



Università degli Studi di Bari

---

Corso di Laurea in Fisica

# Meccanica Quantistica Pratica

Versione provvisoria aggiornata al 12 dicembre 2006

Leonardo Angelini

Dipartimento Interateneo di Fisica  
via Amendola 173, 70126 Bari, Italy  
[leonardo.angelini@fisica.uniba.it](mailto:leonardo.angelini@fisica.uniba.it)



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>v</b>
<b>1 Operatori e funzioni d'onda</b>	<b>1</b>
1.1	1
1.2	1
1.3	2
1.4	3
1.5	3
1.6	4
1.7	5
1.8	5
1.9	6
1.10	6
<b>2 Sistemi unidimensionali</b>	<b>7</b>
2.1	7
2.2	9
2.3	9
2.4	11
2.5	12
2.6	13
2.7	15
2.8	17
2.9	18
2.10	18
2.11	19
2.12	19
2.13	20
<b>3 Momento angolare e sistemi in 2D e 3D</b>	<b>21</b>
3.1	21
3.2	22
3.3	23
3.4	23
3.5	24
3.6	25
3.7	27
3.8	28
3.9	29
3.10	30
3.11	31
3.12	32

---

3.13	33
<b>4 Spin</b>	<b>35</b>
4.1	35
4.2	35
4.3	36
4.4	37
4.5	39
<b>5 Evoluzione temporale</b>	<b>41</b>
5.1	41
5.2	43
5.3	45
5.4	46
5.5	47
5.6	49
5.7	50
5.8	51
5.9	52
5.10	53
5.11	54
5.12	55
5.13	57
5.14	57
5.15	59
<b>6 Teoria Perturbativa</b>	<b>61</b>
6.1	61
6.2	62
6.3	65
6.4	65
6.5	67
6.6	68
6.7	68
6.8	69
6.9	70
6.10	72
6.11	73
6.12	74
6.13	75
6.14	77
6.15	77
6.16	78
6.17	79
6.18	81
6.19	82
6.20	83
6.21	84
6.22	85

<b>7</b>	<b>Particelle identiche</b>	<b>87</b>
7.1	.....	87
7.2	.....	88
7.3	.....	90
7.4	.....	90
7.5	.....	91
7.6	.....	91
7.7	.....	92
7.8	.....	93
7.9	.....	94
7.10	.....	94
<b>8</b>	<b>Diffusione (Approssimazione di Born)</b>	<b>97</b>
8.1	.....	97
8.2	.....	98
<b>A</b>	<b>Formule utili</b>	<b>99</b>
A.1	Integrali di uso frequente	99
A.1.1	Integrali Gaussiani	99
A.1.2	Integrali con funzioni esponenziali	99
A.2	Oscillatore armonico	99
A.2.1	Trattazione operatoriale	99
A.2.2	Trattazione nella rappresentazione X	100
A.3	Cambiamento di coordinate	100
A.4	Momento Angolare	100
A.4.1	Trattazione operatoriale	100
A.4.2	Le prime Armoniche Sferiche	101
A.5	Le prime Bessel Sferiche	101
A.6	Spin	101
A.6.1	Matrici di Pauli	101
A.6.2	Relazioni utili	101
A.7	Teoria Perturbativa indipendente dal tempo	102
A.8	Approssimazione di Born	102



# Introduzione

Questo libro è essenzialmente dedicato agli studenti che preparano l'esame scritto di un corso di Meccanica Quantistica. Si assume che i contenuti del corso siano sostanzialmente identici a quelli di un tradizionale corso di Istituzioni di Fisica Teorica dei vecchi ordinamenti del corso di laurea in Fisica. Di riflesso questa raccolta può risultare molto utile anche ai docenti che devono proporre problemi ai loro studenti sia a lezione che per gli esami.

Come molti altri libri di problemi di Meccanica Quantistica non bisogna aspettarsi un particolare sforzo di novità. L'intento è di presentare dei problemi la cui soluzione sia possibile in un tempo limitato ad uno studente dotato di preparazione media. Questo proposito difficilmente si coniuga con una ricerca di originalità. Si troveranno quindi problemi che sono presenti anche in altri libri a partire dai classici russi [1, 2], e quindi nella raccolta che, a partire da essi, fu curata da Ter Haar [3, 4]. Fra gli altri libri di esercizi che sono stati consultati vanno ricordati l'italiano Passatore [5] e quello recentissimo edito da Yung-Kuo Lim che raccoglie il lavoro di ben 19 fisici cinesi. Molti problemi interessanti si trovano anche nei manuali di Meccanica Quantistica. Qui l'elenco potrebbe essere lunghissimo. Citerò soltanto quelli che ai problemi hanno dedicato maggiore spazio come il testo di Merzbacher [6], il volume dedicato alla Meccanica Quantistica del corso di Fisica Teorica L. Landau e E. Lifchitz[7], i due volumi di Messiah [8] e il più recente Shankar [9]. Una citazione particolare merita il recente testo [10] in italiano di Nardulli, sia per l'abbondanza di problemi con o senza soluzione che contiene, sia per il fatto che i problemi qui presentati sono stati proposti in questi anni agli studenti del suo corso. A metà tra il manuale e il libro di problemi si posizionano i due volumi di Flügge [11] che forniscono utili suggerimenti, anche se spesso i problemi proposti risultano troppo complessi rispetto alle finalità di questa raccolta.

La categoria *problemi che si possono risolvere in tempi ragionevoli* non è l'unico criterio di scelta adottato. Rispetto agli altri libri non si troveranno ad esempio *i problemi che fanno parte del programma di orale* tipo i potenziali quadrati unidimensionali o l'effetto Stark e la struttura fine. Non sono stati inseriti neanche i problemi che richiedono la conoscenza di metodi matematici non sempre presenti nei corsi standard, come, ad esempio, le equazioni differenziali fuchsiane.

Si è preferito scrivere le soluzioni con un certo dettaglio, eliminando soltanto i passaggi più semplici. Questo costa una certa fatica a chi scrive, ma probabilmente risulterà utile agli studenti.

Come in ogni altro libro, i problemi sono stati raggruppati in capitoli. In molti casi la scelta dell'attribuzione ad un capitolo può essere considerata arbitraria: molti problemi di esame presentano problematiche trasversali all'intero programma. La scelta ovvia stata di tener conto delle domande più caratterizzanti.

Attualmente questa raccolta viene affidata alla rete e chiunque può utilizzarla come preferisce, ovviamente sotto la sua responsabilità. La segnalazione di errori è graditissima, così come anche la proposta di inserire nuovi problemi, purché corredati di soluzioni scritte in  $\text{\LaTeX}$ . Sarebbe anzi interessante se nel tempo questo libro crescesse proprio grazie alla rete con il contributo di quanti insegnano Mecca-

nica Quantistica e degli studenti di Fisica delle Università italiane; in questo caso il sottoscritto sarebbe felicissimo di trasformarsi da autore della raccolta a curatore della stessa.



# Capitolo 1

## Operatori e funzioni d'onda

### 1.1

Dato un sistema descritto dall'Hamiltoniano

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(\vec{r})$$

dimostrare la relazione

$$\vec{p} = -i\frac{m}{\hbar}[\vec{r}, H].$$

Usare questa relazione per dimostrare che in uno stato stazionario

$$\langle \vec{p} \rangle = 0.$$

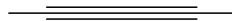
### Soluzione

Detto  $r_i$  e  $p_i$  con  $i = 1, 2, 3$  le componenti della posizione e dell'impulso, abbiamo

$$\begin{aligned} [r_i, H] = [r_i, T] &= \frac{1}{2m}(r_i p_i^2 - p_i^2 r_i) = \\ &= \frac{1}{2m}(r_i p_i^2 - p_i^2 r_i - r_i p_i r_i + r_i p_i r_i) = \\ &= \frac{1}{2m}([r_i, p_i] p_i + p_i [r_i, p_i]) = \\ &= \frac{i\hbar p_i}{m}, \end{aligned}$$

come richiesto. Detto  $|\psi_E\rangle$  l'autostato di  $H$  corrispondente all'autovalore  $E$ , il valore di aspettazione di ciascuna componente dell'impulso é

$$\langle p_i \rangle = \langle \psi_E | p_i | \psi_E \rangle = -i\frac{m}{\hbar} \langle \psi_E | [r_i, H] | \psi_E \rangle = -i\frac{m}{\hbar} \langle \psi | r_i E - E r_i | \psi \rangle = 0$$



### 1.2

Un sistema unidimensionale é descritto dalla hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m} + \lambda q^4$$

Dato un autostato  $\psi$  dell'energia si dimostri che

$$\langle \psi | T | \psi \rangle = 2 \langle \psi | V | \psi \rangle$$

dove  $T = p^2/2m$  e  $V$  é l'energia potenziale  $V = \lambda q^4$ .

