Sistemi di unità di misura elettriche e magnetiche

Questo lavoro vorrebbe tracciare, seppur sommariamamente, un breve riassunto storico di metrologia e presenta, forse un po' alla rinfusa, i principali sistemi metrici adottati in elettrodinamica classica e quantistica. Per chi volesse approfondire questi aspetti consiglio l'introduzione e l'appendice dell'ottimo J. D. Jackson, Elettrodinamica classica*, Zanichelli, da cui proviene parte del presente materiale.*

Lo scopo di questa appendice è apportare alla controversia la maggiore chiarezza possibile con il minor chiasso possibile, senza pretendere di risolverla.
J. D. Jackson, *Elettrodinamica classica*

1 Un po' di storia...

Fra il **1777** e il **1785** lo scienziato inglese Henry Cavendish e il fisico francese Charles Augustin de Coulomb verificarono sperimentalmente che, in aria secca, la forza F tra due corpi carichi puntiformi fermi è direttamente proporzionale alla carica q_1 e q_2 di ciascuno dei due ed inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza d: la *legge di Coulomb* nel vuoto si scrive

$$F = k_0 \frac{q_1 q_2}{d^2} \ , \tag{1.1}$$

poi generalizzabile in forma vettoriale e per corpi carichi estesi. Si aprivano *due strade* per quanto concerneva la dimensione (e quindi l'unità di misura) della costante di proporzionalità k_0.

Dato che la carica elettrica era una nuova grandezza fisica, mentre la forza e la lunghezza erano ben definite secondo metodi operativi che ne fissavano anche le unità di misura, si sarebbe potuto approfittare della relazione (1.1) per definire la carica elettrica come *grandezza derivata*, la cui dimensione sarebbe venuta a dipendere dalle dimensioni delle altre grandezze già definite. Questo effettivamente fu quanto accadde nell'ambito del sistema di unità di misura CGS: scegliendo per semplicità il valore della costante k_0 pari a 1, la legge di Coulomb diveniva, almeno per il vuoto,

$$F = \frac{q_1 q_2}{d^2} \quad (CGS) \ . \tag{1.2}$$

La dimensione della carica elettrica nel CGS veniva così univocamente determinata in termini delle dimensioni di lunghezza L, massa M e tempo T:

$$[q] = [\sqrt{F}][d] = L^{\frac{3}{2}} \ M^{\frac{1}{2}} \ T^{-1} \ . \tag{1.3}$$

L'unità di misura nel sistema CGS venne chiamata *franklin*, in onore dello scienziato americano Benjamin Franklin (talvolta si usa anche il nome *statcoulomb*):

$$1 \ Fr \equiv 1 \ statC = 1 \ dyne^{\frac{1}{2}} \ cm = 1 \ erg^{\frac{1}{2}} \ cm^{\frac{1}{2}} = 1 \ cm^{\frac{3}{2}} \ g^{\frac{1}{2}} \ s^{-1} \ . \tag{1.4}$$

Il *franklin* è dunque definito come la misura di quella quantità di carica elettrica che, posta ferma nel vuoto alla distanza di 1 cm da una carica identica ferma, produce una forza repulsiva pari a 1 $dyne$. Il sottosistema di unità di misura che fu ottenuto ponendo $k_0 = 1$ prese il nome di **CGS ESU** (sistema di unità elettrostatiche).

Il procedimento adottato nel sistema CGS risultava poco convincente: se da un lato esso evitava l'introduzione di una ulteriore grandezza fondamentale con la sua definizione operativa ed eliminava – soltanto per il vuoto – una costante da una relazione sperimentale importantissima, dall'altro lato ingarbugliava il legame fra la nuova unità di misura e quelle già definite: infatti, la carica elettrica appariva come una proprietà del tutto nuova della materia, non riconducibile a lunghezze o masse o intervalli di tempo! Per questi motivi, nell'ambito del sistema di misura **MKS** fu seguita un'altra strada: siccome i fenomeni di natura elettrica apparivano nuovi, fu deciso di definire una grandezza elettrica come *grandezza fondamentale*, che avrebbe affiancato le altre grandezze fondamentali già definite. Per motivi di carattere pratico, però, non fu scelta la carica elettrica, bensì l'intensità della corrente elettrica (nella pratica si ha più spesso a che fare con cariche in movimento anziché con cariche ferme, inoltre sappiamo misurare più facilmente e con precisione migliore correnti elettriche piuttosto che quantità di carica). Fu così definita, in modo operativo e non come conseguenza formale di una scelta di convenienza in una relazione matematica, l'*ampere* come unità di misura della intensità di corrente, in onore del fisico francese André-Marie Ampère. Dopo aver stabilito il legame fra carica elettrica e corrente elettrica

$$i = \frac{dq}{dt} \tag{1.5}$$

l'unità di carica *coulomb* veniva definita – nuovamente come unità derivata – a partire dalla unità fondamentale *ampere*. In conseguenza di questo approccio, nel sistema MKS la costante k_0 non poteva avere valore unitario e inoltre possedeva dimensione e unità di misura proprie:

$$[k_0] = \frac{[Fd^2]}{[q^2]} = L^3\ M\ T^{-4} I^{-2} \quad \text{in unità } N\ \frac{m^2}{C^2} = m^3\ kg\ s^{-4}\ A^{-2}\ . \tag{1.6}$$

In tali unità di misura, la costante di Coulomb nel vuoto risultava determinata dall'esperimento; equivalentemente, l'esperimento determinava la *costante dielettrica del vuoto* mediante la quale veniva definita la costante di Coulomb:

$$k_0 \equiv \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\ . \tag{1.7}$$

Presto arrivarono scoperte intorno ad altri fenomeni, quelli magnetici. Intorno al **1820** gli scienziati francesi Jean-Baptiste Biot e Félix Savart formularono la legge di natura empirica che permette di calcolare il modulo del campo di induzione magnetica $\vec{B}$, generato da una corrente elettrica i entro un filo rettilineo indefinito, in un punto dello spazio a distanza radiale ρ : la *legge di Biot-Savart* nel vuoto si scrive

$$B = 2c_0 \frac{i}{\rho}\ , \tag{1.8}$$

poi generalizzabile in forma vettoriale e per correnti qualsiasi nella cosiddetta *prima formula di Laplace*. Il campo vettoriale $\vec{B}$ viene definito operativamente a partire dalla forza $d\vec{F}$ registrata su un elemento di filo $d\vec{s}$ attraversato dalla corrente di prova I tramite la *seconda formula di Laplace*:

$$d\vec{F} = I d\vec{s} \times \vec{B}\ . \tag{1.9}$$

Sempre nel **1820** Ampère, in una celebre esperienza, provò che fra due fili rettilinei paralleli a distanza d entro cui scorrono correnti elettriche i_1 e i_2 insorge una forza F per unità di lunghezza del filo l (attrattiva o repulsiva secondo i versi delle correnti): la *legge di Ampère* nel vuoto si scrive

$$\frac{dF}{dl} = 2c_0 \frac{i_1 i_2}{d} \ . \tag{1.10}$$

Anche in questo caso si aprivano due strade per quanto concerneva la dimensione e l'unità di misura della costante di proporzionalità c_0 e della corrente i.

Nel sistema CGS, ancora una volta, si approfittò dell'arbitrarietà della relazione (1.10) per definire l'intensità della corrente elettrica come *grandezza derivata*, la cui dimensione sarebbe venuta a dipendere dalle dimensioni delle altre grandezze già definite. Scegliendo per semplicità il valore della costante c_0 pari a 1, la legge di Coulomb diveniva, almeno per il vuoto,

$$\frac{dF}{dl} = 2 \frac{i_1 i_2}{d} \ . \tag{1.11}$$

La dimensione della corrente nel CGS veniva così univocamente determinata in termini delle dimensioni di lunghezza L, massa M e tempo T:

$$[i] = [\sqrt{F}] = L^{\frac{1}{2}} \ M^{\frac{1}{2}} \ T^{-1} \ . \tag{1.12}$$

L'unità di misura nel sistema CGS venne chiamata *biot* (talvolta si usa anche il nome *abampere*):

$$1 \ Bi \equiv 1 \ abA = 1 \ \sqrt{dyne} = 1 \ cm^{\frac{1}{2}} \ g^{\frac{1}{2}} \ s^{-1} \ . \tag{1.13}$$

Il *biot* è dunque definito come la misura di quella corrente elettrica che, mantenuta costante in due fili conduttori sottili infiniti paralleli alla distanza di 1 cm nel vuoto, produce fra essi una forza pari a 2 $dyne$ per ogni centimetro di filo. Il sottosistema di unità di misura che si ottenne ponendo $c_0 = 1$ fu chiamato **CGS EMU** (sistema di unità elettromagnetiche); esso nasce come sistema distinto dal CGS ESU.

