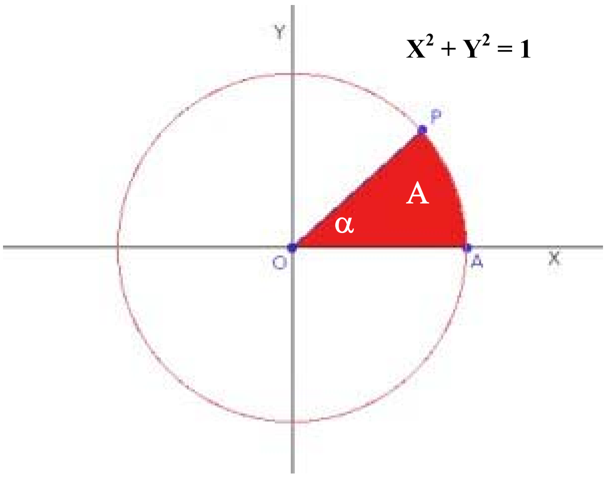
FUNZIONI IPERBOLICHE

Le funzioni iperboliche sono funzioni speciali dotate di proprietà formalmente simili a quelle di cui sono dotate le funzioni goniometriche ordinarie. Anche la loro definizione in termini geometrici è molto simile alla definizione in termini geometrici delle funzioni goniometriche ordinarie. I nomi di tali funzioni sono scelti in modo da richiamare immediatamente tali somiglianze formali.

Vorrei qui esporre brevemente le proprietà delle funzioni iperboliche mettendo in luce le analogie geometriche e analitiche con le funzioni goniometriche.

Definizione geometrica delle funzioni goniometriche

Le funzioni goniometriche (sen$x$, cos$x$, tan$x$, csc$x$, sec$x$, cot$x$, per citare soltanto le principali) possono essere tutte introdotte a partire dalla *circonferenza goniometrica*, ovvero la circonferenza di raggio unitario centrata nell'origine di un sistema di assi cartesiano.[1] Ad esempio, data la circonferenza goniometrica di equazione $X^2 + Y^2 = 1$ e tracciato il raggio OP a distanza angolare α dalla direzione positiva dell'asse *X*, cosα e senα sono definiti rispettivamente come l'ascissa e l'ordinata del punto P; per tanα è necessario tracciare la retta tangente alla circonferenza nel punto (1,0); per cotα è necessario tracciare la retta tangente alla circonferenza nel punto (0,1); e così via…



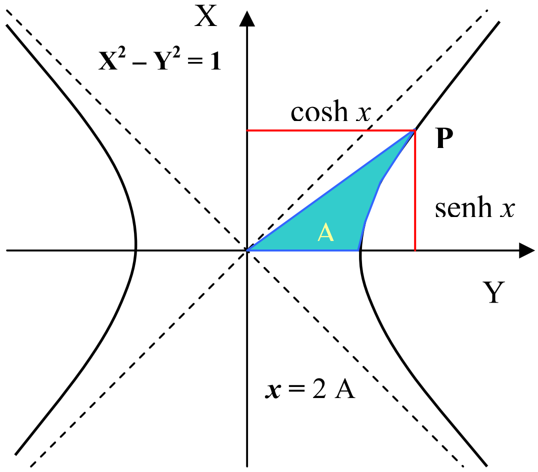
Affinché l'introduzione per *via geometrica* delle funzioni goniometriche sia simile a quella che ci accingiamo a descrivere per le funzioni iperboliche, dobbiamo fare un ulteriore sforzo. Anziché pensare ad una relazione fra angolo α e funzione goniometrica $f(\alpha)$ immaginiamo – cosa per niente comune nella trattazione liceale – che la f sia funzione dell'area del *settore circolare* delimitato dall'asse *X* e dal raggio OP che contenga l'angolo α come in figura; ovvero immaginiamo che la nostra funzione goniometrica operi non più sull'insieme degli angoli orientati α, bensì sull'insieme delle aree A dei settori circolari di apertura α. È possibile farlo perché esiste una relazione biunivoca fra le due quantità geometriche: se α è espresso in radianti e la circonferenza ha raggio r, allora $\mathrm{A} = \frac{r \cdot \alpha r}{2} = \frac{\alpha r^2}{2}$; per la circonferenza goniometrica, in particolare, $\mathrm{A} = \frac{\alpha}{2}$ o $\alpha = 2\,\mathrm{A}$: l'angolo in radianti è numericamente il doppio dell'area del settore circolare corrispondente (area intesa adimensionalizzata e dotata di segno). Dunque, pensiamo di definire il *coseno* e il *seno* di un numero reale ξ qualsiasi in questo modo: cosξ e senξ sono rispettivamente l'ascissa e l'ordinata del punto P sulla circonferenza goniometrica che individua il settore circolare di area $\xi/2$.