Per la dimostrazione si noti che vale sempre

$$\frac{1}{i\hbar} [p, H] = -\frac{\partial V}{\partial q}$$

e, nel nostro caso,

$$V = \frac{q}{4} \frac{\partial V}{\partial q}.$$

### Soluzione

$$\begin{aligned} \langle \psi | V | \psi \rangle &= -\frac{1}{4i\hbar} \langle \psi | q [p, H] | \psi \rangle = \\ &= -\frac{1}{4i\hbar} \langle \psi | qpH - qHp | \psi \rangle = \\ &= -\frac{1}{4i\hbar} \langle \psi | qpH - [q, H]p - Hqp | \psi \rangle = \\ &= \frac{1}{4i\hbar} \langle \psi | [q, H]p | \psi \rangle \end{aligned}$$

Essendo

$$\begin{aligned} [q, H] = [q, T] &= \frac{1}{2m} (qp^2 - p^2q) = \\ &= \frac{1}{2m} (qp^2 - p^2q - qpq + qpq) = \\ &= \frac{1}{2m} ([q, p]p + p[q, p]) = \\ &= \frac{i\hbar p}{m}, \end{aligned}$$

risulta

$$\langle \psi | V | \psi \rangle = \frac{1}{4i\hbar} \frac{i\hbar}{m} = \frac{1}{2} \langle \psi | T | \psi \rangle$$


---

### 1.3

Sia dato un operatore  $a$  che soddisfa le seguenti relazioni:

$$aa^+ + a^+a = 1$$

$$a^2 = (a^+)^2 = 0$$

- a) Può l'operatore essere hermitiano?
- b) Dimostrare che i soli possibili autovalori per l'operatore  $N = a^+a$  sono 0 e 1.

**Soluzione**

- a) Supponiamo per assurdo che  $a$  sia hermitiano:  $a = a^+$ . Si avrebbe:

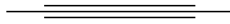
$$aa^+ + a^+a = 2(a^+)^2 = 0$$

in contrasto con l'ipotesi.

- b)  $N^2 = a^+aa^+a = a^+(1 - a^+a)a = a^+a - (a^+)^2a^2 = a^+a = N$ .

Detto  $|\lambda\rangle$  il generico autoket di  $N$  corrispondente all'autovalore  $\lambda$ , avremo

$$(N^2 - N)|\lambda\rangle = (\lambda^2 - \lambda)|\lambda\rangle = 0 \Rightarrow \lambda = 0, 1$$

**1.4**

Una particella è in uno stato descritto dalla seguente funzione d'onda

$$\psi(\vec{r}) = A \sin\left(\frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{\hbar}\right).$$

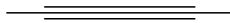
- a) Si tratta di una particella libera?  
 b) Cosa si può dire sul valore assunto dalla quantità di moto  $\vec{p}$  e dall'energia  $E$  in questo stato?

**Soluzione**

- a) La funzione d'onda può solo rappresentare lo stato dinamico di un sistema. Per decidere se si tratta di una particella libera occorre conoscere l'Hamiltoniano.  
 b) La funzione d'onda si può riscrivere nella forma

$$\psi(\vec{r}) = \frac{A}{2i} \left[ e^{i\frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{\hbar}} - e^{-i\frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{\hbar}} \right]$$

e rappresenta quindi la sovrapposizione di due autostati di impulso con autovalori  $+\vec{p}$  e  $-\vec{p}$ . Poiché i coefficienti della combinazione lineare hanno uguale modulo, il valor medio della quantità di moto è nullo. Non conoscendo l'Hamiltoniano non si può dire nulla sull'energia  $E$ .

**1.5**

Dati tre operatori  $A, B, C$ , dimostrare che se  $[A, B] = [A, C] = 0$ , ma  $[B, C] \neq 0$ , lo spettro di  $A$  è degenere.

**Soluzione**

Supponiamo per assurdo che tutti gli autovalori di  $A$  siano non degeneri, cioè per ogni autovalore  $a$  di  $A$  esiste un solo stato  $|\psi_a\rangle$  tale che

$$A|\psi_a\rangle = a|\psi_a\rangle$$

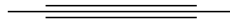
Se questo é vero, ciascuno stato  $|\psi_a\rangle$  deve essere anche autostato di  $B$  e  $C$  dato che  $A, B, C$  sono compatibili. Possiamo etichettare quindi lo stato  $|\psi_a\rangle$  anche con gli autovalori corrispondenti di  $B$  e  $C$ :

$$\begin{aligned} A|\psi_{a,b,c}\rangle &= a|\psi_{a,b,c}\rangle \\ B|\psi_{a,b,c}\rangle &= b|\psi_{a,b,c}\rangle \\ C|\psi_{a,b,c}\rangle &= c|\psi_{a,b,c}\rangle \end{aligned}$$

dove ovviamente per ogni  $a$  fissato,  $b$  e  $c$  sono unici. Per ogni generico stato  $|\psi\rangle$  risulta:

$$[B, C]|\psi\rangle = [BC - CB] \sum_a |\psi_{a,b,c}\rangle = \sum_a [bc - cb] |\psi_{a,b,c}\rangle = 0$$

risultato in contrasto con l'ipotesi  $[B, C] \neq 0$



## 1.6

Si consideri un sistema con hamiltoniano

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{\alpha}{2}(pq + qp) + \beta q^2, \quad [q, p] = i\hbar$$

Si dica per quali valori di  $\alpha$  e  $\beta$   $H$  é limitato inferiormente e in questo caso si trovino autovalori e relativi autostati.

### Soluzione

L'Hamiltoniano può essere riscritto nella forma:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2m}[p^2 + \alpha m(pq + qp) + m^2\alpha^2 q^2 - m^2\alpha^2 q^2 + \beta q^2] = \\ &= \frac{1}{2m}(p + m\alpha q)^2 + \left(\beta - \frac{m\alpha^2}{2}\right)q^2 = \\ &= \frac{1}{2m}p'^2 + \left(\beta - \frac{m\alpha^2}{2}\right)q^2 \end{aligned}$$

dove

$$p' = p + m\alpha q.$$

Notiamo ora che:

- $[q, p'] = [q, p + m\alpha q] = [q, p] = i\hbar$
- $p'$  è hermitiano. essendo combinazione lineare di due operatori hermitiani, purché  $\alpha$  sia reale.

Dalla condizione che  $H$  é limitato inferiormente:

$$\langle \psi | H | \psi \rangle = \frac{1}{2m} \langle p' \psi | p' \psi \rangle + \left(\beta - \frac{m\alpha^2}{2}\right) \langle q \psi | q \psi \rangle > -\infty$$

Poiché il I termine è positivo o nullo, tale condizione è verificata per ogni  $|\psi\rangle$  purché

$$\beta > \frac{m\alpha^2}{2}.$$

Per questo Hamiltoniano può, in queste condizioni, essere ripetuta la trattazione usuale per l'oscillatore armonico. Si hanno quindi gli stessi autovalori e gli stessi autostati relativamente alla pulsazione:

$$\omega = \sqrt{\frac{2\beta}{m} - \alpha^2}.$$

Notare che quanto visto vale anche nel caso di  $p' = p + f(q)$  con  $f(q)$  funzione reale di  $q$ .



## 1.7

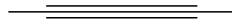
Per una particella libera in una dimensione l'insieme di osservabili costituito dall'hamiltoniano e dalla parità costituisce un insieme completo di osservabili?

### Soluzione

Ad un fissato valore dell'energia di una particella libera in una dimensione corrispondono due autostati linearmente indipendenti che, nella rappresentazione  $\mathbf{X}$ , sono dati da:

$$\psi_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{i\frac{px}{\hbar}} \quad \text{e} \quad \psi_{-p}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-i\frac{px}{\hbar}}$$

Se fissiamo anche l'autostato  $p$  della parità selezioniamo la combinazione lineare di parità fissata, cioè, a parte normalizzazione,  $\cos(px/\hbar)$  se  $p = +1$  e  $\sin(px/\hbar)$  se  $p = -1$



## 1.8

Dimostrare che se per un sistema quantistico  $F$  e  $G$  sono due costanti del moto allora lo è anche  $[F, G]$ .

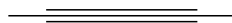
### Soluzione

Se  $F$  e  $G$  sono due costanti del moto, allora

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} [F, H] \quad \frac{\partial G}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} [G, H].$$

Ne risulta:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[F, G] &= \frac{\partial[F, G]}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} [[F, G], H] = \\ &= \frac{\partial F}{\partial t} G + F \frac{\partial G}{\partial t} - \frac{\partial G}{\partial t} F - G \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} [FG - GF, H] = \\ &= \frac{i}{\hbar} [FHG - HFG + FGH - FGH - GHF + HGF - GFH + GHF] = \\ &= -\frac{i}{\hbar} [FGH - GFH - HFG + HGF] = 0 \end{aligned}$$



## 1.9

Per una particella carica in un campo magnetico trovare le regole di commutazione tra gli operatori corrispondenti alle componenti della velocità.

