E} = \frac{3.5 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{2 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}} = 1.09 \text{ V}.$$

b) Il bilancio energetico implica:

$$\mathcal{E}i = ri^2 + Ri^2.$$

Dividendo per i si ottiene la stessa equazione del Problema 2; risulta

$$i = \frac{\mathcal{E}}{r + R}.$$

c) Il circuito viene rappresentato esattamente come per il problema 2 solo che ora r è interna al generatore, quindi:

$$V = V_{ac} = Ri$$

o anche

$$V = \mathcal{E} - ri = \frac{R}{r + R} \mathcal{E}.$$

Commenti.

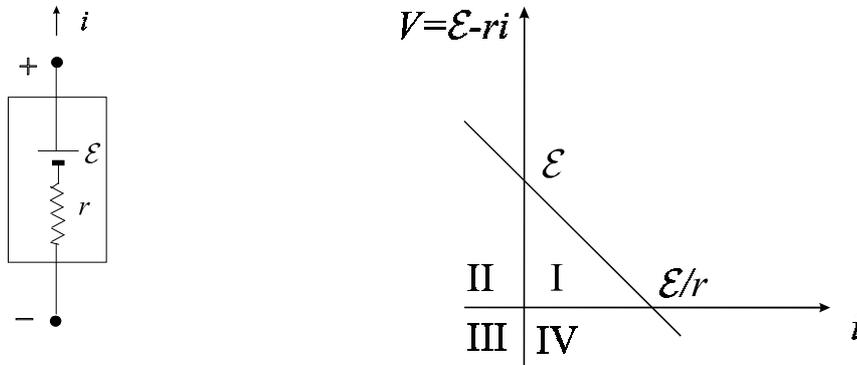
- 1) Al tendere della corrente a 0, $V \rightarrow \mathcal{E}$. La f.e.m. di un generatore può quindi anche essere definita come d.d.p. fra i suoi morsetti in assenza di corrente (ovvero a circuito aperto).
- 2) Per i generatori voltaici non è facile individuare la natura e la localizzazione delle forze impresse; è invece molto facile calcolare la f.e.m. \mathcal{E} in base alla sua definizione.
- 3) La potenza Vi fornita dalla pila è minore della potenza $\mathcal{E}i$ fornita dalle reazioni chimiche perché parte dell'energia è dissipata per effetto Joule all'interno del generatore stesso.

Problema 4

Si disegni la curva caratteristica di un generatore avente forza elettromotrice \mathcal{E} e resistenza interna r (cioè si riporti la corrente i che lo percorre in funzione della differenza di potenziale V ai suoi morsetti). Si considerino i punti di intersezione fra la curva caratteristica e gli assi coordinati, e si dica cosa rappresentano fisicamente questi punti, con quali circuiti possono essere realizzati ed in quali casi il generatore cede energia all'esterno ed in quali ne assorbe.

Soluzione:

La differenza di potenziale V ai morsetti del generatore è $V = \mathcal{E} - ri$ (vedi Problema 3): il diagramma tensione-corrente è quindi una retta.



Si ottiene $V = 0$ cortocircuitando i morsetti, e la corrente di corto circuito vale \mathcal{E} / r .

Si ottiene $i = 0$ a circuito aperto.

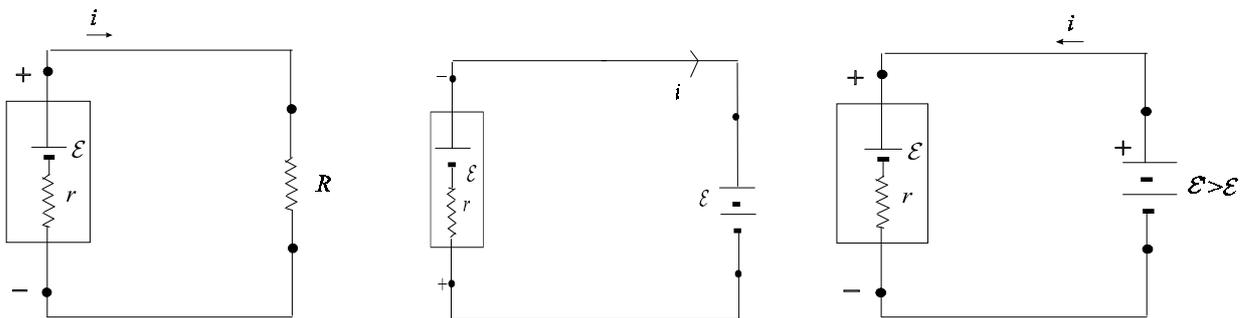
Nel quarto quadrante i è così grande (occorre naturalmente un altro generatore in serie) che la caduta su r è maggiore di \mathcal{E} : V risulta negativo, le polarità ai morsetti sono invertite. Il calore dissipato per effetto Joule all'interno è maggiore dell'energia fornita dalle reazioni chimiche: il generatore assorbe energia (ed infatti $P = iV$ è negativo).

Nel secondo quadrante è $i < 0$, cioè la corrente entra nel morsetto positivo (occorre naturalmente un generatore di f.e.m. maggior in opposizione). La caduta su r si somma ad \mathcal{E} , sicché $V > \mathcal{E}$. Il generatore assorbe potenza: infatti $P = iV$ è nuovamente negativo. Se la reazione chimica si inverte, diventando endoenergetica, il generatore *si ricarica*.

I quadrante

IV quadrante

II quadrante



Problema 5

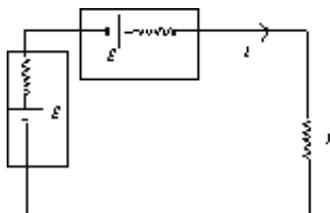
Si hanno due pile da 1.5 V di f.e.m. e resistenza interna di 0.1Ω ciascuna, con le quali si vuole alimentare un utilizzatore di resistenza R . Si determini il valore di R per cui la potenza erogata dall'utilizzatore è massima, considerando separatamente i casi di pile in serie e in parallelo.

Suggerimento. Si proceda come per il Problema 3, domanda (b).

Soluzione:

In serie: il bilancio energetico implica

$$2\mathcal{E}i = 2r i^2 + R i^2, \text{ da cui } i = \frac{2\mathcal{E}}{2r + R}$$



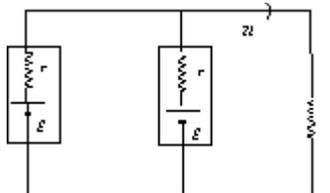
(come se avessimo un unico generatore di f.e.m. $2\mathcal{E}$ e resistenza interna $2r$). La potenza dissipata in R è:

$$P = i^2 R = R \left(\frac{2\mathcal{E}}{2r + R} \right)^2.$$

Per ricavare il massimo di P si pone $dP/dR = 0$, supponendo \mathcal{E} e R costanti; si ottiene $R = 2r = 0.2\Omega$, $P = \mathcal{E}^2 / 2r = 11\text{ W}$.

In parallelo: detta i la corrente in ciascun generatore, la corrente in R è $2i$, quindi:

$$2\mathcal{E}i = 2r i^2 + R (2i)^2.$$



L'equazione, divisa per 4, è quella che si otterrebbe con un unico generatore di f.e.m. \mathcal{E} e resistenza interna $r / 2$. Procedendo come sopra si trova $R = r / 2 = 0.05\Omega$, $P = \mathcal{E}^2 / 2r = 11\text{ W}$.

Commenti. In base ai dati del problema si ottiene $P = 11.25\text{ W}$. Le ultime due cifre sono state omesse perché non significative (i dati di partenza contengono solo una o due cifre significative).

Problema 6

Un'automobile con batteria da 6 V ha anabbaglianti da 25 Watt ciascuno.

a) Qual'è la resistenza del filamento durante il funzionamento?

- b) Se il filamento è lungo 10 cm, quanto vale in modulo il campo elettrico \vec{E} al suo interno?

Soluzione:

- a) Dall'equazione che fornisce la potenza dissipata per effetto Joule si ottiene:

$$R = \frac{V^2}{P} = \frac{36V^2}{25W} = 1.44\Omega .$$

- b) Dalla relazione $\vec{E} = \rho \vec{j}$ si deduce che \vec{E} risulta diretto lungo il filo ed è costante in modulo (il filamento ha sezione costante). Detto $d\vec{\ell}$ un elemento di filo, di lunghezza $d\ell$ e verso concorde con \vec{E} , risulta dunque $\vec{E} \cdot d\vec{\ell} = |\vec{E}|d\ell$. La tensione V lungo il filamento è:

$$V = \int \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int |\vec{E}| d\ell = |\vec{E}| \int d\ell = |\vec{E}| \ell$$

da cui si ricava

$$|\vec{E}| = V / \ell = 60 \text{ V} / \text{m} .$$

Problema 7

Per misurare la resistenza R di un conduttore si utilizzano un voltmetro ed un amperometro realizzando i circuiti rappresentati nelle Figure *a* e *b*. Si ricavi R , indicando con V ed i i valori misurati da voltmetro ed amperometro nel circuito (a), con V' e i' quelli misurati nel circuito (b).

Figura a

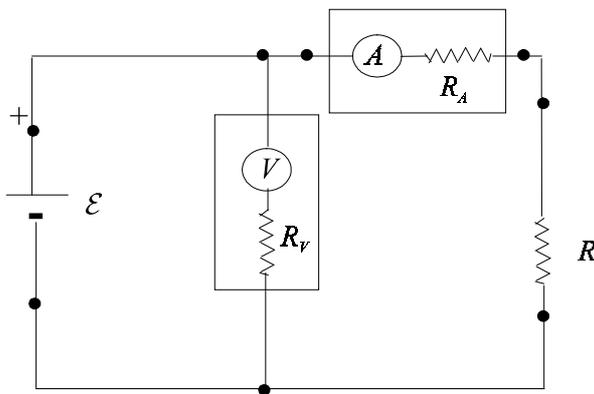
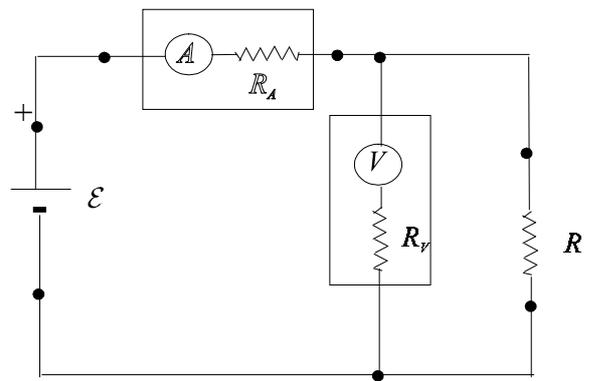


Figura b



Soluzione:

Pensando che il voltmetro misura in ogni caso la tensione lungo lo strumento (cioè la d.d.p. ai suoi morsetti) e l'amperometro segna la corrente che lo percorre, si ottiene immediatamente (dalla legge di Ohm o dall'equazione delle maglie):

$$\text{Circuito a) } \begin{cases} V = \mathcal{E} \\ V = R_A i + R i \end{cases}$$

$$\text{Circuito b) } \begin{cases} i' = i_V + i_R = \frac{V'}{R_V} + \frac{V'}{R} \\ \mathcal{E} - V' = R_A i \end{cases}$$

dove i_V e i_R sono le correnti nel voltmetro e nella resistenza R , rispettivamente. Abbiamo dunque un sistema di quattro equazioni nelle quattro incognite \mathcal{E} , R_A , R_V , R (di ben facile soluzione).

Commenti. Il problema fa capire che la resistenza può essere misurata come rapporto tra la tensione V ai suoi capi e la corrente i che la percorre, ed evidenzia la difficoltà di una simile misura: nel circuito di sinistra il voltmetro *non* misura la d.d.p. ai capi di R ed in quello di destra la corrente nell'amperometro *non* è la corrente in R .

Problema 8

Si calcoli la resistenza di un conduttore metallico di resistività ρ , lunghezza ℓ e sezione circolare con centro sull'asse x e raggio r che cresce linearmente con x , assumendo i valori r_1 in $x = 0$ e r_2 in $x = \ell$.

Soluzione:

La dipendenza di r da x può essere così espressa:

$$r = r_1 + x \frac{r_2 - r_1}{\ell}.$$

Dividendo idealmente il conduttore in tratti di lunghezza dx e resistenza $dR = \rho dx / \pi r^2$, posti in serie, si ottiene:

$$R = \int dR = \int_0^\ell \rho \frac{dx}{\pi r^2} = \frac{\rho \ell}{\pi r_1 r_2}.$$

(Per effettuare l'integrazione conviene assumere r come variabile indipendente).

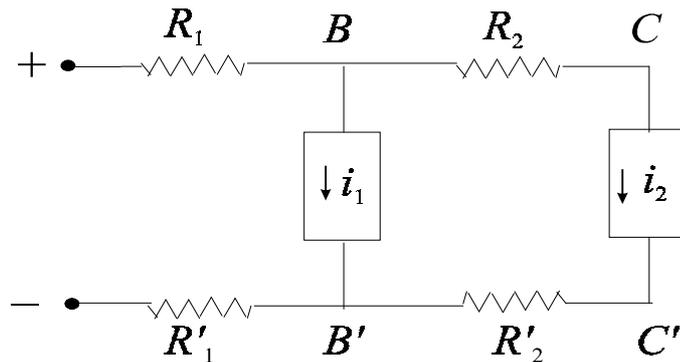
Problema 9

Due vetture tranviarie distano rispettivamente 2 km e 5 km da una cabina di alimentazione di 550 V, a cui sono collegate mediante un cavo aereo e le due rotaie. La prima vettura assorbe una corrente di 50 A, la seconda di 30 A. Se la resistenza per unità di lunghezza

del cavo aereo è di $0.5 \Omega / km$ e quella di ciascuna rotaia $0.04 \Omega / km$, si calcolino le potenze assorbite da ciascuna vettura e la potenza P_d dissipata nel cavo aereo e nelle rotaie.

Soluzione:

Lo schema è il seguente



dove $R_1 = 1\Omega$, $R'_1 = 0.04\Omega$, $R_2 = 1.5\Omega$, $R'_2 = 0.06\Omega$ (si pensi che le rotaie sono conduttori in parallelo).

Le potenze assorbite sono: $P_1 = i_1 V_{BB'}$, $P_2 = i_2 V_{CC'}$. $V_{BB'}$ si ottiene sottraendo ai 550 V della cabina le due cadute su R_1 e R'_1 , che valgono $R_1(i_1 + i_2)$ e $R'_1(i_1 + i_2)$. Il calcolo per $V_{CC'}$ è analogo. Risulta

$$P_1 = 23 \cdot 10^3 W;$$

$$P_2 = 13 \cdot 10^3 W;$$

$$P_d = 7.06 \cdot 10^3 W.$$

Commento. Il trasporto di energia elettrica a grandi distanze comporta sensibili perdite di potenza nei cavi aerei. Per ridurle si può aumentare la d.d.p. fra i cavi stessi (compatibilmente con i problemi di sicurezza) fino a quei valori che cominciano a rendere sensibili le perdite dovute al passaggio di corrente in aria, nelle vicinanze dei cavi. Nei cavi ad alta tensione in corrente alternata si arriva a centinaia di kV.

CAPITOLO 3

CAMPI MAGNETICI STAZIONARI NEL VUOTO

Forza magnetica su una particella con carica q e velocità \vec{v} :

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}. \quad (\text{Forza di Lorentz}) \quad (1)$$

Commenti: poiché \vec{F} è ortogonale a \vec{v} , il suo lavoro $d\mathcal{L} = \vec{F} \cdot d\vec{s} = \vec{F} \cdot \vec{v} dt$ ($d\vec{s}$ = spostamento della particella) è nullo. In assenza di altre forze, l'energia cinetica $mv^2/2$ e il modulo v della velocità rimangono costanti nel tempo, e l'accelerazione è centripeta.

Forza esercitata da un campo \vec{B} uniforme su un conduttore rettilineo di lunghezza $\vec{\ell}$ percorso da una corrente i :

$$\vec{F} = i\vec{\ell} \times \vec{B}; \quad (2)$$

(il verso del vettore $\vec{\ell}$ può essere scelto ad arbitrio: i sarà positiva o negativa a seconda che la corrente circoli nel verso scelto o in quello opposto).

Momento di dipolo magnetico di una spira filiforme contenuta in un piano:

$$\vec{\mu} = iS\vec{n}, \quad (3)$$

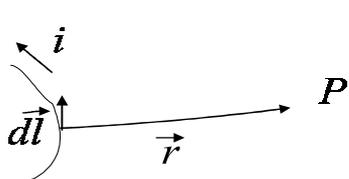
dove S è la superficie racchiusa dalla spira, \vec{n} il versore normale al piano. Il verso di $\vec{\mu}$ è legato al senso di percorso della corrente dalla regola della mano destra.

Campo di un conduttore rettilineo infinitamente lungo (in modulo):

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}, \quad (4)$$

dove r è la distanza dal conduttore; le linee di flusso del campo sono circonferenze aventi come asse il filo, orientate rispetto verso della corrente con la regola della mano destra.

Legge di Biot- Savart: un conduttore filiforme crea in P il campo:



$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint \frac{d\vec{\ell} \times \vec{r}}{r^2}, \quad (5)$$

dove l'integrale è esteso a tutto il conduttore (i è positiva o negativa a seconda che scorra o meno nel verso di $d\vec{\ell}$).

Legge di Ampère: data una linea ideale chiusa Γ :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 i_{\Gamma}, \quad (6)$$

dove i_{Γ} è la corrente concatenata con la linea Γ , cioè:

$$i_{\Gamma} = \int_{S_{\Gamma}} \vec{j} \cdot d\vec{S}; \quad (7)$$

S_{Γ} è una qualunque superficie avente come contorno Γ , orientata con

la regola della mano destra rispetto al verso positivo di percorrenza su Γ .

Campo di un solenoide rettilineo infinitamente lungo.

All'esterno il campo \vec{B} è nullo; all'interno è uniforme, diretto lungo l'asse, con verso dato dalla regola della mano destra rispetto al senso di percorso della corrente, modulo

$$B = \mu_0 n i \quad (8)$$

dove n è il numero di spire per unità di lunghezza.

Problema 1

Un gas fortemente ionizzato è posto in un campo magnetico \vec{B} . Quali sono il massimo e il minimo raggio di curvatura della traiettoria di un elettrone con energia cinetica T ?

$$[B = 10^{-3} \text{ Wb} / \text{m}^2 ; T = 0.1 \text{ eV}]$$

Soluzione:

La velocità dell'elettrone ha modulo $v = \sqrt{2T/m} = 0.59 \cdot 10^6 \text{ m/s}$. Il raggio di curvatura r si ottiene uguagliando il modulo della forza centripeta (mv^2/r) al modulo $evB|\sin\theta|$ della forza di Lorentz ($-e\vec{v} \times \vec{B}$), dove θ è l'angolo fra \vec{v} e \vec{B} :

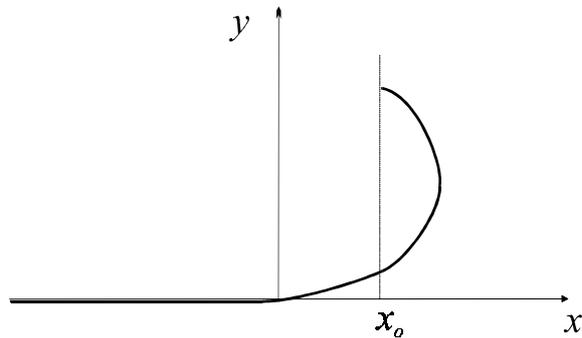
$$r = \frac{mv}{eB \sin\theta};$$

r dipende unicamente da θ , ed è compreso tra i valori $mv/(eB) = 3.36 \text{ mm}$ per \vec{v} ortogonale a \vec{B} ed ∞ per \vec{v} parallelo a \vec{B} .

Problema 2

Una particella di massa m e carica q positiva viene lanciata lungo l'asse x con velocità v in una zona dove è presente un campo magnetico. Sotto l'azione della forza magnetica la traiettoria della particella è rettilinea per $x < 0$, ed ha raggio di curvatura r che varia secondo la legge $r = r_0 x_0 / x$ per $0 < x \leq x_0$ e rimane costante ed uguale ad r_0 per $x > x_0$. Si dica se in base a questi dati è possibile valutare il vettore \vec{B} in un generico punto della traiettoria.

Suggerimento: si considerino separatamente le componenti $\vec{B}_{//}$ e \vec{B}_{\perp} di \vec{B} , rispettivamente parallela e perpendicolare alla traiettoria stessa.



Soluzione:

L'energia cinetica della particella $1/2 mv^2$ ed il modulo di \vec{v} sono costanti perché il lavoro della forza magnetica è nullo.

Il campo \vec{B} esercita una forza

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = q\vec{v} \times (\vec{B}_{//} + \vec{B}_{\perp}) = q\vec{v} \times \vec{B}_{\perp}$$

La componente $\vec{B}_{//}$ di \vec{B} non fornisce nessun contributo alla forza applicata alla particella e non ha nessun effetto sulla sua traiettoria: i dati del problema non permettono quindi di valutare un'eventuale componente $\vec{B}_{//}$.

Per valutare \vec{B}_{\perp} si consideri la legge fondamentale della dinamica $\vec{F} = m\vec{a}$; poiché $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}_{\perp}$ è ortogonale alla traiettoria, l'accelerazione è centripeta ed ha modulo v^2 / r . Dalla relazione $q\vec{v} \times \vec{B}_{\perp} = m\vec{a}_{\perp}$ e dalla definizione di prodotto esterno si deduce che \vec{B}_{\perp} è ortogonale al piano (x, y) , contenente la traiettoria, ed è entrante (l'accelerazione centripeta \vec{a}_{\perp} sta nel piano (x, y) ed è rivolta verso il centro di curvatura). Il suo modulo è dato da $qvB_{\perp} = mv^2 / r$; risulta quindi:

$$B_{\perp} = 0 \quad \text{per } x \leq 0 \text{ (traiettoria rettilinea, } r = \infty);$$

$$B_{\perp} = \frac{mv x}{qr_0 x_0} \quad \text{per } 0 < x < x_0;$$

$$B_{\perp} = \frac{mv}{qr_0} \quad \text{per } x > x_0.$$

Possiamo quindi affermare che: a) la componente di \vec{B} ortogonale al piano x, y è nulla per $x < 0$, cresce linearmente per $0 < x < x_0$ e rimane poi costante; b) un'eventuale componente contenuta nel piano x, y dovrebbe essere parallela alla traiettoria in ogni suo punto: se le traiettorie di un fascio di particelle lanciate con velocità diverse giacciono tutte nel piano (x, y) , si può concludere che questa componente è nulla.

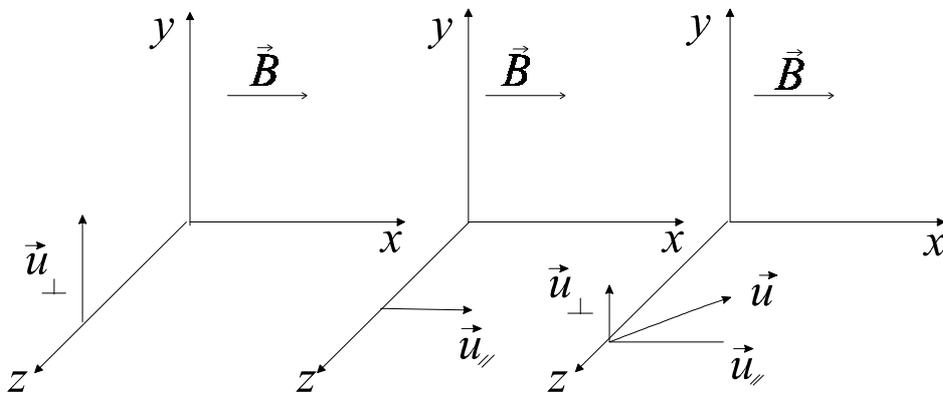
Commenti: Per particelle sulle quali agisce la sola forza magnetica è facile calcolare il raggio di curvatura, mentre il calcolo della traiettoria risulta facile solo se il campo magnetico è uniforme. Per questo motivo nei testi di Fisica si propongono problemi nei quali il campo magnetico è supposto uniforme in un certo dominio e nullo altrove. Si tenga ben presente che questa ipotesi rappresenta semplicemente una semplificazione del problema, dato che è impossibile generare nel vuoto campi magnetici discontinui.

Problema 3

Si dica quale è la traiettoria di una particella di massa m e carica q lanciata in un campo magnetico uniforme con velocità iniziale:

- perpendicolare a \vec{B} ;
- parallela a \vec{B} ;
- obliqua, in modo da avere una componente \vec{u}_\perp ed una \vec{u}_\parallel .

Si supponga che sulla particella agisca solo la forza magnetica e, nel caso c), si calcoli il passo dell'elica.



Soluzione:

- La traiettoria è una circonferenza contenuta nel piano y, z ortogonale a \vec{B} , con raggio $r = mu_\perp / (qB)$ (vedi Problema 1 o 2).
- La particella non risulta soggetta a forze e si muove con velocità uniforme, parallelamente al vettore \vec{B} .
- La traiettoria è la curva che si ottiene combinando i due moti trovati in precedenza, cioè un'elica, che sta su un cilindro con raggio:

$$r = \frac{mu_\perp}{qB}.$$

e con generatrici parallele a \vec{B} . La proiezione della traiettoria su un piano ortogonale a \vec{B} è una circonferenza di raggio r ; il periodo di rotazione $T = 2\pi r / u_\perp = 2\pi m / qB$ è indipendente dalla velocità. Il passo dell'elica coincide con il cammino $u_\parallel T$ fatto lungo la direzione di \vec{B} nel tempo T .

Commenti: Buona parte dei problemi sul moto di particelle in campo magnetico sono delle semplici varianti di questo problema. Per la loro soluzione è necessario avere ben presenti i seguenti fatti:

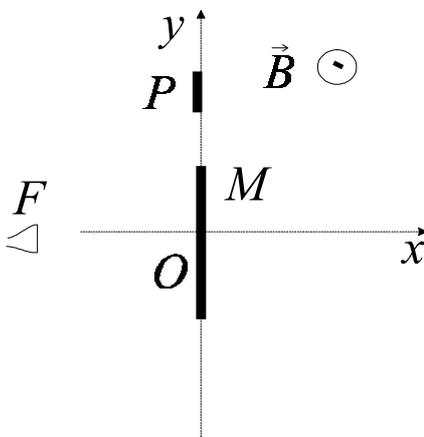
- La traiettoria è in generale un'elica che sta su un cilindro il cui asse è una linea di flusso di B ; anche campi non uniformi obbligano la particella a non allontanarsi troppo da una linea di flusso, cioè a muoversi con traiettorie di tipo elicoidale attorno alle linee di flusso;

- 2) In campo uniforme ed ortogonale alla velocità \vec{v} , la traiettoria è una circonferenza e la velocità angolare è indipendente da v : su questo fatto si basa il funzionamento del ciclotrone, ed infatti la frequenza $\nu = 1/T$ è detta *frequenza di ciclotrone*.

Problema 4

Gli elettroni emessi dal filamento F con energia cinetica trascurabile vengono accelerati con il dispositivo rappresentato in figura (M indica un elettrodo metallico).

- Si calcoli la velocità v di arrivo degli elettroni su M nota la d.d.p. V_o fra F e M .
- Se il fascio di elettroni ottenuto praticando in M un piccolo foro in corrispondenza del punto O entra in un campo magnetico uniforme $\vec{B} = B\hat{z}$, si dica per quale valore di B il fascio colpisce la pellicola fotografica P nel punto di ordinata y .
- Si calcolino le coordinate (y, z) del punto di arrivo sulla pellicola di un elettrone che in O ha velocità $\vec{v} = v\hat{x} + v_z\hat{z}$ (in pratica gli elettroni del fascio non hanno esattamente la stessa velocità: si tratta di valutare l'effetto di una piccola componente v_z della velocità).



Soluzione:

- Fra F e M ogni elettrone acquista un'energia cinetica $mv^2/2$ pari alla differenza di energia potenziale $-(-e)V_o$ ed arriva quindi in M con velocità

$$v = (2eV_o / m)^{1/2}.$$

- Un elettrone che esce dal punto O con velocità $\vec{v} = v\hat{x}$ è soggetto alla forza $\vec{F} = -e v \hat{x} \times (B_{//}\hat{z}) = evB_{//}\hat{y}$, che incurva verso l'alto la traiettoria. Ricordando l'espressione $a_c = v^2 / r$ dell'accelerazione centripeta ed uguagliando F a ma_c , si ottiene il raggio di curvatura

$$r = \frac{mv}{eB}.$$

La traiettoria è una semicirconferenza, di cui il segmento OP è un diametro, quindi $r = y/2$.

- c) La traiettoria è ora un'elica (vedi Problema 3). La proiezione della traiettoria sul piano (x, y) è la stessa semicirconferenza calcolata in b), che viene percorsa nel tempo $t = \pi r / v$. Durante questo tempo l'elettrone si sposta in direzione z di un tratto $z = v_z t$.

Problema 5

Si supponga che in un atomo di idrogeno l'elettrone possa essere assimilato ad una carica puntiforme ruotante intorno al protone, su di una circonferenza di raggio r . Si calcoli la velocità dell'elettrone:

- a) in assenza di altre forze;
 b) in presenza di un campo magnetico \vec{B} perpendicolare al piano dell'orbita.