---

[1] Esistono in realtà modi diversi per definire queste funzioni. Le definizioni storiche percorrono vie puramente geometriche, stabilendo relazioni fra i lati e gli angoli di un triangolo rettangolo oppure fra le ascisse e le ordinate di un punto sulla circonferenza goniometrica e su rette ad essa tangenti. Non mancano tuttavia definizioni più moderne, che forniscono le funzioni goniometriche come particolari sviluppi in serie di potenze oppure come soluzioni di particolari equazioni differenziali.

Definizione geometrica delle funzioni iperboliche

Similmente introduciamo le funzioni iperboliche (almeno le più semplici: senh$x$, cosh$x$), usando stavolta l'iperbole equilatera centrata nell'origine di semiassi unitari $a = b = 1$, avente quindi come equazione $X^2 - Y^2 = 1$ e come asintoti le rette bisettrici dei quadranti. Impiegheremo uno solo dei due rami di cui l'iperbole è composta: diciamo quello di equazioni $Y = \pm\sqrt{X^2 - 1}$ per $X \geq 1$.

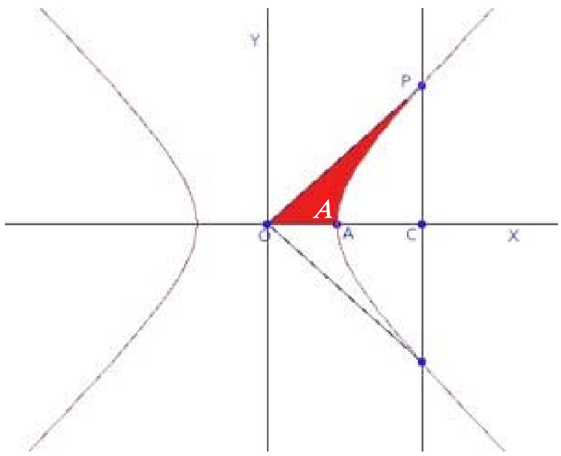


Dato un numero reale x, sia P il punto sul nostro ramo di iperbole che individua il settore iperbolico di area $A = x/2$. Si definiscono *coseno iperbolico* cosh$x$ e *seno iperbolico* senh$x$ rispettivamente l'ascissa e l'ordinata del punto P. L'area del settore iperbolico è presa positiva (o negativa) se P ha ordinata positiva (o negativa).

Nella figura è mostrato in celeste il settore iperbolico, di area A, corrispondente al punto P sul ramo di iperbole; il doppio della sua area è indicato con il simbolo x. Stavolta non è possibile parlare di *angolo* α per avere una definizione di seno e coseno iperbolici con insieme di definizione R: questo perché il segmento OP presenta sempre apertura angolare rispetto all'asse X limitata nell'intervallo $(-\pi/4, \pi/4)$! Ci si potrebbe allora chiedere se la definizione in termini di area del settore iperbolico conduca a funzioni iperboliche definite su tutto l'insieme dei numeri reali R; ovvero se l'area del settore iperbolico continui a crescere all'infinito, in valore assoluto, qualora l'ascissa del punto P cresca all'infinito, oppure se essa converga ad un certo valore estremo.[2] Vedremo fra un attimo che l'area $A = x/2$ del settore iperbolico non è limitata, dunque $A \in (-\infty, +\infty)$.