### Soluzione

Detto  $\vec{A}$  il potenziale vettore che genera il campo magnetico  $\vec{B}$ , avremo

$$\hat{P}_i = m\hat{v}_i + \frac{q}{c}A_i$$

Quindi, nella rappresentazione delle coordinate,

$$\begin{aligned} [\hat{v}_i, \hat{v}_j]\psi(\vec{x}) &= \frac{1}{m^2} \left[ \hat{P}_i - \frac{q}{c}A_i, \hat{P}_j - \frac{q}{c}A_j \right] \psi(\vec{x}) = \\ &= \frac{q}{mc^2} \left\{ [\hat{P}_j, A_i] - [\hat{P}_i, A_j] \right\} \psi(\vec{x}) = \\ &= \frac{i\hbar q}{mc^2} \left( \frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right) = \\ &= \frac{i\hbar q}{mc^2} \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} B_k, \end{aligned}$$

dove  $\varepsilon_{ijk}$  è il tensore di Levi-Civita.

## 1.10

Dimostrare il Teorema del viriale che mette in relazione l'energia cinetica media  $\langle \mathcal{T} \rangle$  e l'energia potenziale media  $\langle \mathcal{V} \rangle$  nel caso del potenziale coulombiano

$$\langle \mathcal{T} \rangle = -\frac{1}{2} \langle \mathcal{V} \rangle.$$

Suggerimento: applicare il Teorema di Ehrenfest

$$\frac{d\langle \Omega \rangle}{dt} = -\frac{i}{\hbar} \langle [\Omega, \mathcal{H}] \rangle$$

al caso dell'operatore  $\vec{r} \cdot \vec{p}$  tenendo conto del fatto che il valore medio è calcolato per uno stato stazionario.

### Soluzione

Poiché trattasi di stato stazionario

$$\frac{d\langle \vec{r} \cdot \vec{p} \rangle}{dt} = 0.$$

Si ha dunque:

$$0 = \langle [\vec{r} \cdot \vec{p}, \mathcal{H}] \rangle = \langle [\vec{r} \cdot \vec{p}, \mathcal{T}] \rangle + \langle [\vec{r} \cdot \vec{p}, \mathcal{V}] \rangle = \langle [\vec{r}, \mathcal{T}] \cdot \vec{p} \rangle + \langle \vec{r} \cdot [\vec{p}, \mathcal{V}] \rangle$$

Utilizzando  $[r_i, p_i] = i\hbar$  si ottiene

$$[x_i, p_i^2] = 2i\hbar p_i \Rightarrow \langle [\vec{r}, \mathcal{T}] \cdot \vec{p} \rangle = 2i\hbar \langle \mathcal{T} \rangle$$

mentre si trova facilmente:

$$\left[ \vec{\nabla}, \frac{1}{r} \right] = -\frac{\vec{r}}{r^3} \Rightarrow \langle \vec{r} \cdot [\vec{p}, \mathcal{V}] \rangle = i\hbar e^2 \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle = i\hbar \langle \mathcal{V} \rangle,$$

Sostituendo queste due relazioni nella precedente si ottiene il risultato cercato.

## Capitolo 2

# Sistemi unidimensionali

### 2.1

Una particella di massa  $m$  è vincolata a muoversi in una dimensione soggetta all'azione del potenziale

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } |x| > a; \\ -V_0, & \text{se } |x| < a \end{cases}.$$

- Quale deve essere la profondità della buca  $V_0$ , data la larghezza  $2a$ , perchè il primo livello eccitato abbia energia  $E_1 = -\frac{1}{2}V_0$ ?
- Se la particella si trova nell'autostato dell'hamiltoniano corrispondente al primo livello eccitato, qual è la probabilità di trovarla nella regione classicamente proibita?
- Quanti sono gli stati legati di questo hamiltoniano?

### Soluzione

Ricordiamo che, introdotte le notazioni

$$\chi^2 = -\frac{2mE}{\hbar^2} \quad ; \quad q^2 = -\frac{2m}{\hbar^2}(V_0 + E)$$

le autofunzioni pari si ricavano da

$$\chi = q \tan qa$$

e quelle pari da

$$\chi = -q \cot qa.$$

- Si vuole  $E_1 = -\frac{1}{2}V_0$ , quindi

$$\chi^2 = -\frac{2m}{\hbar^2}\left(-\frac{1}{2}V_0\right) = \frac{mV_0}{\hbar^2} = \frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{2}V_0 = q^2$$

Poiché il primo livello eccitato è dispari, occorre trovare il più piccolo valore di  $qa$  per cui  $\cot qa = -1$ , cioè  $qa = \frac{3}{4}\pi$ . Quindi

$$V_0 = \frac{\hbar^2}{m} q^2 = \frac{9\hbar^2}{16m} \frac{\pi^2}{a^2}$$

- b) Il secondo livello eccitato si ottiene come seconda soluzione dell'equazione per le soluzioni pari. Sostituendo il valore trovato per  $V$ , abbiamo

$$q^2 = \frac{2m}{\hbar^2} \left( \frac{9\hbar^2}{16m} \frac{\pi^2}{a^2} + E \right) = \frac{9}{8} \frac{\pi^2}{a^2} - \chi^2.$$

Ricordiamo che, perché vi sia una seconda soluzione occorre che  $2mV_0a^2/\hbar^2 > \pi^2$ . Nel nostro caso

$$\frac{2m}{\hbar^2} V_0 a^2 = \frac{2m}{\hbar^2} \frac{9\hbar^2}{16m} \pi^2 = \frac{9}{8} \pi^2 > \pi^2$$

Non vi è tuttavia una terza soluzione pari poiché  $\frac{9}{8}\pi^2 < 4\pi^2$ . Perché vi possa essere una seconda soluzione dispari occorre che  $\frac{2m}{\hbar^2} V_0 a^2 > \frac{3}{2}\pi^2$  che non è verificata.

Esistono, in conclusione, solo tre stati legati.

- c) Determiniamo la funzione d'onda del primo livello eccitato, per il quale  $q = \chi = 3\pi/4a$ .

$$\psi_1(x) = \begin{cases} Ce^{\chi x}, & \text{se } x < -a; \\ B \sin qx, & \text{se } |x| < a; \\ -Ce^{-\chi x}, & \text{se } x > a \end{cases}.$$

Dalle condizioni di continuità in  $x = a$

$$\begin{cases} B \sin qa = -Ce^{-\chi a} \\ Bq \cos qa = C\chi e^{-\chi a} \end{cases}$$

(che sono equivalenti in quanto relative all'autovalore  $E_1$  già fissato) ricaviamo:

$$\frac{B}{C} = \frac{\chi e^{-\chi a}}{q \cos qa} = 1 \cdot \frac{e^{-\frac{3\pi}{4}}}{\cos \frac{3\pi}{4}} = -\sqrt{2} e^{-\frac{3\pi}{4}}$$

Imponendo la normalizzazione la funzione d'onda

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_1(x)|^2 dx &= 2 \int_a^{+\infty} |C|^2 e^{-2\chi x} dx + \int_{-a}^a |B|^2 \sin^2 qx dx = \\ &= \frac{|C|^2}{\chi} e^{-2\chi a} + \frac{|B|^2}{2} \left[ 2a - \frac{1}{q} \sin 2qa \right] = \\ &= 2ae^{-\frac{3\pi}{2}} \left( \frac{4}{3\pi} + 1 \right) |C|^2 = 1, \end{aligned}$$

ricaviamo

$$|C|^2 = \frac{e^{\frac{3\pi}{2}}}{2a} \left( \frac{3\pi}{4 + 3\pi} \right)$$

La probabilità  $P$  di trovare la particella nella regione classicamente proibita è:

$$\begin{aligned} P &= 2 \int_a^{+\infty} |C|^2 e^{-2\chi x} dx \\ &= \frac{e^{\frac{3\pi}{2}}}{2a} \left( \frac{3\pi}{4 + 3\pi} \right) \frac{e^{-2\chi a}}{\chi} = \\ &= \frac{2}{4 + 3\pi}. \end{aligned}$$



## 2.2

Una particella di massa  $m$  si muove di moto unidimensionale in presenza di un potenziale a buca infinita di larghezza  $a$ :

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0, +a], \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Calcolare il valor di attesa e lo scarto quadratico medio delle variabili posizione e impulso negli autostati dell'energia. Commentare il risultato alla luce del principio di indeterminazione.

### Soluzione

Ricordiamo che per il pozzo di potenziale le autofunzioni e gli autovalori dell'energia sono dati da:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a} \quad E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.1)$$

Le distribuzioni di probabilità sono funzioni pari di  $x$ , pertanto

$$\langle x \rangle = 0.$$

Inoltre per uno stato legato valore di attesa dell'impulso è sempre nullo:

$$\langle p \rangle = 0.$$

Calcoliamo lo scarto quadratico medio di  $p$ . Poichè  $\langle p \rangle = 0$

$$(\Delta p)^2 = \langle p^2 \rangle = 2m \langle E_n \rangle = 2m E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{a^2}$$

Analogamente lo scarto quadratico medio di  $x^2$  è dato da

$$\begin{aligned} (\Delta x)^2 &= \langle x^2 \rangle = \frac{2}{a} \int_0^a dx x^2 \sin^2 \frac{n\pi x}{a} = \frac{2a^2}{n^3 \pi^3} \int_0^{n\pi} dy y^2 \sin^2 y \\ &= \frac{2a^2}{n^3 \pi^3} \left( \frac{n^2 \pi^2}{6} - \frac{1}{4} n\pi \cos(2n\pi) + \frac{1}{8} (2n^2 \pi^2 - 1) \sin(2n\pi) \right) \\ &= \frac{a^2}{n^2 \pi^2} \left( \frac{n\pi}{3} - \frac{1}{2} \right) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Il prodotto degli scarti quadratici medi di  $x$  e  $p$  è quindi

$$\Delta x \Delta p = \hbar \sqrt{\frac{n\pi}{3} - \frac{1}{2}}$$

Tale prodotto assume nello stato fondamentale il suo minimo valore (circa  $\hbar/2$ ) e cresce al crescere di  $n$ .