Soluzione:

- a) Dalla $\vec{F} = m\vec{a}$ e ricordando che l'accelerazione centripeta vale v^2 / r , si deduce:

$$\frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} = m \frac{v^2}{r}, \text{ da cui } v = \frac{e}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 r m}}.$$

- b) La forza magnetica ha modulo evB , la stessa direzione di quella elettrica e verso concorde o meno a seconda del segno di v (cioè del verso di rotazione dell'elettrone). Considerando positivo v quando $\vec{v} \times \vec{B}$ è concorde con \vec{E} si ha:

$$\frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} + evB = m \frac{v^2}{r}, \text{ da cui } v = \frac{eB \pm \sqrt{e^2 B^2 + \frac{me^2}{\pi\epsilon_0 r^3}}}{2 \frac{m}{r}};$$

i due segni corrispondono ai due versi di v .

Commenti: Il moto di un elettrone in un atomo può generare un momento di dipolo magnetico, ma gli elettroni hanno la tendenza a coordinare i loro moti in modo da ottenere momenti opposti, con risultante nulla. In una descrizione puramente classica e semplificata si suppone che i due elettroni descrivano la stessa orbita in versi opposti. Il campo \vec{B} aumenta la velocità di un elettrone e diminuisce quella dell'altro, sicchè il momento magnetico risultante è diverso da zero ed *opposto* a \vec{B} : è questa la spiegazione classica del *diamagnetismo*.

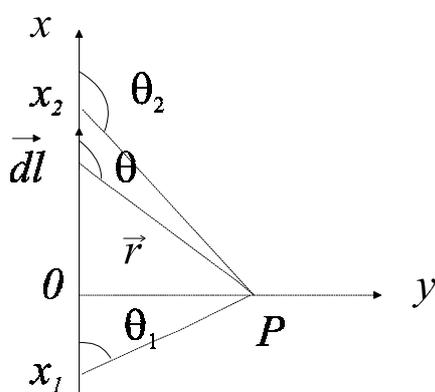
Problema 6

Si calcoli il campo \vec{B} creato da un tratto rettilineo di un conduttore filiforme in un generico punto P .

Suggerimento. Si utilizzi la legge di Biot-Savart (2), assumendo come variabile di integrazione l'angolo compreso fra $d\vec{\ell}$ e \vec{r} .

Soluzione:

Si orienti $d\vec{\ell}$ nel verso della corrente, in modo che i risulti positiva. Per calcolare il campo \vec{B} nel punto P , si introduca il sistema cartesiano rappresentato in figura. Il vettore



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \times \vec{r}}{r^2}$$

è diretto lungo z ed ha modulo

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{dl \sin \theta}{r^2}$$

dove $dl = dx$. Per l'integrazione fra x_1 e x_2 , esprimiamo r e dx in funzione di θ :

$$r = a / \sin \theta; \quad x = a \tan \theta; \quad dx = \frac{a}{\cos^2 \theta} d\theta \quad \text{con } \overline{OP} = a;$$

da cui

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi a} \int \sin \theta d\theta = \frac{\mu_0 i}{4\pi a} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2).$$

Commento: 1) Per questo problema, è possibile controllare l'esattezza del risultato ottenuto: nel limite di filo infinitamente lungo (cioè per $x_1 \rightarrow -\infty$ e $x_2 \rightarrow \infty$) si ottiene il valore corretto, dato dall'equazione (4).

2) Per calcolare il campo \vec{B} creato da un circuito costituito da tratti rettilinei basta sommare i campi creati dai singoli tratti: il calcolo può essere laborioso, ma non difficile. Non si può utilizzare la legge di Ampère perché mancano le simmetrie necessarie.

CAPITOLO 4

INDUZIONE ELETTROMAGNETICA

Legge di Faraday

In un circuito elettrico filiforme γ posto in un campo magnetico si manifesta una f.e.m.

\mathcal{E} indotta quando il flusso $\Phi = \int_{\Sigma_\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{S}$ attraverso la superficie Σ_γ racchiusa dal circuito

sta variando (più precisamente, Σ_γ può essere qualunque superficie avente come contorno il circuito, perché Φ è indipendente dalla scelta di Σ_γ).

Se il verso di percorrenza su γ e la normale a Σ_γ soddisfano la legge della mano destra:

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (1)$$

(se si adottasse la regola della mano sinistra, non comparirebbe il segno -).

Se il campo magnetico è stazionario, si può avere variazione di flusso solo deformando o muovendo il circuito, e la (1) può essere scritta nella forma:

$$\mathcal{E} = \oint_{\gamma} \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{\ell} \quad (2)$$

dove \vec{v} è la velocità dell'elemento di circuito.

Se il campo magnetico *non* è stazionario la (1) può essere scritta nella forma:

$$\oint_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \frac{d}{dt} \int_{\Sigma_\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (3)$$

Osservazioni.

La scoperta delle correnti indotte ha posto il problema della natura e localizzazione del campo elettromotore \vec{E}^* , il cui integrale lungo il circuito si identifica con la f.e.m. \mathcal{E} . Nell'equazione (2) il campo elettromotore è $\vec{E}^* = \vec{v} \times \vec{B}$ dove \vec{v} è la velocità dell'elemento $d\vec{\ell}$ di circuito, e la forza da questo esercitata sulla carica di conduzione q è $\vec{F}^* = q\vec{v} \times \vec{B}$, dove \vec{v} è la velocità dell'elemento $d\vec{\ell}$ di circuito. Poiché il filo trascina nel moto tutte le particelle presenti al suo interno, la presenza di questa forza risulta evidente. Si noti però che le particelle di conduzione si muovono *anche lungo* $d\vec{\ell}$, con velocità di deriva \vec{v}_d parallela a $d\vec{\ell}$. La forza totale magnetica agente su queste particelle è quindi la somma delle forze $\vec{F}^* = q\vec{v} \times \vec{B}$ e $\vec{F}_d = q\vec{v}_d \times \vec{B}$; quest'ultima non dà nessun contributo all'integrale (2), perché è ortogonale a $d\vec{\ell}$, ma il suo lavoro complessivo sulla particella è diverso da zero e tale da opporsi allo spostamento del circuito, in accordo con la legge di Lenz (i lavori delle forze \vec{F}^* ed \vec{F}_d sono uguali ed opposti, perché il lavoro totale della forza magnetica su una carica è nullo). Nell'equazione (3) il campo elettromotore coincide con \vec{E} e l'equazione può essere così interpretata: *un campo*

magnetico variabile nel tempo crea un campo elettrico \vec{E} non conservativo. Il campo \vec{E} indotto da una variazione nel tempo di \vec{B} agisce ovviamente su tutte le particelle cariche, anche se esterne al conduttore.

Legge di Lenz.

Il verso della corrente indotta può essere ricavato in modo puramente analitico, con la convenzione già citate, oppure applicando la legge di Lenz: *l'effetto della f.e.m. indotta si oppone alla causa che la produce.*

Tensione elettrica t_γ lungo una linea γ che va dal punto a al punto b :

$$t_\gamma = \int_\gamma \vec{E} \cdot d\vec{\ell}; \quad (4)$$

per i campi elettrostatici, che sono conservativi, la tensione elettrica coincide con la differenza di potenziale $V_a - V_b$; per i campi indotti, non conservativi, la tensione lungo una linea chiusa è diverso da zero e coincide con la f.e.m. indotta.

Auto e mutua induzione.

Si definisce *induttanza* L (o *coefficiente di autoinduzione*) di un circuito filiforme γ percorso da corrente è il rapporto

$$L = \frac{\Phi}{i} \quad (5)$$

dove Φ è il flusso del campo \vec{B} creato da i attraverso una superficie con contorno γ . Se L è costante nel tempo, ogni variazione di i produce nel circuito una f.e.m.

$$\mathcal{E} = -L \frac{di}{dt}. \quad (6)$$

L'equazione (6) può essere assunta a definizione di L .

Si definisce *mutua induttanza* M o *coefficiente di mutua induzione* di due circuiti filiformi γ_1 e γ_2 il rapporto

$$M = \frac{\Phi_{1,2}}{i_1} = \frac{\Phi_{2,1}}{i_2} \quad (7)$$

dove $\Phi_{1,2}$ è il flusso magnetico, attraverso γ_2 , prodotto da i_1 (analogamente per $\Phi_{2,1}$).

Se $M \neq 0$, i due circuiti sono *accoppiati* induttivamente. L'uguaglianza

$\Phi_{1,2} / i_1 = \Phi_{2,1} / i_2$ è detta *teorema o relazione di reciprocità*.

Energia del campo magnetico.

Densità di energia del campo magnetico nel vuoto

$$u_B \equiv \frac{dU_B}{dv} = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \quad (8)$$

dove dU_B è l'energia presente nel volume dv .

Energia del campo magnetico generato da:
un circuito avente induttanza costante L :

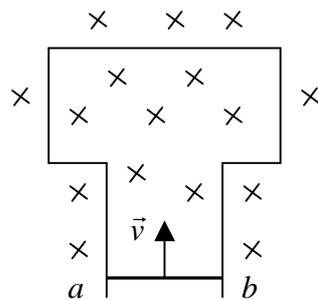
$$U_L = \frac{1}{2} Li^2; \quad (9)$$

due circuiti accoppiati:

$$U = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2. \quad (10)$$

Problema 1

Nella spira schematizzata in figura il conduttore ab , di lunghezza d , si muove con velocità costante \vec{v} , in presenza di un campo \vec{B} uniforme ed ortogonale al piano della spira. Si calcoli la f.e.m. indotta nella spira.



Suggerimento: Si applichi la legge di Faraday (Eq.1) oppure l'Eq.2, orientando la spira nel verso orario.

Soluzione:

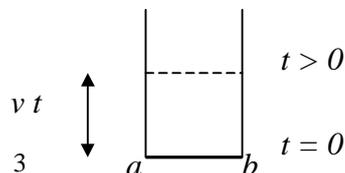
Il flusso del vettore \vec{B} attraverso la superficie racchiusa dalla spira nel generico istante t è per definizione

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}.$$

Orientata la spira in verso orario, il vettore $d\vec{S}$ risulta parallelo e concorde con \vec{B} : $\vec{B} \cdot d\vec{S} = BdS$ con B costante rispetto a dS . Risulta quindi $\Phi = BS$, dove $S \equiv S(t)$ è l'area della superficie racchiusa dalla spira. Detta S_0 l'area racchiusa all'istante $t = 0$, risulta:

$$S(t) = S_0 - d \cdot vt,$$

quindi



$$\Phi(t) = BS_o - Bdv t$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = Bdv .$$

La f.e.m. risulta positiva, quindi la corrente circola nel senso positivo prescelto (orario).

Soluzione alternativa:

$$\mathcal{E} = \oint \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{\ell} ;$$

all'integrale contribuisce solo il lato mobile del circuito (sugli altri lati $\vec{v} = 0$), dove il vettore $\vec{v} \times \vec{B}$ ha modulo vB , è parallelo al lato mobile ed orientato verso sinistra. Scegliendo sulla spira il verso orario, $d\vec{\ell}$ risulta parallelo e concorde con $\vec{v} \times \vec{B}$, quindi:

$$\mathcal{E} = \int_a^b vB d\ell = vB \int_a^b d\ell = vBd .$$

Commenti Il problema può anche essere risolto cercando prima il verso della corrente indotta con la legge di Lenz e calcolando poi il modulo della f.e.m. (senza preoccuparsi dei segni). La legge di Lenz può essere applicata in diversi modi ed in particolare considerando:

1. *Il flusso di \vec{B} .* Lo spostamento del lato mobile *diminuisce* la superficie racchiusa dal circuito ed il modulo del flusso di \vec{B} . La corrente indotta ha verso tale da opporsi a questa variazione. Il campo magnetico creato dalla corrente indotta è particolarmente intenso nei punti vicini al circuito e, se la corrente ha verso orario, è concorde con \vec{B} nei punti *interni* al circuito e tende quindi ad *aumentare* il flusso (nei punti esterni il campo magnetico indotto ha verso opposto, ma questi punti non danno contributo al flusso Φ).
2. *La forza applicata dal campo \vec{B} al lato mobile*, che deve opporsi al suo spostamento verso l'alto.

Problema 2

Considerando il circuito del Problema 1, si calcoli:

- a) la corrente i indotta nel circuito, supponendo che la sua resistenza R sia nota e costante;
- b) la forza \vec{F} necessaria per mantenere in moto uniforme il lato mobile della spira (trascurando la forza peso) ed il suo lavoro per unità di tempo;
- c) la potenza dissipata per effetto Joule nel circuito.

Soluzione:

Calcolata la f.e.m. indotta \mathcal{E} con uno dei due metodi utilizzati nel Problema 1, risulta:

$$a) \quad i = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{vBd}{R} \quad (\text{verso orario});$$

- b) La forza \vec{F} è uguale ed opposta alla forza esercitata dal campo \vec{B} sul lato mobile, che è diretta verso il basso ed ha modulo:

$$F = iBd = \frac{vB^2d^2}{R}$$

Il lavoro di \vec{F} è positivo e la potenza è data da:

$$Fv = \frac{(vBd)^2}{R};$$

c) La potenza dissipata per effetto Joule è:

$$Ri^2 = \frac{(vBd)^2}{R}.$$

Commento: si noti che tutta la potenza fornita al circuito viene dissipata per effetto Joule, in accordo con il principio di conservazione dell'energia

Problema 3

Nel circuito del Problema 1 viene inserito un generatore con f.e.m. \mathcal{E}_o di segno opposto alla f.e.m. indotta.

Si calcoli:

- la corrente indotta, supponendo costante la resistenza R del circuito;
- la forza \vec{F} esercitata dal campo magnetico sul lato mobile, la sua dipendenza da \mathcal{E}_o ed il suo effetto sul moto del lato mobile ab .

Suggerimento. La f.e.m. indotta \mathcal{E} è già stata calcolata, agisce in senso orario ed ha modulo vBd . Si orienti il circuito in verso antiorario, sicché la f.e.m. \mathcal{E}_o risulti positiva, \mathcal{E} negativa.

Soluzione

a) Dall'equazione delle maglie $\mathcal{E}_o - vBd = Ri$ si deduce:

$$i = \frac{\mathcal{E}_o - vBd}{R}.$$

b) Scelto il verso antiorario, gli elementi $d\vec{\ell}$ del lato mobile sono orientati verso destra, $d\vec{\ell} \times \vec{B}$ è verticale e diretto verso l'alto. Detto \hat{z} un versore verticale diretto verso l'alto, l'integrazione di $d\vec{F} = id\vec{\ell} \times \vec{B}$ è immediata e fornisce:

$$\vec{F} = iBl \hat{z}.$$

\vec{F} dipende da \mathcal{E}_o attraverso i che è:

nulla per $\mathcal{E}_o = vBd$;

negativa per $\mathcal{E}_o < vBd$;

positiva per $\mathcal{E}_o > vBd$.

Ricordando che la velocità \vec{v} del lato mobile è diretta verso l'alto, si deduce che:

- per $\mathcal{E}_o = 0$, la forza \vec{F} è opposta a \vec{v} e tende a frenare il moto della sbarra, in accordo con la legge di Lenz; per mantenere in moto uniforme il lato ab del circuito occorre esercitare una forza dall'esterno.

- Aumentando \mathcal{E}_o , \vec{F} diminuisce e si annulla per $\mathcal{E}_o = vBd$.
- Per $\mathcal{E}_o > vBd$, \vec{F} è concorde con \vec{v} e favorisce il moto del lato mobile.

Commenti. Consideriamo il bilancio energetico, dal punto di vista del lavoro fornito al circuito dall'esterno, o eventualmente fornito dal circuito sull'esterno.

- Per $\mathcal{E}_o = 0$ si deve fornire lavoro meccanico dall'esterno, che viene trasformato in energia elettrica (qui viene dissipato nel resistore, che potrebbe essere il filamento di una lampadina): il dispositivo è un generatore elettrico, cioè trasforma energia meccanica in *energia elettrica*;
 - per $\mathcal{E}_o \neq 0$ il dispositivo può diventare un *motore elettrico*, cioè trasformare parte dell'energia fornita dal generatore in *energia meccanica*: infatti la condizione $\mathcal{E}_o > vBd$ può essere verificata per qualunque valore di \mathcal{E}_o (basta ad esempio diminuire v).
- Si noti infine questo fatto interessante: uno stesso dispositivo può essere utilizzato come generatore elettrico o come motore elettrico semplicemente cambiando i valori dei parametri (che in questo caso sono \mathcal{E}_o , v , B , d).

Problema 4

Si risolva il Problema 1 supponendo che il campo magnetico vari nel tempo con legge $\vec{B} = \vec{B}_o \cos \omega t$ e considerando nota la superficie S_o racchiusa dal circuito nell'istante $t = 0$.

Suggerimento: si proceda come per il Problema 1, applicando la legge di Faraday nella forma 1 (l'Eq. 2 non è più applicabile perché il campo \vec{B} non è stazionario). Il calcolo di Φ richiede l'integrazione di $\vec{B} \cdot d\vec{S}$ ad un generico istante. In questo istante B non dipende dalla variabile di integrazione $d\vec{S}$ e può essere portato fuori dal segno di integrale.

Soluzione:

Con le convezioni del Problema 1, risulta:

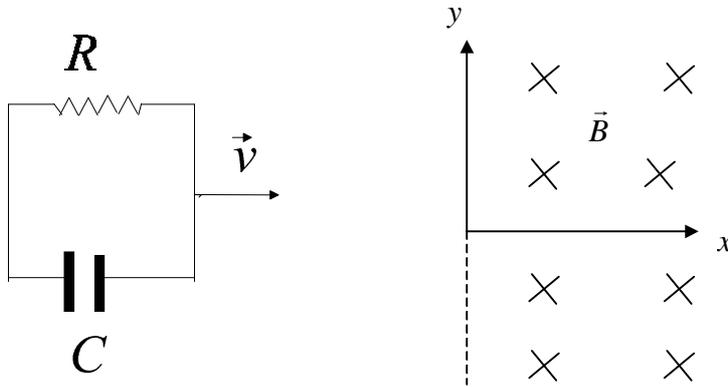
$$\Phi = \int \vec{B}(t) \cdot d\vec{S} = B(t) \int dS = (B_o \cos \omega t) (S_o - dvt)$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = -B_o \omega (S_o - dvt) \sin \omega t - B_o v d \cos \omega t .$$

Problema 5

Una spira quadrata di lato a e resistenza R , su cui è inserito un condensatore con capacità C e con dimensioni trascurabili rispetto ad a , si muove con velocità \vec{v} costante in presenza di un campo \vec{B} che è nullo nel semipiano $x < 0$ ed uniforme nel semipiano $x > 0$ (vedi figura). Si calcoli e si rappresenti in diagramma:

- a) la funzione $\Phi(t)$ che rappresenta il flusso di \vec{B} attraverso la spira, orientando la superficie racchiusa dalla spira nel verso di \vec{B} ed assumendo come origine di t l'istante in cui il lato di destra della spira si trova in $x = 0$;
- b) la f.e.m. indotta nella spira;
- c) la corrente $i(t)$ nella spira.



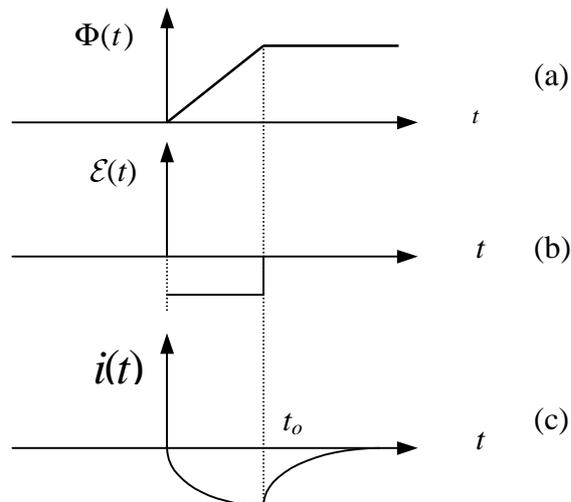
Soluzione:

- a) $\Phi(t)$ ha l'andamento di Fig.a, dove $t_o = a/v$, e nell'intervallo tra 0 e t_o cresce con legge lineare: $\Phi = avtB$;
- b) $\mathcal{E}(t)$ è sempre nullo eccetto che nell'intervallo tra 0 e t_o , in cui vale $\mathcal{E} = -aBv$;

c)

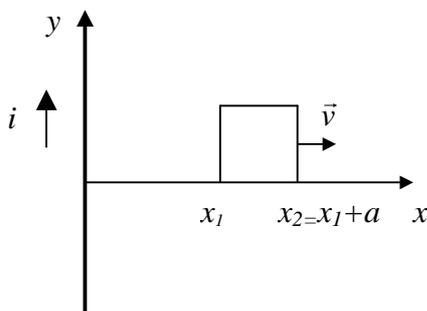
$$i(t) = \begin{cases} -\frac{\mathcal{E}}{R} [1 - \exp(-t/RC)] & \text{per } 0 \leq t \leq t_o \\ -i_o \exp[-(t-t_o)/RC] & \text{per } t \geq t_o \end{cases}$$

dove $i_o = i(t_o)$.



Problema 6

Si calcoli la f.e.m. \mathcal{E} indotta in una spira quadrata di lato a che si allontana con velocità \vec{v} costante da un conduttore rettilineo indefinito percorso da corrente i stazionaria, in funzione della distanza x_1 (vedi Figura).



Soluzione:

Il campo \vec{B} creato dal conduttore è ortogonale al piano racchiuso dalla spira ed entrante. Orientando $d\vec{S}$ nel verso di \vec{B} (e la spira in *verso orario*) risulta:

$$\begin{aligned}\Phi &= \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_0^a dy \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mu_0 i}{2\pi x} dx = \\ &= \frac{\mu_0 i a}{2\pi} \ln \frac{x_1 + a}{x_1} \\ \mathcal{E} &= -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Phi}{dx_1} \frac{dx_1}{dt} = -\frac{\mu_0 i a v}{2\pi} \frac{1}{1 + \frac{a}{x_1}} \left(-\frac{a}{x_1^2} \right) = \frac{\mu_0 i a v}{2\pi} \frac{a}{(x_1 + a)x_1}.\end{aligned}$$

Poiché \mathcal{E} è positiva, la corrente circola nel verso orario prescelto.

Soluzione alternativa:

Si applica l'equazione (2), orientando la spira in verso orario. I lati orizzontali non danno contributo all'integrale di $\vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$, perché $\vec{v} \times \vec{B}$ è verticale. Su ciascun lato verticale \vec{B} è costante rispetto alla variabile di integrazione e $\vec{v} \times \vec{B}$ è concorde con $d\vec{s}$ sul lato di sinistra e discorde sul quello di destra. L'integrazione è immediata e fornisce

$$\mathcal{E} = \oint \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{s} = va(B(x_1) - B(x_1 + a)) = \frac{\mu_0 i a v}{2\pi} \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_1 + a} \right),$$

in accordo con il risultato ottenuto sopra.

Problema 7

Calcolare la f.e.m. indotta nella spira del Problema 6 supponendo che la spira sia ferma e che la corrente i nel conduttore rettilineo cresca linearmente dal valore 0 al valore i_o nel tempo t_o .

Soluzione:

Il calcolo del flusso è identico, ma la variazione di flusso è prodotta dalla variazione della

corrente i . Poiché $i(t) = \frac{i_o}{t_o} t$, risulta:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_o a}{2\pi} \ln \frac{x_1 + a}{x_1} \frac{di}{dt} = -\frac{\mu_o a i_o}{2\pi t_o} \ln \frac{x_1 + a}{x_1}$$

Dato che \mathcal{E} è negativo, la corrente indotta circola in senso antiorario.

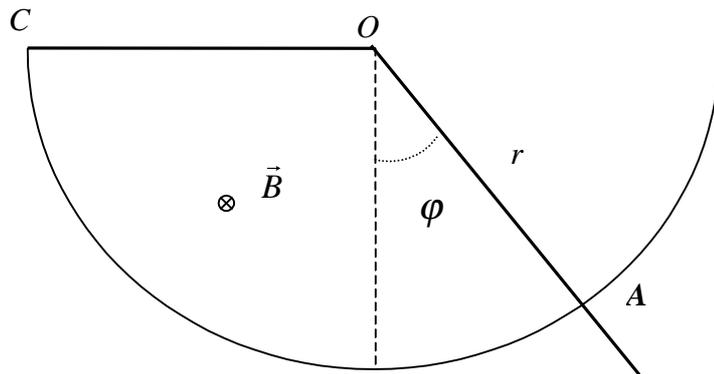
Non esiste una soluzione alternativa basata sull'Eq. 2, perché il campo magnetico non è stazionario.

Problema 8

Nel circuito in figura l'asta AO può ruotare, intorno ad un asse passante per O , strisciando sulla guida circolare di raggio $r = AO$, in presenza di un campo magnetico \vec{B} uniforme, perpendicolare al piano di figura ed entrante. L'angolo φ varia con la legge $\varphi = \varphi_o \sin \omega t$.

- Si calcoli la forza elettromotrice \mathcal{E} indotta nel circuito;
- si dica per quale valore di φ la f.e.m. \mathcal{E} risulta massima e se ne calcoli il valore numerico.

[$r = 20 \text{ cm} (=AO)$; $\varphi_o = \pi / 6$; $\omega = 20 \text{ rad / s}$; $\vec{B} = 0.1 \text{ T}$].



Soluzione:

- a) Orientando il circuito in senso orario, il versore normale alla superficie racchiusa è concorde con il campo \vec{B} ed il flusso concatenato è BS , dove S è la superficie del settore circolare racchiuso dal circuito, con angolo al centro uguale a $\varphi + \pi/2$:

$$\Phi = \frac{1}{2} Br^2 \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right).$$

Ponendo $\varphi = \varphi_0 \sin \omega t$ si ha:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{2} Br^2 \varphi_0 \omega \cos \omega t.$$

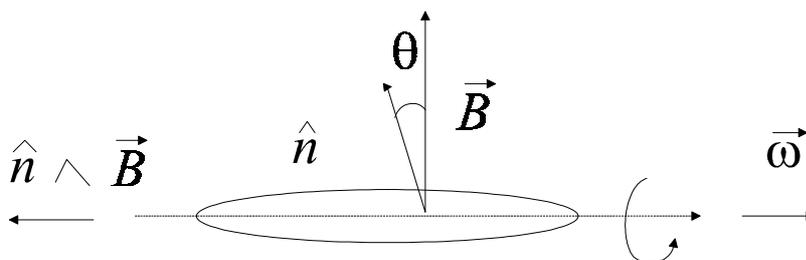
- b) La f.e.m. \mathcal{E} risulta massima in valore assoluto per $\cos \omega t = \pm 1$, ovvero per $\varphi = 0$. Il suo valore massimo è: $\mathcal{E} = \mp 2.1V$.

Problema 9

Un campo magnetico \vec{B} uniforme e stazionario è perpendicolare al piano che contiene una spira circolare metallica di area A e resistenza R . Nell'istante $t=0$ la spira viene messa in rotazione intorno ad un suo diametro con velocità angolare costante ω . Si calcoli:

- la corrente indotta nella spira, trascurando l'autoinduzione;
- la potenza elettrica P_E dissipata nella spira;
- la potenza meccanica P_M da applicare alla spira per mantenerla in rotazione.

Suggerimento. Orientando la spira in senso tale che nell'istante $t=0$ il suo versore normale sia parallelo e concorde con \vec{B} , nel generico istante t l'angolo fra \hat{n} e \vec{B} è $\theta = \omega t$. Si calcoli il flusso $\Phi(t)$ in questo istante e si applichi poi la legge di Faraday.



Soluzione:

a)

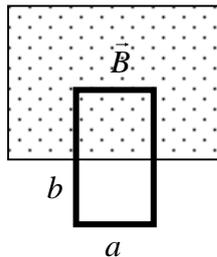
$$\Phi(t) = \int \vec{B} \cdot \vec{n} dS = \int B \cos \theta dS = B \cos \theta \int dS = BS \cos \omega t,$$
$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = AB\omega \sin \omega t; \quad i = \frac{AB}{R} \omega \sin \omega t.$$

- b) La potenza elettrica dissipata nella spira è: $P_E = Ri^2 = \frac{A^2 B^2}{R} \omega^2 \sin^2 \omega t$.
- c) Detto $\vec{\mu} = i A \hat{n}$ il momento magnetico della spira, il momento meccanico delle forze esercitate dal campo \vec{B} sulla spira è $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} = i A \hat{n} \times \vec{B}$; $\hat{n} \times \vec{B}$ è parallelo ad $\vec{\omega}$, con verso opposto (vedi figura) ed uguale a $B \sin \theta (-\hat{\omega})$, dove $\hat{\omega}$ è il versore di $\vec{\omega}$. Per mantenere la spira in moto uniforme occorre esercitare un momento opposto $-\vec{\tau} = iAB \sin \theta (+\hat{\omega})$ dove $\theta = \omega t$; la sua potenza è
- $$P_M = -\vec{\tau} \cdot \vec{\omega} = iAB\omega \sin \omega t =$$
- $$= \frac{A^2 B^2 \omega^2}{R} \sin^2 \omega t$$
- Ad ogni istante P_M e P_E , in accordo con il principio di conservazione dell'energia.

