Primo preliminare di A.M. 1
C.d.L. in Fisica - Prof. G. Villani
11/11/2005

Es 1: Dimostrare con il ragionamento induttivo la seguente disuguaglianza:

$$\sum_{j=1}^{2^n} \frac{1}{j} \geq 1 + \frac{n}{2}. \qquad (*)$$

Sol:

$n=1$: $\sum_{j=1}^{2} \frac{1}{j} = 1 + \frac{1}{2}$ vera.

Sia vera $(*)$, per $n \in \mathbb{N}$ fissato. Dimostriamo che da ciò segue

$$\sum_{j=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{j} \geq 1 + \frac{n+1}{2}. \qquad (\odot)$$

Si ha:

$$\sum_{j=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{j} = \sum_{j=1}^{2^n+2^n} \frac{1}{j} = \sum_{j=1}^{2^n} \frac{1}{j} + \sum_{k=2^n+1}^{2^n+2^n} \frac{1}{k} \geq \text{(Hp. induttiva)}$$

$$\geq 1 + \frac{n}{2} + \sum_{k=2^n+1}^{2^n+2^n} \frac{1}{k} = \quad (\text{porgo } j = k - 2^n)$$

$$= 1 + \frac{n}{2} + \sum_{j=1}^{2^n} \frac{1}{2^n + j} \geq \qquad \left(\frac{1}{2^n+j} \leq \frac{1}{2^n+2^n}\right)$$

$$\geq 1 + \frac{n}{2} + \sum_{j=1}^{2^n} \frac{1}{2^n + 2^n} =$$

$$= 1 + \frac{n}{2} + \frac{2^n}{2^n + 2^n} = 1 + \frac{n}{2} + \frac{1}{2}.$$

■

Es 2: Si consideri l'insieme 11/11/05

$$A = \left\{ \frac{x+|y|}{x-|y|} : x, y \in \mathbb{R},\ 0 < |y| < x \right\}.$$

Determinare, se esistono, $\sup A$, $\inf A$, $\max A$, $\min A$.

Sol:

Siano $x, y \in \mathbb{R}$, $0 < |y| < x$. Allora

$$\frac{x+|y|}{x-|y|} > 1.$$ Quindi A è inferiormente limitato e 1 è un minorante.

Mostriamo che $1 = \inf A$.

$$A = \left\{ \frac{|y|}{|y|} \cdot \frac{\left(\frac{x}{|y|} + 1\right)}{\left(\frac{x}{|y|} - 1\right)} : 0 < |y| < x \right\} = \left\{ \frac{\frac{x}{|y|} + 1}{\frac{x}{|y|} - 1} : 0 < |y| < x \right\}$$

$$= \left\{ \frac{t+1}{t-1} : t > 1 \right\} = \left\{ 1 + \frac{2}{t-1} : t > 1 \right\}$$

Pertanto

se $\varepsilon > 0$ si ha $1 + \frac{2}{t-1} < 1 + \varepsilon \iff \frac{2}{t-1} < \varepsilon$

$\underset{(t>1)}{\iff} \frac{2}{\varepsilon} < t - 1 \iff t > 1 + \frac{2}{\varepsilon}$.

Quindi: 1 è un minorante

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, t > 1 \text{ tale che } 1 + \frac{2}{t-1} < 1 + \varepsilon.$$

Vale a dire $1 = \inf A$.

Notiamo che non esiste il minimo di A. Se ci fosse, infatti, dovrebbe essere 1, ma $1 \notin A$:

$$\frac{x+|y|}{x-|y|} = 1 \iff x + |y| = x - |y| \iff 2|y| = 0 \iff y = 0$$

Assurdo.