$(\mathbb{Q}, \leq)$ non è completo

Teorema 1. *Sia* $A = \{x \in \mathbb{Q} \,:\, x \geq 0, x^2 < 2\}$. *In* $(\mathbb{Q}, \leq)$ A *è limitato superiormente e non ha estremo superiore.*

Dimostrazione. A è non vuoto ($1 \in A$) e 2 è un suo maggiorante. Infatti, se $x \geq 0$

$$x^2 < 2 \quad \Rightarrow \quad x^2 < 4 \quad \Rightarrow \quad (x-2)(x+2) < 0 \quad \Rightarrow \quad x < 2.$$

Dunque A è superiormente limitato.
Supponiamo che esista l'estremo superiore di A in $\mathbb{Q}$, cioè che esista $\lambda \in \mathbb{Q}$ tale che λ sia il minimo dei maggioranti di A. In particolare, dovrà essere $\lambda \geq 1$.

Ci sono solo tre casi possibili.

$$\lambda^2 < 2, \qquad \lambda^2 = 2, \qquad \lambda^2 > 2.$$

$$\boxed{\lambda^2 < 2}$$

Siccome $\mathbb{R}$ è Archimedeo, esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $n > \max\left\{1, \dfrac{2\lambda+1}{2-\lambda^2}\right\}$.

Si ha che $\lambda + \dfrac{1}{n} \in A$, cioè

$$\lambda + \frac{1}{n} \in \mathbb{Q}, \qquad \lambda + \frac{1}{n} \geq 0, \qquad \left(\lambda + \frac{1}{n}\right)^2 < 2.$$

Infatti: le prime due sono ovvie, la terza segue dal fatto che essendo $n > 1$ allora $n^2 > n$, da cui

$$\begin{aligned} \left(\lambda + \frac{1}{n}\right)^2 &= \lambda^2 + \frac{2\lambda}{n} + \frac{1}{n^2} < \lambda^2 + \frac{2\lambda}{n} + \frac{1}{n} = \\ &= \lambda^2 + \frac{2\lambda+1}{n} < \lambda^2 + 2 - \lambda^2 = 2. \end{aligned}$$

Abbiamo così provato che $\lambda + \dfrac{1}{n} \in A$. Essendo λ l'estremo superiore si avrà

$$\lambda + \frac{1}{n} \leq \lambda$$

il che è assurdo. Non può quindi essere $\lambda^2 < 2$.

$$\boxed{\lambda^2 = 2}$$

Essendo $\lambda \in \mathbb{Q}$ e $\lambda > 0$ esistono $m, n \in \mathbb{N}$ tali che $\lambda = \frac{m}{n}$. Non è restrittivo supporre m ed n primi tra loro. Si hanno le seguenti implicazioni

$$\lambda^2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{m^2}{n^2} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad m^2 = 2n^2 \quad \Rightarrow \quad \exists\, p \in \mathbb{N} \,:\, m = 2p.$$

Quindi

$$\frac{m^2}{n^2} = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{4p^2}{n^2} = 2 \quad \Rightarrow \quad n^2 = 2p^2 \quad \Rightarrow \quad n \text{ è pari.}$$

Abbiamo concluso che sia m che n sono pari, assurdo in quanto m ed n sono primi tra loro.
Non può quindi essere $\lambda^2 = 2$.

$$\boxed{\lambda^2 > 2}$$

Siccome $\mathbb{R}$ è Archimedeo, esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $n > \max\left\{\dfrac{1}{\lambda}, \dfrac{2\lambda}{\lambda^2 - 2}\right\}$.

Si ha che

$$\lambda - \frac{1}{n} \in \mathbb{Q}, \qquad \lambda - \frac{1}{n} > 0 \qquad \left(\lambda - \frac{1}{n}\right)^2 > 2.$$

Le prime due proprietà sono immediate. Proviamo la terza:

$$\left(\lambda - \frac{1}{n}\right)^2 = \lambda^2 - \frac{2\lambda}{n} + \frac{1}{n^2} > \lambda^2 - \frac{2\lambda}{n} > \lambda^2 - 2\lambda\frac{\lambda^2 - 2}{2\lambda} = 2.$$

Dimostriamo che $\lambda - \frac{1}{n}$ è un maggiorante di A.

Ricordando che $x \in A$ implica $x \geq 0$ e usando la positività di $\lambda - \dfrac{1}{n}$ si ha che per ogni $x \in A$

$$\lambda - \frac{1}{n} > x \qquad \Leftrightarrow \qquad \left(\lambda - \frac{1}{n}\right)^2 > x^2.$$

L'ultima disequazione è vera, in quanto per ogni $x \in A$

$$\left(\lambda - \frac{1}{n}\right)^2 > 2 > x^2.$$

Abbiamo quindi che $\lambda - \frac{1}{n}$ è un maggiorante di A, in contraddizione con il fatto che $\lambda = \sup A$.

CONCLUSIONE: Non esiste $\lambda \in \mathbb{Q}$ tale che $\lambda = \sup A$. $\square$