Problema 10

Una spira rettangolare di rame (resistività ρ e densità δ) di dimensioni rettangolari, lati a e b , cade verticalmente nello spazio compreso tra le espansioni polari di una calamita, che genera un campo \vec{B} diretto come in figura ed uscente. Quando è solo parzialmente immersa nel campo (v. figura), la spira cade con moto uniforme. Si calcoli la velocità \vec{v} , trascurando l'attrito dell'aria.

$$[\rho = 1.56 \cdot 10^{-8} \Omega m; \delta = 8.96 \text{ Kg } m^{-3}; a = 10^{-2} m; b = 2 \cdot 10^{-2} m; B = 0.8 T]$$



Soluzione:

Orientata la spira in senso antiorario, il versore \hat{n} normale alla superficie racchiusa è concorde con \vec{B} . Detta $S(t)$ la porzione di questa superficie immersa nel campo \vec{B} , risulta:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(\vec{B} \cdot \hat{n} S(t))}{dt} = -\vec{B} \cdot \hat{n} \frac{dS(t)}{dt} = Bav,$$

$$i = \mathcal{E}/R \text{ dove } R = \rho \frac{\ell}{A},$$

dove $\ell = 2a + 2b$ ed A è la sezione del filo.

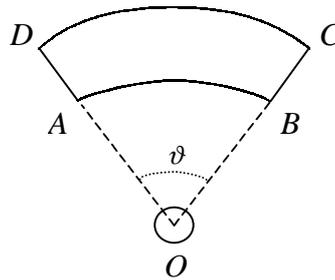
Affinché la spira cada con velocità uniforme la forza peso $mg = \delta \ell A g$ deve essere bilanciata dalla forza magnetica agente sul lato orizzontale, che ha modulo iaB ed è effettivamente diretta verso l'alto (i è positiva e circola nel senso antiorario scelto). Si ricava:

$$v = \frac{\rho \delta \ell^2 g}{B^2 a^2} = 7.71 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}.$$

Soluzione alternativa: Si arriva allo stesso risultato uguagliando la potenza $P_J = i^2 R$ dissipata per effetto Joule alla potenza $P_g = mgv$ fornita dalla forza peso.

Problema 11

Si calcoli il coefficiente di mutua induzione M fra i due circuiti filiformi rappresentati in figura; dove AB e CD sono archi di circonferenza con centro in O e raggi r_1 e r_2 e la spira è circolare con centro in O e raggio $a \ll r_1$.



Suggerimenti: M può essere calcolato come rapporto Φ_2/i_1 , dove Φ_2 è il flusso attraverso il circuito 2 del campo \vec{B} creato da una corrente i_1 che fluisce nel circuito 1. È importante numerare opportunamente i due circuiti. Qui conviene scegliere la spira come circuito 2 perché l'ipotesi $a \ll r_1$ permette di supporre uniforme al suo interno il campo \vec{B} creato dall'altro circuito (effettuata la scelta, l'uso dei pedici diventa superfluo e sarà evitato nella soluzione). Per dare un significato al segno di M è necessario scegliere un verso positivo di percorso su entrambi i circuiti.

Soluzione:

Si orientino i due circuiti in verso antiorario e si indichi con \hat{z} il versore normale al piano della figura ed uscente. È sufficiente calcolare il campo \vec{B} nel punto O . Un generico elemento di filo $d\vec{\ell}$ genera il campo infinitesimo

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i \cdot d\vec{\ell} \times \vec{r}}{r^3},$$

che è parallelo all'asse z . I campi creati dai tratti DA e CB sono nulli, il campo creato da un generico elemento del tratto AB è $\frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\ell}{r_1^2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\theta}{r_1}$, che si integra immediatamente perché r_1 non dipende dalla variabile di integrazione θ . Il campo creato da CD si calcola in modo analogo; risulta in definitiva:

$$\vec{B}_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot i\vartheta \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \cdot \hat{z}.$$

Con le convenzioni suggerite sopra, l'area \vec{S} della spira va orientata come \hat{z} :

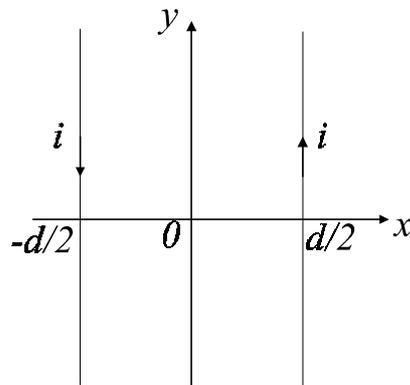
$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B_0 S = B_0 \pi a^2;$$

$$M = \frac{\Phi}{i} = \frac{\mu_0 a^2 \vartheta}{4} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) > 0.$$

Problema 12

Due conduttori filiformi di lunghezza infinita, paralleli e distanti d , sono percorsi da correnti di modulo i e versi opposti. Una spira quadrata di lato $a < d$ è posta tra i due conduttori, nel loro piano, con due lati paralleli ad essi ed equidistanti da essi. La corrente nei fili è portata a zero con legge lineare nell'intervallo di tempo $(0, t_0)$. Si calcolino:

- Il coefficiente di mutua induzione fra la spira quadrata ed il circuito contenente i due fili rettilinei;
- la f.e.m. indotta nella spira;
- la risultante delle forze magnetiche agenti sulla spira nell'intervallo di tempo $(0, t_0)$.



Soluzione:

- a) Nei punti interni alla spira i campi magnetici creati dai conduttori rettilinei sono concordi ed uscenti. Nei punti con ascissa x il campo magnetico creato dal conduttore passante per $x = -d/2$ ha modulo

$$|\vec{B}_n| = \frac{\mu_0 i}{2\pi \left(\frac{d}{2} + x\right)}$$

Data la simmetria del problema, i contributi Φ dei due fili al flusso nella spira sono uguali e concordi. Orientando la spira in senso antiorario, risulta:

$$M = 2\Phi(\vec{B})/i = \frac{2}{i} \int_{-a/2}^{a/2} \mu_0 \frac{ia}{2\pi(d/2+x)} dx = \frac{\mu_0 a}{\pi} \ln\left(\frac{d/2+a/2}{d/2-a/2}\right) = \frac{\mu_0 a}{\pi} \ln \frac{d+a}{d-a}$$

- b) La corrente varia nel tempo con legge: $i(t) = i_o - i_o t / t_o$, quindi:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 a i_o}{\pi t_o} \ln\left(\frac{d+a}{d-a}\right).$$

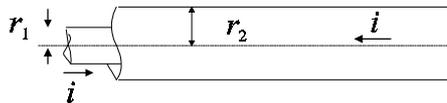
- c) Le forze esercitate dal campo magnetico dei conduttori rettilinei sui lati della spira stanno sul piano (x, y) contenente la spira. I lati opposti sono soggetti a forze opposte, per simmetria. Le forze magnetiche hanno quindi risultante nulla e momento risultante nullo.

(Se fosse richiesto il calcolo delle quattro forze agenti sui quattro lati della spira, i lati orizzontali richiederebbero un'integrazione, perché \vec{B} dipende da x).

Problema 13

Nel cavo coassiale rappresentato in figura i due cilindri cavi hanno spessore trascurabile e sono percorsi da correnti opposte. Si consideri un tratto di cavo di lunghezza ℓ e se ne calcoli:

- a) energia (del campo magnetico);
- b) induttanza;
- c) capacità.



Soluzione:

- a) Il campo è diverso da zero solo nell'anello cilindrico compreso fra i due cavi, dove ha modulo:

$$B = \frac{\mu_o i}{2\pi r}.$$

L'energia di un tratto di lunghezza ℓ vale (integrando per strati cilindrici):

$$U_B = \int_V \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_o} dv = \frac{1}{2} \frac{\mu_o i^2}{(2\pi)^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} 2\pi r \ell dr = \frac{\mu_o i^2 \ell}{4\pi} \ln \frac{r_2}{r_1},$$

b) Per il calcolo di L conviene considerare l'espressione $U_B = \frac{1}{2} Li^2$, che fornisce:

$$L = \frac{2U_B}{i^2} = \frac{\mu_o \ell}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

c) Si tratta di un condensatore cilindrico; il calcolo è già stato effettuato e fornisce:

$$C = \frac{2\pi\epsilon_o \ell}{\ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

Commenti. Nei cavi hanno interesse induttanza e capacità per *unità di lunghezza*. Si noti che il prodotto di queste due grandezze è uguale a: $\epsilon_o \mu_o = \frac{1}{c^2}$.

Problema 14

Due solenoidi, aventi la stessa lunghezza ℓ e raggi r_1 e $r_2 > r_1$, sono uno interno all'altro e coassiali. Si determini l'energia del campo magnetico quando si manda la stessa corrente i in entrambi, considerando separatamente i casi con correnti concordi e discordi. Si mostri poi che la differenza fra le energie così calcolate è uguale a $2 Mi^2$, dove M è il coefficiente di mutua induzione. (Si trascuri l'effetto dei bordi, supponendo cioè campi uniformi all'interno e nulli all'esterno).

Suggerimento. Nello strato cilindrico compreso fra i due solenoidi, avente volume $\pi(r_2^2 - r_1^2)\ell$, è presente solo il campo \vec{B}_2 del solenoide esterno. Nel solenoide interno sono presenti sia \vec{B}_1 che \vec{B}_2 , con la stessa direzione e versi rispettivamente concordi e discordi.

Soluzione:

Correnti nello stesso senso:

$$U_1 = \frac{1}{2} \frac{(B_1 + B_2)^2}{\mu_o} \pi r_1^2 \ell + \frac{1}{2} \frac{B_2^2}{\mu_o} \pi \ell (r_2^2 - r_1^2),$$

dove $B_1 = \mu_o n_1 i$, $B_2 = \mu_o n_2 i$.

Correnti in senso opposto:

$$U_2 = \frac{1}{2} \frac{(B_2 - B_1)^2}{\mu_o} \pi r_1^2 \ell + \frac{1}{2} \frac{B_2^2}{\mu_o} \pi \ell (r_2^2 - r_1^2).$$

Quindi

$$U_1 - U_2 = \frac{2B_2 B_1}{\mu_o} \pi r_1^2 \ell = 2\mu_o n_1 n_2 i^2 \pi r_1^2 \ell.$$

Per il calcolo di M orientiamo i due circuiti nello stesso verso e consideriamo il campo $B_2 = \mu_o n_2 i$ creato dal solenoide esterno. Il suo flusso attraverso una singola spira del solenoide interno è $\vec{B}_2 \cdot \pi r_1^2$. Moltiplicando per $n_1 \ell$ (numero totale di spire) si ottiene il flusso totale Φ_1 attraverso il solenoide interno. Quindi:

$$M \equiv \frac{\Phi_1}{i} = \mu_o n_1 n_2 \pi r_1^2 \ell.$$

CAPITOLO 5

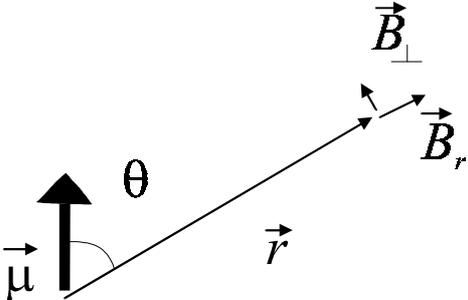
DIPOLI MAGNETICI E PROPRIETÀ MAGNETICHE DEI MEZZI MATERIALI

Dipoli magnetici

Una spira filiforme contenuta in un piano e percorsa da corrente i possiede un momento magnetico $\vec{\mu} = i S \hat{n}$, dove S è la superficie racchiusa dalla spira ed \hat{n} il versore normale al piano, orientato con la regola della mano destra rispetto al verso di i . La spira può essere trattata come un *dipolo magnetico puntiforme* nel limite in cui le sue dimensioni diventano trascurabili (per i dipoli magnetici puntiformi valgono le considerazioni fatte nel Cap.1 per i dipoli elettrici puntiformi: v. commenti 1,2,3 a pag.1).

Per i dipoli puntiformi valgono le seguenti relazioni:

Campo \vec{B} creato da un dipolo magnetico puntiforme.



$$B_r = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{2\mu \cos\theta}{r^3};$$

$$B_{\perp} = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{\mu \sin\theta}{r^3}.$$
(1)

Dipolo magnetico puntiforme in un *campo esterno* \vec{B} :

energia potenziale U

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$
(2)

momento $\vec{\tau}$ e *risultante* \vec{R} delle forze applicate

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B},$$
(3)

$$R_i = \vec{\mu} \cdot \text{grad } B_i, \quad i = x, y, z.$$
(4)

Proprietà magnetiche della materia

Dato un mezzo materiale si definisce *magnetizzazione* \vec{M} il *momento magnetico per unità di volume*:

$$\vec{M} = \frac{\sum \vec{\mu}_i}{\Delta V},$$
(5)

dove $\vec{\mu}_i$ è il momento magnetico della generica molecola presente nel volume ΔV .

Commento. 1) Le interazioni fra dipoli elettrici puntiformi e le interazioni fra dipoli magnetici puntiformi

sono descritte da equazioni formalmente identiche (salvo ovvie trasposizioni di simboli, che risultano evidenti confrontando le equazioni 1-5 con le equazioni 2-5 del Cap. 1). Questo suggerisce un metodo di risoluzione dei problemi di interazione fra magneti basato sui concetti di *poli magnetici* e *cariche* (o masse) *magnetiche*. In particolare, un cilindro di sezione S uniformemente magnetizzato, con \vec{M} diretto lungo l'asse, possiede cariche magnetiche $+q_m$ e $-q_m$ sulle due basi, con $q_m = MS$. Per ottenere l'equivalente magnetico di una carica elettrica basta supporre che la carica di segno opposto sia a distanza infinitamente grande, considerando un magnete infinitamente lungo. Il campo \vec{B} creato dalla carica q_m è dato dalla legge di Coulomb magnetostatica

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 q_m}{4\pi r^2} \hat{r} \quad (6)$$

Lo studente può formulare e risolvere l'equivalente magnetico del Problema 1, Cap.1.

Per risolvere i problemi di interazione fra magneti, esiste però un secondo metodo, basato sul concetto di *correnti di magnetizzazione* i_m .

Un corpo uniformemente magnetizzato crea lo stesso campo \vec{B} di una corrente (di magnetizzazione) i_m che scorre sulla sua superficie, ortogonalmente ad \vec{M} , il cui momento magnetico coincide con il momento magnetico totale del corpo. Un generico segmento $d\vec{\ell}$ giacente sulla sua superficie è attraversato da una corrente di magnetizzazione

$$di_m = \vec{M} \cdot d\vec{\ell} \quad (7)$$

Commenti. 2) Dato un cilindro uniformemente magnetizzato in direzione dell'asse, la corrente di magnetizzazione scorre sulla sua superficie laterale, è ortogonale ad \vec{M} , ed ha intensità totale $i_m = M\ell$, dove ℓ è la lunghezza del cilindro. Il corpo crea lo stesso campo \vec{B} di un solenoide cilindrico di forma identica, con corrente totale Ni uguale ad $i_m = M\ell$, e quindi con:

$$ni = M \quad (7')$$

(N è il numero totale di spire, supposte circolari e contigue, $n = N/\ell$, i è la corrente in ogni spira).

3) Le analogie discusse nei commenti 1 e 2, ed in particolare la possibilità di calcolare il campo magnetico dei corpi uniformemente magnetizzati introducendo *cariche magnetiche* oppure *correnti di magnetizzazione*, spiega il fatto che oggetti molto diversi creino campi con linee di flusso identiche. Ad es. un cilindro polarizzato elettricamente e un condensatore con armature coincidenti con le sue due basi creano campi \vec{E} con linee di flusso uguali tra loro, ed uguali alle linee di flusso dei campi \vec{B} creati da un magnete cilindrico e da un solenoide.

Campo magnetico delle correnti elettriche in presenza di mezzi materiali.

Alla corrente di conduzione occorre aggiungere la corrente di magnetizzazione i_m . È però possibile scrivere le leggi di Biot-Savart e di Ampère senza fare comparire esplicitamente le correnti di magnetizzazione. Per conduttori filiformi circondati da un mezzo omogeneo, isotropo e tale che la magnetizzazione risulti proporzionale al campo, basta sostituire la permeabilità magnetica del vuoto μ_0 con la *permeabilità* del mezzo

$$\mu = \mu_r \mu_0, \quad (8)$$

dove μ_r è la *permeabilità relativa* al vuoto. In particolare, conviene scrivere la legge di Ampère nella forma

$$\oint_{\gamma} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = i_{\gamma} \quad (9)$$

dove:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_r \mu_o} . \quad (10)$$

Scritta in questo modo, la legge risulta valida anche se il mezzo non è omogeneo, e risulta:

$$\vec{M} = (\mu_r - 1)\vec{H} \equiv \chi_m \vec{H} , \quad (11)$$

dove χ_m è detta *suscettività magnetica*. Se viene a mancare la proporzionalità fra campo e magnetizzazione (ad es. nei magneti permanenti e nei materiali che presentano isteresi), l'equazione (10) va sostituita con

$$\vec{H} = \vec{B} / \mu_o - \vec{M} \quad (12)$$

Commento. La definizione (11) di suscettività magnetica χ_m rompe, almeno formalmente, l'analogia fra polarizzazione elettrica e magnetizzazione. La dissimetria formale, che nasce dal mettere \vec{M} in relazione con \vec{H} anziché con \vec{B} , è legata allo sviluppo storico del magnetismo; fino alla prima metà del secolo scorso il *vettore \vec{H}* era considerato il vettore magnetico fondamentale, e chiamato semplicemente *campo magnetico*; ora si preferisce la denominazione *campo magnetizzante*, pensando appunto alla relazione (11).

Problema 1

Due molecole, poste a distanza d , sono assimilabili a dipoli magnetici puntiformi, con momenti magnetici $\vec{\mu}$ identici e diretti lungo la loro congiungente.

- Si calcoli il lavoro L_μ necessario per ruotare di 180° una delle due molecole, in modo che i loro dipoli anziché paralleli risultino antiparalleli (cioè con momenti opposti).
- Si calcoli il lavoro L_p richiesto per ripetere l'operazione descritta in a), supponendo che le molecole possiedano dipoli elettrici di momento \vec{p} , anziché dipoli magnetici.
- Si trovino i valori numerici di L_μ ed L_p ponendo: $d = 0.5 \text{ nm}$, $|\vec{\mu}| = \mu_B = 9.3 \cdot 10^{-24} \text{ J/T}$, $|\vec{p}| = p_D = 3.3 \cdot 10^{-30} \text{ C m}$ (si tratta dei tipici valori delle distanze intermolecolari e dei momenti molecolari magnetici ed elettrici: μ_B è detto *magnetone di Bohr* e coincide praticamente con il momento magnetico di un elettrone isolato, p_D prende il nome di Debye).



Suggerimento. Si calcoli il campo \vec{B} creato da un dipolo magnetico nel punto occupato dall'altro, e si utilizzi poi l'espressione (2) dell'energia potenziale.

Soluzione

- a) Il dipolo posto nell'origine crea in P un campo parallelo e concorde con l'asse x , con modulo

$$B = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{2\mu}{d^3}.$$

L'energia potenziale del secondo dipolo è $-\vec{\mu} \cdot \vec{B} \equiv -\mu B$; rovesciando il verso del dipolo, l'energia diventa $+\mu B$. Il lavoro richiesto è

$$L_\mu = 2\mu B = 4 \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{\mu^2}{d^3}.$$

- b) Il calcolo è formalmente identico e fornisce

$$L_p = 4 \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{p^2}{d^3}.$$

- c)

$$L_\mu = 4 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{(9.3 \cdot 10^{-24})^2}{(0.5 \cdot 10^{-9})^3} J = 2.8 \cdot 10^{-25} J,$$

$$L_p = 4 \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{(3.3 \cdot 10^{-30})^2}{(0.5 \cdot 10^{-9})^3} J = 3.1 \cdot 10^{-21} J.$$

Commenti. 1) La configurazione parallela è energeticamente favorita: le molecole poste lungo una retta tendono ad allineare i loro dipoli lungo la retta e nello stesso verso.

2) Non è però realistico supporre che le molecole siano ferme: tutte le molecole dei mezzi materiali possiedono un'energia cinetica di *agitazione termica* (dovuta ai moti di traslazione e rotazione) che è dell'ordine di $k_B T$, dove k_B è la *costante di Boltzmann*, T la temperatura assoluta. A temperatura ambiente, T è dell'ordine di $300K$ e l'energia media di agitazione termica è dell'ordine di $4 \cdot 10^{-21} J$. Confrontando quest'energia con i lavori L_μ ed L_p , si comprende che l'agitazione termica contrasta molto efficacemente l'effetto allineante delle forze di interazione provenienti dai momenti di dipolo elettrico e magnetico delle molecole.

Problema 2

Si consideri una spira circolare di raggio r , costituita da un sottile filo di materiale isolante, di sezione A . Nel volume occupato dal filo è distribuita una carica elettrica q con densità ρ_q uniforme. Quando si pone in rotazione la spira intorno al suo asse, si crea una corrente elettrica.

- Si calcoli l'intensità di corrente i ed il momento di dipolo magnetico $\vec{\mu}$ della spira;
- si mostri che $\vec{\mu}$ risulta parallelo al momento \vec{L} della quantità di moto della spira e che il rapporto $\vec{\mu} / \vec{L}$ dipende unicamente dal rapporto tra carica q e massa m della spira;
- si calcoli il rapporto $\vec{\mu} / \vec{L}$ per un sfera rotante intorno ad un suo diametro, supponendo costanti all'interno della sfera le densità di carica ρ_q e di massa ρ_m ;

- d) si dica se il risultato trovato in c) può essere applicato ad una sfera conduttrice elettricamente carica.

Suggerimento: Detta $v = \omega r$ la velocità di un punto all'interno del filo, l'ipotesi che il filo sia molto sottile permette di supporre che tutti i punti di una sua generica sezione si muovano con la stessa velocità. Si valutino poi nell'ordine la densità di corrente (si ricordi che nell'espressione $\vec{j} = nq\vec{v}_d$ riportata nel Cap.2, nq rappresenta la densità ρ_q delle cariche in moto), la corrente, il momento di dipolo magnetico ed il momento della quantità di moto (o momento angolare).

Soluzione:

- a) Seguendo i suggerimenti, si ottiene:

$$j = \rho_q v, \quad i = jA = \rho_q vA$$

dove A è l'area della sezione del filo. Risulta poi

$$\vec{\mu} = i \cdot \pi r^2 \cdot \hat{n} = \rho_q vA \cdot \pi r^2 \cdot \hat{n}$$

dove \hat{n} è il versore normale al piano contenente la spira, orientato con la regola della mano destra rispetto al senso di rotazione.

- b) Anche il momento angolare \vec{L} è parallelo all'asse di rotazione. Ogni tratto di spira di lunghezza $d\ell$ ha massa $dm = \rho_m A d\ell$, quantità di moto vdm e dà al momento angolare un contributo $dL = v r dm = v r \rho_m A d\ell$. Il modulo di \vec{L} è quindi:

$$L = \oint dL = v \rho_m A r \oint d\ell = v \rho_m A 2\pi r^2.$$

Risulta in definitiva

$$\frac{\vec{\mu}}{\vec{L}} = \frac{\rho_q}{2\rho_m} = \frac{q}{2m}.$$

Si noti che $\vec{\mu}$ ha il verso di \vec{L} se la carica è positiva, verso opposto se negativa.

- c) Il rapporto $\vec{\mu} / \vec{L}$ è ancora uguale a $q/2m$. Per capirlo basta suddividere idealmente la sfera rotante in anelli infinitesimi, con asse coincidente con l'asse di rotazione: per ciascuno risulta $d\vec{\mu} = (\rho_q / 2\rho_m) d\vec{L}$. Integrando questa espressione, e tenendo presente che $\rho_q / 2\rho_m$ è costante, si ottiene $\vec{\mu} = (\rho_q / 2\rho_m) \vec{L} = (q / 2m) \vec{L}$.
- d) Per la validità del calcolo precedente è essenziale che il rapporto $\rho_q / 2\rho_m$ sia lo stesso in tutti i punti della sfera. In una sfera conduttrice la carica elettrica si porta in superficie mentre la massa è distribuita nel volume: $\vec{\mu}$ e \vec{L} risultano ancora paralleli, ma il rapporto $\vec{\mu} / \vec{L}$ è maggiore di $q/2m$ perché la distanza media dall'asse di rotazione è maggiore per q .

Commenti: 1) Si noti l'equivalenza, per quanto riguarda gli effetti magnetici, fra una spira percorsa da corrente elettrica e la spira rotante qui considerata; 2) i moti orbitale ed intrinseco (o di spin) degli elettroni nell'atomo generano momenti di dipolo magnetico con $\vec{\mu} / \vec{L}$ uguale a $-e/2m$ e $-e/m$: questa differenza può essere giustificata anche sulla base di modelli non quantistici (si veda il quesito d).

Problema 3

Un fascio di elettroni viene lanciato fra le estremità polari di una calamita che genera un campo magnetico \vec{B} fortemente disuniforme, che nell'intorno dell'origine di un sistema cartesiano ha componenti:

$$B_x = bx; B_y = by; B_z = B_o - 2bz,$$

dove b è una costante.

- Si calcoli il momento $\vec{\tau}$ delle forze magnetiche agenti su un elettrone nell'istante in cui passa per l'origine, supponendo che il suo momento di dipolo magnetico $\vec{\mu}$, di modulo μ_B , formi un angolo θ con l'asse z .
- Si calcoli l'energia potenziale U in funzione di θ e si dica per quali valori di θ risulta minima oppure massima.
- Si calcoli la risultante \vec{R} delle forze magnetiche in corrispondenza dei valori di θ determinati in b).
- Si discutano brevemente gli effetti sul moto dell'elettrone delle forze calcolate in a) e c), considerando separatamente i moti di rotazione e traslazione, e tenendo presente il principio di conservazione dell'energia. Per il moto di traslazione si supponga che il fascio di elettroni sia diretto ortogonalmente a \hat{z} e costituito da elettroni con $\theta = 0$ e $\theta = \pi$.

Soluzione:

- a) Nell'origine, il vettore \vec{B} è uguale a $B_o \hat{z}$. Il momento $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$ è ortogonale al piano individuato da $\vec{\mu}$ e \hat{z} ed ha modulo

$$\tau = \mu_B B_o \sin \theta$$

- b)
$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\mu_B B_o \cos \theta.$$

Il minimo e il massimo di U cadono in $\theta = 0$ e $\theta = \pi$; entrambe le configurazioni sono di equilibrio (infatti $\vec{\tau} = 0$): stabile la prima, instabile l'altra.

- c) La risultante delle forze applicate \vec{R} è diretta lungo \hat{z} ed ha valori opposti per elettroni con $\theta = 0$ e $\theta = \pi$.

$$R_x = \vec{\mu} \cdot \text{grad} B_x = (\pm \mu_B \hat{z}) \cdot b \hat{x} = 0;$$

$$R_y = (\pm \mu_B \hat{z}) \cdot b \hat{y} = 0;$$

$$R_z = (\pm \mu_B \hat{z}) \cdot (-2b \hat{z}) = \mp 2b \mu_B.$$

- d) Il moto di traslazione è determinato dalla risultante \vec{R} delle forze applicate che è diretta lungo \hat{z} e tende ad incurvare la traiettoria. Gli elettroni con $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ subiscono deviazioni in versi opposti: il fascio si suddivide quindi in due fasci con direzioni diverse (il calcolo della deviazione subita dagli elettroni, qui non richiesto, permette di ricavare μ_B). Il moto di rotazione è molto complesso perché gli

elettroni già possiedono momento angolare \vec{L} (si veda il Problema 2) e sono quindi già in rotazione. Per comprendere l'effetto del momento $\vec{\tau}$ conviene considerare prima il caso (ipotetico) $\vec{L} = 0$. Il momento $\vec{\tau}$ induce una rotazione lungo la direzione ortogonale al piano individuato dai vettori $\vec{\mu}$ e \hat{z} ; più precisamente tende a diminuire θ . In $\theta = 0$ il momento $\vec{\tau}$ si annulla ed il dipolo magnetico ha un'energia cinetica di rotazione uguale all'energia potenziale perduta. La conservazione dell'energia richiede che il moto continui: ne nasce un moto oscillatorio che è del tutto simile al moto di un pendolo. Per $\vec{L} \neq 0$ la particella rotante si comporta invece come un giroscopio: i vettori \vec{L} e $\vec{\mu}$ descrivono un cono intorno alla direzione di \vec{B} , con θ costante (moto di precessione).

Commenti: Nel moto di precessione appena descritto la componente di $\vec{\mu}$ lungo \hat{z} rimane invariata e la risultante \vec{R} delle forze applicate ha una componente lungo \hat{z} compresa fra i due valori estremi ricavati in c). La deviazione subita dagli elettroni dipende dalla direzione di $\vec{\mu}$ e più precisamente dall'angolo θ : secondo la meccanica classica un generico fascio di elettroni in campo \vec{B} non uniforme si allarga a ventaglio. L'esperienza dimostra invece che il campo \vec{B} genera due soli fasci; si tratta di un effetto quantistico: le componenti μ_z , L_z di $\vec{\mu}$ e \vec{L} sono quantizzate.

CAPITOLO 6

EQUAZIONI DI MAXWELL E CORRENTE DI SPOSTAMENTO

Equazioni

Le equazioni possono essere scritte facendo comparire gli integrali dei vettori del campo elettromagnetico, oppure le loro derivate. Nel *vuoto* possono essere così scritte.

Forma integrale

$$\oint_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \int_{\Sigma_{\gamma}} \vec{B} \cdot d\vec{S}, \quad (1a)$$

$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \left(i + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_{\Sigma_{\gamma}} \vec{E} \cdot d\vec{S} \right), \quad (1b)$$

$$\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{\Sigma}}{\epsilon_0}, \quad (1c)$$

$$\oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0, \quad (1d)$$

dove Σ_{γ} è una superficie avente come contorno la linea chiusa γ , q_{Σ} è la carica interna alla superficie chiusa Σ .