## 2.3

Sia data una particella di massa  $m$  proveniente da  $x = +\infty$  con energia  $E > 0$  che urta contro il potenziale unidimensionale della forma

$$V(x) = \begin{cases} \infty, & \text{se } x \leq -a; \\ \Omega \delta(x), & \text{se } x > -a. \end{cases}$$

- cosa succede nel caso classico?
- trovare la forma della funzione d'onda per  $x < 0$  e per  $x > 0$ .
- trovare il coefficiente di riflessione.
- trovare lo sfasamento dell'onda riflessa (rispetto al caso  $\Omega = 0$ ) per  $x = +\infty$ .
- discutere la dipendenza da  $\frac{\Omega}{k}$  ( $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ ) delle espressioni trovate per lo sfasamento e per l'ampiezza della funzione d'onda nel tratto  $-a < x < 0$ .

### Soluzione

- Nel caso classico la particella, qualsiasi sia la sua energia, viene riflessa nella posizione  $x = 0$ . Questo può essere compreso pensando la funzione  $\delta$  come il limite di una funzione rettangolare il cui spessore tende a zero mentre la sua altezza tende a  $+\infty$ . La particella dovrebbe avere energia infinita per poter passare.
- Dato il potenziale, l'autofunzione di energia  $E$  richiesta avrà la forma

$$\psi(x) = \begin{cases} A \sin(kx + \delta), & \text{se } -a \leq x \leq 0; \\ e^{-ikx} + R e^{ikx}, & \text{se } x > 0. \end{cases}, \quad \text{con } k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}},$$

dove si è posto uguale ad uno il coefficiente che rappresenta il moto verso la barriera. La funzione d'onda si deve annullare in  $x = -a$ , per cui  $\delta = ka$ .

Poniamo

$$\alpha = \frac{2m\Omega}{\hbar^2},$$

che ha le dimensioni di  $[Lunghezza]^{-1}$ , cioè le stesse di  $k$ , dato che  $\Omega$  ha le dimensioni di  $[Energia][Lunghezza]^{-1}$ , a causa della  $\delta$ . Le condizioni di continuità della funzione d'onda e di discontinuità della sua derivata prima in  $x = 0$  danno luogo al sistema

$$\psi(0^+) = \psi(0^-) \Rightarrow A \sin ka = 1 + R \quad (2.3)$$

$$\psi'(0^+) - \psi'(0^-) = \alpha \psi(0) \Rightarrow -kA \cos ka - ik(1 - R) = \alpha A \sin ka \quad (2.4)$$

che ha soluzione

$$\begin{aligned} A &= -\frac{2ik}{k \cos ka + \alpha \sin ka - ik \sin ka} \\ R &= -\frac{k \cos ka + \alpha \sin ka + ik \cos ka}{k \cos ka + \alpha \sin ka - ik \sin ka} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Risulta così completamente determinata la funzione d'onda.

- Poiché  $R$  è il rapporto di due quantità complesse coniugate, il coefficiente di riflessione è dato da

$$|R|^2 = 1.$$

Come nel caso classico si ha riflessione completa, ma la funzione d'onda è non nulla tra la barriera a  $\delta$  e la parete impenetrabile.

- d) Detti  $\rho$  e  $\theta$  rispettivamente il modulo e la fase del numeratore di  $R$ , si ha

$$R = e^{i\pi} \frac{\rho e^{i\theta}}{\rho e^{-i\theta}} = e^{i(2\theta+\pi)} \text{ dove } \theta = \arctan \frac{\tan ka}{1 + \frac{\alpha}{k} \tan ka}$$

In assenza della  $\delta$  basta porre  $\Omega = 0$ , cioè  $\alpha = 0$  nelle formule. Si ottiene in questo caso

$$R_0 = e^{i(2ka+\pi)}.$$

La sfasamento dovuto alla barriera è quindi:

$$\Delta\varphi = 2\theta - 2\Theta_0 = 2 \arctan \frac{\tan ka}{1 + \frac{\alpha}{k} \tan ka} - 2ka$$

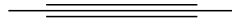
- e) Consideriamo prima l'andamento di  $\Delta\varphi$  in funzione di  $\alpha/k = 2m\Omega/\hbar^2 k$ . Si nota che:

- $\Delta\varphi = 0$ , a parte il caso banale in cui  $\alpha = 0$ , se  $\tan ka = 0$ , cioè se  $ka = n\pi$ , con  $n = 0, 1, 2, \dots$ . In questi casi la barriera diventa trasparente.
- Per piccoli valori di  $\alpha/k$  lo sfasamento tende a 0.
- Nel limite  $\alpha/k \rightarrow +\infty$   $\Delta\varphi$  tende asintoticamente a  $-2ka$ , che corrisponde a  $R = -1$ , cioè alla situazione in cui anche la  $\delta$  diventa una barriera impenetrabile. Per questo motivo il parametro  $\Omega$  viene spesso detto *opacità*.

Studiamo ora il comportamento dell'ampiezza  $A$  della funzione d'onda per  $x < 0$ , o meglio, del suo modulo quadro:

$$|A|^2 = \frac{4k^2}{(k \cos ka + \alpha \sin ka)^2 + k^2 \sin^2 ka} = \frac{4}{(\cos ka + \frac{\alpha}{k} \sin ka)^2 + \sin^2 ka}$$

- A  $k$  fissato,  $|A|^2$  assume il valore 4 per  $\alpha/k = 0$ .
- Sempre considerando  $k$  fissato,  $|A|^2$  ha un punto di massimo in corrispondenza del valore  $\alpha/k = -\cot ka$ , che può essere un valore fisico solo se positivo, quindi è funzione decrescente di  $\alpha/k$ , confermando così il ruolo di  $\Omega$ .
- Il massimo rappresenta un fenomeno di risonanza, fenomeno che può meglio essere studiato ad  $\alpha$  fissato. In figura 2.1 si nota la presenza di una struttura a picchi che si attenua a grandi energie.



## 2.4

Un fascio monocromatico di particelle di massa  $m$  si muove lungo l'asse  $x$  in presenza del potenziale

$$V(x) = -\frac{\hbar^2}{m} \Omega \delta(x),$$

dove  $\delta(x)$  è la delta di Dirac.

Per un fascio proveniente da  $-\infty$  una funzione d'onda stazionaria di energia  $E$  si può scrivere, posto  $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ ,

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + R e^{-ikx}, & \text{se } x \leq 0 \\ T e^{ikx}, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Determinare per quale valore di  $E$  il flusso trasmesso è uguale al flusso riflesso.

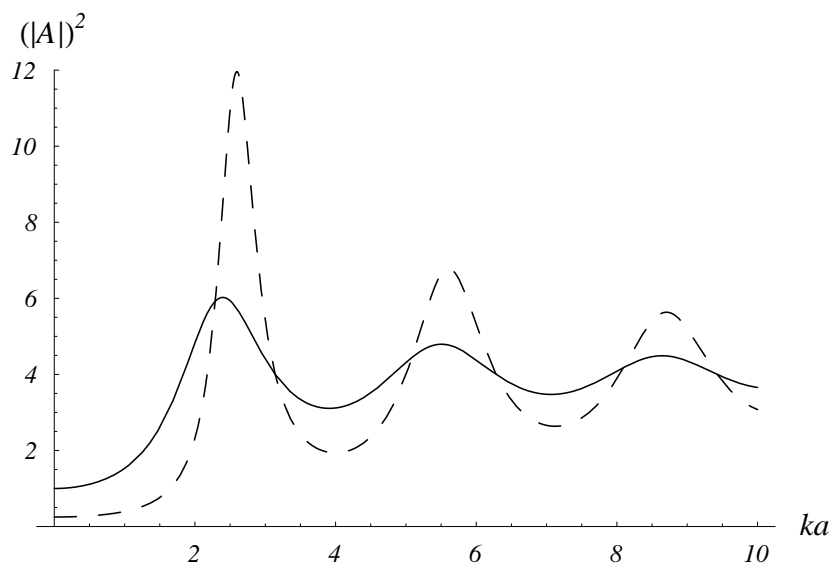


Figura 2.1:  $|A|^2$  in funzione di  $ka$  per  $\alpha = 1$  (curva continua) e  $\alpha = 3$  (curva tratteggiata).

