Potenza di un binomio

Teorema 1. *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ e sia $n \in \mathbb{N}$. Allora*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}. \tag{0.1}$$

Dimostrazione. Ragioniamo per induzione.
Se $n = 1$ la (0.1) è vera:

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^k b^{1-k} = \binom{1}{0} a^0 b^1 + \binom{1}{1} a^1 b^0 = a + b.$$

Fissiamo $n \in \mathbb{N}$ e supponiamo sia vera l'uguaglianza (0.1). Dimostriamo che allora vale

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}. \tag{0.2}$$

Si ha:

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)\cdot(a+b)^n = \\
&\qquad\qquad\qquad [\text{IPOTESI INDUTTIVA}] \\
&= (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} = a\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} + b\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^j b^{n-j} = \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} + \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^j b^{n+1-j}.
\end{aligned} \tag{0.3}$$

Nella prima sommatoria compiamo la seguente sostituzione: $j = k+1$ ottenendo

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} = \sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1}a^j b^{n+1-j}. \tag{0.4}$$

Da (0.3) e (0.4) si ha

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1}a^j b^{n+1-j} + \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^j b^{n+1-j}. \tag{0.5}$$

Dalla prima sommatoria di (0.5) separiamo l'ultimo addendo e dalla seconda separiamo il primo ottenendo

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= \sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j-1}a^j b^{n+1-j} + \binom{n}{n}a^{n+1}b^0 + \sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}a^j b^{n+1-j} + \binom{n}{0}a^0 b^{n+1} = \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j}\right)a^j b^{n+1-j} + a^{n+1}b^0 + a^0 b^{n+1} = \\
&\qquad\qquad\qquad \left[\text{USANDO } \binom{n}{j-1} + \binom{n}{j} = \binom{n+1}{j}\right] \\
&= \sum_{j=1}^{n}\binom{n+1}{j}a^j b^{n+1-j} + a^{n+1}b^0 + a^0 b^{n+1} = \\
&\qquad\qquad\qquad \left[\text{USANDO } \binom{n+1}{0} = \binom{n+1}{n+1} = 1\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{n} \binom{n+1}{j} a^j b^{n+1-j} + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0 + \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1} = \\
&= \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} a^j b^{n+1-j},
\end{aligned}
$$

che è quanto desideravamo dimostrare. $\square$