Forma differenziale

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2a)$$

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right), \quad (2b)$$

$$\text{div} \vec{E} = \rho / \epsilon_0, \quad (2c)$$

$$\text{div} \vec{B} = 0. \quad (2d)$$

La grandezza $\epsilon_0 \partial \Phi_E / \partial t$, dove Φ_E è l'integrale che compare a secondo membro dell'Eq.1b, è la *corrente di spostamento* i_s ; la sua densità è $\vec{j}_s = \epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$.

In presenza di *mezzi materiali*, nelle equazioni *b* e *c* occorre tenere conto delle cariche di polarizzazione e della correnti di magnetizzazione, ponendo:

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \vec{j}_m + \frac{d}{dt} (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \right), \quad (3b)$$

$$\epsilon_0 \text{div} \vec{E} = \rho + \rho_p, \quad (3c)$$

dove $\vec{j}_m = \text{rot} \vec{M}$, $\rho_p = -\text{div} \vec{P}$.

Si è però soliti tenere conto indirettamente di queste cariche e correnti, scrivendo le equazioni di Maxwell nella forma:

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \quad (4a)$$

$$\text{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}, \quad (4b)$$

$$\text{div}\vec{D} = \rho, \quad (4c)$$

$$\text{div}\vec{B} = 0, \quad (4d)$$

dove:

$$\vec{D} = \epsilon_o\vec{E} + \vec{P} = \epsilon_r\epsilon_o\vec{E} \quad (5)$$

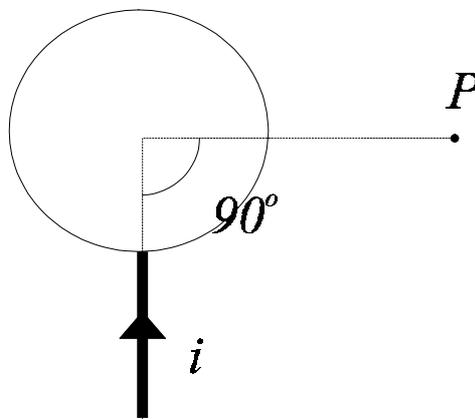
$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_o} - \vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_r\mu_o}. \quad (6)$$

Problema 1

Un conduttore filiforme porta corrente i costante ad una sfera conduttrice. Si calcoli ad un generico istante $t > 0$:

- la carica $q(t)$ sulla sfera, supponendo nulla la sua carica all'istante $t=0$;
- la corrente di spostamento i_s attraverso una generica superficie chiusa Σ posta intorno alla sfera;
- il campo \vec{B} in un punto P posto come è indicato in figura, pensando che per simmetria le linee di flusso di \vec{B} sono circonferenze il cui asse coincide con la retta passante per il conduttore filiforme, e che lungo una di queste circonferenze \vec{B} ha modulo costante.

Suggerimento. Per la domanda c), si applichi la legge di Ampère-Maxwell nella forma (1b), scegliendo come linea d'integrazione γ la linea di flusso passante per P , come Σ_γ una superficie, con contorno γ , tale che sia possibile calcolare il flusso di \vec{E} .



Soluzione

a) $q(t) = \int_0^t i dt = it$.

b) Per la legge di Gauss, il flusso $\Phi_E(t)$ attraverso Σ è uguale a $q(t)/\epsilon_0 \equiv it/\epsilon_0$, quindi:

$$i_s \equiv \epsilon_0 \frac{d\Phi_E(t)}{dt} = \epsilon_0 \frac{d}{dt} \left(\frac{it}{\epsilon_0} \right) = i.$$

c) La carica q si distribuisce uniformemente sulla superficie della sfera conduttrice, e crea un campo \vec{E} con simmetria sferica. È quindi facile calcolare il flusso di \vec{E} attraverso una superficie sferica con centro in O , passante per P , che è tagliata in due parti uguali da γ . Scelta la parte superiore come Σ_γ , e l'orientamento di $d\vec{S}$ verso l'esterno, il flusso di \vec{E} è esattamente la metà del flusso attraverso l'intera sfera e vale quindi $q(t)/2\epsilon_0 = it/2\epsilon_0$. Attraverso Σ_γ non passa corrente di conduzione e l'Eq.(1b) fornisce:

$$\oint_\gamma \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \left(\frac{it}{2\epsilon_0} \right) = \frac{\mu_0 i}{2}$$

Avendo orientato Σ_γ verso l'esterno il verso di $d\vec{\ell}$ è fissato dalla regola della mano destra. Il vettore \vec{B} è parallelo a $d\vec{\ell}$, per simmetria, e deve essere concorde perché l'integrale di $\vec{B} \cdot d\vec{\ell}$ deve essere positivo ($\mu_0 i/2$ è positivo). Rimane da calcolare il modulo di \vec{B} ; poiché $\vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B d\ell$, con \vec{B} costante su γ , l'integrale è uguale a $B \cdot 2\pi r$, quindi:

$$B = \frac{1}{2\pi r} \frac{\mu_0 i}{2} = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

(il campo \vec{B} in P è esattamente la metà del campo creato da un conduttore rettilineo indefinito).

Commenti.

1) Se scegliamo come Σ_γ la parte inferiore della sfera, lasciando invariato il senso di percorso su γ , dobbiamo orientare $d\vec{S}$ verso l'interno. Il flusso di \vec{E} cambia segno, ma al secondo membro dell'Eq.(1b) compare anche la corrente di i del conduttore filiforme, che ora taglia Σ_γ . Il secondo membro dell'Eq.(1b) si scrive quindi:

$$\mu_0 \left(i + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \left(-\frac{it}{2\epsilon_0} \right) \right) = \frac{\mu_0 i}{2},$$

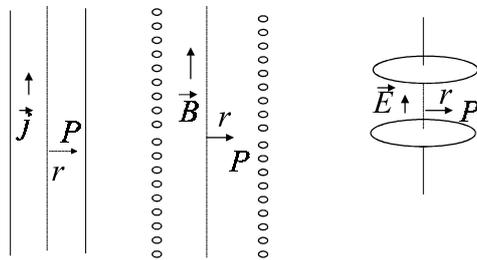
e si ottiene per \vec{B} il valore già trovato.

2) La misura di \vec{B} in un esperimento di questo tipo permette una verifica diretta dell'equazione di Ampère-Maxwell, cioè della necessità di scrivere il termine di corrente di spostamento. Simili misure non sono facili e sono state effettuate solo dopo che l'equazione era stata verificata indirettamente, con gli esperimenti di Hertz sulle onde magnetiche.

Problema 2

Si considerino:

- un conduttore cilindrico percorso da corrente con densità \vec{j} costante,
 - un lungo solenoide, con n spire per unità di lunghezza percorse da corrente i ,
 - un condensatore piano formato da due dischi metallici paralleli, nel vuoto e si calcoli in un generico punto P (vedi figura):
- il campo magnetico creato dal conduttore;
 - il campo elettrico indotto nel solenoide quando i varia nel tempo con legge nota $i(t)$;
 - il campo magnetico creato in P dalla corrente di spostamento, generata nel condensatore da una variazione della densità σ di carica sulle sue armature.



Soluzione:

Per tutti i dispositivi, si considera la linea di flusso passante per P del campo, che per simmetria è in tutti e tre i casi una circonferenza con centro sull'asse di simmetria. Inoltre il campo su questa linea di flusso è costante in modulo. I tre campi si calcolano mediante le tre leggi:

$$\oint_{\gamma} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_{\gamma} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

gli integrali nel primo membro sono uguali al modulo del campo cercato, moltiplicando per la lunghezza $2\pi r$ della circonferenza (γ); quelli nel secondo membro sono uguali al vettore che compare sotto il segno di integrale, moltiplicando per l'area πr^2 . Risulta quindi:

- $H = \frac{r}{2} j$
- $E = -\frac{r}{2} \frac{dB}{dt} = -\frac{r}{2} \mu_0 n \frac{di}{dt}$
- $H = \frac{r}{2} \frac{dD}{dt} = \frac{r}{2} \frac{d\sigma}{dt}$

Commenti. Il problema evidenzia la stretta analogia formale fra leggi che regolano fenomeni fisici diversi.

CAPITOLO VII

ONDE

Equazione delle onde in una dimensione (di d'Alembert):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad (1)$$

dove v è una costante.

Soluzione generale:

$$f(x, t) = f_1(x - vt) + f_2(x + vt). \quad (2)$$

Soluzioni armoniche (onde monocromatiche)

$$f(x, t) = f_o \sin(kx - \omega t), \quad \text{onda progressiva} \quad (3)$$

$$f(x, t) = f_o \sin(kx) \cos(\omega t), \quad \text{onda stazionaria} \quad (4)$$

dove $\omega / k = v$. (5)

Le grandezze ω e k sono legate al periodo T ed alla lunghezza d'onda λ dalle relazioni:

$$\omega = 2\pi / T, \quad k = 2\pi / \lambda. \quad (6,6')$$

Dalle Eq. 5 e 6 si deduce

$$v = \frac{\lambda}{T}. \quad (5')$$

Velocità di fase, mezzi dispersivi, velocità di gruppo

La costante v ha le dimensioni di una velocità (v. Eq. 5') ed è detta velocità di fase; per onde monocromatiche progressive rappresenta la velocità con cui traslano i punti di massimo (*creste*) dell'onda. Se la velocità di fase dipende dalla frequenza $f = \omega / 2\pi$, l'Eq. 5 continua a valere, ma ω non è più proporzionale a k . Si definisce *relazione di dispersione* la funzione $\omega(k)$ e *velocità di gruppo* la sua derivata:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}. \quad (7)$$

Commento. Per comprendere il significato di v_g consideriamo un *treno* (o *pacchetto*) d'onde di lunghezza e durata finite, in cui l'ampiezza dei massimi successivi sta cambiando; il treno d'onde può essere così rappresentato:

$$f(x, t) = a(x, t) \sin(k_o x - \omega_o t), \quad (8)$$

e può essere ottenuto sovrapponendo onde monocromatiche le cui pulsazioni ω stanno in un intorno di ω_o . La funzione $a(x, t)$, per t prefissato, può essere visualizzata come *inviluppo* del profilo dell'onda ed è ben approssimata da una curva che passa per i punti di cresta dell'onda. Se il mezzo è dispersivo, i punti di cresta ed il loro inviluppo traslano con velocità diverse, circa uguali rispettivamente alla velocità di fase $v_o = \omega_o / k_o$ ed alla velocità di gruppo $v_g = (d\omega / dk)$ calcolata per $k = k_o$. Nella trasmissione dei segnali, l'informazione è contenuta nella funzione $a(x, t)$, quindi v_g può essere assunta come la velocità di trasmissione del segnale.

Durante la propagazione il profilo dell'onda si deforma, e può modificarsi anche il suo inviluppo; in questo caso la situazione è più complessa e non sono più sufficienti le velocità v e v_g per descrivere compiutamente la propagazione del pacchetto d'onde. In particolare i punti di inizio e fine del *pacchetto* possono viaggiare con velocità diverse, dando origine ad un suo allargamento o restringimento. È interessante il fatto che nessuna informazione può essere inviata a velocità maggiore di c , mentre non

esistono restrizioni di questo tipo per v ; in mezzi fortemente assorbenti anche v_g può risultare maggiore di c ma non rappresenta più la velocità di traslazione dell'involuppo, a causa della forte attenuazione dell'onda.

Energia dell'onda

Le onde trasportano sia energia che quantità di moto, ed interessa il calcolo del loro flusso attraverso superfici assegnate. L'impostazione del calcolo è la stessa, indipendentemente dalla natura della grandezza che fluisce. È opportuno richiamare i calcoli già fatti per lo studio della corrente elettrica, cioè del flusso di carica elettrica.

Detta ρ la densità della carica in moto e \vec{v} la sua velocità, la densità di corrente è $j = \rho v$ e la corrente attraverso una superficie $d\vec{A}$ è $i = j\hat{v} \cdot d\vec{A}$. Ricordando che $i = dq / dt$, si può scrivere:

$$dq = j \hat{v} \cdot d\vec{A} dt, \quad (9)$$

dove dq è la carica che fluisce attraverso $d\vec{A}$ nel tempo dt .

Per l'energia dell'onda, l'equivalente di j è l'intensità dell'onda I , che è uguale al prodotto uv , dove u è la densità di energia. Per calcolare il flusso di energia attraverso una generica superficie A conviene considerare il *tubo di flusso* di \vec{v} intercettato da A . Le *linee di flusso* di \vec{v} sono detti *raggi*, le superfici normali *fronti d'onda*.

Commenti. 1) La corrente elettrica è generata dal moto di particelle cariche e la funzione $\rho(\vec{r}, t)$ che rappresenta la densità di carica nel punto \vec{r} all'istante t è stata definita considerando il prodotto nq , dove n è il numero di particelle nell'unità di volume e q la loro carica. In altri termini, $\rho(\vec{r}, t)$ è una densità *media*, mediata su volumi grandi su scala microscopica. Per le onde è necessaria una procedura analoga: interessa il valor medio di u , mediato su un'intera lunghezza d'onda o su un *intero periodo*. Ricordiamo che:

- a) l'energia è sempre una funzione quadratica della perturbazione f ;
- b) per onde monocromatiche la perturbazione in un punto assegnato varia nel tempo con legge $f(t) = f_o \sin(\omega t)$, la densità istantanea con legge $u(t) = u_o \sin^2 \omega t$. Il valor medio di $u(t)$ è:

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt = \frac{1}{2} u_o \quad (10)$$

e l'intensità è

$$I = \bar{u} v. \quad (11)$$

2) L'analogia fra j e I è particolarmente evidente in meccanica quantistica. Infatti sia le particelle che le onde hanno sempre un duplice aspetto, *corpuscolare* ed *ondulatorio*: le "particelle" associate ad un'onda di frequenza ν hanno un'energia $h\nu$, dove h è la costante di Planck. Sono dette *fotoni* le "particelle" (o *quanti di energia*) associate all'onda elettromagnetica, *fononi* quelle associate alle onde acustiche ed elastiche. Per definire \bar{u} ed I , si potrebbe seguire la stessa procedura usata per definire $\rho(\vec{r}, t)$, cioè moltiplicare il numero di "particelle" nell'unità di volume per la loro energia $h\nu$.

Onde elettromagnetiche

Velocità di fase:
$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} \quad (12)$$

nel vuoto $v = 1 / \sqrt{\epsilon_o \mu_o} \equiv c$; per materiali non ferromagnetici $v \equiv 1 / \sqrt{\epsilon_r \epsilon_o \mu_o} \equiv c / \sqrt{\epsilon_r}$, perché $\mu \equiv \mu_o$.

Indice di rifrazione:
$$n = \frac{c}{v} \quad (\equiv \sqrt{\epsilon_r}). \quad (13)$$

Vettori \vec{E} e \vec{B} : per onde che si propagano in materiali isotropi, i vettori \vec{v} , \vec{E} e \vec{B} sono mutuamente ortogonali ed i loro moduli sono legati dalla relazione

$$E = v B. \quad (14)$$

Vettore di Poynting:
$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \vec{E} \times \frac{\vec{B}}{\mu}, \quad (15)$$

che può essere anche scritto:

$$\vec{S} = \frac{EB}{\mu} \hat{v} \quad (15')$$

Intensità: è il valor medio del modulo di \vec{S}

$$I = \frac{1}{\mu} \overline{EB} = \frac{1}{\mu v} \overline{E^2}. \quad (16)$$

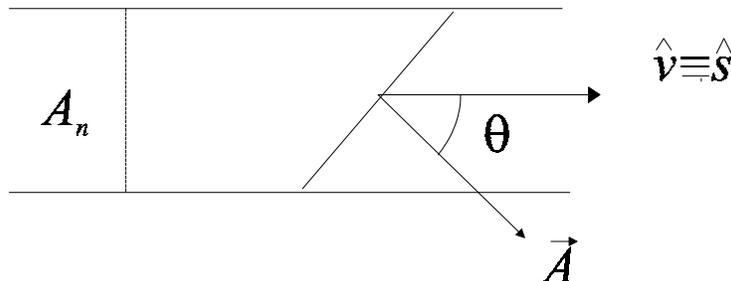
Se $E(t)$ è una funzione armonica, $\overline{E^2} = E_o^2 / 2$, dove E_o è il valore di picco di $E(t)$.

Quantità di moto: ha densità media \bar{u} / v ; un fotone nel vuoto ha quindi quantità di moto $h\nu/c$.

Flusso di energia: con riferimento alla figura, possiamo scrivere

$$dU = I \hat{v} \cdot \vec{A} dt = I A_n dt, \quad (17)$$

dove $A_n = A \cos \theta$ è la sezione normale del tubo di flusso che si ottiene considerando tutti i raggi che attraversano la superficie A .



Potenza che attraversa una generica sezione del tubo di flusso:

$$P = \frac{dU}{dt} = I A_n. \quad (18)$$

Flussi di quantità di moto e forze: dividendo per v l'Eq.17 si ottiene la quantità di moto dU/v che fluisce attraverso \vec{A} nel tempo dt .

Un'onda che incide su un corpo può trasferirgli la sua energia, riscaldando il corpo, e la sua quantità di moto, esercitando una forza \vec{F} sul corpo. Ricordiamo che

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (19)$$

dove $d\vec{p}$ è la quantità di moto *trasferita* al corpo. Se l'onda è completamente assorbita, $d\vec{p}$ coincide con la quantità di moto trasportata dall'onda nel tempo dt :

$$\vec{F} = \frac{I}{v} A_n \hat{v}. \quad (19')$$

Se l'onda è riflessa, $d\vec{p}$ è la differenza $d\vec{p}_i - d\vec{p}_r$, fra le quantità di moto delle onde *incidente* e *riflessa*.

Sorgenti di onde elettromagnetiche

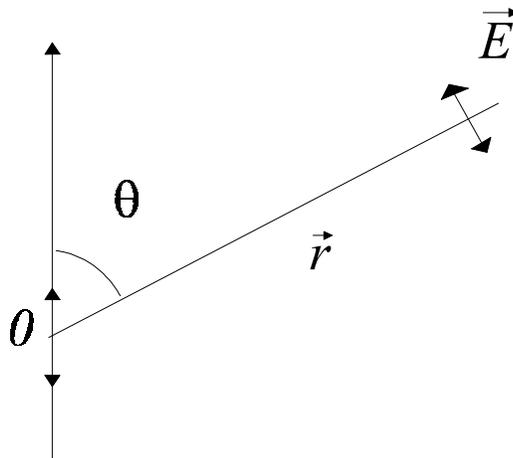
Le onde elettromagnetiche sono generate da cariche elettriche in moto accelerato. Le sorgenti di onde monocromatiche contengono sempre al loro interno particelle cariche che oscillano con moto armonico. Considerando le coordinate cartesiane x_i ($i=1, 2, 3$) della particella, ciascuna componente oscilla con legge

$$x_i = x_{oi} \sin(\omega t + \varphi_i). \quad (20)$$

I campi \vec{E} e \vec{B} dell'onda sono funzioni lineari dell'accelerazione: possiamo quindi considerare separatamente le tre componenti cartesiane del moto (l'onda è la somma delle onde generate da tre particelle che oscillano lungo i tre assi cartesiani).

Una carica q che oscilla su una retta y con ampiezza di oscillazione molto minore della lunghezza d'onda λ , genera un'onda i cui raggi sono le semirette uscenti dal centro O di oscillazione. L'intensità in un punto P , posto a distanza $r \gg \lambda$, è

$$I = b \frac{(qy_o)^2 \omega^4}{r^2} \sin^2 \theta, \quad (21)$$



dove b è una costante, y_o è l'ampiezza di oscillazione. Il campo elettromagnetico così creato è detto di *dipolo elettrico*, perché è identico a quello di un dipolo elettrico oscillante, con momento $p(t)=qy(t)$ e valore massimo qy_o . Si noti che I è nulla nella direzione di oscillazione (cioè per $\theta = 0$ e $\theta = \pi$), massima in direzione ortogonale. Nel vuoto

$$b = \frac{\mu_o}{32\pi^2 c}. \quad (21')$$

Il vettore \vec{E} giace nel piano individuato da P e dalla direzione di oscillazione della carica, e varia nel tempo con legge armonica e con un *ritardo di fase*, dovuto alla velocità finita di propagazione dell'onda.

Polarizzazione

Premessa: un punto materiale con componenti

$$\begin{aligned} x &= a \sin \omega t, \\ y &= b \sin(\omega t + \delta) \quad [= (b \cos \delta) \sin \omega t + (b \sin \delta) \cos \omega t], \end{aligned} \quad (22)$$

descrive una traiettoria ellittica. Eliminando t (basta ricavare $\sin \omega t$ e $\cos \omega t$, ponendo poi $\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1$) si ottiene l'equazione dell'ellisse. L'ellisse collassa in un segmento di retta se $\delta = 0$ e $\delta = \pi$, diventa una circonferenza se $a=b$ e $\delta = \pm\pi/2$.

Da notare il ruolo fondamentale della differenza di fase δ . L'aggiunta di un'eventuale costante di fase in entrambe le funzioni sinusoidali equivale semplicemente ad un cambiamento di origine dell'asse dei tempi.

In un'onda elettromagnetica monocromatica che si propaga nel vuoto in direzione z , il vettore \vec{E} è ortogonale a z ; in un generico punto, la dipendenza da t delle sue componenti x e y è data dalle Eq.(22). Il vettore \vec{E} descrive quindi un'ellisse, che può diventare un segmento di *retta* o una *circonferenza*. In tutti e tre i casi si dice che l'onda è polarizzata, con *polarizzazione* rispettivamente *ellittica*, *rettilinea* (o *lineare*) e *circolare*. Nella polarizzazione lineare il piano individuato da \vec{E} e dal raggio è detto *piano di polarizzazione*.

I fenomeni di polarizzazione sono legati al fatto che il vettore \vec{E} è *trasversale* rispetto ai raggi; nelle onde acustiche le molecole del gas si spostano lungo il raggio (l'onda è cioè *longitudinale*): la direzione dello spostamento è fissata, il concetto stesso di polarizzazione perde significato.

La radiazione emessa da un dipolo elettrico \vec{p} oscillante in una direzione assegnata è polarizzata linearmente, con piani di polarizzazione contenenti \vec{p} . La luce emessa dalle sorgenti convenzionali (non laser) è costituita da treni d'onda di durata limitata (tipicamente dell'ordine di 10^{-8} s), ciascuno dei quali è associato ad un fotone. I singoli treni d'onda possono avere uno stato di polarizzazione definito, ma le loro polarizzazioni sono diverse e casuali: si dice che la luce naturale *non è polarizzata*. Negli esperimenti di polarizzazione con luce naturale, occorre prima ottenere un fascio con polarizzazione definita. È particolarmente semplice ottenere polarizzazione lineare, ed infatti il termine *polarizzatore* è usato come sinonimo di "dispositivo che fornisce in uscita luce polarizzata linearmente". La direzione del vettore \vec{E} è detta direzione *caratteristica*, o *polarizzante* o più semplicemente *asse* del polarizzatore.

I *problemi sulla polarizzazione* riguardano i seguenti dispositivi (reali od ideali) e fenomeni:

1. *Ricevitori* sensibili solo a campi \vec{E} con direzione assegnata, ad es. particelle costrette ad oscillare lungo una retta ed antenne a dipolo elettrico. Occorre considerare la componente del campo \vec{E} dell'onda nella direzione assegnata; l'energia sottratta all'onda è funzione quadratica di questa componente. Una *lamina polarizzante* ideale contiene oscillatori di questo tipo, ed annulla completamente la corrispondente

componente del campo \vec{E} dell'onda, lasciando invariata la componente *ortogonale*, la cui direzione definisce l'asse della lamina.

2. *Riflessione*: il raggio riflesso è *parzialmente polarizzato*, perché le riflettanze $R_{//}$ e R_{\perp} , definite come rapporto fra le intensità delle onde riflessa ed incidente, sono diverse per onde polarizzate parallelamente ed ortogonalmente al piano di incidenza. Se l'angolo di incidenza è tale che i raggi rifratto e riflesso formano un angolo di 90° , $R_{//}=0$: il raggio riflesso è totalmente polarizzato.
3. *Lamine di ritardo* introducono uno *sfasamento* fra l'onda polarizzata in una direzione assegnata, detta *asse* della lamina, e l'onda polarizzata ortogonalmente. Una lamina di materiale anisotropo ed uniassico, con asse nel piano della lamina, agisce come lamina di ritardo perché i raggi ordinario e straordinario hanno al suo interno velocità diverse.

Si noti che in tutti i casi occorre considerare separatamente due componenti del campo \vec{E} , ortogonali tra loro. Si tenga ben presente che l'intensità dell'onda è funzione quadratica di \vec{E} .

Problema 1

Si mostri che con la trasformazione

$$p = x - vt; \quad q = x + vt$$

l'equazione di d'Alembert

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

si trasforma nell'equazione $\partial^2 f / \partial p \partial q = 0$.

Suggerimento. Basta applicare le formule di derivazione delle funzioni composte; ad es.

$$\frac{\partial}{\partial x} f[p(x,t), q(x,t)] = \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x}. \quad (1.1)$$

Soluzione

Ponendo $\partial p / \partial x = \partial q / \partial x = 1$ nell'Eq.(1.1) si ricava immediatamente $\partial f / \partial x$; derivando ulteriormente si ottiene:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial p \partial q} + \frac{\partial^2 f}{\partial q^2}.$$

Le derivazioni rispetto a t sono analoghe, ma ora

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -v; \quad \frac{\partial q}{\partial t} = +v.$$

Quindi:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} v^2 - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial p \partial q} v^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial q^2} v^2.$$

Sostituendo nell'equazione di d'Alembert si ottiene immediatamente $\partial^2 f / \partial p \partial q = 0$.

Commenti. 1) L'equazione trovata ammette ovviamente come soluzione una generica funzione della sola p (perché derivando anche rispetto a q si ottiene zero) o della sola q . Risulta quindi dimostrato che $f(x,t) = f_1(x - vt) + f_2(x + vt)$ è soluzione dell'equazione di d'Alembert. Le funzioni f_1 e f_2 rappresentano onde che si propagano con velocità v lungo x , in versi opposti.

Problema 2

Si calcoli la velocità di fase v e la velocità di gruppo v_g :

- dell'onda elettromagnetica nel vuoto;
- delle onde elettromagnetiche nella ionosfera, sapendo che ω è legato a k dalla relazione

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2 \quad (2.1)$$

dove ω_p , detta frequenza di plasma, è una costante che dipende dalla densità degli elettroni;

- dell'onda associata in meccanica quantistica ad una particella libera (cioè non soggetta a forze) che si muove con velocità $u = 0.01 c$, sapendo che la frequenza f e la lunghezza d'onda λ sono legate all'energia cinetica U_c della particella ed alla sua quantità di moto p dalle relazioni:

$$U_c = hf; \quad p = h / \lambda;$$

Suggerimento. Per calcolare v_g nel quesito b), conviene differenziare l'Eq.(2.1), mostrando che $v \cdot v_g = c^2$. Nel quesito c) conviene ricavare prima la relazione fra U_c e p .

Soluzione

- La velocità di fase è c , la relazione di dispersione $\omega = c k$, la velocità di gruppo

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = c.$$

- $v = \omega / k = \sqrt{c^2 + \omega_p^2 / k^2} > c$.

Differenziando l'Eq.(2.1) si ottiene $2\omega d\omega = 2c^2 k dk$, da cui $\frac{\omega d\omega}{k dk} = c^2$, e:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c^2}{v} = \frac{c}{\sqrt{c^2 + \omega_p^2 / k^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 + \omega_p^2 / (ck)^2}} < c.$$

- Poiché la velocità v è molto minore di c , si possono usare per U_c e p le espressioni non relativistiche:

$$U_c = \frac{1}{2} m u^2 = \frac{p^2}{2m}$$

Sostituendo U_c con $hf \equiv \frac{h}{2\pi} \omega$, p con $h/\lambda \equiv \frac{h}{2\pi} k$, si ottiene la relazione di dispersione:

$$\omega = \frac{1}{2m} \frac{h}{2\pi} k^2,$$

quindi

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{2m} \frac{h}{2\pi} k = \frac{p}{2m} = \frac{u}{2};$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2m} \frac{h}{2\pi} 2k = \frac{1}{m} \frac{h}{2\pi} k = \frac{p}{m} = u.$$

Commenti. a) L'onda elettromagnetica nel vuoto è priva di dispersione, $v_g = v$. In effetti le uniche onde completamente prive di dispersione sono quelle che si propagano nel vuoto, anche se la dispersione è trascurabile in molti altri casi (ad es. per le onde elastiche con lunghezza d'onda molto maggiori delle distanze intermolecolari). b) Si noti che $v > c$, mentre $v_g < c$; questo si verifica per molti altri tipi di onde e conferma il fatto che nei mezzi dispersivi i segnali e le informazioni *non* viaggiano a velocità v . c) Si noti che in meccanica quantistica l'onda associata ad una particella ha velocità di fase diversa dalla velocità della particella (che coincide con v_g , non con v).