Questo approccio sarà poi quello adottato anche nel sistema **MKS**: il fenomeno descritto dall'equazione (1.10) fu adoperato proprio per definire operativamente l'intensità di corrente e la sua unità di misura *ampere*: un *ampere* è definito come la misura di quella corrente elettrica che, mantenuta costante in due fili conduttori sottili infiniti paralleli alla distanza di 1 m nel vuoto, produce fra essi una forza pari a $2 \cdot 10^{-7}$ N per ogni metro di filo. Di conseguenza, nel sistema MKS (poi chiamato MKSA) la costante c_0 non poteva avere valore unitario e inoltre possedeva dimensione e unità di misura proprie:

$$[c_0] = \frac{[F]}{[i^2]} = L \ M \ T^{-2} \ I^{-2} \quad \text{in unità } \frac{N}{A^2} = m \ kg \ s^{-2} \ A^{-2} \ . \tag{1.14}$$

In tali unità di misura MKSA, la costante di Ampère nel vuoto risultava fissata per definizione: $c_0 \equiv 10^{-7} \ N \ A^{-2}$, esattamente come nel CGS la definizione di *biot* fissava la costante a 1 (con la differenza notevole che in MKSA c_0 ha unità di misura, nel CGS è adimensionale). Equivalentemente, risultava fissata la *permeabilità magnetica del vuoto* mediante la quale veniva definita la costante di Ampère:

$$c_0 \equiv \frac{\mu_0}{4\pi} \ . \tag{1.15}$$

1.1 Tappe fondamentali

Intorno al **1795** la Repubblica Francese adottò il sistema metrico proposto dell'Accademia Francese di Scienze, eleggendo il metro come unità di misura ufficiale per le lunghezze. Il matematico tedesco Carl Friedrich Gauss fu il primo a proporre, nel **1832**, un sistema di unità magnetiche fondato sull'uso del millimetro, del grammo e del secondo come "unità assolute".

Nel **1861** l'Associazione Britannica per l'Avanzamento della Scienza propose un sistema di unità di misura in cui le unità fondamentali erano tre: lunghezza, massa e tempo. L'unità di lunghezza era il metro, ovvero la lunghezza a 0 °C del prototipo in platino-iridio conservato negli archivi di Parigi; l'unità di massa era il grammo, vale a dire la millesima parte della massa campione in platino-iridio conservata a Parigi; l'unità di tempo era il secondo, definito come la $24 \times 60 \times 60$-esima parte del giorno solare medio.

Nel **1873** la stessa Associazione raccomandava di sostituire il metro con il centimetro, poiché con questa unità di lunghezza la densità dell'acqua era unitaria. Come conseguenza della scelta delle tre unità fondamentali, questo sistema di misure fu definitivamente chiamato *sistema CGS* (centimetro-grammo-secondo). Nel **1874** questo sistema fu esteso dai fisici inglesi James Clerk Maxwell e William Thomson con l'introduzione di un discreto numero di unità elettriche e magnetiche. Il sistema CGS venne così a dividersi in due sottosistemi, uno *elettrostatico* (ESU) e uno *elettromagnetico* (EMU), secondo che venisse assunta come legge fondamentale quella per la forza fra cariche elettriche o quella per la forza fra correnti elettriche. Il rapporto fra l'unità di carica (o corrente) elettrostatica e l'unità di carica (o corrente) elettromagnetica si scoprì essere una costante fondamentale, ricavabile empiricamente, e pari entro le incertezze alla velocità della luce nel vuoto c nota allora.

A quel tempo la migliore determinazione della velocità della luce nel vuoto era quella dovuta all'esperimento con gli specchi rotanti eseguita da Léon Foucault nel **1862**: essa forniva una misura affetta da un errore sperimentale relativo di appena $0,2\%$. Altri prima si erano cimentati nell'impresa: nel **1849** Hippolyte Fizeau misurò il valore $c = 3,15 \cdot 10^8\ m/s$; nel **1857** Gustav Kirchoff aveva calcolato che un segnale elettrico in un filo praticamente privo di resistenza viaggiava proprio alla velcocità c di Fizeau; nei primi **anni Sessanta** dell'Ottocento James Clerk Maxwell mostrò che, secondo la teoria dell'elettromagnetismo a cui stava lavorando, le onde elettromagnetiche si dovevano propagare nello spazio vuoto con una velocità il cui valore si avvicinava a quello misurato da Fizeau, e da ciò fu portato a supporre che la luce fosse un'onda elettromagnetica.

Tuttavia regnava ancora parecchia confusione nel campo delle unità di misura elettriche e magnetiche e non era stato ratificato alcuno standard condiviso. Ecco come si esprimeva nel gennaio **1881** George Carey Foster, presidente della Società degli Ingegneri Telegrafici e degli Elettricisti: ≪Ho insistito molto sul valore scientifico di un sistema assoluto di misure e sul modo nel quale l'adozione di un tal sistema per quanto riguarda l'elettricità sia stata spinta dai bisogni degli elettricisti pratici [...] Nella scienza, il costante sviluppo delle idee genera il bisogno di un più largo potere di espressioni. Per supplire a questo bisogno, il professor Everett introdusse l'uso, sette o otto anni fa, delle utili parole *dyne* e *erg*, e pare che ora abbiano preso piede, ma difficilmente ciò sarebbe avvenuto senza l'esempio incoraggiante dell'ohm e del volt≫.

L'impiego di un sistema esteso fu approvato dal primo Congresso internazionale degli elettricisti tenutosi a Parigi nel settembre **1881**; in quell'occasione furono assegnati i nomi a diverse "unità pratiche" di elettricità (non era ancora sentito il bisogno di introdurre unità pratiche di magnetismo). Nel frattempo le misurazioni della velocità della luce venivano eseguite con sempre maggior precisione. Nel **1888** Heinrich Rudolf Hertz combina le unità CGS elettrostatiche ed elettromagnetiche all'interno di un singolo sistema in cui compare esplicitamente la velocità della luce nel vuoto c; egli lo chiamò *sistema gaussiano*.

A inzio Novecento, celebri fisici quali Lorentz, Planck, Einstein, Millikan, Bohr, Sommerfeld, Pauli, de Broglie, Schrodinger, Born, Heisemberg, Dirac facevano uso delle unità gaussiane. Nonostante ciò, a causa degli ordini di grandezza di certe quantità nei calcoli numerici, molte delle unità CGS si rivelarono essere poco comode da maneggiare per scopi pratici. Già a partire da fine Ottocento, il CGS fu lentamente surclassato a livello internazionale dal sistema MKSA (metro-kilogrammo-secondo-ampere), il quale sarebbe divenuto il moderno standard SI.

Nel **1875** era stato istituito a Parigi l'Ufficio Internazionale di Pesi e Misure, che aveva continuato a convocarsi periodicamente. Nel corso dell'undicesima riunione, nell'ottobre **1960**, la Commissione formata dai rappresentanti delle Nazioni contraenti approvò il *sistema internazionale delle unità di misura* (SI) basato oggi su sette grandezza fondamentali (metro, kilogrammo, secondo, ampere, kelvin, mole, candela) e due grandezza supplementari (radiante, steradiante). Nel **1971** il Consiglio della Comunità Europea stabilì che gli Stati membri rendessero obbligatorio l'impiego del nuovo sistema; l'Italia ha provveduto nel **1982** con apposito Decreto del Presidente della Repubblica.