### Soluzione

Al fine di determinare i coefficienti  $R$  e  $T$  a fissata energia  $E$ , imponiamo le condizioni di continuità della  $\psi(x)$  e di discontinuità, a causa del potenziale a  $\delta$ , della  $\psi'(x)$  in  $x = 0$ :

$$\begin{aligned} \psi(0^+) - \psi(0^-) &= 0 & \Rightarrow & 1 + R = T \\ \psi'(0^+) - \psi'(0^-) &= -2\Omega\psi(0) & \Rightarrow & ikT - ik(1 - R) = -2\Omega T, \end{aligned}$$

dalle quali si ottiene

$$R = \frac{i\Omega}{k - i\Omega} \quad \text{e} \quad T = \frac{k}{k - i\Omega}.$$

Si chiede che sia  $|R|^2 = |T|^2$ , cioè  $k^2 = \Omega^2$ , quindi l'energia dovrà essere pari a

$$E = \frac{\hbar^2 \Omega^2}{2m}.$$

## 2.5

Una particella di massa  $m$  si muove in una dimensione in presenza di un potenziale dato da

$$V(x) = -\frac{\hbar^2}{m} \Omega \delta(x),$$

dove  $\delta(x)$  è l'usuale funzione delta di Dirac. La particella si trova nell'unico stato legato. Trovare l'energia e la funzione d'onda di tale stato. Trovare inoltre il valore di  $x_0$  tale che la probabilità di trovare la particella con  $x < x_0$  è esattamente uguale a  $1/2$ .

### Soluzione

Poiché si vogliono gli stati legati, consideriamo gli autovalori  $E < 0$  dell'equazione di Schrödinger

$$\psi''(x) + 2\Omega\delta(x)\psi(x) + \alpha^2\psi(x) = 0, \quad \text{dove} \quad \alpha^2 = -\frac{2mE}{\hbar^2} > 0.$$

Per  $x \neq 0$  questa equazione ha soluzione, che soddisfa la condizione di continuità della  $\psi$  in  $x = 0$ ,  $\psi(x) = A \exp\{-\alpha|x|\}$ ; ricordiamo inoltre che, per la presenza nel potenziale della  $\delta$ , la  $\psi'$  deve essere discontinua in  $x = 0$ :

$$\psi'(0^+) - \psi'(0^-) = -2\Omega\psi(0)$$

Questa condizione è soddisfatta da un unico valore di  $\alpha$ ,

$$\alpha = \Omega$$

Esiste quindi un solo stato legato con energia

$$E = -\frac{\hbar^2\Omega^2}{2m}$$

La costante  $A$  viene fissata, a meno di un fattore di fase, dalla condizione di normalizzazione:

$$|A|^2 = \left[ \int_{-\infty}^0 e^{2\alpha x} dx + \int_0^{+\infty} e^{-2\alpha x} dx \right]^{-1} = \left[ 2\left(-\frac{1}{2\alpha}\right)e^{-2\alpha x} \Big|_0^{+\infty} \right]^{-1} = \alpha = \Omega.$$

Quindi la funzione d'onda è data da

$$\psi(x) = \sqrt{\Omega} e^{-\Omega|x|}.$$

Infine, il valore di  $x_0$  che dimezza la probabilità cumulativa è chiaramente 0, essendo la funzione d'onda, e quindi anche la distribuzione di probabilità, una funzione pari.

## 2.6

Una particella di massa  $m$  si muove nella doppia buca di potenziale data da

$$V(x) = -\frac{\hbar^2}{m} \Omega[\delta(x-a) + \delta(x+a)] \quad \Omega > 0.$$

Mostrare che l'Hamiltoniano ha al più due stati legati e risolvere graficamente l'equazione che li determina. Stimare inoltre per grandi valori di  $a$  la separazione tra i livelli.

### Soluzione

L'equazione di Schrödinger diventa:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + 2\Omega[\delta(x-a) + \delta(x+a)]\psi(x) - \epsilon^2\psi(x) = 0 \quad \text{dove} \quad \epsilon^2 = -\frac{2mE}{\hbar^2} > 0$$

Ricordiamo che, per la presenza nel potenziale della  $\delta$ , la  $\psi'$  deve essere discontinua in  $x = a$  e  $x = -a$ :

$$\psi'(a^+) - \psi'(a^-) = -2\Omega\psi(a)$$

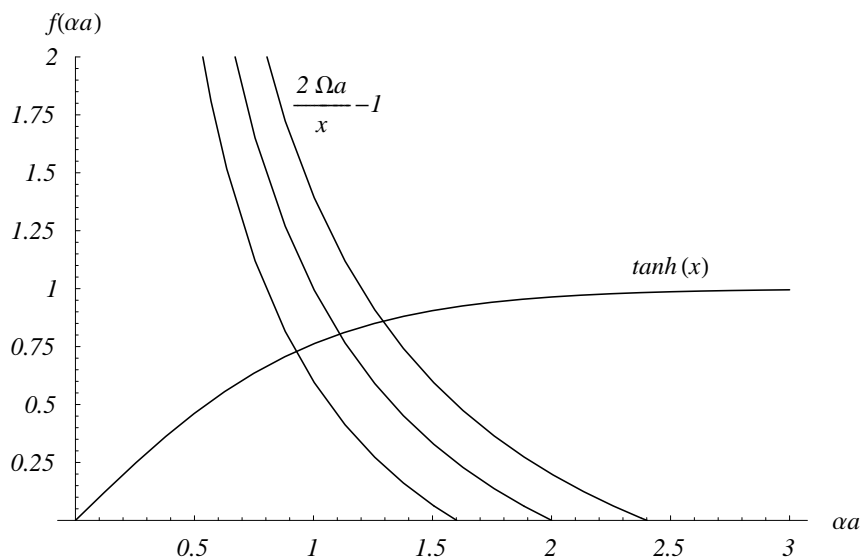


Figura 2.2: Soluzione grafica dell'equazione per le autofunzioni pari. Il lato destro dell'eq. 2.6 è stato riportato per  $\Omega a = 0.8, 1.0, 1.2$ .

$$\psi'(-a^+) - \psi'(-a^-) = -2\Omega\psi(-a)$$

Poiché il potenziale è pari, possiamo scegliere soluzioni di parità definita. Consideriamo prima le autofunzioni **pari**. Escludendo i punti  $x = a$  e  $x = -a$ , l'equazione di Schrödinger ha integrali indipendenti

$$\psi_1(x) = e^{-\epsilon x} \quad \text{e} \quad \psi_2(x) = e^{\epsilon x} .$$

Le soluzioni devono andare a zero all'infinito e devono essere pari, possiamo quindi scrivere, a meno di una costante complessiva:

$$\psi_p(x) = \begin{cases} e^{\epsilon x}, & \text{se } x < -a; \\ A \cosh \epsilon x, & \text{se } |x| < a; \\ e^{-\epsilon x}, & \text{se } x > a \end{cases} .$$

A causa della simmetria basta imporre le condizioni di continuità nel solo punto  $x = a$ :

$$\begin{cases} e^{-\epsilon a} = A \cosh \epsilon a \\ -A\epsilon \sinh \epsilon a - \epsilon e^{-\epsilon a} = -2\Omega e^{-\epsilon a} \end{cases} .$$

Si avrà soluzione per l'incognita  $A$  solo se le due equazioni sono compatibili, cioè solo se

$$\tanh \epsilon a = \frac{2\Omega}{\epsilon} - 1 = \frac{2\Omega a}{\epsilon a} - 1 \quad (2.6)$$

La soluzione può essere trovata graficamente come si vede in figura 2.2.

Consideriamo ora le autofunzioni dispari:

$$\psi_p(x) = \begin{cases} -e^{\epsilon x}, & \text{se } x < -a; \\ A \sinh \epsilon x, & \text{se } |x| < a; \\ e^{-\epsilon x}, & \text{se } x > a \end{cases} .$$

Imponiamo le condizioni di continuità nel punto  $x = a$ :

$$\begin{cases} e^{-\epsilon a} = A \sinh \epsilon a \\ -A\epsilon \cosh \epsilon a - \epsilon e^{-\epsilon a} = -2\Omega e^{-\epsilon a} \end{cases} .$$

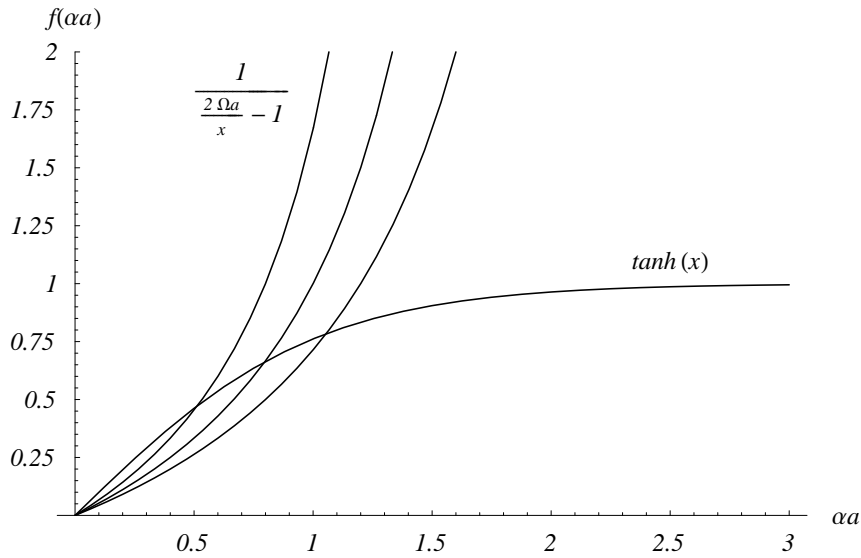


Figura 2.3: Soluzione grafica dell'equazione per le autofunzioni dispari. Il lato destro dell'eq. 2.7 è stato riportato per  $\Omega a = 0.8, 1.0, 1.2$ .