Problema 3

Si calcolino la velocità di fase v e la velocità di gruppo delle onde che si propagano sulla superficie dell'acqua degli oceani, sapendo che fra ω e k esiste la relazione

$$\omega^2 = gk + \frac{T}{\rho} k^3,$$

dove $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ è l'accelerazione di gravità, $T = 0.072 \text{ N/m}$ è la tensione superficiale, $\rho = 10^3 \text{ Kg/m}^3$ è la densità. Si consideri solo i due casi limite in cui uno dei due termini a secondo membro è trascurabile; più precisamente si considerino le due lunghezze d'onda $\lambda_1 = 100\lambda_o$ e $\lambda_2 = \lambda_o / 100$, dove λ_o è la lunghezza d'onda che rende uguali i due termini.

Soluzione

I due termini sono uguali per

$$k_o = \sqrt{\frac{\rho g}{T}} = \sqrt{\frac{10^3 \cdot 9.81}{0.072}} \text{ m}^{-1} = 369 \text{ m}^{-1},$$

corrispondente ad una lunghezza d'onda $\lambda_o = \frac{2\pi}{k_o} = 0.017 \text{ m}$.

Per $k \ll k_o$, ovvero per lunghezze d'onda molto maggiori di λ_o , diventa dominante il termine gravitazionale, quindi: $\omega \cong \sqrt{gk}$. Da cui:

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\sqrt{gk}}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}}; \quad v_g = \frac{d\omega}{dk} = \sqrt{g} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}} \quad (= v/2).$$

Per $\lambda_1 = 100\lambda_o$, $v = 1.63 \text{ m/s}$, $v_g = 0.81 \text{ m/s}$.

Per $k \gg k_o$, ovvero per per lunghezze d'onda molto minori di λ_o , diventa dominante il

termine di tensione superficiale, quindi $\omega \cong \sqrt{\frac{T}{\rho}} k^{\frac{3}{2}}$. Da cui

$$v = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{T}{\rho}} k; \quad v_g = \frac{d\omega}{dk} = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \frac{3}{2} k^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{T}{\rho}} k.$$

Per $\lambda_1 = \lambda_o / 100$, $v = 313 \text{ m/s}$, $v_g = 2.07 \text{ m/s}$.

Problema 4

La corda di una chitarra ha massa M , lunghezza L e viene tesa con una forza T . Ricordando che la velocità dell'onda in una corda tesa è $v = \sqrt{T/(ML)}$, si calcolino:

- le frequenze f_n su cui può oscillare;
- la lunghezza d'onda del suono emesso nell'aria dalla chitarra in corrispondenza della frequenza minima f_1 .

[$T = 100 \text{ N}$, $L = 50 \text{ cm}$, $m = 5 \text{ g}$, velocità del suono nell'aria $v_s = 340 \text{ m/s}$]

Soluzione

- Le frequenze su cui la corda può oscillare corrispondono alle possibili onde stazionarie con nodi agli estremi della corda. Supponiamo che all'equilibrio la corda giaccia lungo il tratto $(0,L)$ dell'asse x e che oscilli in direzione y . Imporre che l'onda abbia dei nodi agli estremi equivale ad imporre alla funzione d'onda $y(x, t)$ le condizioni al contorno:

$$y(0, t) = 0; \quad y(L, t) = 0.$$

La prima condizione è automaticamente soddisfatta se consideriamo soluzioni dell'equazione di d'Alembert del tipo:

$$y(x, t) = y_o \sin(kx) \cos(\omega t + \phi);$$

la seconda condizione implica

$$\sin(kL) = 0, \text{ ovvero:}$$

$$k_m L = m\pi \Rightarrow f_m = \frac{\omega_m}{2\pi} = \frac{vk_m}{2\pi} = \frac{v}{2\pi} \frac{m\pi}{L} = mf_1$$

dove $m = 1, 2, 3, \dots$,

$$f_1 = \frac{v}{2L} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{T}{ML}} = 100 \text{ s}^{-1}.$$

b)
$$\lambda_s = \frac{v_s}{f_1} = 3.40 \text{ m} .$$

Problema 5

Con riferimento al Problema 4, si consideri la soluzione

$$y(x,t) = y_o \sin(kx) \sin(\omega t)$$

dove $k = \pi / L$ e si calcoli:

- la velocità $u(x,t)$ con cui oscilla un generico punto della corda, nell'istante t ;
- l'energia cinetica U_c della corda nell'istante t ;
- il massimo valore di $U_c(t)$.

Suggerimento. Non si confonda la velocità $u(x,t)$ dei punti della corda con la velocità v dell'onda. Per rispondere al quesito b), si calcoli l'energia cinetica dU_c del tratto dx di corda, di massa $dm = (M / L)dx$, e la si integri.

Soluzione

a)
$$u(x,t) = \frac{\partial y}{\partial t} = y_o \omega \sin(kx) \cos(\omega t) ;$$

b)
$$dU_c = \frac{1}{2} u^2 dm = \frac{1}{2} (y_o \omega \sin(kx) \cos(\omega t))^2 \frac{M}{L} dx$$

$$U_c = \frac{1}{2} y_o^2 \omega^2 \cos^2(\omega t) \frac{M}{L} \int_0^L \sin^2(kx) dx .$$

L'integrale è uguale a $L/2$: lo si può dimostrare in modi diversi, ad es. ponendo

$$\sin^2(kx) = [1 - \cos(2kx)] / 2 .$$

- c) U_c raggiunge il suo massimo valore $U_{c,max}$ negli istanti in cui $\cos \omega t = \pm 1$ (in questi istanti $y=0$, cioè la corda è indeformata). Si ottiene:

$$U_{c,max} = \frac{M}{4} y_o^2 \omega^2 .$$

Commento. La corda possiede anche energia potenziale elastica, che aumenta quando viene messa in oscillazione (perché la corda si allunga). Questo aumento può essere considerato come energia potenziale U_p dell'onda: l'energia totale $U_t = U_c + U_p$ dell'onda è costante, perché l'energia totale si conserva, ed è uguale a $U_{c,max}$, perché negli istanti in cui U_c è massima la corda è indeformata ed U_p è nulla. Il problema fa capire che per calcolare l'energia totale di un'onda elastica è sufficiente calcolare la sua energia cinetica.

Problema 6

Le onde acustiche in una canna d'organo possono essere assimilate ad onde stazionarie, in cui le molecole dell'aria oscillano lungo la canna.

- a) Si calcolino le prime due frequenze proprie, supponendo che l'estremità aperta corrisponda ad un antinodo, cioè ad un massimo dell'ampiezza di oscillazione;
 b) si ripeta il calcolo supponendo di chiudere l'estremità aperta, trasformando l'antinodo in nodo.

[lunghezza della canna $L = 3 \text{ m}$, velocità dell'onda $v = 300 \text{ m/s}$]

Suggerimento. Si risponda prima al quesito b), che richiede calcoli del tutto analoghi a quelli del Problema 4, quesito a). Per il quesito b) si imponga la corretta condizione al contorno per l'estremo aperto.

Soluzione

b)

$$k_1 L = \pi; \quad k_2 L = 2\pi;$$

$$f_1 = \frac{v}{2L} = 50 \text{ s}^{-1}; \quad f_2 = 2f_1 = 100 \text{ s}^{-1}.$$

a) La presenza di un antinodo in $x=L$ implica $\sin(kL) = \pm 1$, quindi:

$$k_1 L = \frac{\pi}{2}; \quad k_2 L = \frac{3\pi}{2}$$

$$f_1 = \frac{v}{4L} = 25 \text{ s}^{-1}; \quad f_2 = \frac{3v}{4L} = 75 \text{ s}^{-1}.$$

Commenti. 1) Si noti che cambiando le condizioni al contorno cambiano le lunghezze d'onda e le frequenze proprie, che però rimangono *quantizzate*, cioè possono assumere solo valori discreti. Questo si verifica per ogni onda che sia obbligata a rimanere in uno spazio limitato. Questa semplice considerazione è stata di fondamentale importanza per lo sviluppo della meccanica quantistica, suggerendo a de Broglie l'ipotesi che ad ogni particella sia associata un'onda la cui frequenza è proporzionale all'energia della particella. La quantizzazione dell'energia di particella confinate in spazi limitati (ad es. elettroni in un atomo), sperimentalmente ben verificata, riceveva così una spiegazione del tutto naturale. L'onda associata ad una particella è detta *onda di de Broglie*.

2) Quando si eccita un'onda stazionaria nella canna d'organo, si dice che questa entra in *risonanza*; la terminologia usata per gli strumenti musicali è poi stata estesa a tutti i fenomeni oscillatori.

Problema 7

Durante la propagazione dell'onda acustica nell'aria, le molecole contenute nel volume elementare dV oscillano con legge $s(t) = s_o \sin \omega t$, dove s è lo spostamento dalla loro posizione media. Si calcoli:

- a) la massima velocità di spostamento delle molecole;
 b) la densità media di energia dell'onda, sapendo che questa coincide con la massima densità di energia cinetica (si veda il commento al Problema 5);
 c) l'intensità dell'onda, indicando con v la sua velocità di fase;
 d) il massimo spostamento s_o , supposta nota l'intensità dell'onda. Si effettui il calcolo numerico per i due valori I_{min} e I_{max} , che corrispondono alla minima e alla massima intensità ancora percepite come suoni dall'orecchio umano.

[frequenza $f = 1000 \text{ s}^{-1}$; densità dell'aria $\rho = 1.2 \text{ kg} / \text{m}^3$; $v = 340 \text{ m} / \text{s}$;
 $I_{\min} = 10^{-12} \text{ W} / \text{m}^2$; $I_{\max} = 1 \text{ W} / \text{m}^2$]

Soluzione

a) La velocità è

$$\frac{ds(t)}{dt} = s_o \omega \cos \omega t ,$$

il suo valore massimo è $s_o \omega$.

b) La massa dm contenuta nel volume dV è ρdV , la sua massima energia cinetica è

$$\frac{1}{2} dm (s_o \omega)^2 = \frac{1}{2} (\rho dV) (s_o \omega)^2 .$$

La densità media di energia \bar{u} si ottiene dividendo per dV :

$$\bar{u} = \frac{1}{2} \rho s_o^2 \omega^2 .$$

c) $I = \bar{u} v = \frac{1}{2} \rho v s_o^2 \omega^2 .$

d) Lo spostamento massimo è

$$s_o = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{2I}{\rho v}} ;$$

per $I=I_{\min}$,

$$s_o = 10^{-11} \text{ m} ;$$

per $I=I_{\max}$,

$$s_o = 10^{-5} \text{ m} .$$

Commenti. 1) I_{\min} è detta *soglia di udibilità*, I_{\max} *soglia del dolore*; entrambe dipendono dalla frequenza e dalla sensibilità individuale: i valori numerici riportati devono quindi essere considerati indicativi.

2) Si noti che uno spostamento delle molecole dell'aria (e del timpano) dell'ordine di 10^{-11} m , *inferiore alle dimensioni atomiche*, può ancora essere percepito come suono.

Problema 8

L'onda elettromagnetica emessa dal Sole arriva sulla Terra con un'intensità media $I_s = 1380 \text{ W} / \text{m}^2$. Supponendo che metà dell'energia sia assorbita dall'atmosfera, si calcoli:

- la potenza in arrivo su un collettore solare di area A posto ortogonalmente ai raggi solari.
- La potenza P_o di emissione di una sorgente puntiforme che, irradiando uniformemente in tutte le direzioni, genera un'onda che a distanza r ha la stessa intensità della luce solare.

[$A = 5 \text{ m}^2$; $r = 3 \text{ m}$]

Soluzione

a)
$$P = \frac{dU}{dt} = IA = 790 \text{ W/m}^2 \cdot 5\text{m}^2 = 3950 \text{ W}.$$

- b) Per calcolare P_o , basta calcolare l'energia che attraversa nell'unità di tempo la superficie sferica con centro nella sorgente e raggio r . Su questa superficie I è costante, \hat{v} è parallelo a $d\vec{A}$, quindi:

$$P_o = \int I \hat{v} \cdot d\vec{A} = I \int dA = I \cdot 4\pi r^2 = 790 \text{ W/m}^2 \cdot 113\text{m}^2 = 89 \cdot 10^3 \text{ W}.$$

Commento. Si notino gli ordini di grandezza della potenza che si può ottenere sfruttando i raggi solari e la potenza che dovrebbe avere una lampada per illuminare "a giorno" un ambiente.

Problema 9

Alla distanza d_T fra Terra e Sole l'intensità della radiazione elettromagnetica emessa dal Sole ha intensità I_T . Si calcoli:

- l'intensità alla generica distanza d ;
- la forza \vec{F} esercitata su una particella sferica di raggio r , posta a distanza d_T dal Sole, supposta perfettamente assorbente;
- il raggio r_o che deve avere la sfera perché \vec{F} sia uguale in modulo alla forza \vec{F}_G di attrazione gravitazionale, supponendo nota la densità ρ della particella.

[$I_T = 1380 \text{ W/m}^2$; $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$; massa del Sole $M = 1.99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$; costante gravitazionale $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2 / \text{kg}^2$; $d_T = 1.59 \cdot 10^{11} \text{ m}$]

Suggerimento. Per il quesito c) si ponga uguale ad 1 il rapporto F/F_G .

Soluzione

- a) L'intensità è proporzionale ad $1/d^2$ (si veda ad es. il Problema precedente, quesito b); quindi

$$I = \left(\frac{d_T}{d} \right)^2 I_T;$$

- b) In prossimità della particella la sezione normale del tubo di flusso costituito dai raggi solari che intercettano la particella è πr^2 , l'impulso trasferito da questi raggi alla particella nel tempo dt è $dp = (I/c)\pi r^2 dt$, la forza \vec{F} ha modulo

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{I}{c} \pi r^2 = \left(\frac{d_T}{d} \right)^2 I_T \frac{\pi r^2}{c}.$$

- c)
$$F_G = G \frac{Mm}{d^2} = \frac{GM}{d^2} \frac{4\pi}{3} r^3 \rho;$$

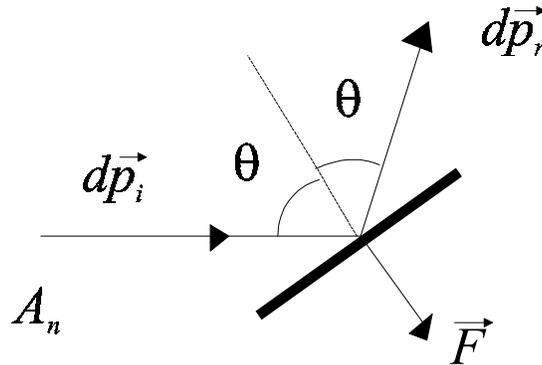
$$\frac{F}{F_G} = \frac{3d_T^2 I_T}{4\rho cGM r_o} \frac{1}{r_o};$$

$$r_o = 65.7 \cdot 10^{-8} m.$$

Commento. La presenza del “vento solare” fa sì che particelle piccole (ad es. le molecole di un gas) siano respinte dal Sole, non attratte. Questo spiega perché la “coda” delle comete tende ad allontanarsi dal Sole. Si noti che r_o non dipende dalla distanza dal Sole

Problema 10

Si calcoli la forza \vec{F} esercitata dai raggi solari su una superficie piana, perfettamente riflettente, di area A , la cui normale forma un angolo θ con i raggi solari, indicando con I l'intensità dell'onda.



Soluzione

Il tubo di flusso costituito dai raggi solari che intercettano la superficie ha sezione normale $A_n = A \cos \theta$. La quantità di moto trasportata da questi raggi nel tempo dt è $dp_i = (I/c) A_n dt$; la quantità di moto trasferita alla superficie nel tempo dt è

$$d\vec{p} = d\vec{p}_i - d\vec{p}_r = (I/c) A_n dt (\hat{i} - \hat{r}),$$

dove \hat{i} ed \hat{r} sono i versori dei raggi incidenti e riflessi; $\hat{i} - \hat{r}$ è ortogonale alla superficie, ed ha modulo $2 \cos \theta$ (per capirlo basta considerare le loro componenti parallela e perpendicolare alla superficie). La forza \vec{F} ha modulo:

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{I}{c} A_n \cdot 2 \cos \theta = 2 \frac{I}{c} A_n \cos \theta.$$

Commento. Si noti che si può cambiare la direzione della forza variando θ , esattamente come per una vela investita dal vento. Il caso qui considerato, di superficie perfettamente riflettente, corrisponde al caso di utri perfettamente elastici delle molecole d'aria sulla superficie della vela. Se si considera l'aspetto corpuscolare dell'onda, si comprende che non esiste una pressione esercitata da un'onda. Il doppio aspetto,

corpuscolare e ondulatorio, dell'onda permette di calcolare la pressione con due metodi formalmente diversi ma equivalenti. Nella trattazione corpuscolare, si assimila l'onda ad un insieme di particelle (fotoni) con velocità c , energia hf , quantità di moto hf/c .

Problema 11

Un'onda elettromagnetica che si propaga in un materiale lievemente conduttore si attenua perché cede parte della sua energia alle cariche di conduzione, mettendole in oscillazione. Si supponga che la velocità di deriva \vec{v}_d delle particelle di conduzione nel mezzo sia ad ogni istante proporzionale alla forza $\vec{F}_E = q\vec{E}$, dove \vec{E} è il campo elettrico dell'onda nello stesso istante, e si ponga $\vec{v}_d = \mu q\vec{E}$. Si calcoli:

- l'energia dU ceduta dall'onda alla carica nel tempo dt , che coincide con il lavoro della forza \vec{F}_E ;
- la forza \vec{F}_B esercitata sulla particella dal campo magnetico dell'onda e la quantità di moto $d\vec{p}_B$ acquistata dalla particella sotto l'effetto di \vec{F}_B nel tempo dt ;
- il rapporto $dU / |d\vec{p}_B|$.

Soluzione

$$a) \quad dU = \vec{F}_E \cdot \vec{v}_d dt = q\vec{E} \cdot (\mu q\vec{E}) dt = \mu (qE)^2 dt.$$

$$b) \quad \vec{F}_B = q \vec{v}_d \times \vec{B} = \mu q^2 \vec{E} \times \vec{B}; \quad d\vec{p}_B = \vec{F}_B dt.$$

Il modulo della quantità di moto è $|d\vec{p}_B| = \mu q^2 EB$; direzione e verso di $d\vec{p}_B$ sono quelli del vettore $\vec{E} \times \vec{B}$: quindi $d\vec{p}_B$ è parallelo e concorde con il vettore di Poynting.

$$c) \quad \frac{dU}{|d\vec{p}|} = \frac{\mu q^2 E^2}{\mu q^2 EB} = \frac{E}{B} = v,$$

dove v è la velocità dell'onda.

Commenti. 1) La particella acquista anche una quantità di moto $d\vec{p}_E$ nella direzione di \vec{E} , che però cambia segno ogni mezzo periodo e ha media nulla

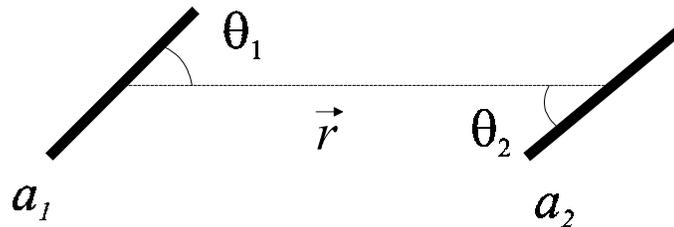
2) Nel caso qui considerato, l'onda è completamente assorbita dal mezzo materiale, a cui cede tutta la sua energia U e tutta la sua quantità di moto p . Si noti che si tratta di un caso limite, scelto per ricavare nel modo più semplice la relazione tra U e p , cioè per mostrare che nell'onda elettromagnetica $p=U/v$. Infatti l'ipotesi che la velocità delle particelle \vec{v}_d sia in ogni istante proporzionale ad \vec{E} non è mai rigorosamente verificata perché implica che la forza d'inerzia sia trascurabile (come se la particella avesse massa nulla), e che la forza di attrito sia sempre uguale ed opposta ad \vec{F}_E . Se si tiene conto della massa delle particelle, e di eventuali forze elastiche, si trova per la particella un moto oscillatorio in cui la velocità *non è in fase* con il campo \vec{E} . Al variare dello sfasamento si può passare da perfetto assorbimento a perfetta trasparenza, e possono intervenire altri fenomeni (riflessione, diffusione) che rendono più complessi i bilanci di energia e quantità di moto.

Problema 12

Due antenne a dipolo elettrico, assimilate a due sottili aste conduttrici identiche, di lunghezza $L \ll \lambda$, sono utilizzate come generatore e ricevitore di onde elettromagnetiche. Si mostri che a parità di condizioni l'energia del segnale in ricezione non cambia se si scambiano i ruoli delle due antenne. Si considerino i casi di:

- antenne complanari (v. figura);
- antenne ortogonali alla loro linea di congiunzione e formanti un angolo θ fra loro.

Suggerimento. Per l'antenna trasmittente, si consideri attentamente l'Eq.(21). Si noterà che tutte le grandezze che vi compaiono rimangono invariate quando si scambiano i ruoli delle antenne, ad eccezione di θ ; per quella ricevente si tenga conto del fatto che è efficace la sola componente di \vec{E} nella direzione dell'antenna e che l'intensità è proporzionale al quadrato dell'ampiezza di questa componente.



Soluzione

- Se l'antenna trasmittente è a_1 , l'intensità dell'onda in corrispondenza di a_2 è proporzionale a $\sin^2 \theta_1$, il campo \vec{E} è ortogonale ad \vec{r} ed oscilla con ampiezza E_o proporzionale a $\sin \theta_1$. La sua componente efficace ha ampiezza $E_o \cdot \sin \theta_2$. L'intensità di ricezione I_R è quindi

$$I_R = a \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2,$$

dove a è una costante che rimane invariata quando si invertono i ruoli delle antenne.

- Il calcolo è del tutto analogo, l'energia assorbita dall'antenna ricevente è in ogni caso proporzionale a $\sin^2 \theta$.

Commenti. 1) Il risultato qui ottenuto è un caso particolare di un teorema molto generale, detto di reciprocità, e può essere considerato come un'estensione al campo di radiazione della relazione già trovata per circuiti accoppiati induttivamente (cioè del fatto che la mutua induttanza M rimane la stessa quando si scambiano i ruoli dei circuiti).

2) Il quesito b) fa capire che due stazioni possono trasmettere sulla stessa banda di frequenze, semplicemente utilizzando antenne rispettivamente verticali ed orizzontali. In ricezione, la commutazione può essere effettuata ruotando di 90° l'antenna ricevente, od utilizzando un dispositivo con due antenne riceventi.

Problema 13

Un fascio di luce attraversa tre lamine polarizzatrici parallele, con assi paralleli, ed esce con intensità I_0 . Si calcoli l'intensità di uscita I dopo che l'asse della lamina intermedia è stato ruotato di un angolo θ nel piano della lamina stessa.

Soluzione

La rotazione provoca una riduzione di un fattore $\cos\theta$ del campo \vec{E} dopo la *seconda* lamina, perché è attiva la sua sola componente parallela all'asse, ed una riduzione dell'intensità di un fattore $\cos^2\theta$, in accordo con la legge di Malus. La terza lamina provoca un'ulteriore riduzione dello stesso fattore $\cos^2\theta$, quindi $I = I_0 \cos^4\theta$.

Commento. Il dispositivo agisce come un *attenuatore di fascio*, che non altera il suo stato di polarizzazione.

Problema 14

Un dispositivo è costituito da $N+1$ lamine polarizzatrici identiche e parallele, con assi ruotati di un angolo θ l'uno rispetto all'altro, in modo che l'ultima lamina ha l'asse ruotato di un angolo $N\theta$ rispetto alla prima. Di quanto si riduce l'intensità di un fascio rispetto alla configurazione con assi paralleli?

[Si ponga $N\theta = \pi/2$ e si considerino i casi con $N=2$ e con $N=10$]

Soluzione

Il calcolo è del tutto analogo a quello del Problema 13: dopo la seconda lamina l'intensità è ridotta di un fattore $\cos^2\theta$. Dopo l'ultima lamina il fattore di riduzione è

$$f = (\cos^2\theta)^N.$$

$$\text{Per } N=2, \quad \theta = \frac{\pi}{4}, \quad f = \frac{1}{4};$$

$$\text{Per } N=10, \quad \theta = \frac{\pi}{20}, \quad f = 0.78.$$

Commento. Per polarizzatori ideali ed N sufficientemente grande il dispositivo ruota il piano di polarizzazione della luce senza praticamente attenuarlo, cioè agisce come un *rotatore*.

Problema 15

Un fascio di luce non polarizzato incide su un atomo, mettendone in oscillazione gli elettroni. La luce diffusa dall'atomo in una direzione che forma un angolo α con il fascio incidente è parzialmente polarizzata. Il piano individuato dai raggi incidente e diffuso è detto piano di diffusione, α è detto angolo di diffusione. Si calcoli il rapporto fra le intensità $I_{//}$ e I_{\perp} in uscita da una lamina polarizzatrice posta sul cammino del raggio diffuso, con asse rispettivamente parallelo e perpendicolare al piano di diffusione.

Suggerimento. Si considerino separatamente le componenti $E_{//}$ e E_{\perp} del campo \vec{E} dell'onda incidente, che hanno la stessa ampiezza ed inducono oscillazioni con la stessa ampiezza. Si calcolino le intensità delle onde diffuse mediante l'Eq.(21), pensando che tutte le grandezze che vi compaiono sono le stesse per $I_{//}$ e I_{\perp} , ad eccezione di θ . Si pensi infine che la lamina polarizzatrice trasmette la sola componente parallela al suo asse, permettendo di misurare separatamente $I_{//}$ e I_{\perp} .

Soluzione

Per polarizzazione parallela l'angolo θ coincide con α , e $I_{//} = a \sin^2 \alpha$, dove a è una costante; per polarizzazione perpendicolare $\theta = \pi/2$, $I_{\perp} = a$. (Può essere utile evidenziare gli angoli θ e α con due figure, riportando le direzioni dei raggi diretto e diffuso e della componenti $E_{//}$ e E_{\perp} del campo \vec{E} lungo i due raggi: questo facile compito è lasciato allo studente). Si ottiene quindi:

$$I_{//} / I_{\perp} = \sin^2 \alpha.$$

Commenti. Per $\alpha = \pi/2$ la componente $I_{//}$ è nulla: la luce diffusa è totalmente polarizzata, con piano di polarizzazione ortogonale al piano di diffusione. In fotografia, si può sfruttare questo fatto per attenuare con un polarizzatore la luminosità dell'atmosfera. Si noti però che la luce diffusa dall'atmosfera non è mai totalmente polarizzata a causa delle diffusioni multiple: in direzione ortogonale ai raggi solari arriva anche la luce che ha subito due o più diffusioni da molecole diverse con angoli di diffusione diversi da $\pi/2$.

Problema 16

Un fascio di luce naturale di intensità I_0 incide su una lamina di vetro con indice di rifrazione n . Si calcoli:

- l'angolo di incidenza θ_B sotto cui il raggio riflesso è totalmente polarizzato (*angolo di Brewster*);
- il rapporto $I_{//} / I_{\perp}$ per il raggio che attraversa la lamina dopo due rifrazioni, nota la riflettanza $R_{\perp} = 0.15$ delle due superfici del vetro (in corrispondenza dell'angolo di Brewster);
- il rapporto $I_{//} / I_{\perp}$ per un raggio che attraversa 8 lamine identiche.

Soluzione

- a) L'angolo di Brewster θ_B soddisfa alla condizione $\theta_B + \theta_t = \pi / 2$, dove θ_t è l'angolo di rifrazione. Dalla legge della rifrazione si ricava

$$n = \frac{\sin \theta_B}{\sin \theta_t} = \frac{\sin \theta_B}{\sin(\pi / 2 - \theta_B)} = \tan \theta_B .$$

- b) Detta I_o l'intensità del raggio incidente, lo si scomponga idealmente in due raggi polarizzati parallelamente e perpendicolarmente al piano di incidenza, ciascuno con intensità $I_o/2$.

Componente parallela: sotto l'angolo di Brewster $R_{//} = 0$, tutta l'energia del raggio è rifratta (o trasmessa), quindi:

$$I_{//} = I_o / 2 .$$

Componente perpendicolare: il raggio riflesso dalla prima superficie ha intensità $R_{\perp} I_o / 2$, quello rifratto ha intensità $(1 - R_{\perp}) I_o / 2$, perchè l'energia si conserva. Dopo la seconda superficie della lamina il raggio rifratto è ulteriormente ridotto di un fattore $1 - R_{\perp}$, e la sua intensità è

$$I_{\perp} = (1 - R_{\perp})^2 I_o / 2 .$$

Si ha quindi:

$$I_{\perp} / I_{//} = (1 - R_{\perp})^2 = 0.7225 .$$

- c) dopo le 8 lamine $I_{\perp} / I_{//} = (1 - R_{\perp})^{16} = 0.074$.

Commento. Nel calcolo si sono trascurate le riflessioni multiple all'interno delle singole lamine e fra lamine consecutive; la correzione è comunque piccola. Con molte lamine si può ottenere luce polarizzata anche in trasmissione, con il vantaggio che il raggio trasmesso è parallelo a quello incidente.

Problema 17

Un fascio di luce si propaga lungo l'asse z di una terna cartesiana, all'interno di un cristallo uniassico con asse ottico parallelo all'asse y . Nel punto $z = 0$ le componenti x e y del campo \vec{E} dell'onda variano nel tempo con leggi

$$E_x = a \sin \omega t , \quad E_y = b \sin \omega t ,$$

dove a e b sono due costanti.