La precisione nella determinazione sperimentale di c si spinse fino a una parte su un miliardo negli **anni Settanta** del Novecento. Parallelamente si notò come la definizione di metro fosse caratterizzata da una accuratezza non sufficiente per vari scopi. Nel **1983** fu così deciso a livello internazionale di arrestare le campagne di misurazione e utilizzare la costanza di c per ridefinire il metro: il valore della velocità della luce nel vuoto viene fissato ad un valore esatto e diviene una costante ben definita nel sistema SI:

$$c \equiv 2,99792458 \cdot 10^8 \ m/s \ . \tag{1.16}$$

Miglioramenti nelle tecniche sperimentali non modificheranno il valore c nelle unità SI, bensì permetteranno una migliore determinazione del metro. In questo spirito, le costanti numeriche che compaiono nelle equazioni fondamentali dell'elettrostatica e della magnetostatica del vuoto sono univocamente fissate:

$$k_0 \equiv c^2 \cdot 10^{-7} \ NA^{-2} \cong 8,9875518 \cdot 10^9 \ Nm^2C^{-2} \tag{1.17}$$

$$\varepsilon_0 \equiv \frac{10^7}{4\pi c^2} \ N^{-1}A^2 \cong 8,8541878 \cdot 10^{-12} \ N^{-1}m^{-2}C^2 \tag{1.18}$$

$$1 \ C \leftrightarrow 2,99792458 \cdot 10^9 \ Fr \tag{1.19}$$

(dove la conversione si intende *esatta* e il simbolo $\leftrightarrow$ è stato scelto al posto di $=$ a causa della incompatibilità delle dimensioni fisiche dei due membri)

$$c_0 \equiv 10^{-7} \ NA^{-2} \tag{1.20}$$

$$\mu_0 \equiv 4\pi 10^{-7} \ NA^{-2} \cong 1,2566371 \cdot 10^{-6} \ NA^{-2} \tag{1.21}$$

$$1A \leftrightarrow 10^{-1} \ Bi \tag{1.22}$$

(dove la conversione si intende *esatta* e il simbolo $\leftrightarrow$ è stato scelto al posto di $=$ a causa della incompatibilità delle dimensioni fisiche dei due membri).

2 Sull'arbitrarietà delle unità di misura

Le caratteristiche desiderabili di un sistema di unità di misura, in qualsiasi campo di utilizzo, sono la convenienza e la chiarezza. Per esempio, i fisici teorici che lavorano sulla teoria quantistica dei campi o sulla teoria delle particelle elementari trovano conveniente scegliere unità di misura in modo che certe costanti universali quali il quanto d'azione di Planck $\hbar$ e la velocità della luce nel vuoto c siano adimensionali e di valore unitario; il sistema di unità che ne risulta viene chiamato *sistema delle unità naturali* e richiede una sola unità di misura fondamentale, normalmente la lunghezza: tutte le grandezze fisiche, siano esse intervalli di tempo o forze o energie, sono esprimibili in termini di una sola unità di misura ed hanno dimensioni che sono potenze della dimensione della grandezza fondamentale.

Nella discussione delle unità di misura e delle dimensioni delle grandezze elettriche e magnetiche, prendiamo come punto di partenza la scelta tradizionale della lunghezza L, della massa M e del tempo T come dimensioni fondamentali indipendenti. Inoltre, accettiamo la definizione comune di **intensità di corrente** come la velocità di variazione nel tempo della quantità di carica:

$$i := \frac{dq}{dt} \ . \tag{2.1}$$

Naturalmente sono possibili altre definizioni: nello studio della relatività ristretta sarebbe più naturale dare alla corrente le dimensioni di una carica divisa per una lunghezza, secondo la definizione

$$i = \frac{1}{c}\frac{dq}{dt} \ , \tag{2.2}$$

così la densità di corrente $\vec{j}$ e la densità di carica ρ avrebbero le stesse dimensioni e formerebbero una quadrivettore naturale; un simile sistema esiste ed è chiamato *sistema gaussiano modificato*.

Per semplificare l'argomento considereremo inizialmente soltanto fenomeni elettromagnetici generati da cariche e correnti nello spazio vuoto.

2.1 Equazioni elettromagnetiche nel vuoto

L'**equazione di continuità** per le densità di carica e di corrente assume la stessa forma in *tutti* i sistemi di unità di misura poiché non contiene costanti arbitrarie, dato che fissata l'unità di carica rimane fissata anche l'unità di corrente:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \ . \tag{2.3}$$

La legge fisica fondamentale che governa l'elettrostatica delle cariche puntiformi è la già ricordata **legge di Coulomb**:

$$F_1 = k_1 \frac{qq'}{r^2} \ . \tag{2.4}$$

Ripetiamolo per chiarezza: il valore numerico e la dimensione della costante di proporzionalità k_1 *o* sono determinati dall'equazione stessa se il valore numerico e la dimensione della carica elettrica sono stati definiti indipendentemente, *oppure* vengono scelti arbitrariamente per definire di conseguenza l'unità di carica. All'interno del nostro schema metrico, l'unica cosa che per ora sappiamo è che il prodotto $k_1 q q'$ ha le dimensioni $L^3\ M\ T^{-2}$

Il campo elettrico $\vec{E}$ è una grandezza derivata, usualmente definita come la forza elettrica per unità di carica di prova q'. Più in generale, potremmo definire $\vec{E}$ *proporzionale* alla forza per unità di carica di prova tramite una costante di proporzionalità che abbia magari dimensioni tali che il campo elettrico sia dimensionalmente differente da una forza per unità di carica. Poiché $\vec{E}$ è la *prima* grandezza derivata che introduciamo, senza alcuna perdita di generalità possiamo porre questa costante di proporzionalità pari a 1 e definire quindi il campo elettrico generato da una sorgente puntiforme q

$$E = k_1 \frac{q}{r^2}\ . \tag{2.5}$$

La fondamentale legge fisica che descrive la forza fra due correnti filiformi infinite nel vuoto è la sopra citata **legge di Ampère**:

$$\frac{dF_2}{dl} = 2k_2 \frac{ii'}{d}\ . \tag{2.6}$$

Il fattore numerico 2 (adimensionale) è inserito per futura convenienza nella specificazione del valore di k_2. Per effetto della *scelta* del rapporto delle dimensioni della carica e delle dimensioni della corrente in termini di tempo (vedi la 2.1 o anche la 2.3), le dimensioni di k_2 rispetto a quelle di k_1 risultano già definite. Dalle equazioni (2.4) e (2.6) si vede che la dimensione del rapporto di k_1 e k_2 è indipendente dalla dimensione scelta per la carica ed è quella di una velocità al quadrato:

$$\frac{[k_1]}{[k_2]} = [v^2] = L^2 T^{-2}\ . \tag{2.7}$$

Inoltre, dal confronto dei valori delle due forze meccaniche (2.4) e (2.6) per valori noti di cariche e correnti è possibile ricavare *sperimentalmente* il valore numerico per il suddetto rapporto fra costanti nello spazio vuoto: si trova che esso è pari con ottima precisione al quadrato di c:

$$\frac{k_1}{k_2} = c^2\ . \tag{2.8}$$

L'induzione magnetica $\vec{B}$ è definita operativamente dalla *seconda formula di Laplace*, che nel caso più generale si scrive

$$d\vec{F} = \frac{1}{\alpha}\ I\ d\vec{s} \times \vec{B}\ , \tag{2.9}$$

dove α è una nuova costante arbitraria; equivalentemente, possiamo scrivere la **forza di Lorentz** per una carica puntiforme soggetta al solo campo di induzione:

$$\vec{F} = \frac{1}{\alpha}\ q\ \vec{v} \times \vec{B}\ . \tag{2.10}$$

Si trova sperimentalmente che il campo $\vec{B}$ generato da un filo rettilineo infinito percorso da corrente costante i ha modulo dato dalla *legge di Biot-Savart* (poi generalizzabile nella *prima formula di Laplace*)

$$B = 2k_2\ \alpha\ \frac{i}{d} \tag{2.11}$$

analoga alla *legge di Coulomb*, con il campo di induzione proporzionale alla forza per unità di lunghezza per unità di corrente di prova i'. Le dimensioni del rapporto fra campo elettrico e campo di induzione magnetica si ricavano dalle (2.1), (2.5), (2.8) e (2.11):

$$\frac{[E]}{[B]} = LT^{-1}[\alpha^{-1}] \ . \tag{2.12}$$

La terza e ultima relazione empirica fondamentale per l'elettrodinamica che utilizziamo per specificare unità e dimensioni elettromagnetiche è la **legge di Faraday**, o *legge di induzione*, la quale collega i fenomeni elettrici a quelli magnetici. Espressa in forma integrale, essa mostra la proporzionalità diretta fra la forza elettromotrice indotta in un circuito e la rapidità di variazione nel tempo del flusso di induzione magnetica concatenato con il circuito

$$\mathcal{E} = -k_3 \frac{d\Phi_\Sigma(\vec{B})}{dt} \ , \tag{2.13}$$

mentre espressa in forma differenziale, essa diventa la terza equazione di Maxwell