Si avrà soluzione per l'incognita  $A$  solo se le due equazioni sono compatibili, cioè solo se

$$\tanh \epsilon a = \frac{1}{\frac{2\Omega}{\epsilon} - 1} = \frac{1}{\frac{2\Omega a}{\epsilon a} - 1} \quad (2.7)$$

La soluzione può essere trovata graficamente come si vede in figura 2.3.

Esiste un'unica soluzione purchè la pendenza nell'origine della funzione a destra nell'eq. 2.7 sia inferiore a quella della funzione a sinistra, la  $\tanh \epsilon a$ , che è 1.

$$\left. \frac{d}{dt} \frac{t}{2\Omega a - t} \right|_{y=0} = \frac{1}{2\Omega a} < 1$$

È facile vedere che si tratta di uno stato eccitato. Infatti l'intersezione si ha per valori di  $\epsilon a < \Omega a$ , mentre per le autofunzioni pari si aveva per  $\epsilon a > \Omega a$ , quindi si ha in corrispondenza un'energia  $E = -\frac{\hbar^2}{2m}\epsilon^2$  più alta.

La separazione tra i due livelli tende a zero nel limite di grande distanza tra le due  $\delta$ . Infatti entrambe le funzioni sul lato destro delle eq. 2.6, 2.7 valgono 1 in  $\epsilon a = \Omega a$  ed anche la funzione  $\tanh \epsilon a$  tende a 1 per  $a$  grandi.



## 2.7

Risolvere l'equazione di Schrödinger per l'energia potenziale

$$V(x) = \frac{\hbar^2}{m}\Omega(\delta(x-a) + \delta(x+a)) \quad \Omega > 0$$

calcolando le autofunzioni dell'hamiltoniano corrispondenti a un problema di diffusione e i relativi autovalori. Discutere la dipendenza dall'energia del coefficiente di trasmissione.

### Soluzione

Poiché  $V(x) > 0 \forall x$  gli autovalori di  $H$  sono positivi. Fissato  $E = \hbar^2 k^2 / 2m > 0$ , le autofunzioni relative ad  $E$  corrispondenti ad una particella che si muove inizialmente nella direzione positiva dell'asse  $x$  sono del tipo:

$$\psi_E(x) = \begin{cases} e^{ikx} + Re^{-ikx}, & \text{se } x < -a; \\ Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, & \text{se } |x| < a; \\ Te^{ikx}, & \text{se } x > a \end{cases},$$

dove la densità di corrente incidente è stata posta pari a  $|1|^2 \frac{\hbar k}{m}$ . Le condizioni di continuità di  $\psi$  e di discontinuità della sua derivata  $\psi'$

$$\begin{aligned} \psi(\pm a^+) - \psi(\pm a^-) &= 0 \\ \psi'(\pm a^+) - \psi'(\pm a^-) &= 2\Omega\psi(\pm a) \end{aligned}$$

determinano completamente i coefficienti  $R, A, B, T$ :

$$\begin{cases} e^{-ika} + Re^{ika} - Ae^{-ika} - Be^{ika} = 0 \\ Ae^{ika} + Be^{-ika} - Te^{ika} = 0 \\ (2\Omega + ik)e^{-ika} + (2\Omega - ik)Re^{ika} - ikAe^{-ika} + ikBe^{ika} = 0 \\ ikAe^{ika} - ikBe^{-ika} + (2\Omega - ik)Te^{ika} \end{cases}$$

Ne deriva che ogni valore positivo di  $E$  è autovalore dell'Hamiltoniano. Ponendo ora

$$\alpha = \frac{ik - 2\Omega}{ik} = 1 + i\frac{2\Omega}{k} \quad ; \quad \beta = e^{ika},$$

la II e la IV equazione diventano

$$\begin{cases} \beta A + \beta^* B = \beta T \\ \beta A - \beta^* B = \beta \alpha T \end{cases}$$

Ricaviamo così

$$A = \frac{1}{2}(1 + \alpha)T \quad B = \frac{\beta}{\beta^*} \frac{1}{2}(1 - \alpha)T.$$

Ritornando al sistema, la I e la III equazione diventano

$$\begin{cases} \beta^*(1 + \alpha^*) + \beta(1 - \alpha)R = \beta^*(1 + \alpha)T \\ \beta^*(1 - \alpha^*) + \beta(1 + \alpha)R = \frac{\beta^2}{\beta^*}(1 - \alpha)T \end{cases},$$

dalle quali, con semplici passaggi si ottiene l'espressione per  $T$ :

$$T = \frac{1}{(1 + i\gamma)^2 + \gamma^2 e^{4ika}}$$

dove  $\gamma = \Omega/k$ .

Il coefficiente di trasmissione è  $|T|^2$ , che, dopo qualche passaggio diventa:

$$|T|^2 = \frac{1}{(1 + \gamma^2)^2 + \gamma^4 + 2\gamma^2[(1 - \gamma^2) \cos 4ka + 2\gamma \sin 4ka]}.$$

Notiamo che

- $\lim_{k \rightarrow 0} |T|^2 = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} |T|^2 = 0$ , cioè nel limite di bassa energia il coefficiente di trasmissione si annulla;
- $\lim_{k \rightarrow \infty} |T|^2 = \lim_{\gamma \rightarrow 0} |T|^2 = 1$ , cioè nel limite di alta energia si ha trasmissione completa;
- $|T|^2$  presenta delle oscillazioni corrispondenti alle oscillazioni di  $(1 - \gamma^2) \cos 4ka + 2\gamma \sin 4ka$ .



## 2.8

Considerare una particella di massa  $m$  nel potenziale unidimensionale

$$V(x) = -\frac{\hbar^2}{m} \frac{1}{\cosh^2 x}.$$

a) Mostrare che

$$\psi(x) = (\tanh x + C) \exp(ikx)$$

è soluzione dell'equazione di Schrödinger per un particolare valore della costante  $C$ . Determinare tale valore e l'energia corrispondente a tale soluzione. Studiando gli andamenti asintotici di  $\psi(x)$  calcolare i coefficienti di riflessione e di trasmissione.

b) Mostrare che anche

$$\phi(x) = \frac{1}{\cosh x}$$

soddisfa l'equazione di Schrödinger. Mostrare che si tratta di uno stato legato e calcolarne l'energia. Dare un argomento a favore del fatto che si tratta dello stato fondamentale.

### Soluzione

Definito

$$\varepsilon = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

l'equazione di Schrödinger diventa:

$$\frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + \frac{2}{\cosh^2 x} \psi(x) + \varepsilon \psi(x) = 0$$

a) Imponendo che  $\psi(x)$  ne sia soluzione si trova:

$$(\varepsilon - k^2)(\tanh x + C) + \frac{2}{\cosh^2 x}(ik + C) = 0.$$

Questa relazione risulta verificata  $\forall x$  purché:

$$\varepsilon = k^2 \quad \text{e} \quad C = -ik.$$

Nel limite  $x \rightarrow +\infty$

$$\psi(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} (1 - ik)e^{ikx},$$

mentre per  $x \rightarrow -\infty$

$$\psi(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -(1 + ik)e^{ikx}.$$

Non vi è quindi componente riflessa ( $\propto e^{-ikx}$ ):

$$R = 0 \quad \text{e} \quad T = 1$$

b) Per quanto riguarda  $\phi(x)$  sostituendo nell'equazione di Schrödinger si ottiene:

$$-\frac{1}{\cosh x} + \frac{2}{\cosh x} + \frac{\varepsilon}{\cosh x} = 0$$

e quindi

$$\varepsilon = -1.$$

Notiamo che per  $|x| \rightarrow \infty$   $\phi(x) \rightarrow 0$ , quindi  $\phi(x)$  rappresenta uno stato legato. Inoltre si tratta di una funzione priva di nodi, e quindi si tratta di uno stato fondamentale.

## 2.9

Calcolare gli elementi di matrice degli operatori posizione e impulso nella base dell'energia dell'Oscillatore Armonico. Valutare i valori medi di entrambe le grandezze in un autostato dell'energia.