- a) Si dica quanto valgono i vettori d'onda ordinario k_o e straordinario k_e del mezzo, esprimendoli in funzione del vettore d'onda k del vuoto ed egli indici di rifrazione n_o e n_e .
- b) Si dica come variano nel tempo le componenti E_x e E_y del campo \vec{E} nel punto z .
- c) Si calcoli la differenza di fase δ fra le onde ordinaria e straordinaria in $z = d$.

Soluzione

- a) Dalle relazioni $v = \omega / k$ e $v = c / n$, valide in generale, si deduce:

$$k = \frac{\omega}{c}; \quad k_o = \frac{\omega}{v_o} = \frac{\omega}{c/n_o} = n_o k; \quad k_e = n_e k.$$

b)
$$E_x = a \sin(\omega t - k_o z);$$

$$E_y = b \sin(\omega t - k_e z).$$

c)
$$\delta = (\omega t - k_o d) - (\omega t - k_e d) = (k_e - k_o) d = (n_e - n_o) k d.$$

Commenti. Il problema fa capire che una lamina di materiale uniaassico di spessore d agisce come lamina di ritardo ed introduce uno sfasamento $\delta = (n_e - n_o) k d = 2\pi(n_e - n_o)d / \lambda$. Il prodotto nd è detto *cammino ottico*, $(n_e - n_o)d$ è la differenza dei cammini ottici. La lamina è detta *quarto d'onda* se $\delta = \pm\pi/2$, e la differenza dei cammini ottici è detta *mezz'onda* se $\delta = \pi$.

Problema 18

- a) Si consideri una lamina quarto d'onda in cui i raggi ordinario e straordinario sono polarizzati nelle direzioni x e y di un sistema cartesiano. Si dica quale è lo stato di polarizzazione della luce trasmessa se il raggio incidente è polarizzato linearmente lungo la bisettrice degli assi (x,y) che giace nel I e III quadrante.
- b) Si risolva l' analogo problema per una lamina a mezz'onda.
(Si supponga che tutta l'energia dell'onda sia trasmessa, ignorando così le riflessioni alle due superfici della lamina).

Soluzione

All'entrata delle lamine le componenti E_x ed E_y di \vec{E} hanno la stessa ampiezza E_o e sono in fase, all'uscita sono sfasate; con una scelta opportuna dell'origine dei tempi, possiamo porre:

$$E_x = E_o \sin \omega t,$$

$$E_y = E_o \sin(\omega t + \delta),$$

dove δ è lo sfasamento.

a)
$$\delta = \pm\pi/2; \quad E_y = \pm E_o \cos \omega t.$$

La polarizzazione è circolare ed i due segni corrispondono a rotazioni opposte del vettore \vec{E} . Per mostrare che la polarizzazione è circolare basta quadrare e sommare membro a membro le due equazioni. Si ottiene:

$$E_x^2 + E_y^2 = E_o^2$$

Interpretando E_x ed E_y come le coordinate cartesiane del punto che rappresenta il vettore \vec{E} , la relazione mostra che questo punto sta su una circonferenza di raggio E_o . Per individuare il senso di rotazione, si considerino gli istanti $t = 0$ e un istante t immediatamente successivo. Per $t=0$, $E_x=0$; il vettore \vec{E} è diretto lungo y ed i due segni corrispondono a versi opposti.

Per t positivo e molto piccolo, E_y è rimasto invariato (a meno di infinitesimi del secondo ordine rispetto a t), E_x è positivo. Il vettore \vec{E} è ruotato, con rotazione oraria per $E_y = +E_o$, antioraria per $E_y = -E_o$.

b)
$$E_y = E_o \sin(\omega t + \pi) = -E_o \sin \omega t = -E_x.$$

La polarizzazione è ancora lineare ed il vettore \vec{E} è diretto lungo la bisettrice degli assi coordinati che giace nel II e IV quadrante, la cui equazione è $y = -x$. Il piano di polarizzazione è ruotato di 90° .

Commento. La polarizzazione circolare è di grande interesse sia concettuale che applicativo. Qui ci limitiamo ad osservare che un fascio di luce polarizzato circolarmente possiede momento angolare \vec{L} con modulo $L = U / \omega$, la stessa direzione del fascio, e versi opposti in corrispondenza di rotazioni opposte. Un fotone ha energia $h\omega / 2\pi$; il suo momento angolare coincide quindi con la costante universale $\hbar = h / 2\pi$, indipendentemente dalla frequenza dell'onda.

CAPITOLO VIII

INTERFERENZA E DIFFRAZIONE

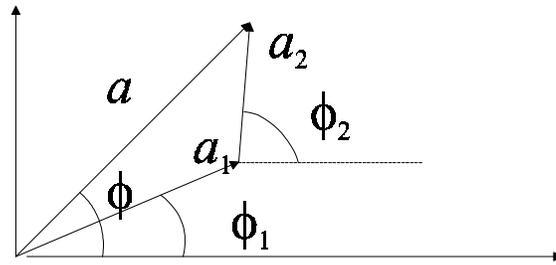
Premessa.

$$1) \quad a_1 \sin(\omega t + \phi_1) + a_2 \sin(\omega t + \phi_2) = a \sin(\omega t + \phi), \quad (1)$$

dove

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos \delta, \quad \delta = \phi_2 - \phi_1. \quad (1')$$

L'equazione può essere ricavata analiticamente (basta utilizzare l'identità $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$, uguagliare separatamente i coefficienti di $\sin \omega t$ e di $\cos \omega t$, quindi eliminare ϕ sfruttando l'identità $\sin^2 \phi + \cos^2 \phi = 1$), oppure geometricamente, rappresentando le funzioni sinusoidali mediante vettori piani (fasori).



$$2) \quad \sum_{n=1}^N a_1 \sin(\omega t + n\delta) = a \sin\left(\omega t + \frac{N\delta}{2}\right), \quad (2)$$

dove

$$a^2 = a_1^2 \frac{\sin^2(N\delta/2)}{\sin^2(\delta/2)}. \quad (2')$$

Interferenza

Si osservano fenomeni di interferenza quando due o più onde arrivano su uno stesso *ricevitore* con una differenza di fase che rimane costante nel tempo, ma che dipende dalla posizione del ricevitore⁽¹⁾. Il ricevitore deve essere sensibile all'intensità dell'onda risultante, cioè fornire un segnale che dipende solo dal quadrato dell'ampiezza. Ad es. un'onda acustica viene percepita dal nostro orecchio come un segnale *continuo* se la sua frequenza è superiore a 20 s^{-1} , ed inferiore a 20000 s^{-1} . In questo intervallo di frequenze l'orecchio è sensibile all'intensità dell'onda. Spostando il ricevitore si percepiscono massimi e minimi di intensità che, nei problemi proposti, possono essere calcolati mediante le Eq.1, 2.

In ottica i fenomeni di interferenza possono essere osservati semplicemente raccogliendo la luce su uno schermo. Ogni punto dello schermo dovrà essere considerato come un ricevitore: si eviti l'errore di sommare onde in arrivo in punti diversi. L'ampiezza a che compare nelle Eq.1, 2 è il campo elettrico, che viene trattato come uno scalare: questo

⁽¹⁾ Il caso in cui la differenza di fase vari nel tempo, con ricevitore fisso, richiede calcoli formalmente identici: anziché di massimi e minimi di interferenza si preferisce però parlare di battimenti.

implica ovviamente che i campi associati alle diverse onde siano (o possano essere considerati in pratica) paralleli fra loro.

Calcolo della differenza di fase

Una differenza di cammino Δd comporta una differenza di tempo Δt ed una differenza di fase $\Delta\phi$, legate dalle relazioni:

$$\frac{\Delta d}{\lambda} = \frac{\Delta t}{T} = \frac{\Delta\phi}{2\pi} \quad (3)$$

dove T è il periodo e λ è la lunghezza d'onda del mezzo. Per la luce si è soliti indicare con λ la lunghezza d'onda nel vuoto: in un mezzo con indice di rifrazione n la lunghezza d'onda è λ/n , e $\Delta d/\lambda$ va sostituito con $n\Delta d/\lambda$; $n\Delta d$ è detto “*differenza di cammino ottico*”. Per valutare la differenza di fase fra due onde in arrivo sul ricevitore, occorre anche tenere conto delle eventuali differenze di fase tra le sorgenti e, per i raggi riflessi, fra raggio incidente e riflesso: nella riflessione vetrosa si ha effettivamente una differenza di fase (uguale a π) se e solo se i raggi incidente e riflesso stanno nel mezzo con indice di rifrazione minore.

Fenomeni di diffrazione di Fraunhofer (raggi, sia incidenti che rifratti, paralleli tra loro)

Fenditura rettangolare, con raggi incidenti ortogonali alla fenditura:

$$I = I_m \left(\frac{\sin \phi / 2}{\phi / 2} \right)^2 \quad (4)$$

dove $\phi = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta$ è la differenza di fase fra i raggi provenienti dai bordi della fenditura, d la sua larghezza, θ l'angolo fra il fascio di raggi paralleli considerati e la normale alla fenditura. Il primo zero di intensità cade sotto l'angolo θ_R (*angolo di risoluzione*) dato dalla relazione

$$d \sin \theta_R = \lambda \quad (5)$$

Fenditura circolare: θ_R è dato dalla relazione:

$$D \sin \theta_R = 1.22\lambda \quad (6)$$

dove D è il diametro della fenditura.

Criterio di Rayleigh, due figure di diffrazione sono “separate” se le direzioni dei raggi formano un angolo superiore a θ_R .

Problema 1

Sul nostro orecchio arrivano due onde acustiche con ampiezza a_o ed a , frequenze f_o e $f = f_o + f_1$, con $f_1 \ll f_o$. Se $f_1 < 20 \text{ s}^{-1}$, l'orecchio percepisce massimi e minimi di intensità (battimenti). Si calcoli l'intervallo di tempo t fra massimi successivi.

$$[f_o = 680 \text{ s}^{-1}; f_1 = 0.5 \text{ s}^{-1}]$$

Suggerimento. Si utilizzino le Eq. 1 ed 1', ricordando che $\omega = 2\pi f$ ed interpretando δ come un differenza di fase *variabile nel tempo*.

Soluzione

Con un'opportuna scelta dell'origine dei tempi il segnale risultante può essere così scritto:

$$a_o \sin \omega_o t + a \sin[\omega_o t + \delta(t)]$$

dove $\omega_o = 2\pi f_o$, $\delta(t) = 2\pi f_1 t$.

L'ampiezza risultante soddisfa all'Eq. 1'; il suo quadrato è quindi:

$$a_o^2 + a^2 + 2a_o a_1 \cos(2\pi f_1 t).$$

L'intensità è proporzionale al quadrato dell'ampiezza ed è quindi massima negli istanti in cui $\cos(2\pi f_1 t) = 1$. Si ha un massimo per $t = 0$; il massimo successivo cade nell'istante t per cui $2\pi f_1 t = 2\pi$. Risulta:

$$t = 1 / f_1 = 2 \text{ s}.$$

Commenti. 1) L'inverso di t è la frequenza di battimento, e coincide con f_1 (differenza di frequenza delle due onde). Se f_1 è maggiore di 20 s^{-1} , l'orecchio non percepisce massimi e minimi di intensità ma un suono continuo, non puro (che può risultare sgradevole: si parla di *dissonanza*).

2) Il fenomeno dei battimenti segnala un'eventuale piccola differenza di frequenza fra un segnale campione ed il suono emesso da uno strumento musicale, e può essere utilizzato per *accordare* lo strumento. Per gli strumenti a corda si può utilizzare sia la prima armonica che una delle armoniche successive.

Problema 2

Due sorgenti sonore identiche ed in fase, di frequenza f , sono poste nei punti $x = 0$ e $x = d$, il ricevitore è posto in $x = D$, con $D > d$. Si dica:

- per quali valori di d si hanno massimi di intensità;
- quale è l'intervallo di tempo fra massimi successivi se la seconda sorgente si muove lungo x con velocità v , sicché risulti $d = vt$.

$$[f = 680 \text{ s}^{-1}, \text{velocità del suono } v_s = 340 \text{ m/s}, v = 1 \text{ m/s}]$$

Soluzione

- Per l'Eq.1', si hanno massimi quando la differenza di fase è un multiplo intero di 2π , e quindi, per l'Eq.3, quando

$$d = m\lambda, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2 \quad (2.1)$$

dove $\lambda = v_s T = v_s / f = 0.5 \text{ m}$.

- b) Si continuano ad avere massimi quando d soddisfa all'Eq.(2.1). Si hanno due massimi successivi per $d = 0$ e $d = \lambda$, corrispondenti agli istanti $t = 0$ e $t = \lambda / v = 0.5 \text{ m} / 1 \text{ m s}^{-1} = 2 \text{ s}$.

Commenti. 1) Si noti l'analogia con il Problema 1: l'onda emessa dalla sorgente in moto arriva sul ricevitore con frequenza diversa da f (effetto Doppler-Fizeau); la frequenza aumenta se sorgente e ricevitore si avvicinano, diminuisce nel caso opposto. La luce proveniente da Galassie lontane è spostata verso il rosso: f diminuisce, le Galassie si allontanano.

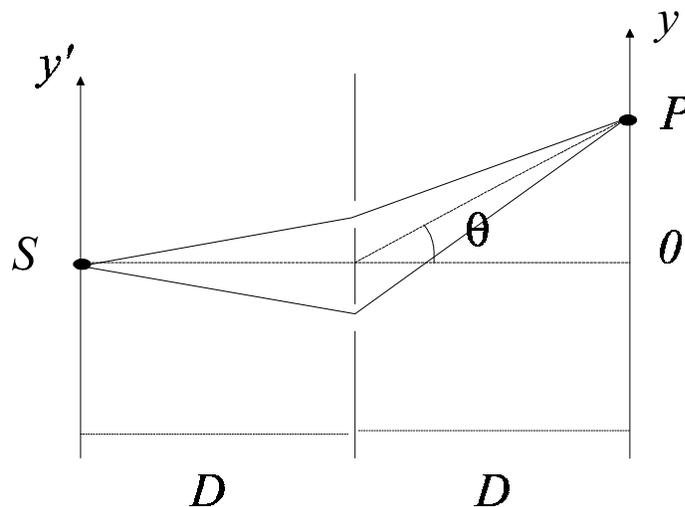
2) Per le onde acustiche la variazione di frequenza non dipende solo dalla velocità relativa della sorgente rispetto al ricevitore, ma dalla velocità di sorgente e ricevitore rispetto al mezzo in cui l'onda si propaga (cioè l'aria). Per le onde elettromagnetiche nel vuoto interviene invece la sola velocità relativa sorgente-ricevitore, in accordo con la teoria della relatività.

Problema 3

Si consideri il dispositivo interferenziale rappresentato in figura, supponendo la sorgente S puntiforme e monocromatica, e la distanza D così grande che i raggi in arrivo nel generico punto P dello schermo possano essere considerati paralleli.

- Si calcolino i valori di y corrispondenti ai massimi di ordine zero ed uno.
- Si consideri una seconda sorgente S' identica, posta sull'asse y' : è possibile che questa sorgente, da sola, generi una figura di interferenza i cui massimi coincidano con quelli calcolati in a)?
- Detta $I(y)$ l'intensità che si ottiene con la prima sorgente, $I'(y)$ quella con la seconda sorgente, quale è l'intensità quando sono presenti entrambe le sorgenti?

[$\lambda = 0.5 \mu\text{m}$; distanza fra le fenditure $d = 20 \mu\text{m}$; $D = 40 \text{ cm}$]



Soluzione

- a) Le fenditure si comportano come sorgenti coerenti ed in fase; la differenza di cammino fra i raggi in arrivo in P è $d \sin \theta$ si ottiene il massimo di ordine zero se

$$d \sin \theta_0 = 0, \quad \theta_0 = 0; \quad y_0 = 0;$$

il massimo di ordine uno se

$$d \sin \theta_1 = \lambda; \quad \theta_1 = \sin^{-1} \left(\frac{\lambda}{d} \right) \cong 0.025 \text{ rad}; \quad y_1 = D \tan \theta_1 \cong 1 \text{ cm}.$$

- b) Le fenditure si comportano come sorgenti coerenti ma sfasate, con differenza di fase

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} (d_2' - d_1'), \text{ dove } d_1' \text{ e } d_2' \text{ sono le distanze di } S' \text{ dalle due fenditure. Se } \delta = 2\pi$$

(o un multiplo intero di 2π), le sorgenti si comportano come se fossero in fase: i massimi di interferenza cadono esattamente nelle stesse posizioni considerati in a. Questo si verifica per $y' = 1 \text{ cm}$ (i calcoli sono identici a quelli già effettuati in a).

- c) L'intensità risultante è la somma delle due intensità.

Commenti. 1) Nel punto di mezzo fra $y' = 0$ ed $y' = 1 \text{ cm}$, cioè per $y' = 0.5 \text{ cm}$, i massimi di S' cadono in corrispondenza dei minimi di S ; se sono presenti entrambe le sorgenti, lo schermo appare uniformemente illuminato.

2) Una sorgente luminosa estesa può sempre essere scomposta idealmente in sorgenti puntiformi: si comprende quindi che con una sorgente estesa lo schermo possa apparire uniformemente illuminato. Nel caso qui considerato, una sorgente reale può essere supposta praticamente puntiforme se le sue dimensioni sono piccole rispetto al valore $y' = 0.5$ considerato nel commento 1.

Problema 4

Su un ricevitore arrivano tre onde di uguale ampiezza a_1 ed intensità I_1 , e sfasamenti tali che la perturbazione risultante può essere così rappresentata:

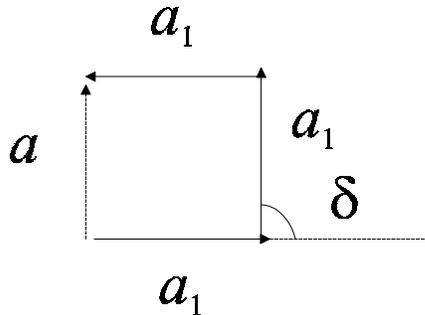
$$y = a_1 [\sin \omega t + \sin(\omega t + \delta) + \sin(\omega t + 2\delta)].$$

Detta I l'intensità risultante, ed utilizzando il metodo dei fasori, si calcoli:

- il minimo valore di δ per cui $I = I_1$;
- il minimo valore di δ per cui $I = 0$;
- I per $\delta = \pi$ e $\delta = 2\pi$;
- si rappresenti infine l'andamento qualitativo di I in funzione di δ .

Soluzione

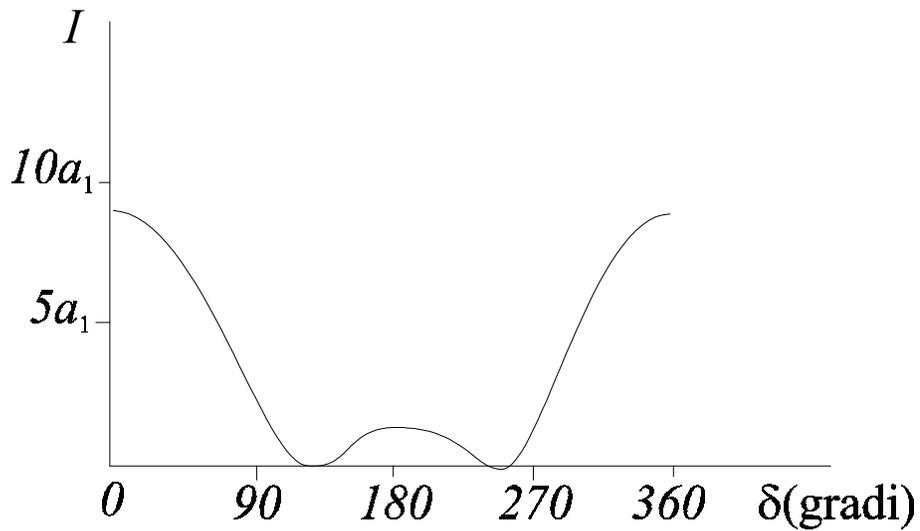
a) Si ottiene $a = a_1$ ed $I = I_1$ per $\delta = \pi / 2$: la poligonale dei fasori è infatti un quadrato.



b) La poligonale dei fasori è un triangolo equilatero, $\delta = 2\pi / 3$.

c) Per $\delta = \pi$ due fasori sono opposti e si elidono a vicenda; a è quindi uguale all'ampiezza a_1 del terzo, $I = I_1$. Per $\delta = 2\pi$ i fasori sono allineati (come per $\delta = 0$): risulta $a = 3a_1$ ed $I = 9I_1$.

d) Il diagramma è periodico, con periodo $\delta = 2\pi$.



CAPITOLO IX

TERMODINAMICA

Definizioni

Capacità termica $C' = \frac{dQ}{dT}$. (1)

Calore specifico $c = \frac{1}{m} \frac{dQ}{dT}$. (2)

Calore termico molare $C = \frac{1}{n} \frac{dQ}{dT}$. (3)

Dove m è la massa, n è il numero di moli.

Temperatura

Scala delle temperature del gas ideale

$$T = 273.16 K \lim_{p_{tr} \rightarrow 0} \frac{p}{p_{tr}} \quad (4)$$

($V = \text{cost}$; p_{tr} è la pressione al punto triplo dell'acqua);
scala Celsius

$$T_C = T - 273.15 K. \quad (5)$$

Primo principio

$$dU = dQ - dL \quad (6)$$

dQ è il calore fornito al sistema e dL è il lavoro fornito dal sistema: la relazione può essere assunta come definizione della funzione di stato U che rappresenta l'energia interna del sistema.

Rendimento di un motore termico

$$\eta = \frac{\text{lavoro effettuato}}{\text{calore assorbito}}; \quad (7)$$

per il ciclo di Carnot reversibile $\eta = 1 - T_1 / T_2$, ($T_2 > T_1$).

Coefficiente di prestazione (o di efficienza) della macchina frigorifera:

$$K = \frac{|Q|}{|L|}; \quad (8)$$

dove Q è il calore estratto alla cella frigorifera.

Entropia S

$$S_f - S_i = \int_i^f \frac{dQ}{T} \quad (9)$$

per trasformazioni reversibili.

Entropia e secondo principio

L'entropia dell'"universo" (sistema + ambiente) rimane invariata se tutte le trasformazioni sono reversibili, aumenta in caso contrario.

Gas ideali

Equazione di stato $pV = nRT$. (10)

R è la costante universale dei gas.

Velocità molecolare quadratica media

$$v_{qm} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \quad (11)$$

dove $k_B \equiv R / N_A$ (costante di Boltzmann), m è la massa della molecola, $M = N_A m$ è la massa molare e N_A è il numero di Avogadro (numero di molecole in una mole).

Energia interna

$$U = n f \frac{1}{2} RT \quad (12)$$

(f è il numero dei gradi di libertà: 3 per i gas monoatomici, 5 o 7 per quelli biatomici).

Capacità termiche molari

A volume costante $C_V = fR / 2$; a pressione costante $C_P = C_V + R$. (13)

Equazione dell'*adiabatica reversibile*:

$$pV^\gamma = \text{costante}; \quad \gamma = C_P / C_V. \quad (14)$$

Problema 1

Si determini:

- l'energia interna di n moli di idrogeno a temperatura T e le sue capacità termiche molari C_V e C_P ;
- l'energia media \bar{E} di una singola molecola e la sua velocità quadratica media (si supponga che la molecola possiede 3 gradi di libertà traslazionali e due rotazionali);
- la velocità quadratica media dell'elio He (massa molare 4 g mole^{-1}) e dell'argon Ar (massa molare 40 g mole^{-1}).

[$T=300 \text{ K}$, $n=1$]

Soluzione

a)
$$U = \frac{5}{2} nRT = 6232 \text{ J};$$

$$C_V = \frac{1}{n} \frac{dU}{dT} = \frac{5}{2} R = 20.77 \text{ J / K};$$

$$C_P = C_V + R = 29.08 \text{ J / K}.$$

b)
$$\bar{E} = \frac{5}{2} k_B T = U / N_A = 1.035 \cdot 10^{-20} \text{ J};$$

per il calcolo della velocità media, occorre considerare la sola energia traslazionale, ponendo $\frac{1}{2} m \bar{v}^2 = \frac{3}{2} k_B T$, dove m è la massa di una singola molecola. La massa molare dell'idrogeno è $m = 2 \text{ g mole}^{-1}$, si ottiene:

$$v_{qm} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} =$$

$$= \sqrt{\frac{3 \cdot 8.31 \text{ J mole}^{-1} \text{ K}^{-1} \cdot 300 \text{ K}}{0.002 \text{ kg mole}^{-1}}} = 1934 \text{ m / s}.$$

c) I calcoli sono del tutto analoghi e si trova

$$v_{qm} = 1367 \text{ m / s per He};$$

$$v_{qm} = 432 \text{ m / s per Ar}.$$

Commento. Il calcolo effettuato in b) giustifica il fatto che l'idrogeno, che è l'elemento più abbondante nell'universo, sia praticamente assente nell'atmosfera terrestre: la sua velocità quadratica media è maggiore delle velocità quadratiche medie di tutte le altre molecole, ed è quindi quella che più si avvicina alla velocità di fuga dei corpi dal nostro pianeta (che è di 11.2 km/s). Le molecole di idrogeno presenti negli strati superiori dell'atmosfera che raggiungono la velocità di fuga possono sfuggire all'attrazione terrestre. Le stesse considerazioni valgono per i gas rari: nell'universo l'elio è il più abbondante, nell'atmosfera è praticamente assente; al contrario, l'argon è relativamente abbondante (~1%).

Problema 2

Si calcoli l'aumento di temperatura dell'acqua di uno stagno di profondità h in una giornata di Sole di durata t , indicando con \bar{S} il valor medio del vettore di Poynting, con $\bar{\theta}$ il valore medio efficace dell'inclinazione dei raggi solari rispetto alla verticale durante la giornata, e supponendo che solo una frazione η dell'energia incidente sulla superficie dello stagno sia assorbita dall'acqua.

$$[h = 1 \text{ m}; \bar{S} = 800 \text{ W / m}^2 \text{ s}; \bar{\theta} = 60^\circ; t = 10 \text{ ore}; \eta = 0.1]$$

Soluzione

Detta A l'area dello stagno, l'energia incidente è $W = \bar{S} \cdot \cos \bar{\theta} \cdot A \cdot t$, la capacità termica dell'acqua è $C' = cm \equiv c\rho V = c\rho Ah$. L'aumento di temperatura è

$$\Delta T = \frac{W \cdot \eta}{C'} = \frac{\bar{S} \cdot \cos \bar{\theta} \cdot A \cdot t \cdot \eta}{c \cdot \rho \cdot A \cdot h}.$$

Ricordando che $c = 1 \text{ cal} / \text{g K} = 4186 \text{ J} / \text{kg K}$, $\rho = 10^3 \text{ kg} / \text{m}^3$, si ottiene:

$$\Delta T = \frac{800 \text{ J m}^{-2} \text{ s}^{-1} \cdot 0.5 \cdot 3.6 \cdot 10^4 \text{ s} \cdot 0.1}{4186 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1} \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3} \cdot 1 \text{ m}} = 0.34 \text{ K}.$$

Problema 3

In un recipiente adiabatico con volume V è contenuto azoto con densità ρ . Detti M la massa molare ed f il numero di gradi di libertà di ogni molecola, si calcoli il tempo t richiesto per aumentare la temperatura di ΔT con una stufa elettrica di potenza P .

$$[V = 60 \text{ m}^3; \rho = 1.3 \text{ kg} / \text{m}^3; M = 28 \text{ g} / \text{mole}; f = 5; \Delta T = 15 \text{ K}; P = 2 \text{ kW}]$$

Soluzione

Vale la relazione $Pt = C' \Delta T$, dove Pt è l'energia fornita alla stufa, $C' = nC_V$ la capacità termica del gas, $n = \rho V / M = \text{massa} / \text{massa molare}$ è il numero di moli, $C_V = 5R/2$ è la capacità termica molare a volume costante. Risulta:

$$\begin{aligned} t &= \frac{nC_V \Delta T}{P} = \frac{\rho \cdot V \cdot 5 \cdot R \cdot \Delta T}{M \cdot 2 \cdot P} = \\ &= \frac{1.3 \text{ kg m}^{-3} \cdot 60 \text{ m}^3 \cdot 5 \cdot 8.31 \text{ J mole}^{-1} \text{ K}^{-1} \cdot 15 \text{ K}}{28 \text{ g mole}^{-1} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 10^3 \text{ W}} = \\ &= 434 \text{ s} = 7.3 \text{ min} \end{aligned}$$

Commento. Il calcolo fornisce l'ordine di grandezza del tempo che impiega una stufa elettrica a riscaldare l'aria di una stanza. Si noti però che si continua ad avere sensazione di freddo fino a che non si riscaldano anche le pareti e gli oggetti contenuti nella stanza, perché alla sensazione di caldo o freddo contribuisce in modo determinante l'energia elettromagnetica emessa dagli oggetti solidi contenuti nell'ambiente (che aumenta approssimativamente con legge T^4 , dove T è la temperatura assoluta). Questo fatto spiega anche la sensazione di freddo che si prova in prossimità di larghe vetrate.