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -k_3 \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \ , \tag{2.14}$$

con k_3 costante di proporzionalità. Poiché sono già state definite le dimensioni di $\vec{E}$ rispetto a quelle di $\vec{B}$ (vedi la 2.12), le dimensioni di k_3 possono essere espresse in funzione di quelle di grandezze precedentemente definite, basta imporre che i due termini dell'equazione (2.14) siano omogenei:

$$L^{-1}[E] = [k_3][B]\, T^{-1} \quad \Rightarrow \quad [k_3] = [\alpha^{-1}] \ . \tag{2.15}$$

In realtà, k_3 non ha solo le stesse dimensioni di α^{-1}: si può dimostrare che k_3 è proprio *uguale* a α^{-1}. Per farlo, scriviamo qui, nella forma più generale, tutte le *equazioni di Maxwell nel vuoto*, le quali derivano dalle equazioni fondamentali di origine sperimentale di cui abbiamo parlato (a cui si devono aggiungere le necesserie considerazioni sulla corrente di spostamento):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi k_1 \rho \tag{2.16}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \tag{2.17}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + k_3 \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \tag{2.18}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - k_4 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 4\pi k_2 \ \alpha \ \vec{j} \ . \tag{2.19}$$

Innanzitutto notiamo che la costante k_4 non è indipendente, in quanto può essere espressa in termini di altre costanti: prendendo la divergenza della (2.19), ricordando che la divergenza di un rotore è identicamente nulla e facendo uso della (2.16) abbiamo

$$0 = k_4 \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} + 4\pi k_2 \alpha \, \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 4\pi k_1 k_4 \frac{\partial \rho}{\partial t} + 4\pi k_2 \alpha \, \vec{\nabla} \cdot \vec{j} \ , \tag{2.20}$$

dalla quale discende, per compatibilità con l'equazione di continuità (2.3),

$$k_4 = \alpha \frac{k_2}{k_1} = \frac{\alpha}{c^2} \ . \tag{2.21}$$

Adesso non resta che scrivere l'*equazione delle onde* per il campo elettromagnetico combinando le equazioni di Maxwell calcolate in punti dello spazio privi di sorgenti: il risultato è

$$\nabla^2 \vec{B} - k_3\, \alpha\, \frac{k_2}{k_1} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \ . \tag{2.22}$$

La velocità di propagazione delle onde nel vuoto viene quindi espressa come combinazione opportuna delle costanti; poiché è noto sperimentalmente che questa velocità è quella della luce nel vuoto c e poiché già conosciamo il rapporto fra k_1 e k_2 (vedi 2.8), segue

$$k_3\ \alpha\ \frac{k_2}{k_1} = \frac{1}{c^2} \quad \Rightarrow \quad k_3 = \frac{1}{\alpha} \ . \tag{2.23}$$

Riassumendo, nella nostra trattazione abbiamo introdotto *cinque costanti* k_1, k_2, k_3, k_4, α, ma esse non sono tutte indipendenti; abbiamo infatti stabilito *tre relazioni* fra di loro, che qui riportiamo:

$$\frac{k_1}{k_2} = c^2 \ , \quad k_4 = \frac{\alpha}{c^2} \ , \quad k_3 = \frac{1}{\alpha} \ . \tag{2.24}$$

Quindi possiamo (anzi, dobbiamo) fissare *due* costanti in modo *arbitrario*, per dedurre di conseguenza le altre. I diversi sistemi di unità di misura elettromagnetiche differiscono fra loro per la scelta dei valori e delle dimensioni delle costanti. La Tab. 1 contiene le cinque costanti per i sistemi di unità di misura più comuni. In particolare si fa una distinzione importante: si dicono *razionalizzati* quei sistemi che fanno scomparire i fattori 4π nella definizione delle forze e dei campi elettrici e magnetici e li fanno comparire nelle equazioni di Maxwell; si dicono invece *non razionalizzati* o *classici* quei sistemi in cui i fattori 4π compaiono nelle equazioni di Maxwell ma non nelle forze e nei campi.

2.2 Equazioni elettromagnetiche nel pieno

Finora abbiamo discusso soltanto di campi elettromagnetici nello spazio vuoto, di conseguenza sono comparsi i due soli campi fondamentali $\vec{E}$ e $\vec{B}$. Come si definiscono i campi ausiliari $\vec{D}$ e $\vec{H}$ in presenza di mezzi materiali? Se le proprietà fisiche medie del mezzo sono descritte mediante una polarizzazione $\vec{P}$ (densità volumica di momento di dipolo elettrico) e una magnetizzazione $\vec{M}$ (densità volumica di momento di dipolo magnetico), la forma generale delle definizioni è

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \lambda \vec{P} \tag{2.25}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \lambda' \vec{M} \tag{2.26}$$

dove ε_0, μ_0, λ, λ' sono costanti. Non si ottiene nulla di più attribuendo a $\vec{D}$ e $\vec{P}$ (o a $\vec{H}$ e $\vec{M}$) dimensioni diverse. Perciò λ e λ' vengono generalmente scelte come numeri puri: $\lambda = \lambda' = 1$ nei sistemi razionalizzati, $\lambda = \lambda' = 4\pi$ nei sistemi non razionalizzati. Si potrebbe però fare in modo che i campi $\vec{D}$ e $\vec{P}$ differiscano dimensionalmente da $\vec{E}$ (e similmente $\vec{H}$ e $\vec{M}$ e da $\vec{B}$) scegliendo

Sistema	k_1	k_2	k_3	k_4	α	ε_0	μ_0
SI	$10^{-7}c^2$	10^{-7}	1	$\frac{1}{c^2}$	1	$\frac{10^7}{4\pi c^2}$	$4\pi \cdot 10^{-7}$
Gauss	1	$\frac{1}{c^2}$	$\frac{1}{c}$	$\frac{1}{c}$	c	1	1
Heaviside-Lorentz	$\frac{1}{4\pi}$	$\frac{1}{4\pi c^2}$	$\frac{1}{c}$	$\frac{1}{c}$	c	1	1
Elettrostatico	1	$\frac{1}{c^2}$	1	$\frac{1}{c^2}$	1	1	$\frac{1}{c^2}$
Elettromagnetico	c^2	1	1	$\frac{1}{c^2}$	1	$\frac{1}{c^2}$	1

Tabella 1: *valori delle costanti elettromagnetiche nei sistemi di unità di misura più comuni. Il simbolo c indica la velocità della luce nel vuoto. Il sistema SI, come il predecessore MKSA, utilizza il metro, il kilogrammo e il secondo, a cui va aggiunto l'ampere come quarta unità fondamentale; gli altri quattro sistemi di misura, essendo nati nell'ambito nel tracciato aperto dal CGS per le unità meccaniche, utilizzano il centimetro, il grammo e il secondo come unità fondamentali.*

opportunamente ε_0 e μ_0: questa scelta viene fatta secondo criteri di convenienza e semplicità (vedi ancora Tab. 1). Notiamo che per mezzi omogenei e isotropi valgono le relazione di proporzionalità $\vec{P} \propto \vec{E}$ e $\vec{M} \propto \vec{H}$, e le *relazione costitutive* possono scriversi nella forma

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \tag{2.27}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \tag{2.28}$$

che definiscono la *costante dielettrica* e la *permeabilità magnetica* del mezzo.

2.3 Confronto delle equazioni elettromagnetiche

Presentiamo uno schema sinottico che mette a confronto le principali equazioni di interesse elettrodinamico nei tre sistemi di unità di misura più impiegati oggi: il Sistema Internazionale, il sistema di Gauss e il sistema di Heaviside-Lorentz.