Espressioni analitiche in termini di esponenziali

Ci chiediamo: è possibile derivare espressioni analitiche per il seno iperbolico e il coseno iperbolico (appena definiti per via geometrica) in termini di altre funzioni note semplici? Sì, è possibile.



Cominciamo con il *coseno iperbolico*. Sia l'ordinata di P positiva (identico l'altro caso). L'area A del settore iperbolico OAP è pari alla differenza tra l'area del triangolo OPC e l'area della regione di piano delimitata dall'arco di iperbole AP, dall'asse X e dal segmento PC. Possiamo dunque scrivere, ricordando che il vertice A dell'iperbole è il punto (1,0):

[2] Il dubbio è ingiustificato: si dimostra che l'area della regione di piano compresa fra un braccio di ciascun ramo dell'iperbole e il suo asintoto è una quantità non convergente: l'equazione canonica dell'iperbole è $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, le equazioni per i bracci divengono $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ e $A = \frac{b}{a}\int_c^{+\infty}\left(x \mp \sqrt{x^2 - a^2}\right)dx$ rispettivamente con $c \geq a$, $c \leq -a$; questo integrale diverge.

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2} \mathrm{X} \sqrt{\mathrm{X}^2 - 1} - \int_1^{\mathrm{X}} \sqrt{\mathrm{X}'^2 - 1}\, d\mathrm{X}' \\
&= \frac{1}{2} \ln\left(\mathrm{X} + \sqrt{\mathrm{X}^2 - 1} \right).
\end{aligned}
$$

Ecco qua la giustificazione di cui necessitavamo per la nostra trattazione: l'area A, ossia la variabile da cui abbiamo fatto dipendere per definizione il seno iperbolico e il coseno iperbolico, non ha limitazioni! Per $\mathrm{X} \geq 1$ e $\mathrm{Y_P} \geq 0$ si ha $A \geq 0$, mentre nel caso $\mathrm{X} \geq 1$ e $\mathrm{Y_P} \leq 0$ si avrà $A \leq 0$[3]. Dunque il dominio per seno e coseno iperbolici è proprio tutto R! Prendiamo allora il logaritmo come nostra futura variabile indipendente[4] e poniamo

$$x = \ln\left(\mathrm{X} + \sqrt{\mathrm{X}^2 - 1} \right) = 2A$$

da cui

$$\mathrm{X} + \sqrt{\mathrm{X}^2 - 1} = e^x \quad \Rightarrow \quad \mathrm{X}^2 - 1 = \left(e^x - \mathrm{X} \right)^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathrm{X} = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}}.$$

Vediamo adesso il *seno iperbolico*. Potremmo seguire il medesimo procedimento, calcolando ancora l'area del settore iperbolico OAP facendo comparire l'ordinata Y del punto P mediante la sostituzione $\mathrm{X} = \sqrt{\mathrm{Y}^2 + 1}$ (sempre nell'ipotesi $\mathrm{Y_P} \geq 0$; similmente nel caso $\mathrm{Y_P} \leq 0$). Tuttavia non sarebbe più istruttivo del calcolo appena fatto: deduciamo perciò il seno iperbolico ricordando che il punto P appartiene all'iperbole per cui le sue coordinate soddisfano la condizione $\mathrm{X}^2 - \mathrm{Y}^2 = 1$.

Per $\mathrm{Y_P} \geq 0$ si ha $x = 2A \geq 0$,
$$
\begin{aligned}
\mathrm{Y} &= \sqrt{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - 1} = \sqrt{\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2} = \left| \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right| \\
&= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{poiché } e^x \geq e^{-x};
\end{aligned}
$$

per $\mathrm{Y_P} \leq 0$ si ha $x = 2A \leq 0$,
$$
\begin{aligned}
\mathrm{Y} &= -\sqrt{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - 1} = -\sqrt{\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2} = -\left| \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right| \\
&= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{poiché } e^x \leq e^{-x}.
\end{aligned}
$$

Riassumendo, per ogni punto P (e quindi per ogni area A) $\boxed{\mathrm{Y} = \operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}}$.