Problema 4

Una mole di un gas ideale biatomico ($\gamma = C_p / C_V = 1.4$) si espande adiabaticamente e reversibilmente fino a dimezzare la pressione. Si calcoli:

- la temperatura finale T_f , nota quella iniziale T_i ;
- le energie interne iniziale e finale, supponendo che le molecole possiedano 5 gradi di libertà;

c) il lavoro L effettuato dal gas sull'esterno, supponendo nota la sua pressione iniziale p_i .

$$[T_i = 280 \text{ K}; p_i = 10^5 \text{ Pa}]$$

Soluzione

a) Utilizzando l'equazione di stato $pV = nRT$ per eliminare V dall'equazione $pV^\gamma = \text{cost}$ dell'adiabatica reversibile si ottiene $Tp^{(1-\gamma)/\gamma} = \text{cost.}$, da cui

$$T_f = T_i \cdot \left(\frac{p_i}{p_f} \right)^{(1-\gamma)/\gamma} = 280 \text{ K} \cdot 0.82 = 230 \text{ K} .$$

b) Dalla relazione $U = 5nRT / 2$ si ottiene:

$$U_i = 5.82 \text{ kJ}; U_f = 4.78 \text{ kJ} .$$

c) Il lavoro può essere calcolato direttamente, utilizzando le equazioni

$$L = - \int_{V_i}^{V_f} p dV; \quad pV^\gamma = p_i V_i^\gamma .$$

Si ottiene

$$\begin{aligned} L &= - p_i V_i^\gamma \int_{V_i}^{V_f} V^{-\gamma} dV = - \frac{1}{1-\gamma} p_i V_i^\gamma [V^{1-\gamma}]_{V_i}^{V_f} = \\ &= \frac{1}{\gamma-1} p_i V_i^\gamma [V_f^{1-\gamma} - V_i^{1-\gamma}] = \frac{1}{\gamma-1} (p_f V_f - p_i V_i) . \end{aligned}$$

L'equazione di stato fornisce $V_i = RT_i / p_i = 0.0233 \text{ m}^3$; $V_f = RT_f / p_f = 0.0382 \text{ m}^3$; quindi $\Delta E_{\text{int}} = -1.04 \text{ kJ}$. È però più semplice utilizzare il primo principio della termodinamica $\Delta E_{\text{int}} = Q + L$ (L compare col segno + perché è il lavoro effettuato dal gas sull'esterno). La trasformazione è adiabatica, quindi:

$$L = U_f - U_i = -1.04 \text{ kJ} .$$

Commenti. 1) Nelle correnti ascensionali dell'atmosfera la trasformazione di una generica massa d'aria può essere considerata in prima approssimazione adiabatica e reversibile: l'aria si raffredda. Alla quota di 7 km la pressione è circa dimezzata e la temperatura media è di circa 40 K inferiore alla temperatura media al livello del mare. Nel calcolo qui effettuato la diminuzione è di 50 K: si pensi però che in condizioni di equilibrio termico la temperatura sarebbe uniforme, e che sono sempre presenti molti meccanismi che tendono a portare un sistema all'equilibrio termico.
2) Le espansioni adiabatiche vengono utilizzate in criogenia per raffreddare i corpi.

Problema 5

Una massa m di acqua a temperatura $T_1 = T_o - \Delta T$ viene versata in una uguale massa d'acqua a temperatura $T_2 = T_o + \Delta T$. Si calcoli la variazione di entropia del sistema supponendo che il calore specifico c dell'acqua sia indipendente da T .

Soluzione

La temperatura finale è T_o , la variazione di entropia è la somma delle variazioni che si ottengono portando reversibilmente una massa m di acqua da T_1 a T_o ed un'uguale massa da T_2 a T_o . Ricordando che $dQ = mcdT$, si ha:

$$\begin{aligned} S_f - S_i &= \int_{T_1}^{T_o} \frac{dQ}{T} + \int_{T_2}^{T_o} \frac{dQ}{T} = mc \left(\ln \frac{T_o}{T_1} + \ln \frac{T_o}{T_2} \right) = \\ &= mc \ln \frac{T_o^2}{T_1 T_2} = mc \ln \left[\frac{T_o^2}{T_o^2 - (\Delta T)^2} \right] > 0. \end{aligned}$$

Commenti. 1) La trasformazione è adiabatica ed irreversibile, $S_f > S_i$: l'aumento di entropia che si ottiene rappresenta l' "entropia di mescolamento".

2) I problemi in cui è richiesto il calcolo della variazione di entropia nel passaggio di calore da un corpo caldo ad uno freddo si risolvono in modo analogo: si calcola prima la temperatura finale, quindi la variazione di entropia di ciascun corpo.

Problema 6

Un recipiente è diviso da una parete mobile in due parti uguali, ciascuna con volume V .

- Si calcoli la variazione di entropia di una mole di un gas ideale, inizialmente contenuto in una delle due parti, quando si solleva la parte mobile (si supponga che il processo sia adiabatico);
- si effettui l'analogo calcolo, supponendo che inizialmente ciascuna delle due parti del recipiente contenga una mole di gas, e che i gas siano diversi.

Soluzione

- Gli stati iniziale e finale del gas hanno la stessa energia interna, per il primo principio della termodinamica, ed hanno quindi la stessa temperatura. Possiamo quindi calcolare la variazione di entropia considerando la trasformazione isoterma che collega i due stati, ponendo $dQ = dL$ (in quanto $dU = 0$); e

$$\begin{aligned} dS &= \frac{dQ}{T} = \frac{dL}{T} = \frac{1}{T} p dV = \frac{1}{T} \frac{RT}{V} dV = R \frac{dV}{V}; \\ S_f - S_i &= \int_V^{2V} R \frac{dV}{V} = R \ln 2 = 1.39 R = 11.5 J / K \end{aligned}$$

- La variazione di entropia del primo gas è identica a quella calcolata in a), cioè non dipende dalla presenza o meno di un altro gas nel secondo recipiente. La variazione di entropia del secondo gas è identica, quindi $\Delta S = 2R \ln 2$.

Commento. Il calcolo effettuato in b) fornisce il caso tipico di "entropia di mescolamento". Si noti che se i due gas fossero identici non si avrebbe nessuna variazione di entropia: infatti lo spostamento delle molecole di uno *stesso* gas da un recipiente all'altro (con pressioni e temperature identiche) è un processo reversibile, mentre la diffusione di un gas in un *altro* gas è un processo irreversibile.

Problema 7

Sottraendo con una pompa a vuoto i gas di vaporizzazione dell'elio liquido, se ne abbassa la temperatura. Detta m_i la massa iniziale dell'elio a temperatura T_i , si calcoli la massa finale m_f di liquido quando la sua temperatura ha raggiunto il valore T_f . Si indichi con K il valore di vaporizzazione, con c la capacità termica in fase liquida e si supponga che il processo sia adiabatico.

$$[K = 23 \text{ Jg}^{-1}; c = 4 \text{ Jg}^{-1} \text{ K}^{-1}; m_i = 1 \text{ kg}; T_i = 4.5 \text{ K}; T_f = 3.5 \text{ K}]$$

Soluzione

Il calore $dQ = K dm$ ceduto dal liquido durante la vaporizzazione di una massa dm è uguale al calore $dQ = cm dT$ necessario per variare di dT la temperatura della massa m di elio ancora presente in fase liquida (si noti che dQ , dm , dT sono tutti negativi). Dall'eguaglianza $K dm = cm dT$ si deduce

$$\frac{dm}{m} = \frac{c}{K} dT$$

che integrata fra gli stati iniziale e finale fornisce

$$m_f = m_i \exp\left[cK^{-1}(T_f - T_i)\right] = 1 \text{ kg} \exp(-0.174) = 0.84 \text{ kg} .$$

Commento. Per raggiungere temperature molto basse si utilizzano di solito processi adiabatici che comportano un abbassamento di temperatura: espansione adiabatica di un gas, vaporizzazione adiabatica di un liquido, smagnetizzazione adiabatica di una sostanza paramagnetica, ..

Il problema fa riferimento ad una delle trasformazioni più utilizzate intorno ad una temperatura di 4 K (se si vuole calcolare correttamente ΔT su un intervallo più ampio di temperature occorre tenere conto del fatto che c e K dipendono dalla temperatura). A temperature inferiori al grado Kelvin è molto utilizzata la smagnetizzazione adiabatica.

Problema 8

Si calcoli l'entropia S_f di n moli di un solido monoatomico a temperatura T_f supponendo note le corrispondenti grandezze S_i e T_i , e supponendo che la sua capacità termica molare C sia:

- costante ed uguale a $3R$;
- uguale ad aT^3 , dove a è una costante.

Soluzione

a)
$$S_f - S_i = \int_i^f \frac{dQ}{T} = \int_{T_i}^{T_f} \frac{nC dT}{T} = n 3R \ln(T_f / T_i).$$

b)
$$S_f - S_i = na \int_{T_i}^{T_f} T^2 dT = \frac{na}{3} (T_f^3 - T_i^3).$$

Commenti. 1) Il calore molare dei solidi è pressoché costante a temperature sufficientemente elevate e tende a zero per T che tende a zero. Si noti che l'espressione trovata in b) permette di porre $S_i = 0$ per $T_i = 0$, e fornisce

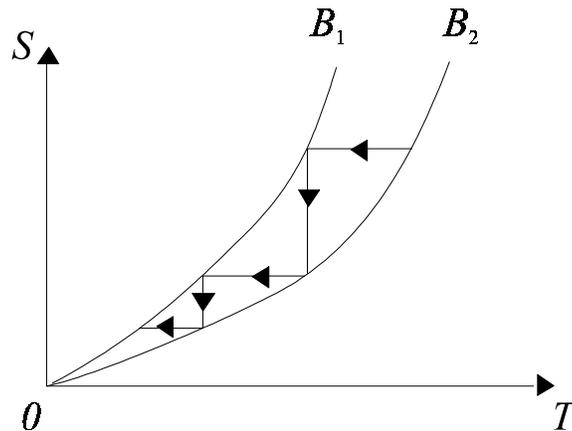
$$S(T) = \frac{na}{3} T^3,$$

mentre il calcolo a) perde significato quando si pone $T_i = 0$.

2) Il risultato b) è in accordo con il terzo principio della termodinamica, che può essere così formulato:

la variazione di entropia di un corpo per una trasformazione reversibile tende a zero per T che tende a zero.

Una delle conseguenze più importanti del terzo principio è la seguente: *nessun sistema può essere portato allo zero assoluto con un numero finito di operazioni* (questa affermazione può essere assunta come formulazione alternativa del principio stesso). Per comprendere la relazione fra i due enunciati si considerino gli andamenti di S in una sostanza paramagnetica per due diversi valori del campo B , e si pensi che per abbassare la temperatura si operano le trasformazioni rappresentate in figura (si veda il commento al Problema precedente).



Problema 9

In n moli di un gas ideale monoatomico lievemente conduttore si manda corrente per un tempo t mediante due elettrodi collegati ad un generatore di f.e.m. \mathcal{E} . Detta T_i la temperatura iniziale, si calcolino le variazioni di temperatura, energia interna ed entropia in un processo adiabatico, supponendo costante:

- il volume V del gas;
- la pressione p del gas.

Soluzione

Il lavoro L_e fornito sotto forma di energia elettrica ha in entrambi i casi modulo

$$L_e = \mathcal{E} I t .$$

a) La variazione di energia interna è $\Delta U = \mathcal{E} I t$; la variazione di temperatura è

$$\Delta T = \frac{\Delta U}{nC_V} = \frac{\mathcal{E} I t}{n \cdot 3R / 2} ,$$

perchè i gas ideali monoatomici hanno un energia interna $U = nC_V T$.

Per il calcolo di ΔS occorre considerare una trasformazione reversibile fra gli stessi stati estremi. Si ottiene

$$\Delta S = \int_i^f \frac{dQ}{T} = \int_{T_i}^{T_f} \frac{nC_V dT}{T} = nC_V \ln \frac{T_f}{T_i} .$$

b) Il lavoro complessivo fornito al gas nel tempo dt è:

$$dL = \mathcal{E} I dt - p dV$$

e coincide con la variazione di energia interna $dU = nC_V dT$. Differenziando l'equazione di stato $pV=nRT$, con p costante, si ottiene $p dV = nR dT$; uguagliando dU a dL si ottiene poi:

$$nC_V dT = \mathcal{E} I dt - nR dT ,$$

$$n(C_V + R) dT = \mathcal{E} I dt .$$

Ricordando che $C_V + R = C_p$, ed integrando, si ottiene

$$\Delta T = \frac{\mathcal{E} I t}{nC_p} .$$

(Si arriva più brevemente allo stesso risultato pensando che agli effetti pratici è come se si fornisce al gas una quantità di calore $Q = \mathcal{E} I t$ e ricordando la definizione di C_p).

$$\Delta U = nC_V \Delta T = \frac{C_V}{C_p} \mathcal{E} I t = \frac{3}{5} \mathcal{E} I t ,$$

$$\Delta S = \int_i^f \frac{dQ}{T} = \int_{T_i}^{T_f} \frac{nC_p dT}{T} = nC_p \ln \frac{T_f}{T_i} .$$

Commenti: L'energia fornita al gas per effetto Joule gioca in questo problema lo stesso ruolo di un calore fornito, ma deve essere considerata come un lavoro : il calore è infatti per definizione lo scambio di energia derivante da una differenza di temperature.

Problema 10

Un motore termico lavora in ciclo di Carnot, scambiando calore con l'ambiente esterno, a temperatura T_1 , e con un termostato con capacità termica C e temperatura iniziale $T_2 > T_1$. Calcolare il lavoro totale L che si può ottenere, supponendo che tutte le trasformazioni siano reversibili e che l'abbassamento di temperatura del termostato durante un singolo ciclo sia trascurabile agli effetti del calcolo del rendimento del ciclo.

$$[T_2 = 2T_1 = 600 \text{ K} , C = 10^8 \text{ J / K}]$$

Soluzione

Durante il funzionamento del motore la temperatura T del termostato si abbassa: non si ottiene più lavoro quando T ha raggiunto la temperatura ambiente T_1 . Le ipotesi del problema consentono di considerare come quantità infinitesime sia la variazione dT di temperatura durante un singolo ciclo che il calore $dQ = C|dT|$ ceduto dal termostato, e di supporre che il rendimento dL/dQ del ciclo sia uguale a $(1 - T_1 / T)$. Si ha quindi:

$$dL = \left(1 - \frac{T_1}{T}\right)dQ = \left(1 - \frac{T_1}{T}\right)C|dT| = \left(1 - \frac{T_1}{T}\right)C(-dT)$$

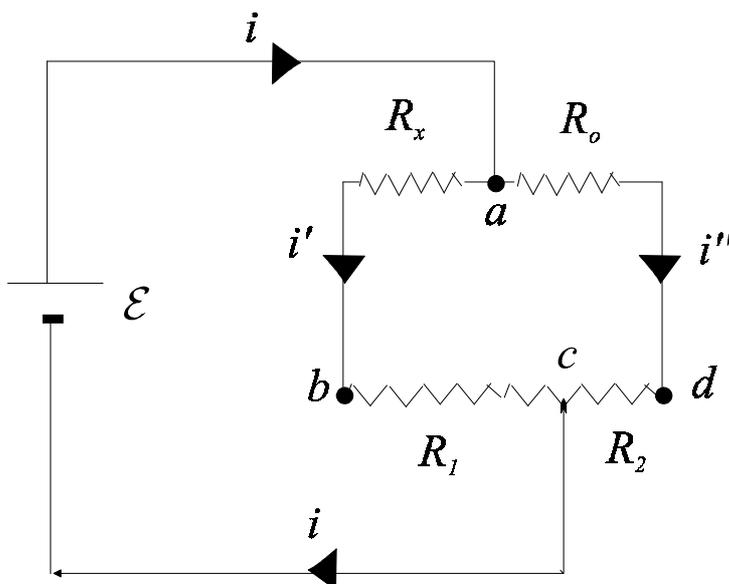
($dT = -|dT|$ perché la temperatura del termostato si sta abbassando). Il lavoro totale si ottiene integrando quest'espressione fra le temperature iniziale e finale del termostato:

$$L = \int_{T_2}^{T_1} \left(\frac{T_1}{T} - 1\right)C dT = C \left[T_1 \ln \frac{T_1}{T_2} - (T_1 - T_2) \right] = 10^8 (300 \ln \frac{1}{2} + 300) J = 92 \cdot 10^8 J .$$

ESPERIENZE DI LABORATORIO

1) Confronto di resistenze con il metodo del ponte di Wheatstone.

Le resistenze R_x e R_o da confrontare sono inserite nel circuito rappresentato in figura,



dove c è un cursore mobile. R_1 e R_2 sono le resistenze dei tratti bc e cd di un unico conduttore filiforme omogeneo e di sezione costante, sicché il rapporto R_1/R_2 è uguale al rapporto ℓ_1/ℓ_2 tra le loro lunghezze. Spostando il cursore si può fare sì che risulti:

$$\frac{R_x}{R_o} = \frac{R_1}{R_2} \left(= \frac{\ell_1}{\ell_2} \right). \quad (1)$$

Condizione necessaria e sufficiente affinché si realizzi questa uguaglianza è che i punti b e d siano allo stesso potenziale. La condizione $V_b = V_d$ equivale infatti alle due condizioni $V_{ab} = V_{ad}$ e $V_{bc} = V_{dc}$. Queste equivalgono a loro volta a

$$\begin{aligned} R_x i' &= R_o i'', \\ R_1 i' &= R_2 i'', \end{aligned} \quad (2)$$

e quindi alla (1).

Per verificare la condizione $V_a = V_b$ basta controllare che in un amperometro molto sensibile (ovvero un galvanometro balistico od un milliamperometro) inserito fra a e b non passi corrente. L'amperometro è usato come strumento di zero ed ha la stessa funzione di un voltmetro molto sensibile.

$R(t)$

Supposto noto R_o e misurate le lunghezze ℓ_1 e ℓ_2 , l'equazione (1) fornisce per la resistenza incognita R_x :

$$R_x = R_o \frac{\ell_1}{\ell_2}. \quad (3)$$

Calcolo dell'errore.

In ogni misura, in particolare nelle misure indirette, la stima dell'errore è sempre molto delicata. Ci limitiamo qui a calcolare l'errore ΔR_x causato dagli errori di misura di ℓ_1 e ℓ_2 , trascurando tutte le altre cause di errore (deviazione di R_o dal valore nominale; effetto della possibile differenza di temperatura fra le resistenze R_1 e R_2 , causata dal diverso valore delle correnti i' e i'' ; effetto della resistenza dei fili di collegamento, che è tanto maggiore quanto minore è R_x ; ...).

Gli errori $\Delta \ell_1$ e $\Delta \ell_2$ sono evidentemente uguali perché derivano da un'unica misura, che consiste nel valutare la posizione del cursore c che annulla la corrente nell'amperometro. Valutato $\Delta \ell_1 = \Delta \ell_2 = \Delta \ell$, si ha:

$$\frac{\Delta R_x}{R_x} = \frac{\Delta \ell}{\ell_1} + \frac{\Delta \ell}{\ell_2} \quad (4)$$

È evidente che l'errore della misura è grande se una delle due lunghezze ℓ_1 e ℓ_2 è molto piccola; poiché $\ell_1 + \ell_2$ è fissato, un aumento di una di queste grandezze comporta una diminuzione dell'altra. Per ridurre l'errore conviene far sì che ℓ_1 sia circa uguale a ℓ_2 e, per l'equazione (1), che R_x sia circa uguale a R_o . Per poter realizzare questa condizione sono disponibili più resistenze campione, ed una resistenza variabile.

Variatione della resistenza con la temperatura.

La variazione di resistenza con la temperatura permette di utilizzare il ponte come termometro. La resistenza incognita è quella di un filo di platino che a $0^\circ C$ ha una resistenza di 100Ω , disponibile in commercio con la sigla $Pt 100$.

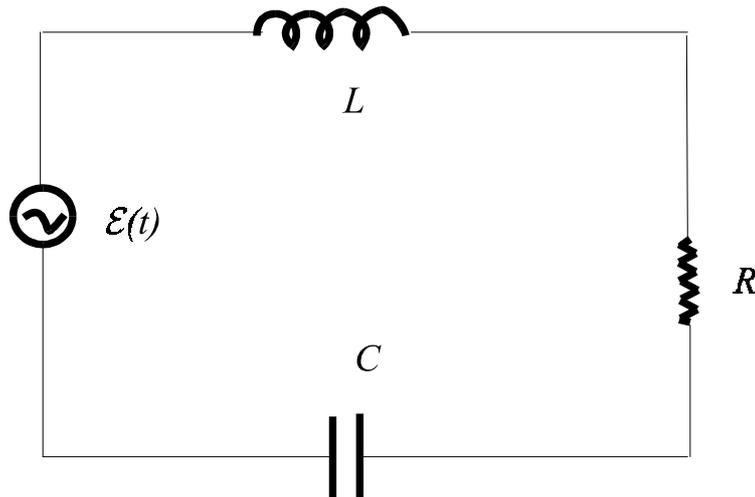
Nell'intorno di questa temperatura la sua resistenza è

$$R(t) = R_o + \alpha t \quad (5)$$

dove t è la sua temperatura in gradi Celsius, $R_o = 100 \Omega$, $\alpha = 0.39 \Omega/^\circ C$. Misurata $R(t)$ con il metodo del ponte, si ricava t dall'equazione (5). Per misurare t con una precisione dell'ordine del grado centigrado con gli strumenti in dotazione sono richieste particolari cautele, cercando una compensazione fra le diverse cause di errore (ad es. per quanto riguarda le resistenze dei fili di collegamento). Per questo motivo, è anche disponibile un'apparecchiatura già compensata, contenente al suo interno tutti gli strumenti necessari alla misura (a cui vanno collegati i tre fili uscenti dal cilindretto contenente la resistenza di platino, rispettando i colori delle boccole), su cui si legge la grandezza $\alpha t = R(t) - R_o$. È così possibile valutare il tempo necessario al raggiungimento dell'equilibrio termico fra il cilindretto ed il corpo di cui si vuole misurare la temperatura, e controllare le misure effettuate con il ponte.

2) Studio della risonanza in un circuito LCR.

Nel circuito rappresentato in figura la carica q sulle armature del condensatore soddisfa all'equazione



$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = \mathcal{E}_m \cos \omega t, \quad (1)$$

la cui soluzione $q(t)$ può essere scritta come somma della soluzione generale dell'omogenea associata e di una soluzione particolare dell'equazione completa. La prima, tendente a zero per $t \rightarrow \infty$, descrive il *regime transitorio*, che nell'esperimento si estingue in pratica in un tempo brevissimo (inferiore al secondo) e pertanto non viene presa in considerazione. Rimane solo la soluzione particolare, la cui derivata dq/dt è la corrente nel circuito, che può essere così scritta:

$$i(t) = i_m \cos(\omega t - \phi) \quad (2)$$

dove:

$$i_m = \frac{\mathcal{E}_m}{Z(\omega)}, \quad \tan \phi(\omega) = \frac{X(\omega)}{R}, \quad (3, 3')$$

con

$$Z(\omega) = \sqrt{R^2 + X^2(\omega)}, \quad X(\omega) = \omega L - \frac{1}{\omega C}. \quad (4, 4')$$

$Z(\omega)$ è l'impedenza del circuito, $X(\omega)$ la sua reattanza.

Variando ω con \mathcal{E}_m prefissato, l'ampiezza i_m presenta un massimo in corrispondenza di

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (5)$$

Se R è sufficiente piccolo il massimo è molto accennato, ed una piccola sollecitazione può eccitare una corrente intensa: si dice che il circuito è in *risonanza*. I fenomeni di

risonanza si verificano in tutti i sistemi fisici capaci di oscillare, quando vengono sottoposti ad una sollecitazione periodica con periodo uguale o circa uguale alla frequenza propria di oscillazione del sistema. Questi fenomeni sono di grande interesse sia concettuale che pratico, ed il loro studio può essere effettuato simulando il sistema mediante un circuito elettrico equivalente. Ad es., l'equazione (1) è del tutto equivalente, dal punto di vista analitico, all'equazione:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \kappa x = F_m \cos \omega t \quad (6)$$

che descrive le oscillazioni forzate di una particella di massa m soggetta ad una forza elastica $-\kappa x$ e ad una resistenza viscosa proporzionale alla velocità.

Studio della curva di risonanza.

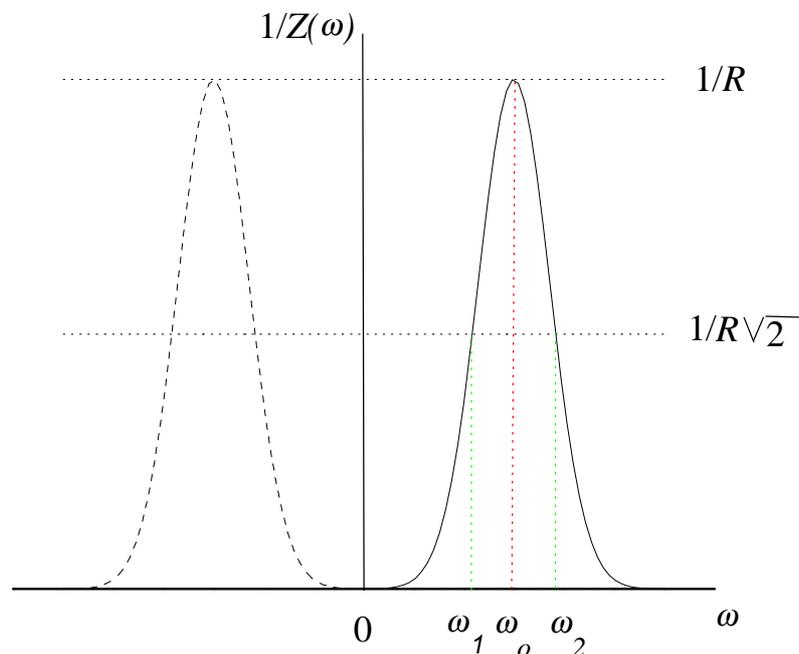
Conviene considerare l'andamento del rapporto i_m / \mathcal{E}_m al variare di ω , cioè della funzione:

$$\frac{1}{Z(\omega)} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + X^2(\omega)}}, \quad X(\omega) = \omega L - \frac{1}{\omega C}. \quad (7)$$

È immediato verificare che questa funzione:

- si annulla per $\omega = 0$ e $\omega \rightarrow \infty$;
- è massima, ed uguale a $1/R$, per $\omega = \omega_o$; infatti a questa frequenza la reattanza $X(\omega)$ è nulla e l'impedenza $Z(\omega)$ raggiunge il suo minimo valore;
- ha una "larghezza" che dipende unicamente dal rapporto R/L . A misura della larghezza possiamo considerare l'intervallo $\omega_2 - \omega_1$, dove ω_1 e ω_2 sono i valori di ω per cui il modulo della reattanza diventa uguale alla resistenza:

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = \pm R. \quad (8)$$



La (8) può essere scritta nella forma $L\omega^2 \pm R\omega - 1/C = 0$ ed ammette le soluzioni:

$$\omega = \pm \frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \quad (8')$$

Interessano le due soluzioni positive:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \\ \omega_2 &= \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}}. \end{aligned} \quad (8'')$$

e la loro differenza

$$\omega_2 - \omega_1 = R/L \quad (9)$$

Il rapporto $\omega_o / (\omega_2 - \omega_1) = \omega_o L / R$ è detto *fattore di merito* dell'oscillatore.

Commenti.

A misura della larghezza della curva di risonanza si può assumere l'intervallo fra i valori ω_1' e ω_2' di ω che dimezzano la sua altezza massima (*larghezza a metà altezza*), e che soddisfano all'equazione $X^2(\omega) = 3R^2$: si trovano ancora le equazioni 8 e 9, con R sostituito da $R\sqrt{3}$.

È immediato verificare che l'intervallo $\omega_2 - \omega_1$ coincide invece con la larghezza a metà altezza della curva che rappresenta $i_m^2 / \mathcal{E}_m^2 \equiv 1/Z^2(\omega)$.

Misure consigliate

- Si verifichi l'andamento qualitativo della curva $i_m(\omega)$ a \mathcal{E}_m prefissato, variando ω ed osservando sul monitor dell'oscilloscopio l'ampiezza della funzione sinusoidale $i(t)$. L'oscilloscopio deve essere collegato ai capi del resistore: si misura così $V_R(t) = Ri(t)$.
- Si riporti in diagramma l'andamento della curva $i_m^2(\omega)$ ad \mathcal{E}_m prefissato, infittendo i punti in corrispondenza del suo massimo; si controlli che in questo punto le funzioni sinusoidali $V_R(t)$ ed $\mathcal{E}(t)$ siano in fase, in accordo con la (3').
- Si misuri L supposto noto R , mediante la relazione (9), che fornisce:

$$L = \frac{R}{\omega_2 - \omega_1} \quad (10)$$

La differenza $\omega_2 - \omega_1$ può essere ricavata come larghezza a metà altezza dalla curva $i_m^2(\omega)$.

- Si calcoli l'errore relativo $\Delta L / L$ dalla relazione:

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta(\omega_2 - \omega_1)}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta\omega_2 + \Delta\omega_1}{\omega_2 - \omega_1} \quad (11)$$

- Si misuri C e si valuti l'errore ΔC , utilizzando la relazione (5).

Soluzione dell'equazione (1).

La *soluzione particolare* ha la forma $q(t) = q_m \sin(\omega t - \phi)$.

Con un cambiamento di origine sull'asse dei tempi si può scrivere $q(t) = q_m \sin \omega t$, $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_m \cos(\omega t + \phi)$; la (1) fornisce poi:

$$-L\omega^2 q_m \sin \omega t + R\omega q_m \cos \omega t + \frac{1}{C} q_m \sin \omega t = \mathcal{E}_m \cos \phi \cos \omega t - \mathcal{E}_m \sin \phi \sin \omega t$$

Uguagliando separatamente i coefficienti di $\sin \omega t$ e di $\cos \omega t$ si ottiene:

$$\left(-L\omega^2 + \frac{1}{C}\right)q_m = -\mathcal{E}_m \sin \phi \quad (12)$$

$$R\omega q_m = \mathcal{E}_m \cos \phi$$

Si ottiene l'incognita q_m quadrando e sommando le due equazioni, e l'incognita $\tan \phi$ uguagliando i rapporti fra i due membri; derivando $q(t)$ si ricava poi $i(t)$.