### Soluzione

Utilizzando le espressioni per gli operatori  $x$  e  $p$  in termini degli operatori  $a$  e  $a^\dagger$  (vedi A.5) e ricordando che (A.6)

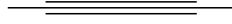
$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

si ha

$$\begin{aligned} x_{jk} &= \langle j|x|k\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \langle j|(a+a^\dagger)|k\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left[ \sqrt{k} \delta_{k,j+1} + \sqrt{k+1} \delta_{k,j-1} \right] \\ p_{jk} &= \langle j|p|k\rangle = \frac{1}{i} \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} \langle j|(a-a^\dagger)|k\rangle = -i \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} \left[ \sqrt{k} \delta_{k,j+1} - \sqrt{k+1} \delta_{k,j-1} \right] \end{aligned}$$

Per quanto riguarda i valori medi, essi sono entrambi nulli:

$$\langle x \rangle_k = \langle k|x|k\rangle = 0 \quad \langle p \rangle_k = \langle k|p|k\rangle = 0$$



## 2.10

Calcolare gli elementi di matrice degli operatori  $x^2$  e  $p^2$  nella base dell'energia dell'Oscillatore Armonico. Far vedere che, in un autostato dell'energia, il valor di attesa dell'energia cinetica e dell'energia potenziale sono uguali.

### Soluzione

Utilizzando la (A.5) si ha

$$\begin{aligned} (x^2)_{jk} &= \langle j|x^2|k\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} \langle j|(a+a^\dagger)^2|k\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} \langle j|a^2 + (a^\dagger)^2 + aa^\dagger + a^\dagger a|k\rangle \\ (p^2)_{jk} &= \langle j|p^2|k\rangle = -\frac{\hbar m\omega}{2} \langle j|(a-a^\dagger)^2|k\rangle = -\frac{\hbar m\omega}{2} \langle j|a^2 + (a^\dagger)^2 - (aa^\dagger + a^\dagger a)|k\rangle \end{aligned}$$

Dalla (A.6) otteniamo

$$\begin{aligned} \langle j|a^2|k\rangle &= \sqrt{k} \langle j|a|k-1\rangle = \sqrt{k(k-1)} \delta_{k,j+2} \\ \langle j|(a^\dagger)^2|k\rangle &= \sqrt{k+1} \langle j|a^\dagger|k+1\rangle = \sqrt{(k+1)(k+2)} \delta_{k,j-2}, \end{aligned}$$

mentre, da  $[a, a^\dagger] = 1$ ,

$$\langle j|aa^\dagger + a^\dagger a|k\rangle = \langle j|1 + 2a^\dagger a|k\rangle = \frac{2}{\hbar\omega} \langle j|\mathcal{H}|k\rangle = (2k+1)\delta_{j,k}.$$

Sostituendo si ha, per gli elementi di matrice richiesti,

$$\begin{aligned} (x^2)_{jk} &= \frac{\hbar}{2m\omega} \left[ \sqrt{k(k-1)} \delta_{k,j+2} + \sqrt{(k+1)(k+2)} \delta_{k,j-2} + (2k+1)\delta_{j,k} \right] \\ (p^2)_{jk} &= -\frac{\hbar m\omega}{2} \left[ \sqrt{k(k-1)} \delta_{k,j+2} + \sqrt{(k+1)(k+2)} \delta_{k,j-2} - (2k+1)\delta_{j,k} \right] \end{aligned}$$

I valori medi, detta  $E_k$  l'autovalore dell'energia per lo stato  $|k\rangle$ , sono dati da

$$\begin{aligned}\langle x^2 \rangle_k &= \langle k|x^2|k\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} (2k+1) = \frac{E_k}{m\omega^2} \\ \langle p^2 \rangle_k &= \langle k|p^2|k\rangle = \frac{\hbar m\omega}{2} (2k+1) = mE_k\end{aligned}$$

da cui si vede che i valori medi dell'energia cinetica e dell'energia potenziale sono entrambi uguali a metà dell'energia del livello.

## 2.11

Calcolare il valor di attesa dell'operatore  $x^4$  in un autostato dell'energia dell'Oscillatore Armonico.

### Soluzione

Utilizzando la relazione di completezza e i risultati del problema 2.10 si ha

$$\begin{aligned}\langle x^4 \rangle_j &= \langle j|x^4|j\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \langle j|x^2|k\rangle \langle k|x^2|j\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} |\langle j|x^2|k\rangle|^2 = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\hbar^2}{4m^2\omega^2} \left[ \sqrt{k(k-1)} \delta_{k,j+2} + \sqrt{(k+1)(k+2)} \delta_{k,j-2} + (2k+1) \delta_{j,k} \right]^2\end{aligned}$$

Sviluppato il quadrato i prodotti di  $\delta$  con indici differenti non danno contributo:

$$\langle x^4 \rangle_j = \frac{\hbar^2}{4m^2\omega^2} [j(j-1) + (j+1)(j+2) + (2j+1)^2] = \frac{3\hbar^2}{4m^2\omega^2} [2j^2 + 2j + 1]$$

## 2.12

Un oscillatore armonico di massa  $m$  e costante elastica  $k$  si trova nello stato fondamentale. Si calcoli la probabilità di trovarlo al di fuori della zona permessa classicamente.

### Soluzione

La regione permessa classicamente è il segmento compreso tra i due punti d'inversione del moto  $\pm$ , dove

$$\bar{x} = \sqrt{\frac{2E}{k}}$$

ottenuto risolvendo l'equazione

$$E = V(x) = \frac{1}{2}Kx^2$$

Nello stato fondamentale  $E = \hbar\omega/2$  ( $\omega = \sqrt{k/m}$ ), mentre lo stato è descritto dalla funzione d'onda (vedi A.2)

$$\phi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-m\omega x^2/2\hbar}.$$

Tenendo conto della simmetria della distribuzione di probabilità risultante, la probabilità richiesta è quindi

$$\begin{aligned} P &= 2 \int_{\bar{x}}^{+\infty} |\phi_0(x)|^2 dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[ \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^1 e^{-x^2} dx \right] = 1 - 2\text{Erf}(1) = 1 - 0.84 = 0.16. \end{aligned} \quad (2.8)$$

dove

$$\text{Erf}(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-x^2} dx$$

è la funzione errore, che si trova tabulata o si calcola per via numerica.

## 2.13

Si sa con certezza che lo stato di un oscillatore armonico di pulsazione  $\omega$  non contiene stati più eccitati del secondo livello:

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle + c|2\rangle$$

Si sa inoltre che il valore di aspettazione della posizione  $x$  all'istante considerato è zero e che il valore di aspettazione dell'energia è  $(3/4)\hbar\omega$ .

Che si può dire dei valori di  $a, b, c$  nell'ipotesi che siano reali? È completamente determinato lo stato in queste condizioni?

### Soluzione

Ricordando che

$$x|n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^+) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^+)|n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\sqrt{n}|n-1\rangle + \sqrt{n+1}|n+1\rangle), \quad (2.9)$$

si ottiene

$$\langle x \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(2ab + 2\sqrt{2}bc) = 0 \quad (2.10)$$

che ha due soluzioni

a)  $b \neq 0$  e  $a = -\sqrt{2}c$

b)  $b = 0$

Abbiamo a disposizione altre due equazioni

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= 1 \quad (\text{condizione di normalizzazione}) \\ a^2 + 3b^2 + 5c^2 &= \frac{3}{2} \quad (\text{condizione sull'energia}) \end{aligned}$$

Nel caso a) si ottiene:

$$c = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad b = \pm i \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad a = \mp \sqrt{\frac{3}{2}}$$

che è incompatibile con l'ipotesi di realtà dei coefficienti. Nel caso b) si ottiene:

$$b = 0, \quad c = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad a = \pm \sqrt{\frac{7}{8}}$$

Si hanno in definitiva quattro possibili determinazioni dello stato.

## Capitolo 3

# Momento angolare e sistemi in 2D e 3D

### 3.1

Lo stato di una particella di massa  $m$  è descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(x) = A \left( \frac{x}{x_0} \right)^n e^{-\frac{x}{x_0}},$$

dove  $A$ ,  $n$  e  $x_0$  sono costanti.

- Usando l'equazione di Schrödinger, trovare il potenziale  $V(x)$  e l'energia  $E$  per i quali questa funzione d'onda è un'autofunzione (assumere che  $V(x) \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow \infty$ ).
- Quale connessione si può notare tra questo potenziale e il potenziale radiale effettivo (coulombiano + centrifugo) per un atomo d'idrogeno nello stato di momento angolare orbitale  $\ell$ ?

### Soluzione

- Sostituendo  $\psi(x)$  nell'equazione di Schrödinger si ottiene:

$$[E - V(x)]\psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \frac{n(n-1)}{x^2} - 2\frac{n}{xx_0} + \frac{1}{x_0^2} \right] \psi(x)$$

Nell'ipotesi  $V(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$ , si ottiene

$$E = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{x_0^2} \quad \text{e quindi} \quad V(x) = \frac{\hbar^2}{2m} \left[ \frac{n(n-1)}{x^2} - 2\frac{n}{xx_0} \right]$$

- Il termine  $\frac{\hbar^2}{2m} \frac{n(n-1)}{x^2}$  è l'analogo del potenziale centrifugo  $\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}$  dell'equazione radiale, ma il termine in  $\frac{1}{x}$  dipende da  $n$  mentre ciò non accade nel potenziale coulombiano  $\frac{q^2}{r}$ .