[3] Abbiamo trattato il caso in cui il punto P si trova nel semipiano delle ordinate positive; nell'altro caso dobbiamo cambiare di segno i due termini la cui differenza fornisce l'area A; così A risulterà negativa, come da convenzione.

[4] Stiamo facendo un cambiamento della variabile indipendente: da A a $x = 2A$. Chiameremo coseno iperbolico sia la funzione di A sia la funzione di x, con leggero abuso di notazione.

Definiamo poi, per analogia con la famiglia goniometrica, la *tangente iperbolica*

$$\boxed{\tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}}$$

e naturalmente i seguenti reciproci: secante iperbolica, cosecante iperbolica e cotangente iperbolica

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{sech} x &= \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} \;, \\ \operatorname{csch} x &= \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}} \;, \\ \coth x &= \frac{1}{\tanh x} = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \;. \end{aligned}}$$

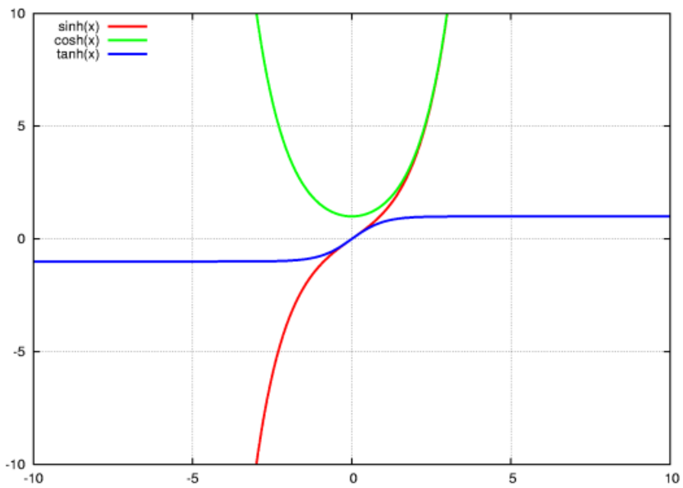
Proprietà e relazioni notevoli

In virtù della loro definizione come ascissa e ordinata di punti sopra la circonferenza goniometrica, il coseno e il seno *dello stesso angolo* soddisfano la seguente importante identità: $\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1$ (relazione fondamentale della goniometria). Una identità analoga è verificata dal coseno iperbolico e dal seno iperbolico *dello stesso valore numerico* per il fatto che essi rappresentano ascissa e ordinata di punti sull'iperbole equilatera centrata con semiassi unitari:

$$\boxed{\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1} \quad \forall\, x \in \mathrm{R}\,.$$

Naturalmente questa relazione può anche essere facilmente dedotta dalle espressioni analitiche ricavate per le funzioni iperboliche. Utilizzando queste espressioni è possibile verificare svariate proprietà simili a quelle soddisfatte dalle funzioni goniometriche.

FUNZIONI GONIOMETRICHE	FUNZIONI IPERBOLICHE
$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$	$\operatorname{senh} 2x = 2 \operatorname{senh} x \cosh x$
$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$ $= 2\cos^2 x - 1$ $= 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$	$\cosh 2x = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x$ $= 2\cos^2 x - 1$ $= 1 + 2\operatorname{sen}^2 x$
$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$	$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$
$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \sin y$	$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \sinh y$
$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$	$\sinh(x-y) = \sinh x \cosh y - \cosh x \sinh y$
$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \sin y$	$\cosh(x-y) = \cosh x \cosh y - \operatorname{senh} x \sinh y$



In figura sono riportati i grafici delle tre funzioni iperboliche fondamentali. Come risulta dalla sua espressione analitica, il seno iperbolico è una funzione *dispari* del proprio argomento similmente alla funzione seno. Passa per l'*origine* degli assi ed ha ivi il suo unico *zero*:

$$\operatorname{senh} x = 0 \iff x = 0.$$

È *positiva* per x > 0, *negativa* per x < 0. Ha un andamento asintotico di tipo esponenziale:

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{senh} x = +\infty, \qquad \operatorname{senh} x \sim e^{x} \quad \text{per } x \to +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{senh} x = -\infty, \qquad \operatorname{senh} x \sim -e^{-x} \quad \text{per } x \to -\infty$$

Proprio come la funzione coseno anche il coseno iperbolico è una funzione *pari* del proprio argomento. Intercetta l'asse y nel punto (0,1) ed è sempre al di sopra della retta $y = 1$; di conseguenza è sempre *positiva* e mai nulla. Ha un andamento asintotico di tipo esponenziale:

$$\lim_{x\to+\infty} \cosh x = +\infty, \qquad \cosh x \sim e^{x} \quad \text{per x} \to +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} \cosh x = +\infty, \qquad \cosh x \sim e^{-x} \quad \text{per x} \to -\infty$$

Infine la tangente iperbolica è funzione *dispari* del proprio argomento, proprio come lo è la tangente. Eredita dal seno iperbolico il passaggio per l'*origine* degli assi e l'unicità dello *zero*. Ha due asintoti orizzontali nelle rette $y = 1$ e $y = -1$:

$$\lim_{x\to+\infty} \tanh x = +1$$
$$\lim_{x\to-\infty} \tanh x = -1$$

Una vistosa differenza rispetto alle tre funzione omologhe della famiglia goniometrica è la *non periodicità* di seno, coseno e tangente iperbolici.

Funzioni inverse e loro espressioni analitiche

Le funzioni senh: R → R e tanh: R → (–1,+1) sono suriettive e iniettive, dunque biunivoche e invertibili nel loro dominio. La funzione cosh: R → [+1,+∞) non è iniettiva per cui, nell'ottica di definire una funzione inversa, è necessario restringere il dominio ad un insieme di non iniettività: limitiamo il dominio a [0, +∞) e otteniamo così una restrizione biunivoca del coseno iperbolico; possiamo adesso invertire questa funzione ristretta.

Chiamiamo *settore seno iperbolico* la funzione inversa del seno iperbolico:

$$y = \operatorname{senh} x \iff x = \operatorname{settsenh} y \ , \quad \text{con} \quad \text{settsenh: R} \to \text{R}.$$

Possiamo derivare una espressione analitica per essa (ricordando che $e^x > 0 \ \forall x$):

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \iff e^{2x} - 2e^x y - 1 = 0 \iff e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}$$

da cui

$$\boxed{x = \operatorname{settsenh} y = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right)} \ .$$

Sia il *settore coseno iperbolico* la funzione inversa della suddetta restrizione del coseno iperbolico:

$$y = \cosh x \iff x = \operatorname{settcosh} y \ , \quad \text{con} \quad \text{settcosh: } [+1, +\infty) \to [0, +\infty).$$

Procendendo analogamente a quanto fatto sopra deriviamo una espresione analitica per essa (ricordando che $e^x \geq 1 \ \forall x \geq 0$):

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \iff e^{2x} - 2e^x y + 1 = 0 \iff e^x = y + \sqrt{y^2 - 1}$$

$$\boxed{x = \operatorname{settcosh} y = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)} \ .$$

Chiamiamo infine *settore tangente iperbolica* la funzione inversa della tangente iperbolica:

$$y = \tanh x \iff x = \operatorname{setttanh} y \ , \quad \text{con} \quad \text{setttanh: } (-1,+1) \to \text{R}.$$

Possiamo derivare una espressione analitica:

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \iff y = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \iff e^{2x}\left(y - 1\right) + y + 1 = 0 \iff e^{2x} = \frac{1 + \text{y}}{1 - y}$$

$$\boxed{x = \operatorname{setttanh} y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 + \text{y}}{1 - y}\right)} \ .$$

Come si vede anche per le funzioni inverse è stato possibile determinare espressioni analitiche in termini di funzioni elementari note, stavolta logaritmi naturali anziché esponenziali… Allo stesso modo è semplice introdurre le funzioni inverse di secante, cosecante e cotangente iperboliche, denominate *settore secante iperbolica*, *settore cosecante iperbolica* e *settore cotangente iperbolica*.