L'equazione *omogenea associata* si integra con il metodo standard per le equazioni differenziali a coefficienti costanti. La soluzione generale può essere scritta nella forma:

$$q(t) = \exp\left(-\frac{R}{2L}t\right)(a \cos \omega' t + b \sin \omega' t) \quad (13)$$

dove

$$\omega' = \sqrt{\omega_o^2 - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}, \quad (13')$$

a e b sono le due costanti arbitrarie. Per $i(t)$ valgono relazioni formalmente identiche. Per $\omega' = 0$, la funzione $b \sin \omega' t$ è identicamente nulla e va sostituita con bt .

Se ω' è reale la (13) rappresenta un'oscillazione smorzata. Si noti la stretta relazione fra la *costante di smorzamento* $R/2L$ dell'oscillazione libera e la *larghezza* della curva di risonanza dell'oscillazione forzata.

3) Misure della lunghezza d'onda con il reticolo di diffrazione

Si invia sul reticolo un'onda piana in condizioni di Fraunhofer e si analizza la luce diffratta in termini di onde piane (cioè raggi paralleli). La luce incidente è quella di un laser ed è già approssimativamente piana. Per la luce in uscita, si utilizza una lente convergente ed un vetrino posto nel piano focale posteriore della lente, montati su un goniometro. L'asse ottico della lente deve passare per l'asse di rotazione del goniometro. Se il raggio incidente è ortogonale al reticolo, la figura di diffrazione presenta dei massimi molto accentuati (*massimi principali*) in corrispondenza di angoli θ_m che soddisfano alla condizione:

$$a \sin \theta_m = m\lambda, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad (1)$$

dove a è la costante del reticolo. Se il reticolo è costituito da strisce alternativamente trasparenti ed assorbenti, a è la distanza fra i centri delle strisce trasparenti, che possono essere assimilate a fenditure.

Nota a e misurato θ_m , si ricava λ .

L'errore è

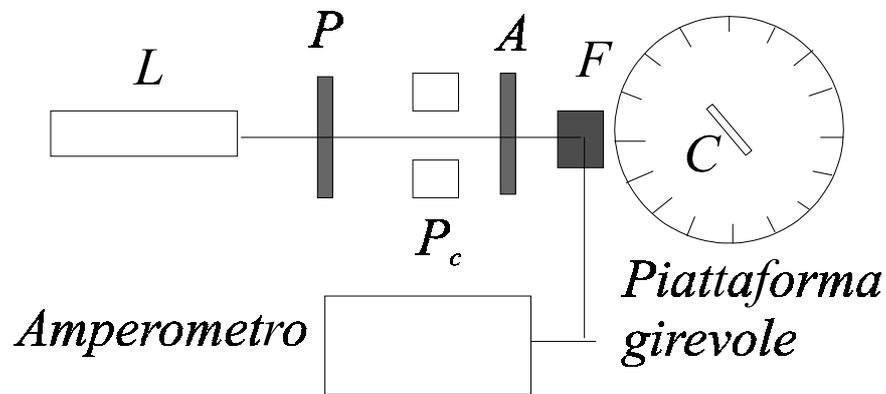
$$\Delta\lambda = \frac{\partial \lambda}{\partial \theta_m} \Delta\theta_m = \frac{a \cos \theta_m}{m} \Delta\theta_m. \quad (2)$$

Osservazioni. 1) L'Eq.(1) è valida solo per incidenza normale: si osservi l'effetto di una rotazione del reticolo intorno ad un asse verticale. Si noterà che la direzione del massimo di ordine zero rimane invariata, che gli altri raggi si allontanano (come se diminuisse la costante del reticolo) e che la figura di diffrazione non è più simmetrica. 2) Qualunque struttura periodica può dar luogo a massimi di diffrazione. Con due reticoli di diffrazione vicini, ruotati di 90° l'uno rispetto all'altro, si realizza una struttura periodica bidimensionale: si osservino le posizioni dei massimi, proiettandoli su un foglio o sul muro. La figura di diffrazione che si ottiene dà un'idea della figura di diffrazione, ovviamente più complessa, fornita da un reticolo tridimensionale (ad es. diffrazione dei raggi X da parte di un cristallo). La condizione di massimo, cioè l'equivalente dell'Eq.(1), è la *legge di Bragg*.

4) Polarizzazione della luce

Schema dell'apparecchiatura

Il fascio di luce che esce dal laser (L) attraversa una prima lamina polarizzatrice (polarizzatore P), il portacampioni (P_c), una seconda lamina polarizzatrice (analizzatore A) ed è rivelato da un fotodiodo (F). In assenza di fotodiodo il fascio laser può essere inviato su un campione posto sulla piattaforma girevole.



Esperimenti qualitativi

a) Polarizzazione per riflessione.

La riflettanza, definita come rapporto fra le intensità delle onde riflessa ed incidente, dipende dallo stato di polarizzazione dell'onda incidente, oltre che dall'angolo di incidenza. Siano $R_{//}$ e R_{\perp} le riflettanze per onde con piani di polarizzazione rispettivamente paralleli (onda p o TM) ed ortogonali (onda s o TE) al piano di incidenza. Si verifichi che per incidenza obliqua $R_{//} < R_{\perp}$, e che esiste un particolare angolo, detto di Brewster, per cui $R_{//} = 0$. Le osservazioni possono essere fatte sia utilizzando il polaroid come *polarizzatore*, ponendolo sul cammino del fascio incidente, che come *analizzatore*, inserendolo sul cammino del fascio riflesso. In ogni caso conviene raccogliere il fascio riflesso su un foglio bianco.

b) Polarizzazione per diffusione.

I fenomeni sono del tutto analoghi e possono essere osservati in modo analogo. Conviene "guardare" direttamente il fascio laser, variando l'angolo visuale. La luce diffusa è più intensa quando attraversa un liquido: si utilizzi la soluzione di zucchero in acqua. L'analogia fra riflessione e diffusione non è casuale ed è particolarmente evidente se i raggi incidente e riflesso sono nel vuoto. In questo caso il raggio riflesso è generato unicamente dagli elettroni del vetro, messi in oscillazione dall'onda presente nel vetro stesso (cioè dal raggio *rifratto*). Nella diffusione, il raggio diffuso è generato dagli elettroni del mezzo, messi in oscillazione dal fascio diretto. I raggi rifratto e riflesso corrispondono quindi ai raggi diretto e diffuso. In entrambi i casi si ottiene luce totalmente polarizzata quando i due raggi sono ortogonali. Si noti che anche nella riflessione sulla superficie di separazione fra due mezzi materiali si ha riflessione totale quando i raggi riflesso e rifratto sono ortogonali, benché vi siano elettroni oscillanti anche lungo il fascio incidente.

c) Legge di Malus.

Ponendo sul cammino di un fascio di luce due polarizzatori con assi paralleli e ruotando poi l'asse dell'analizzatore di un angolo θ , l'intensità trasmessa si riduce. Con polarizzatori ideali il fattore di riduzione è $\cos^2 \theta$, e per $\theta = 90^\circ$ (polarizzatori *incrociati*) si ha spegnimento completo del fascio: questo è il miglior test per controllare la qualità delle lamine polarizzatrici. Si consiglia di raccogliere il fascio trasmesso su un foglio.

d) Proprietà ottiche dei mezzi materiali.

Si può facilmente controllare se una lamina altera lo stato di polarizzazione della luce che la attraversa ponendola tra polarizzatori incrociati. Ecco alcuni esperimenti semplici ed interessanti:

- 1) una lamina di materiale isotropo non altera lo stato di polarizzazione della luce. Il vetro ed il plexiglas sono di norma isotropi ma diventano anisotropi se soggetti a deformazioni. Si possono così evidenziare eventuali tensioni interne di una lastra di vetro e le deformazioni di una lastra di plexiglas sottoposte a sforzi.
- 2) Una lamina di materiale anisotropo trasforma luce polarizzata linearmente in luce polarizzata ellitticamente: comunque si ruoti l'analizzatore non si ha spegnimento. Solo in due particolari direzioni della lamina la luce esce con polarizzazione invariata; per materiali uniassici questo si verifica quando il piano di polarizzazione è parallelo oppure ortogonale all'asse ottico.
- 3) Un liquido otticamente attivo ruota il piano di polarizzazione della luce che lo attraversa: ruotando l'analizzatore di un certo angolo α , il fascio in uscita si spegne; α coincide con l'angolo di rotazione del piano di polarizzazione, a meno di multipli di π . Si osservi che l'acqua zuccherata è otticamente attiva.

Esperimenti quantitativi

a) Angolo di Brewster ed indice di rifrazione di una lamina

Si misuri l'angolo di Brewster θ_B , con le seguenti operazioni:

- 1) Si dispongono laser e piattaforma girevole in modo che il fascio laser e l'asse di rotazione della piattaforma si incontrino pressoché ortogonalmente.
- 2) Si ponga la lamina al centro della piattaforma girevole e si faccia in modo che il raggio riflesso sia pressoché coincidente con quello incidente: la lamina sarà pressoché ortogonale al fascio incidente.
- 3) Si ponga il polarizzatore sul fascio incidente con asse pressoché orizzontale e si ruoti la lamina fino a che il raggio riflesso (raccolto su un foglio bianco) abbia intensità minima.
- 4) Si ritocchino le direzioni del polarizzatore e della lamina fino ad annullare l'intensità del raggio riflesso. L'angolo totale di rotazione della lamina sarà $2\theta_B$.

Si ricavi poi l'indice di rifrazione n , che è uguale a $\tan\theta_B$.

b) Verifica della legge di Malus

Si misuri col fotodiodo l'intensità del fascio in uscita dai due polaroid, variando la direzione dell'asse dell'analizzatore, e si riportino in diagramma i valori ottenuti. Se la curva ottenuta non è proporzionale a $\cos^2\theta$, si cerchino le possibili cause di errore.

APPENDICI

A-SIMMETRIE DEI CAMPI ELETTROMAGNETICI

A1- SIMMETRIE

Gli argomenti di simmetria sono di fondamentale importanza per lo studio delle proprietà fisiche dei corpi. Si dice che un oggetto (o una distribuzione di cariche, o di correnti, o un campo ..) è *simmetrico rispetto ad una certa operazione* (rotazione intorno ad un asse, traslazione in una direzione prefissata, riflessione rispetto ad un piano, ..) se, effettuata questa operazione, l'oggetto appare lo stesso di prima. Gli argomenti di simmetria si basano sul seguente postulato, che è stato così formulato da P. Curie: *l'effetto possiede tutte le simmetrie della causa che lo produce*. Il postulato appare evidente di per sè ed è confermato dall'esperienza (assumendo quindi il valore di legge: è la *legge di Curie*), ma la sua applicazione non sempre risulta ovvia.

Una prima difficoltà, che ci limitiamo a segnalare senza ulteriori approfondimenti, nasce dal fatto che non sempre è possibile separare l'*effetto* dalla *causa*, o meglio che questa separazione può risultare arbitraria. Ad esempio, quando studiamo le distribuzioni di corrente in un'antenna trasmittente ed in una ricevente, è naturale considerare la prima come causa, l'altra come effetto. In realtà, in natura esistono oggetti che *interagiscono*, non oggetti che *agiscono* su altri. In questa appendice si considerano le cariche e le correnti come *causa*, i campi creati \vec{E} e \vec{B} come *effetto*.

Una seconda difficoltà è legata al fatto che per descrivere le proprietà dei corpi, o più in generale i fenomeni fisici, si fa uso di grandezze (scalari, vettori, ..) le cui proprietà di simmetria non sono sempre evidenti. Consideriamo ad es. un filo rettilineo indefinito che porta una carica q ed è percorso da una corrente i , e valutiamo i campi \vec{E} e \vec{B} creati in un generico punto P . Il piano π , individuato dal filo e dal punto P , è un piano di simmetria per la distribuzione di cariche e correnti (questa distribuzione appare cioè identica alla sua immagine speculare, ottenuta con uno specchio coincidente con π). La presenza di questo elemento di simmetria fornisce informazioni ben precise sulle componenti $\vec{E}_{//}$, \vec{E}_{\perp} , $\vec{B}_{//}$, \vec{B}_{\perp} (dove $//$ e \perp si riferiscono al piano π); però, paradossalmente, questi vettori non hanno la stessa direzione. Questo deriva dal fatto che \vec{E} è un *vettore polare* (o più brevemente un *vettore*), mentre \vec{B} è un *pseudovettore*, o *vettore assiale* (se non è strettamente necessario, l'aggettivo "assiale" viene omesso in quasi tutti i testi di Fisica ed anche in questi esercizi). Le definizioni di vettori polari ed assiali e le loro proprietà di simmetria verranno discusse nel paragrafo A4. Per risolvere i problemi qui proposti sono sufficienti queste semplici regole: *su un piano di simmetria π*

- a1) il vettore \vec{E} giace nel piano π ;
- b1) lo pseudovettore \vec{B} è perpendicolare a π .

Nel dispositivo rappresentato in Figura A1 il vettore \vec{E} può avere, oltre alla componente diretta lungo il raggio r , una componente parallela al filo (che è nulla se la distribuzione di cariche è simmetrica anche rispetto al piano che contiene P ed è ortogonale al filo). La direzione di \vec{B} è invece perfettamente definita. Si noti come la figura che si ottiene rappresentando lo pseudovettore \vec{B} come un vettore non risulti simmetrica (una

riflessione speculare cambia \vec{B} in $-\vec{B}$), in apparente contraddizione con la legge di Curie. In presenza di piani di simmetria può essere conveniente, per avere una visione intuitiva delle simmetrie dei campi, rappresentare gli pseudovettori come grandezze dotate di modulo e direzione ma non di *verso*.

Per simmetrie di rotazione e traslazione gli pseudovettori si comportano come i vettori, gli argomenti di simmetria appaiono in entrambi i casi del tutto evidenti.

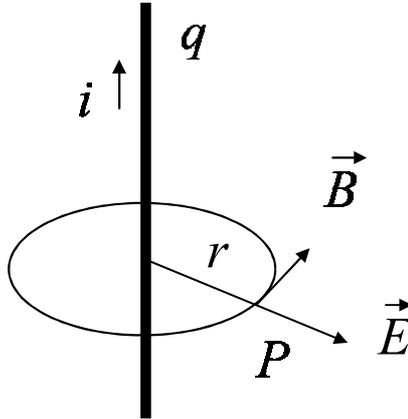


Figura A1

A2- CARICHE E CORRENTI CON SIMMETRIA $C_{\infty v}$.

Hanno notevole interesse le distribuzioni di cariche e correnti che possiedono tutte le simmetrie del filo di Figura A1. Si tratta del gruppo di simmetrie che viene indicato con il simbolo $C_{\infty v}$ e che contiene come *elementi tutti i piani passanti per un asse z assegnato e tutte le rotazioni attorno a questo asse*. Si è soliti scegliere l'asse di rotazione in direzione verticale: di qui il pedice v ; il simbolo ∞ indica che il gruppo contiene infiniti elementi di simmetria. Dalla legge di Curie e dalle regole *a1* e *b1* si deduce che:

- a2) Le linee di flusso di \vec{E} giacciono su piani passanti per l'asse e sono invarianti per rotazioni intorno all'asse;
- b2) Le linee di flusso di \vec{B} sono circonferenze γ con asse z , ed il modulo di \vec{B} è costante lungo γ .

Campi magnetici stazionari

Cominciamo a considerare i campi \vec{B} creati da *correnti stazionarie* in un conduttore cilindrico, in un cavo coassiale ed in conduttore a forma di toroide.

Vale la proprietà *b2*, e la circuitazione di \vec{B} lungo una sua linea di flusso, cioè lungo una circonferenza γ di raggio r , è:

$$\int_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma} B ds = B \int_{\gamma} ds = B \cdot 2\pi r, \quad (1)$$

e per la legge di Ampère è uguale a $\mu_0 i_{\gamma}$, dove i_{γ} è la corrente che attraversa una generica superficie avente come contorno γ . Quindi:

$$B = \frac{\mu_o i_\gamma}{2\pi r} \quad (2)$$

Se la linea γ è nel conduttore stesso od in un'eventuale materiale isolante posto intorno ai conduttori, la permeabilità μ_o del vuoto va sostituita con la permeabilità $\mu = \mu_r \mu_o$ del mezzo. Ovviamente il mezzo materiale deve avere forma tale da conservare tutte le simmetrie del gruppo $C_{\infty v}$ (in pratica, μ_r deve essere costante lungo una generica linea di flusso γ). Nelle figure A2, A3 sono riportati gli andamenti delle correnti ed i versi dei campi per un conduttore cilindrico cavo e per un toroide a sezione rettangolare, in un generico piano passante per l'asse.

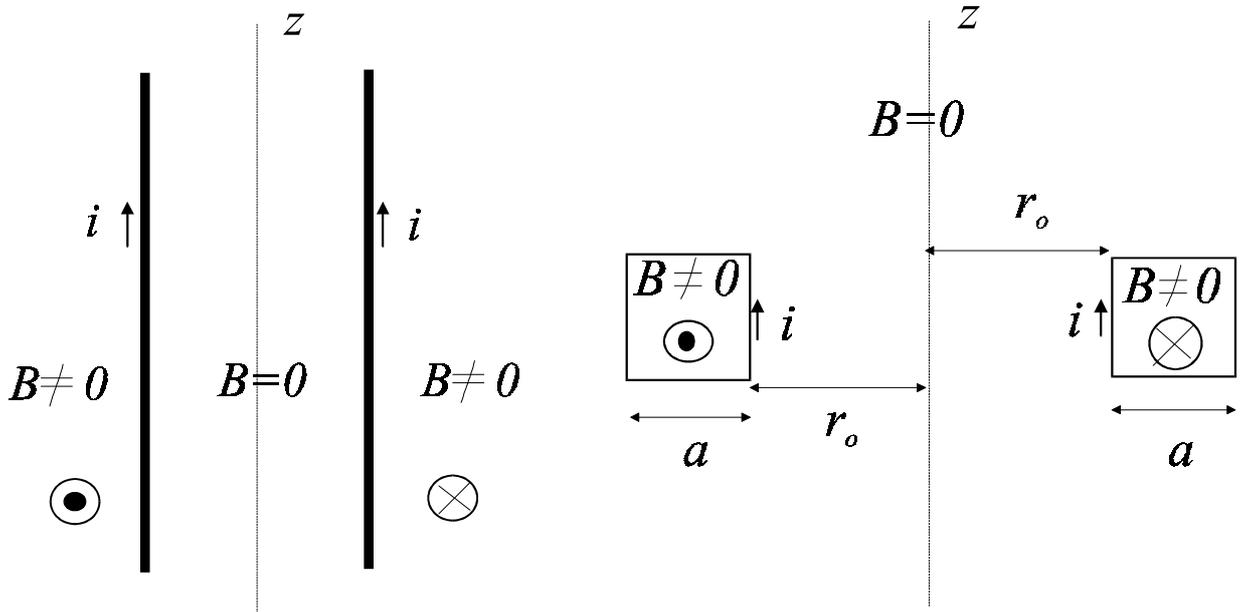


Figura A2

Figura A3

Si noti che \vec{B} è nullo *all'interno* del cilindro ed *all'esterno* del toroide.

Se nel toroide rappresentato in Figura A3 il lato a è molto minore di r_o , il modulo di \vec{B} all'interno del toroide è praticamente costante, e diventa rigorosamente costante nel limite $r_o \rightarrow \infty$.

Le distribuzioni toroidali di corrente qui considerate possono essere bene approssimate con avvolgimenti toroidali: si manda corrente in un conduttore filiforme avvolto intorno ad un supporto toroidale, con spire ravvicinate. Conviene scrivere l'equazione (2) nella forma

$$B = \frac{\mu_o N i}{2\pi r} \quad (3)$$

dove N è il numero di spire. Per $a \ll r_o$, il raggio r all'interno del toroide è praticamente costante, $2\pi r$ è la lunghezza totale del toroide ed $N / 2\pi r$ è il numero di spire nell'unità di lunghezza, che viene di solito indicato con la lettera n . L'equazione (3) assume la forma:

$$B = \mu_o n i \quad (4)$$

Per $r_o \rightarrow \infty$ si ottiene il *solenoido rettilineo indefinito*. Il considerare un avvolgimento solenoidale come caso limite di un avvolgimento toroidale giustifica il fatto che \vec{B} sia nullo all'esterno ed uniforme all'interno del solenoide, indipendentemente dalla forma delle sue spire.

Campi elettromagnetici non stazionari.

Il caso più semplice ed interessante è quello di una *particella carica in moto su una retta*. Esistono tutti gli elementi di simmetria del gruppo $C_{\infty v}$ e l'asse di simmetria è la retta stessa. La particella crea sia un campo elettrico che un campo magnetico e per i vettori \vec{E} e \vec{B} valgono le proprietà *a2* e *b2*. Le stesse proprietà *a2*, *b2* valgono per *dipoli elettrici* il cui momento di \vec{p} oscilla mantenendosi parallelo ad un asse z , e per le *antenne a dipolo elettrico*.

A3- ALTRI GRUPPI DI SIMMETRIA.

Consideriamo alcuni casi di particolare interesse.

Simmetria sferica.

Si consideri una distribuzione di cariche con densità ρ che dipende solo dalla distanza r da un punto O , detto polo. In un generico punto P il vettore \vec{E} sta sulla retta OP , cioè è diretto radialmente: infatti qualsiasi piano passante per OP è un piano di simmetria, e per la proprietà *a1* il vettore \vec{E} deve giacere sulla retta OP . Il fatto che ogni retta passante per O sia un asse di simmetria implica poi che il modulo di \vec{E} sia lo stesso in ogni punto di una superficie sferica con centro O . Applicando la legge di Gauss alla superficie Σ si ottiene:

$$E = \frac{q_{\Sigma}}{4\pi \epsilon_r \epsilon_o r^2},$$

dove q_{Σ} è la carica libera interna a Σ ed ϵ_r la permeabilità relativa dell'eventuale dielettrico in cui è immersa la superficie Σ . Supponiamo ora che ogni carica si muova con velocità \vec{v} diretta radialmente, con modulo che dipende solo da r . La densità di carica $\rho(r)$ ed il vettore densità di corrente $\vec{j} = \rho \vec{v}$ hanno simmetria sferica, e qualsiasi piano passante per O è ancora un piano di simmetria. Il vettore \vec{E} continua ad essere diretto radialmente (per la proprietà *a1*), lo pseudovettore \vec{B} è identicamente nullo (per la proprietà *b1*). Il vettore di Poynting $\mu_o^{-1} \vec{E} \times \vec{B}$ è identicamente nullo: le distribuzioni di cariche e di correnti non irradiano energia. Distribuzioni di correnti con simmetria sferica possono essere presenti all'interno di un atomo, e non generano onde elettromagnetiche.

Spire circolari.

La struttura dei campi creati da una spira circolare e da un solenoide costituito da spire circolari è simile a quella descritta nel paragrafo *A2*, ma con uno scambio di ruoli fra i vettori \vec{E} e \vec{B} . Più precisamente detta z l'asse di simmetria delle spire:

a3) le linee di flusso di \vec{B} giacciono su un piano passante per z e sono invarianti per rotazioni intorno all'asse z ;

$b3$) se le correnti variano nel tempo, esiste anche un campo \vec{E} le cui linee di flusso sono circonferenze γ con asse z , ed il modulo di \vec{E} è costante lungo γ .

Per dedurre queste proprietà non è sufficiente considerare le simmetrie della distribuzione di correnti che crea il campo: occorre anche tener conto della struttura delle equazioni di Maxwell. Più precisamente, una riflessione rispetto ad un generico piano π passante per z lascia invariata la forma delle spire ma cambia il verso della corrente ed il loro momento di dipolo magnetico (quindi π non è un piano di simmetria). Ora, un cambiamento di segno di cariche e correnti nelle equazioni di Maxwell implica un cambiamento di segno dei vettori \vec{E} e \vec{B} : basta rileggere le proprietà $a4$ e $b4$ per capire che un cambiamento di segno delle componenti tangenziali di questi due vettori ne scambiano i ruoli.

Confrontando le proprietà $a2$, $b2$ con le $a3$, $b3$ si comprende perché la struttura delle linee di flusso dell'onda elettromagnetica generata a grandi distanze da antenne a dipolo elettrico ed a dipolo magnetico sono molto simili fra loro, ma con uno scambio tra \vec{E} e \vec{B} .

A4- VETTORI POLARI ED ASSIALI.

La tipica grandezza vettoriale è il vettore $\vec{r} = \underline{OP}$ che individua il punto P in un sistema di coordinate con origine in O .

Si definisce *vettore polare*, o più semplicemente *vettore*, una grandezza che, come \vec{r} , è individuata da un modulo, una direzione ed un verso. In una trasformazione di coordinate le componenti di un vettore si trasformano come le componenti x, y, z di \vec{r} .

Esistono grandezze per cui è intrinsecamente definito il modulo e la direzione, non il verso. Attribuendo a queste grandezze anche un verso, mediante un'opportuna convenzione (di norma si usa la *regola della mano destra*), si ottiene formalmente un vettore, che viene detto assiale (o pseudovettore). Gli operatori che generano pseudovettori sono tipicamente il prodotto esterno ed il rotore. Si considerino ad es. le seguenti relazioni:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (1);$$

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (2);$$

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} \quad (3),$$

dove \vec{F} è una forza, $\vec{\tau}$ il momento di una forza, $\vec{\mu}$ il momento di dipolo magnetico. In queste relazioni esiste sempre *uno* pseudovettore ($\vec{\tau}$ in (1), \vec{B} in (2)) o *tre* pseudovettori (in (3)). L'operatore rotore $rot \vec{v} = \vec{\nabla} \times \vec{v}$ è formalmente un prodotto esterno e l'operatore $\vec{\nabla}$ si comporta come un vettore.

È facile verificare che le componenti di uno pseudovettore si trasformano come le componenti x, y, z di \vec{r} nelle rotazioni di coordinate, ma non in quelle trasformazioni di coordinate in cui sono presenti *una* oppure *tre* piani di riflessione speculare passanti per uno stesso punto. Si tratta di trasformazioni che fanno passare da una terna destra ad una sinistra e che cambiano la regola della *mano destra* in quella della *mano sinistra*: nelle considerazioni di simmetria occorre tenere conto di questo fatto. In pratica, nella riflessione rispetto ad un piano π :

- a4) componenti tangenziali di un vettore rimangono invariate, quella normale cambia segno come mostra chiaramente la figura A4 dove \vec{v}' è l'immagine speculare di \vec{v} ;
 b4) le componenti tangenziali di uno pseudovettore cambiano segno, quella normale rimane invariata.

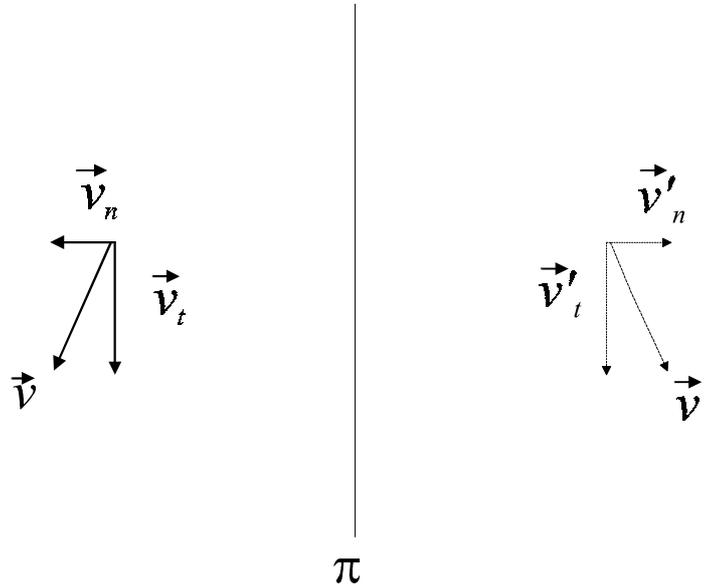


Figura A4

È molto facile verificare le proprietà b4 considerando le equazioni (1), (2), (3). Ad esempio: se nella (1) \vec{r} ed \vec{F} sono tangenziali, $\vec{\tau}$ è normale e nessuno dei tre vettori cambia segno; se \vec{r} è normale ed \vec{F} tangenziale, solo il primo vettore cambia segno, quindi $\vec{\tau}$ (che è tangenziale) cambia segno.

Per quanto riguarda il vettore \vec{E} e lo pseudovettore \vec{B} , le conseguenze più importanti delle proprietà a4 e b4 sono riassunte nelle regole a1 e b1 citate sopra. Infatti in due punti simmetrici rispetto al piano le componenti normali dei vettori \vec{E} e \vec{E}' hanno segni opposti, per la a4; immaginiamo ora di avvicinare i due punti, fino ad ottenere un unico punto sul piano: in questo punto i vettori \vec{E} e \vec{E}' coincidono (entrambi rappresentano il campo elettrico nel punto considerato), e questo implica che la loro componente normale sia nulla. Analogamente, la b1 implica l'annullarsi delle componenti tangenziali di \vec{B} in un generico punto del piano di simmetria.