Le quattro **equazioni di Maxwell nel vuoto** sono

SI	Gauss	Heaviside-Lorentz
$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho$
$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$	$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$	$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$
$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0\vec{j}$	$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$	$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{c}\vec{j}$

Le quattro **equazioni di Maxwell nel pieno** sono

SI	Gauss	Heaviside-Lorentz
$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi\rho$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$
$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$	$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$	$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$
$\vec{\nabla} \times \vec{H} - \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j}$	$\vec{\nabla} \times \vec{H} - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \dfrac{4\pi}{c}\vec{j}$	$\vec{\nabla} \times \vec{H} - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \dfrac{1}{c}\vec{j}$

Le equazioni di definizione dei **campi ausiliari** spostamento elettrico e magnetico, polarizzazione e magnetizzazione, nonché della suscettività elettrica e magnetica per mezzi omogenei e isotropi sono

SI	Gauss	Heaviside-Lorentz
$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$	$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$	$\vec{D} = \vec{E} + \vec{P}$
$\vec{H} = \dfrac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M}$	$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{M}$	$\vec{H} = \vec{B} - \vec{M}$
$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$	$\vec{P} = \chi_e \vec{E}$	$\vec{P} = \chi_e \vec{E}$
$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$	$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$	$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$
$\varepsilon = \varepsilon_0(1 + \chi_e)$	$\varepsilon = 1 + 4\pi\chi_e$	$\varepsilon = 1 + \chi_e$
$\mu = \mu_0(1 + \chi_m)$	$\mu = 1 + 4\pi\chi_m$	$\mu = 1 + \chi_m$

L'equazione per la **forza di Lorentz** è

SI	Gauss	Heaviside-Lorentz
$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$	$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \dfrac{1}{c}\vec{v} \times \vec{B}\right)$	$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \dfrac{1}{c}\vec{v} \times \vec{B}\right)$

Dette ρ la densità di carica, $\vec{j}$ la densità di corrente e σ la conducibilità elettriche, in ogni sistema di unità di misura l'**equazione di continuità** e la **legge di Ohm** sono espresse dalle equazioni

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$
$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

2.4 Conversione di quantità ed equazioni elettromagnetiche

Data una equazione in un sistema di unità A, può essere utile convertire tutte le quantità presenti nelle corrispondenti quantità valutate in un altro sistema di unità B, così da esprimere l'equazione nel nuovo sistema B. Ad esempio, la carica e i campi fondamentali in unità di Heaviside-Lorentz sono legati alle stesse quantità in unità di Gauss dalle relazioni

$$q_{HL} \equiv \sqrt{4\pi}\; q_G \;, \quad \vec{E}_{HL} \equiv \frac{\vec{E}_G}{\sqrt{4\pi}} \;, \quad \vec{B}_{HL} \equiv \frac{\vec{B}_G}{\sqrt{4\pi}} \;. \tag{2.29}$$

Queste informazioni bastano per trasformare le equazioni di Maxwell nel vuoto da un sistema all'altro.

In generale è possibile costruire tabelle di utilità pratica per una coppia qualunque di sistemi; noi ci limitiamo alla conversione fra Sistema Internazionale e sistema di Gauss, riassunta in Tab. 2. A patto di mantenere invariate tutte le grandezze meccaniche, la procedura per convertire qualunque formula dal sistema di Gauss al SI consiste nel sostituire nella formula i simboli elencati nella prima colonna con i corrispondenti simboli della seconda colonna. Naturalmente sono consentite anche le trasformazioni inverse.

Grandezza	Gauss	SI
Velocità della luce nel vuoto	c	$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$
Campo elettrico	$\vec{E}$	$\sqrt{4\pi\varepsilon_0}\;\vec{E}$
Potenziale elettrico	φ	$\sqrt{4\pi\varepsilon_0}\;\varphi$
Spostamento elettrico	$\vec{D}$	$\sqrt{\frac{4\pi}{\varepsilon_0}}\;\vec{D}$
Carica elettrica	q	$\frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}}\;q$
Polarizzazione	$\vec{P}$	$\frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}}\;\vec{P}$
Induzione magnetica	$\vec{B}$	$\sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}}\;\vec{B}$
Campo magnetico	$\vec{H}$	$\sqrt{4\pi\mu_0}\;\vec{H}$
Magnetizzazione	$\vec{M}$	$\sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi}}\;\vec{B}$
Conducibilità elettrica	σ	$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\;\sigma$
Resistenza elettrica	R	$4\pi\varepsilon_0\;R$
Capacità elettrica	C	$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\;C$

Tabella 2: *tabella di conversione Gauss $\leftrightarrow$ SI per simboli e formule.*

Tante grandezze non sono prese in considerazione perché le regole di trasformazione sono deducibili facilmente in base alle loro definizioni. La densità di carica elettrica ρ, la corrente elettrica i e la densità di corrente elettrica $\vec{j}$ trasformano come la carica q; il momento di dipolo elettrico $\vec{p}$ trasforma come la polarizzazione $\vec{P}$; il flusso magnetico Φ e il potenziale vettore $\vec{A}$ trasformano come il campo $\vec{B}$; il momento di dipolo magnetico $\vec{m}$ trasforma come la magnetizzazione $\vec{M}$; l'impedenza elettrica Z, la resistività elettrica ϱ e l'induttanza L trasformano come la resistenza R; la conduttanza elettrica G trasforma come la capacità C.

Facciamo qualche esempio di trasformazione inversa. Una quantità importante per la descrizione del trasporto di energia nelle onde elettromagnetiche è il *vettore di Poynting*:

$$\vec{S} := \vec{E} \times \vec{H} \qquad \textsf{(SI)}$$

$$\left.\begin{array}{lll} \vec{E} & \rightarrow & \dfrac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}}\,\vec{E} \\ \vec{H} & \rightarrow & \dfrac{1}{\sqrt{4\pi\mu_0}}\,\vec{H} \end{array}\right\} \Rightarrow\ \vec{S} := \frac{c}{4\pi}\,\vec{E} \times \vec{H} \qquad \textsf{(Gauss)}$$

La *formula di Larmor* fornisce, invece, la potenza irradiata da una carica puntiforme non relativistica accelerata nel vuoto:

$$\mathcal{P} = \frac{1}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\,q^2 a^2 \equiv \frac{\mu_0}{6\pi c}\,q^2 a^2 \qquad \textsf{(SI)}$$

$$\left.\begin{array}{lll} q & \rightarrow & \sqrt{4\pi\varepsilon_0}\,q \\ a & \rightarrow & a \end{array}\right\} \Rightarrow\ \mathcal{P} = \frac{2}{3\,c^3}\,q^2 a^2 \qquad \textsf{(Gauss)}$$

3 Sistema Internazionale

Il Sistema Internazionale è un sistema metrico decimale che affonda le radici nel sistema di unità meccaniche MKS. Definisce *sette* grandezze fondamentali, e quindi sette unità fondamentali, di cui una elettromagnetica; da esse possono essere ricavate tutte le altre. Le unità elettromagnetiche SI, fondamentale e derivate, vennero scelte in modo che le equazioni dell'elettromagnetismo concernenti lo spazio contenessero un fattore 4π, quelle concernenti curve chiuse contenessero un fattore 2π e quelle concernenti curve aperte non avessero fattori proporzionali a π: questa scelta ha vantaggi considerevoli in elettrodinamica, mentre negli ambiti dove la formule concernenti lo spazio sono dominanti – ad esempio in astronomia – il sistema CGS risulta più comodo. Si noti (Tabb. 1 e 3) che, a parte le dimensioni, le unità elettromagnetiche SI e CGS EMU sono molto simili: differiscono solo per fattori di potenze del 10.

Le unità, la terminologia e le raccomandazioni del Sistema Internazionale vengono stabilite dalla Conferenza generale dei pesi e delle misure, organizzazione nata a Parigi nel **1875** e riunitasi per la prima volta nel **1889**. Inizialmente chiamato Sistema MKS, nel **1935** questo sistema di grandezze fu denominato Sistema MKSΩ dopo l'introduzione dell'ohm come quarta unità fondamentale su proposta del fisico italiano Giovanni Giorgi; sempre su proposta di Giorgi, nel **1946** il sistema vide la sostituzione dell'ohm con l'ampere come unità fondamentale per i fenomeni elettromagnetici: nacque così il Sistema MKSA, o Sistema Giorgi. Alle quattro unità fondamentali furono aggiunti nel **1954** il kelvin e la candela (la mole verrà introdotta soltanto nel **1971**). Nel **1960** fu sancita la nascita del Sistema Internazionale, che oggigiorno definisce lo standard per le unità di misura in quasi tutto il mondo.