Riassunte nel seguente schema sinottico stanno alcune *regole di derivazione* e *integrazione*:

FUNZIONI GONIOMETRICHE	FUNZIONI IPERBOLICHE
$\mathrm{D}\ \mathrm{sen}\,x = \cos x$	$\mathrm{D}\ \mathrm{senh}\,x = \cosh x$
$\mathrm{D}\ \cos x = -\mathrm{sen}\,x$	$\mathrm{D}\ \cosh x = \mathrm{senh}\,x$
$\mathrm{D}\ \tan x = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\mathrm{D}\ \tanh x = 1 - \tanh^2 x = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$
$\mathrm{D}\ \mathrm{arcsen}\,x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\mathrm{D}\ \mathrm{settsenh}\,x = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\mathrm{D}\ \arccos x = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\mathrm{D}\ \mathrm{settcosh}\,x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\mathrm{D}\ \arctan x = \dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{D}\ \mathrm{setttanh}\,x = \dfrac{1}{1-x^2}$
$\int \mathrm{sen}\,x\ \mathrm{d}x = -\cos x + c$	$\int \mathrm{senh}\,x\ \mathrm{d}x = \cosh x + c$
$\int \cos x\ \mathrm{d}x = \mathrm{sen}\,x + c$	$\int \cosh x\ \mathrm{d}x = \mathrm{senh}\,x + c$
$\int \tan x\ \mathrm{d}x = -\ln\lvert\cos x\rvert + c$	$\int \tanh x\ \mathrm{d}x = \ln(\cosh x) + c$

Tavola di integrali utili

Di uso comune possono risultare i seguenti integrali indefiniti:

- $\displaystyle\int \mathrm{senh}^2 ax\ \mathrm{d}x = \frac{1}{4a}\mathrm{senh}\,2ax - \frac{x}{2} + c$
- $\displaystyle\int \cosh^2 ax\ \mathrm{d}x = \frac{1}{4a}\mathrm{senh}\,2ax + \frac{x}{2} + c$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\mathrm{senh}\,ax}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\ln\left|\tanh\frac{ax}{2}\right| + c = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{\cosh ax - 1}{\cosh ax + 1}\right| + c$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\cosh ax}\mathrm{d}x = \frac{2}{a}\arctan e^{ax} + c$
- $\displaystyle\int x\,\mathrm{senh}\,ax\ \mathrm{d}x = \frac{1}{a}x\cosh ax - \frac{1}{a^2}\mathrm{senh}\,ax + c$
- $\displaystyle\int x\cosh ax\ \mathrm{d}x = \frac{1}{a}x\,\mathrm{senh}\,ax - \frac{1}{a^2}\cosh ax + c$
- $\displaystyle\int \sqrt{x^2+1}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\mathrm{settsenh}\,x + x\sqrt{x^2+1}\right) + c$
- $\displaystyle\int \sqrt{x^2-1}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(-\mathrm{settcosh}\,x + x\sqrt{x^2-1}\right) + c$

Ringraziamenti e Bibliografia

Questo breve opuscolo non ha la pretesa di completezza: tratta soltanto particolari proprietà di alcune funzioni iperboliche, senza addentrarsi eccessivamente nei dettagli dei calcoli, né mette in mostra le possibili applicazioni (e ce ne sono!) in campo matematico e fisico. Tuttavia penso basti come introduzione alle funzioni iperboliche, alla loro origine e alla loro relazione con il mondo delle funzioni goniometriche. Dato il carattere amatoriale del testo e per il formalismo in esso contenuto, lo penso destinato a chiunque non conosca già le funzioni iperboliche o che ne ha appena fatto conoscenza e volesse saperne di più, ed abbia basi matematiche liceali o universitarie. Per approfondimenti rimando a testi specialistici. Tutti gli errori sono imputabili all'autore.

Fonti:
- *Appunti di Analisi Matematica I, corso di laurea in Fisica, Gabriele Villari e Giovanni Cupini*
- *Pagine wikipedia.it dedicate alle funzioni iperboliche (da cui sono tratte alcune immagini)*

Gennaio 2010

MARCO GABBRIELLI