Esercizi sulla derivazione

(1) Calcolare il limite del rapporto incrementale in x_0:

$$3x^2-6x \quad \{x_0\in\mathbb{R}\}, \quad \left|\frac{1}{x}\right| \quad \{x_0\neq 0\}, \quad \frac{|x-3|}{x-4} \quad \{x_0\in\mathbb{R}\setminus\{3,4\}\}, \quad x\sin x \quad \{x_0\in\mathbb{R}\},$$

$$e^{\sin x} \quad \{x_0\in\mathbb{R}\}, \quad \frac{1}{\cos x} \quad \{x_0\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\}, \quad \cos^2 x \quad \{x_0\in\mathbb{R}\}, \quad \sin^2 x \quad \{x_0\in\mathbb{R}\},$$

$$x^2 \quad \{x_0\in\mathbb{R}\}, \quad \sqrt{-1+x^2} \quad \{x_0>1\}, \quad \sqrt[3]{x} \quad \{x_0\neq 0\}, \quad \log x \quad \{x_0>0\}.$$

(2) Determinare due funzioni $g(y)$ e $h(x)$ tali che $g(h(x))=f(x)$ ove $f(x)$ ha la seguente espressione

$$(a)\ \tan(x^2+1), \quad (b)\ \frac{1}{\sin x}, \quad (c)\ 2^{\arctan x}, \quad (d)\ \log\log x, \quad (e)\ \sqrt[3]{\frac{2}{x}+1} \quad (f)\ 2^{\sin x}$$

(3) Calcolare, usando le formule di derivazione di funzioni composte, le derivate delle funzioni $f(x)$ dell'esercizio precedente.

(4) Riferendosi ancora alle funzioni dell'esercizio 2, determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa x_0 indicato:

$$(a)\ x_0=1, \quad (b)\ x_0=\frac{\pi}{4}, \quad (c)\ x_0=0, \quad (d)\ x_0=e^2, \quad (e)\ x_0=2, \quad (f)\ x_0=\frac{\pi}{6}$$

(5) Calcolare, usando le formule di derivazione, le derivate delle seguenti funzioni

$$\sqrt{2}x^4-7x^3, \quad (-x+2)^4\sin x+\frac{6}{x}, \quad \frac{3}{\sqrt[3]{x}}-\frac{2}{(\pi x+1)^2}, \quad \frac{(x^2-\sqrt{5})(x^2-17)}{|x+1|},$$

$$\log\log|x|, \quad 2e^x+3|\sin x|+2^{-x}, \quad \log^2 x+\arcsin x, \quad \frac{1+e^x\sin^2 x-\log x}{1+\arctan^2 x},$$

$$e^{|x^5-\sin x|}, \quad (\cos x-1)\sin x, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^x+\sin x\left(\frac{1}{3}\right)^x, \quad \left(\sin(x^2+x+1)\right)^{1/3},$$

$$\left(\tan(-2x^{-1/2}+x^{-1})\right)^{2x}, \quad \sin\log(x\cos x), \quad \frac{2\cos x-\arctan x}{\sqrt{x}}, \quad (3x^2-2)\log\sqrt{-1+x^2}.$$

(6) Studiare la derivabilità delle seguenti funzioni nel punto x_0 indicato. Quando in tale punto la funzione non è derivabile, classificarlo (punto angoloso, a tangente verticale,

cuspide...)

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{e^x-1} & \text{se } x<0 \\ x+1 & \text{se } x\geq 0 \end{cases} \qquad \{x_0=0\};$$

$$f(x)=\begin{cases} \tan x-(x-1) & \text{se } -\frac{\pi}{2}<x<0 \\ \cos x & \text{se } x\geq 0 \end{cases} \qquad \{x_0=0\};$$

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin^2 x}{e^x-1} & \text{se } x<0 \\ \log(1+x), & \text{se } x\geq 0 \end{cases} \qquad \{x_0=0\};$$

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\tan^3(x-1)}{1-\cos(x-1)} & \text{se } -\frac{\pi}{2}<x<1 \\ x-1 & \text{se } x\geq 1 \end{cases} \qquad \{x_0=1\};$$

$$f(x)=\begin{cases} e^{\frac{2+x^2}{x^2-3x+2}} & \text{se } 1<x<2 \\ 0 & \text{se } x\in(-\infty,1]\cup[2,+\infty) \end{cases} \qquad \{x_0=1, x_0=2\};$$

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}\left(\log\dfrac{1}{1-x}-e^x\sin x\right)\sin\dfrac{1}{x} & \text{se } x\neq 0 \\ 0 & \text{se } x=0 \end{cases} \qquad \{x_0=0\};$$

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{4-x^2}} & \text{se } |x|<2 \\ (x-2)(x+2)^2 & \text{se } |x|\geq 2 \end{cases} \qquad \{x_0=-2, x_0=2\}.$$

(7) Studiare la derivabilità delle seguenti funzioni nel punto x_0 indicato.

$$f(x)=|x^2+5x-6| \quad \{x_0=-1\}; \quad f(x)=\log(1+|x|\sin x) \quad \{x_0=0\};$$

$$f(x)=\log(1-|\log x|) \quad \{x_0=1\}; \quad f(x)=(3x-1)^{1/3} \quad \{x_0=\tfrac{1}{3}\}.$$

(8) Determinare per quali valori reali le seguenti funzioni sono derivabili.

$$\sin(|x|^3), \qquad |x\sin x|, \qquad x|\sin x|, \qquad xe^{|x|}, |\sin x|\sqrt{a-\cos^2 x}.$$

(9) Al variare di $a,b\in\mathbb{R}$ studiare la derivabilità delle seguenti funzioni:

$$f(x)=\begin{cases} 1+x & \text{se } x\leq 1 \\ ax^2+b & \text{se } x>1; \end{cases} \qquad f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{se } x\leq 1 \\ ax+b & \text{se } x>1; \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} x^a\sin(x^b) & \text{se } x>0 \\ 0 & \text{se } x=0. \end{cases}$$

(10) Si calcoli lo sviluppo di Taylor delle seguenti funzioni rispetto al punto a fianco indicato.

$$\cos x \quad \left\{\frac{\pi}{6}\right\}; \qquad e^x \quad \{2\}; \qquad \log x \quad \{2\}.$$