4 Sistema CGS

Il sistema CGS è un sistema metrico decimale che definisce *tre* grandezze fondamentali, di cui nessuna di natura elettromagnetica, e deriva da queste tutte le altre. Si incontrano frequentemente unità CGS nei campi dell'elettrodinamica, dell'astronomia e della fisica teorica.

Ecco alcuni esempi di unità elettromagnetiche CGS. I nomi estesi, a parte quelli già menzionati nel testo, sono *abcoulomb* (*abC*), *statampere* (*statA*), *statvolt* (*statV*), *abvolt* (*abV*), *gauss* (*G*), *stattesla* (*statT*), *oersted* (*Oe*), *abohm* (*ab*Ω) e *abfarad* (*abF*).

Grandezza	Unità SI		Unità Gauss	Unità ESU	Unità EMU
Carica elettrica	$1\ C$	$\leftrightarrow$	$\mathrm{c}\cdot 10\ Fr$	$\mathrm{c}\cdot 10\ statC$	$10^{-1}\ abC$
Corrente elettrica	$1\ A$	$\leftrightarrow$	$\mathrm{c}\cdot 10\ Fr/s$	$\mathrm{c}\cdot 10\ statA$	$10^{-1}\ Bi$
Potenziale elettrico	$1\ V$	$\leftrightarrow$	$\frac{10^6}{\mathrm{c}}\ statV$	$\frac{10^6}{\mathrm{c}}\ statV$	$10^8\ abV$
Induzione magnetica	$1\ T$	$\leftrightarrow$	$10^4\ G$	$\frac{10^2}{\mathrm{c}}\ statT$	$10^4\ G$
Campo magnetico	$1\ A/m$	$\leftrightarrow$	$4\pi\cdot 10^{-3}\ Oe$	$4\pi\mathrm{c}\cdot 10^{-1}\ statA/cm$	$4\pi\cdot 10^{-3}\ Oe$
Resistività elettrica	$1\ \Omega\, m$	$\leftrightarrow$	$\frac{10^7}{\mathrm{c}^2}\ s$	$\frac{10^7}{\mathrm{c}^2}\ s$	$10^{11}\ ab\Omega\ cm$
Capacità elettrica	$1\ F$	$\leftrightarrow$	$\mathrm{c}^2\cdot 10^{-5}\ cm$	$\mathrm{c}^2\cdot 10^{-5}\ cm$	$10^{-9}\ abF$

Tabella 3: *tabella che riassume le modalità di conversione fra alcune unità di misura SI e le omologhe unità di sistemi CGS. Il simbolo* c *qui rappresenta il numero* $2,99792458\cdot 10^8$*, cioè il valore numerico della velocità della luce nel vuoto in* m/s *senza unità di misura. Il simbolo* $\leftrightarrow$ *è usato al posto di* $=$ *per ricordare che unità SI e CGS possono dirsi* corrispondenti *ma non* uguali*, in quanto i due sistemi descrivono una stessa grandezza fisica con dimensioni fra loro non compatibili. Anche fra un sistema CGS e l'altro si notano alcune incompatibilità dimensionali, dovute alla presenza del fattore dimensionato c in Tab. 1.*

Come si vede, i tre sottosistemi CGS riportati sopra – pur adottando tutti il centimetro, il grammo e il secondo come unità meccaniche fondamentali – sono distinti dal punto di vista delle unità elettromagnetiche; ciò che cambia è la scelta del valore numerico e delle dimensioni delle costanti arbitrarie delle forze di Coulomb e Ampère, e quindi la definizione delle dimensioni di carica e corrente per mezzo di lunghezza, massa e tempo.

È sorprendente pensare di misurare una capacità in centimetri (Gauss e ESU), ma non manca l'utilità pratica: un condensatore sferico nel vuoto avente una armatura di raggio 1 *cm* e l'altra armatura di raggio infinito ha proprio capacità 1 *cm* in questi sistemi di unità. Analogamente, qual è il significato pratico di misurare la resistività in secondi (Gauss e ESU)? Essa fornisce una misura del tempo caratteristico con cui un condensatore piano, riempito di mezzo dielettrico, si scarica a causa della resistività finita del mezzo.

4.1 Sistema di Gauss

Il sistema di Gauss è un sottosistema di unità di misura elettromagnetiche, all'interno del più ampio sistema CGS, che prende il nome dallo scienziato tedesco Carl Friedrich Gauss. Si tratta di un sistema *non razionalizzato* in cui non compaiono le costanti del vuoto ($\varepsilon_0 = \mu_0 = 1$) e la costante k_3 ha dimensioni non nulle (vedi Tab. 1).

Secondo questo sistema, nello spazio vuoto ($\vec{P} \equiv 0$, $\vec{M} \equiv 0$) il campo spostamento elettrico è proprio uguale al campo elettrico ($\vec{D} = \vec{E}$) e, analogamente, non c'è alcuna differenza fisica fra il campo magnetico e il campo di induzione magnetica ($\vec{H} = \vec{B}$).

Nei mezzi materiali ideali, le costanti ε (Gauss) e $\varepsilon/\varepsilon_0$ (SI) sono entrambe adimensionali e hanno lo stesso valore numerico; di conseguenza, la grandezza χ_e, pur essendo adimensionale in entrambi i sistemi, ha valori numerici differenti nei due sistemi per lo stesso materiale. Analogamente, le costanti μ (Gauss) e μ/μ_0 (SI) sono adimensionali e hanno lo stesso valore numerico, ma la quantità adimensionale χ_m ha valori numerici differenti nei due sistemi per lo stesso materiale:

$$(\chi_e)_{SI} = 4\pi(\chi_e)_G \tag{4.1}$$

$$(\chi_m)_{SI} = 4\pi(\chi_m)_G \ . \tag{4.2}$$

Visto che sistema di Gauss e Sistema Internazionale sono i sistemi di unità più comunemente usati, sarà bene mettere in luce alcune importanti **differenze** concettuali. Il principale *vantaggio* del SI è la popolarità: nel mondo ingegneristico e tecnico di quasi tutti i Paesi le specifiche dei dispositivi elettrici sono fornite in unità SI e molti manuali di fisica e chimica adottano il SI per uniformità. Il principale *vantaggio* delle unità gaussiane è quello di rendere certe questioni della fisica teorica concernenti fenomeni elettromagnetici più trasparenti: le equazioni della relatività ristretta e dell'elettrodinamica quantistica sono più eleganti e più semplici da ricordare in unità gaussiane.

Innanzitutto, il SI adotta l'impianto del sistema MKSA, mentre il sistema di Gauss è un sottosistema CGS, con tutte le conseguenze che abbiamo visto; in particolare il sistema di Gauss prevede costanti di proporzionalità fra forze e sorgenti prive di dimensione così da semplificare le equazioni per le forze, pena la definizione delle sorgenti in termini di grandezze meccaniche. Il SI è *razionalizzato*, quindi a differenza del sistema di Gauss fa comparire i fattori 4π nelle leggi delle forze e dei campi ma non nelle equazioni di Maxwell.

Vediamo un'altra differenza, questa non così banale: dato che $\varepsilon_0\mu_0 = c^{-2}$, in unità SI possiamo eliminare una delle tre costanti ε_0, μ_0, c e così le formule si scrivono in maniera *non univoca*; in unità gaussia la scrittura delle formule è *univoca*. Per di più, in unità SI compaiono espressioni come costante dielettrica del vuoto ε_0, permeabilità del vuoto μ_0 e impedenza caratteristica del vuoto Z_0 a cui non corrispondono proprietà fisiche fondamentali dello *spazio vuoto*; tali espressioni spariscono nelle unità gaussiane, per lasciare il posto alla sola fondamentale velocità della luce nel vuoto c.

Nel sistema di Gauss il campo $\vec{B}$ è definito tramite un *fattore c* assente nel SI (a causa della definizione della costante $\alpha = c$ anziché $\alpha = 1$: vedi Tab. 1 ed equazione 2.10); questo fattore c si insinua in tutte le grandezze derivate $\vec{A}$, $\vec{H}$, $\vec{M}$, $\vec{m}$ e rappresenta la principale difficoltà per chi volesse convertire equazioni dal SI al sistema di Gauss. Nonostante ciò, nel sistema di Gauss i campi $\vec{E}$, $\vec{D}$, $\vec{P}$, $\vec{B}$, $\vec{H}$, $\vec{M}$ possiedono le stesse dimensioni (perciò 1 $statV/cm \equiv 1\ G \equiv 1\ Oe$), mentre nel SI le dimensioni sono tutte diverse. Per esempio, mentre nel SI è necessario inserire opportuni fattori, nel sistema di Gauss i mezzi dielettrici convertono semplicemente $\vec{E}$ in $\vec{D}$ e la relatività converte $\vec{E}$ in $\vec{B}$. I vettori polarizzazione $\vec{P}$ e magnetizzazione $\vec{M}$ sono definiti come momento di dipolo, rispettivamente elettrico $\vec{p}$ e magnetico $\vec{m}$, per unità di volume in *entrambi* i sistemi e in *entrambi* i sistemi l'energia di un dipolo immerso in un campo esterno è data da $-\vec{p}\cdot\vec{E}$ o $-\vec{m}\cdot\vec{B}$; tuttavia sia $\vec{m}$ che $\vec{B}$ hanno dimensioni differenti nei due sistemi (sempre a causa del fattore c discusso sopra).

Inoltre, anche i potenziali φ e $\vec{A}$ sono omogenei in unità gaussiane, ma non in unità SI: di conseguenza, le unità gaussiane rendono più semplice la costruzione del quadripotenziale A^μ:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (\mathsf{SI})\ , \qquad \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (\mathsf{Gauss}) \tag{4.3}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \quad (\mathsf{SI})\ , \qquad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \quad (\mathsf{Gauss}) \tag{4.4}$$

4.2 Sistema di Heaviside-Lorentz

Il sistema di Heaviside-Lorentz è un sottosistema di unità di misura elettromagnetiche, all'interno del più ampio sistema CGS, che prende il nome dal fisico inglese Oliver Heaviside e dal fisico olandese Hendrik Antoon Lorentz. Si tratta di un sistema *razionalizzato* che differisce dal sistema di Gauss soltanto per fattori 4π nella scelta delle due costanti di proporzionalità per le forze elettrostatica e magnetica (per questo motivo è talvolta chiamato "sistema gaussiano razionalizzato"); di conseguenza nei due sistemi le definizioni di carica e campi fondamentali differiscono per soli fattori $\sqrt{4\pi}$, come mostra la (2.29).

Esso viene spesso impiegato in teoria della relatività e in teoria dei campi, proprio per il fatto che la lagrangiana del campo elettromagnetico non contiene alcun fattore 4π. Può combinarsi con quei sistemi di unità naturali in cui $c = 1$: con questa ulteriore posizione, le equazioni di Maxwell nel vuoto assumono la semplice forma

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho \tag{4.5}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \tag{4.6}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \tag{4.7}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{j}\ . \tag{4.8}$$

Per concludere il nostro discorso sulle unità CGS, diciamo che naturalmente, in linea di principio, potremmo pensare di costruire un sistema di Heaviside-Lorentz (o di Gauss) per le unità elettromagnetiche che si basi sulle unità meccaniche MKS anziché su quelle CGS, sostituendo quindi il metro al centimetro e il kilogrammo al grammo e ridefinendo lo statcoulomb in modo che la costante della forza elettrostatica sia ancora unitaria. Otterremmo così un sistema non standard che avrebbe tutti i vantaggi di entrambi i sistemi e nessuno dei loro svantaggi.

5 Sistemi di unità naturali

Concludiamo la nostra panoramica sui sistemi di unità di misura per le grandezze elettromagnetiche accennando ad una terza tipologia, completamente diversa dalle precedenti nella filosofia. Per *sistema di unità naturali* intendiamo un insieme di unità di misura definite in modo che un certo numero di costanti fisiche universali siano normalizzate a 1, ovvero assumano valore unitario adimensionale. Ad esempio, è possibile immaginare un sistema A in cui le grandezze fondamentali lunghezza e tempo siano definite in modo da ottenere $c = 1$; si dice in questo caso che la velocità della luce nel vuoto c è scelta come unità di velocità: per un corpo che possieda velocità $v = 1/2\,c$ si dice che esso possiede velocità $1/2$ nel sistema A.

Queste unità sono dette *naturali* poiché la loro definizione proviene dalle proprietà della natura, in particolare dalla costanza di certe quantità fondamentali, e non da convenzioni umane. Esistono diversi sistemi di unità naturali e le costanti che sono normalizzate in un sistema possono non esserlo in un altro. Le quantità fisiche scelte per la normalizzazione devono essere ragionevolmente ritenute costanti universali.

I *vantaggi* apportati dall'impiego di questi sistemi vengono sfruttati appieno in tanti campi della fisica teorica, in particolare in fisica delle particelle e in teoria delle stringhe. Le unità naturali, infatti, semplificano la scrittura delle leggi fisiche in cui compare un gran numero di costanti fondamentali e non necessitano di prototipi campione – difficilmente riproducibili – per la definizione delle unità di misura. Inoltre, mostrano un maggior potenziale interpretativo in caso di scritture deliberatamente ambigue: mentre nel SI l'uguaglianza $a = 10^{10}\ m$ è ben definita e rivela la dimensione di a, nelle unità di Planck l'uguaglianza $a = 10^{10}$ è ancora ben definita ma non specifica la natura della grandezza a: se a è una lunghezza, l'equazione significa $a \simeq 1,6 \cdot 10^{-25}\ m$; se a è un tempo, l'equazione significa $a \simeq 5,4 \cdot 10^{-34}\ s$ (vedi Tab. 4). Esistono situazioni in cui tale ambiguità è ricercata: in relatività ristretta lo spazio e il tempo sono strettamente legati e può essere utile non specificare se una variabile rappresenta una distanza o un intervallo di tempo.

Tuttavia le unità naturali presentano alcuni *svantaggi*: esse complicano i controlli dimensionali e comportano una precisione minore nelle misurazioni (per ottenere misure di precisione sono utilizzate le unità SI: una quantità misurata in unità naturali può avere un numero minore di cifre significative rispetto alla medesima quantità misurata nel SI).

Come in ogni sistema di unità di misura, i sistemi naturali includono la definizione delle cinque grandezze fondamentali lunghezza L, massa M, tempo T, temperatura Θ e carica elettrica Q; dunque potremo scegliere, per ogni sistema, *cinque* costanti fondamentali da normalizzare, a scelta fra i seguenti candidati:

velocità della luce nel vuoto c

costante gravitazionale G

costante di Coulomb $k_0 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$

costante di Planck ridotta $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$

costante di Boltzmann $k_B = \dfrac{R}{N_A}$

carica elementare e

massa dell'elettrone m_e

massa del protone m_p

Tuttavia, in tutti sistemi naturali vengono normalizzate a 1 sia la costante di Boltzmann sia la costante di Coulomb: $k_B = 1$ e $4\pi\varepsilon_0 = 1$, che significa assegnare alla costante dielettrica del vuoto definita nell'ambito del SI il valore $\varepsilon_0 \equiv (4\pi)^{-1}$. In pratica, quindi, in ogni sistema naturale restano da scegliere tre sole costanti fondamentali da normalizzare.

Questa procedura non può alterare le costanti fisiche fondamentali *adimensionali*, le quali non possono cambiare il proprio valore al variare del sistema di unità usato. Per esempio, la costante di struttura fine

$$\alpha := \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = \frac{1}{137.035999...}$$

è una combinazione adimensionale di costanti fondamentali dimensionate di valore diverso da 1, ed è impossibile definire un sistema di unità naturali che normalizzi tutte e quattro le costanti fisiche e, k_0, $\hbar$, c: solamente tre possono essere normalizzate, mentre la quarta assumerà un valore dipendente da α.

Esiste un'ampia varietà di sistemi di unità naturali: vediamo appena un paio di esempi.

5.1 Unità di Planck

Le unità di misura di Planck furono adottate per la prima volta in un articolo del **1899** dal fisico tedesco Max Planck; nello stesso articolo fece la sua comparsa la celebre costante h (che Planck indicava con la lettera b). Espresse in queste unità, assumono valore unitario le seguenti costanti fisiche universali:

$$c = 1 \quad G = 1 \quad \hbar = 1 \quad k_B = 1 \quad k_0 = 1 \tag{5.1}$$

Di conseguenza, la carica elementare resta definita in funzione della costante di struttura fine:

$$e = \sqrt{\alpha} \approx 0,08542 \tag{5.2}$$

In queste unità, una eventuale variazione del valore numerico di α potrebbe essere pensata come una variazione della carica elementare e. Le unità di Planck non sono fondate su alcun prototipo: le costanti fisiche normalizzate sono tutte proprietà dello *spazio vuoto* e non proprietà (quali la massa o la carica) di particelle materiali, che potrebbero essere scelte arbitrariamente.

Per determinare in unità di misura SI o CGS i valori numerici corrispondenti alle cinque unità di Planck, cinque equazioni devono essere impiegate:

$$l_P = c\, t_P \tag{5.3}$$

$$F_P = \frac{m_P\, l_P}{t_P^2} = G\,\frac{m_P^2}{l_P^2} \tag{5.4}$$

$$E_P = \frac{m_P\, l_P^2}{t_P^2} = \frac{\hbar}{t_P} \tag{5.5}$$

$$E_P = \frac{m_P\, l_P^2}{t_P^2} = k_B\, T_P \tag{5.6}$$

$$F_P = \frac{m_P\, l_P}{t_P^2} = k_0\,\frac{q_P^2}{l_P^2} \tag{5.7}$$

Risolvendo queste cinque equazioni in l_P, m_P, t_P, T_P e q_P, ricaviamo le espressioni che permettono di definire le cinque unità fondamentali nel sistema di Planck: vedi Tab. 4. Da queste è facile ottenere le unità di Planck per tutte le altre grandezze derivate.

Grandezza	Espressione	Unità Planck		Unità SI
Lunghezza L	$l_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}$	1	$\leftrightarrow$	$\approx 1,61625 \cdot 10^{-35}\ m$
Massa M	$m_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$	1	$\leftrightarrow$	$\approx 2,17644 \cdot 10^{-8}\ kg$
Tempo T	$t_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}}$	1	$\leftrightarrow$	$\approx 5,39124 \cdot 10^{-44}\ s$
Temperatura Θ	$T_P = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G k_B^2}}$	1	$\leftrightarrow$	$\approx 1,41679 \cdot 10^{32}\ K$
Carica elettrica Q	$q_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{k_0}}$	1	$\leftrightarrow$	$\approx 1,87555 \cdot 10^{-18}\ C$

Tabella 4: *tabella che riassume le espressioni per la definizione delle unità di Planck per le grandezze fondamentali e riporta i valori numerici approssimati per la conversione fra unità di Planck e unità SI. Ad esempio, se un corpo possiede 8 cariche di Planck allora la sua quantità di carica misurata nel SI è pari a circa* $15 \cdot 10^{-18}\ C \approx 90\ e$.

Facciamo alcuni esempi. La forza di attrazione gravitazionale che agisce fra due corpi aventi ciascuno 1 massa di Planck e distanziati di 1 lunghezza di Planck è pari a 1 forza di Planck. Similmente, la distanza percorsa da un fotone nel vuoto in 1 tempo di Planck è proprio 1 lunghezza di Planck.

È qui evidente un grande pregio di tutte le unità naturali: generano scale (di tempo, di lunghezza, di densità...) sulle quali si manifestano intere classi di fenomeni. Alle *scale di Planck* si ritiene che gli effetti della relatività generale e della meccanica quantistica diventino confrontabili. Tuttavia una teoria quantistica della gravità non esiste ancora e il significato fisico della *lunghezza di Planck* non è chiaro: poiché essa è l'unica lunghezza che è possibile costruire a partire dalle costanti c, G e $\hbar$ attraverso una analisi dimensionale, si può pensare che lunghezze con un significato fisico importante in gravità quantistica abbiano ordine di grandezza della lunghezza di Planck; nella teoria delle stringhe, invece, la lunghezza di Planck rappresenta il diametro minimo possibile di una stringa, perciò qualunque entità di lunghezza inferiore alla lunghezza di Planck non avrebbe alcun significato fisico.

Come vengono scritte in questo sistema le equazioni di Maxwell?

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \tag{5.8}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \tag{5.9}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \tag{5.10}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 4\pi\vec{j} \tag{5.11}$$

Le equazioni presentano la stessa forma che assumono nel sistema di Gauss (che pure impone $k_0 = 1$) con l'ulteriore posizione $c = 1$.

Se sostituissimo le definizioni (5.1) con

$$c = 1 \quad G = 1 \quad \hbar = 1 \quad k_B = 1 \quad k_0 = \frac{1}{4\pi} \tag{5.12}$$

avremmo un sistema di Planck *modificato* che, similmente a quanto fa il sistema di Heaviside-Lorentz, razionalizza le equazioni elettromagnetiche, introducendo il fattore $(4\pi)^{-1}$ nella forza di Coulomb ed eliminando i fattori 4π dalle equazioni di Maxwell, che prenderebbero così la forma (4.5)–(4.8).

5.2 Unità atomiche

Le unità di misura atomiche furono proposte dal matematico e fisico inglese Douglas Hartree (ne esiste una variante dovuta al fisico svedese Johannes Rydberg che differisce per la scelta delle unità di massa e di carica). Espresse in queste unità, assumono valore unitario le seguenti costanti fisiche universali:

$$\hbar = 1 \quad e = 1 \quad m_e = 1 \quad k_B = 1 \quad k_0 = 1 \tag{5.13}$$

Di conseguenza, la velocità della luce nel vuoto resta definita in funzione della costante di struttura fine:

$$c = \frac{1}{\alpha} \approx 137.036 \tag{5.14}$$

Queste unità fissano la carica elementare e consentono alla velocità della luce nel vuoto di cambiare: la costante di struttura fine possiede il proprio valore in dipendenza di c e una possibile variazione del valore di α sarebbe causata dalla corrispondente variazione della velocità c.

Le espressioni che permettono di definire le cinque unità fondamentali nel sistema di unità atomiche sono riportate in Tab. 5. Da esse è facile ottenere le unità atomiche per tutte le altre grandezze derivate (forza atomica, energia atomica...).

Grandezza	Espressione	Unità atomica		Unità SI
Lunghezza L	$l_A = \dfrac{\hbar^2}{k_0\, m_e\, e^2}$	1	$\leftrightarrow$	$\approx 5,29177 \cdot 10^{-11}\ m$
Massa M	$m_A = m_e$	1	$\leftrightarrow$	$\approx 9,10938 \cdot 10^{-31}\ kg$
Tempo T	$t_A = \dfrac{\hbar^3}{k_0^2\, m_e\, e^4}$	1	$\leftrightarrow$	$\approx 2,41888 \cdot 10^{-17}\ s$
Temperatura Θ	$T_A = \dfrac{k_0^2\, m_e\, e^4}{\hbar^2\, k_B}$	1	$\leftrightarrow$	$\approx 3,15775 \cdot 10^{5}\ K$
Carica elettrica Q	$q_A = e$	1	$\leftrightarrow$	$\approx 1.60218 \cdot 10^{-19}\ C$

Tabella 5: *tabella che riassume le espressioni per la definizione delle unità atomiche per le grandezze fondamentali e permette di determinare i valori numerici approssimati in unità SI corrispondenti alle cinque unità atomiche.*

Le unità atomiche si fondano in modo determinante sulle proprietà (massa e carica) dell'elettrone e vengono perciò usate in fisica atomica. Non è un caso che la lunghezza atomica sia uguale al *raggio di Bohr*. Il sistema di unità atomiche, infatti, genera un insieme di *scale* sulle quali sono unitarie le misure del raggio, della velocità, dell'energia, del momento angolare dell'atomo di idrogeno nello stato fondamentale secondo il classico modello a orbite circolari sviluppato dal fisico danese Niels Bohr.

Bisogna prendere atto che il pur nobile tentativo di convincere tutti ad usare il Sistema Internazionale è fallito, e la gente usa questi (ed altri) sistemi in modo interscambiabile.
M. Cini, *Elementi di Fisica Teorica*

Fonti consultate

J. D. Jackson, *Elettrodinamica classica*, Zanichelli
R. Casalbuoni, *Appunti di Relatività Speciale*
P. Coppi, *Dispense di Fisica*
Autori vari, *pagine Internet dedicate all'argomento*

Febbraio 2011 Marco Gabbrielli