### 3.2

Di un atomo di idrogeno si sa che:

- a) é in uno stato p con  $n=2$ ,
- b) lo stato contiene autostati di  $L_z$  relativi agli autovalori  $+1$  e  $-1$ ,
- c) il valore di aspettazione di  $L_z$  é zero,
- d) la probabilità di trovare l'elettrone nel primo quadrante ( $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$ ) é del 25%.

Scrivere le possibili funzioni d'onda.

#### Soluzione

Indichiamo con  $|n\ell m\rangle$  il generico autostato comune ad  $\hat{H}$ ,  $\hat{L}^2$ ,  $\hat{L}_z$ . Le condizioni a) e b) consentono di scrivere lo stato cercato nella forma:

$$|\psi\rangle = \alpha|211\rangle + \beta|21-1\rangle$$

Per condizione c):

$$\langle\psi|\hat{L}_z|\psi\rangle = |\alpha|^2\hbar - |\beta|^2\hbar = 0 \quad \Rightarrow \quad |\alpha|^2 = |\beta|^2$$

Imponendo la normalizzazione e tenendo in conto che, poiché la fase complessiva di  $\psi$  è indeterminata, possiamo fissare  $\alpha$  reale e positivo, otteniamo

$$\alpha = |\beta| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

e, detta  $\delta$  la fase di  $\beta$ ,

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\delta}$$

La condizione d) richiede il passaggio alle funzioni d'onda. La probabilità di trovare la particella tra  $\phi$  e  $\phi + d\phi$  si ottiene integrando sulle altre variabili il modulo quadro della  $\psi(r, \theta, \phi) = \langle\vec{r}|\psi\rangle$

$$P(\phi)d\phi = \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\phi} + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\phi+i\delta} \right) \right|^2 d\phi$$

$$\begin{aligned} P\left(0 < \phi < \frac{\pi}{2}\right) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\phi} + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{+i\phi-i\delta} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\phi} + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\phi+i\delta} \right) d\phi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [1 + \cos(2\phi - \delta)] d\phi = \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \sin \delta = \frac{1}{4} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Quindi

$$\sin \delta = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta = n\pi$$

Abbiamo quindi due possibili determinazioni dello stato corrispondenti alla scelta di  $n$  pari o dispari:

$$|\psi\rangle = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}|211\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|21-1\rangle \\ \frac{1}{\sqrt{2}}|211\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|21-1\rangle. \end{cases}$$

### 3.3

Mostrare che in un autostato di  $J^2$  ed  $J_z$  corrispondente ai numeri quantici  $j$  ed  $m$ , la massima accuratezza nella misura contemporanea di  $J_x$  e  $J_y$  si ottiene quando  $|m| = j$ .

#### Soluzione

Cerchiamo il minimo nello stato  $|jm\rangle$  delle indeterminazioni di  $J_x$  e  $J_y$ , che sono uguali per motivi di simmetria:

$$(\langle \Delta J_x \rangle)^2 = \langle J_x^2 \rangle - \langle J_x \rangle^2 = (\langle \Delta J_y \rangle)^2 = \langle J_y^2 \rangle - \langle J_y \rangle^2$$

Sempre per motivi di simmetria, non essendovi direzione privilegiata nel piano  $xy$ ,  $\langle J_x \rangle = \langle J_y \rangle$ . Il loro valore è zero; infatti, utilizzando la A.15, si ottiene:

$$\begin{aligned} \langle J_x \rangle &= \langle j, m | J_x | j, m \rangle = \\ &= \langle j, m | \frac{1}{2} (J_+ + J_-) | j, m \rangle = \\ &= \frac{\hbar}{2} \left\{ \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} |j, m+1\rangle + \sqrt{j(j+1) - m(m-1)} |j, m-1\rangle \right\} = 0 \end{aligned}$$

Pertanto:

$$(\langle \Delta J_x \rangle)^2 = \langle J_x^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle J^2 - J_z^2 \rangle = \frac{1}{2} [j(j+1)\hbar^2 - m^2\hbar^2] = \frac{\hbar^2}{2} [j(j+1) - m^2]$$

che è chiaramente minima per  $|m| = j$ , il valore massimo che  $|m|$  può assumere.

### 3.4

Una particella in un potenziale centrale é in uno stato descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(x, y, z) = A(xy + yz + zx)e^{-\alpha r^2}.$$

- Qual é la probabilità che una misura del quadrato del momento angolare dia come risultato 0?
- Quale che dia  $6\hbar^2$ ?
- Se si trova  $l = 2$ , quali sono le probabilità relative ai vari valori di  $L_z$ ?

#### Soluzione

Passando alle coordinate polari mediante la trasformazione

$$x = r \sin \theta \cos \phi \quad y = r \sin \theta \sin \phi \quad z = r \cos \theta$$

$$\begin{aligned} (xy + yz + zx) &= r^2 (\sin^2 \theta \sin \phi \cos \theta + \sin \theta \cos \theta \sin \phi + \sin \theta \cos \theta \cos \phi) = \\ &= r^2 \left[ \frac{1}{2} \sin^2 \theta \frac{e^{2i\phi} - e^{-2i\phi}}{2i} + \sin \theta \cos \theta \left( \frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2i} + \frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{i} \right) \right] = \\ &= \frac{r^2}{2i} \left[ \frac{1}{2} \sin^2 \theta (e^{2i\phi} - e^{-2i\phi}) + \sin \theta \cos \theta ((1+i)e^{i\phi} - (1-i)e^{-i\phi}) \right] \end{aligned} \quad (3.2)$$

Utilizzando le armoniche sferiche A.18 si ottiene

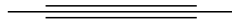
$$\psi(x, y, z) = A \frac{r^2}{2i} e^{-\alpha r^2} \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{32\pi}{15}} (Y_2^{-2} - Y_2^2) - \sqrt{\frac{8\pi}{15}} ((1+i)Y_2^1 - (1-i)Y_2^{-1}) \right]$$

- a)  $\psi$  si trova in uno stato con  $\ell = 2$  per cui  $P(\ell = 0) = 0$   
 b)  $P(L^2 = 6\hbar^2) = P(\ell = 2) = 1$   
 c) Occorre normalizzare la parte dipendente dagli angoli, cioè la parte tra parentesi quadre. Considerando l'ortogonalità delle armoniche sferiche con  $m$  diverso si ha

$$\frac{1}{4} \frac{32\pi}{15} (1+1) + \frac{8\pi}{15} (|1+i|^2 + |1-i|^2) = \frac{48\pi}{15}$$

Avremo quindi

$$\begin{aligned} P(m=2) = P(m=-2) &= \frac{1}{4} \frac{32\pi}{15} \frac{15}{48\pi} = \frac{1}{6} \\ P(m=1) = P(m=-1) &= \frac{8\pi}{15} 2 \frac{15}{48\pi} = \frac{1}{3} \\ P(m=0) &= 0 \end{aligned}$$



### 3.5

Per molte molecole l'energia potenziale può essere modellizzata con l'espressione

$$V(r) = -2D \left( \frac{a}{r} - \frac{a^2}{2r^2} \right).$$

Determinare i livelli di energia per questa energia potenziale e discutere i risultati nell'ipotesi, valida sovente,  $D \ll \frac{\hbar^2}{2ma^2}$ .

#### Soluzione

Introducendo la variabile

$$\rho = \frac{r}{a},$$

e i parametri

$$\epsilon^2 = -\frac{2ma^2}{\hbar^2} E \quad \text{e} \quad \gamma^2 = \frac{2ma^2}{\hbar^2} D$$

l'equazione di Schrödinger radiale diventa

$$\chi''(\rho) + \left[ -\epsilon^2 + \frac{2\gamma^2}{\rho} - \frac{\gamma^2 + \ell(\ell+1)}{\rho^2} \right] \chi(\rho) = 0$$

L'equazione è simile a quella per l'atomo d'idrogeno

$$\chi''(r) + \left[ -\epsilon^2 + \frac{2\epsilon\lambda}{r} - \frac{\ell'(\ell'+1)}{r^2} \right] \chi(r) = 0$$

a meno delle sostituzioni

$$\lambda = \frac{\gamma^2}{\epsilon} \quad \text{e} \quad \gamma^2 + \ell(\ell+1) = \ell'(\ell'+1) \Leftrightarrow \ell' = \sqrt{\gamma^2 + \left(\ell + \frac{1}{2}\right)^2} - \frac{1}{2}$$

Nel caso dell'atomo d'idrogeno la richiesta che la funzione d'onda sia regolare all'infinito porta alla condizione di quantizzazione

$$\ell' + 1 - \lambda = -n_r.$$



Nel nostro caso avremo

$$\sqrt{\gamma^2 + (\ell + \frac{1}{2})^2} + \frac{1}{2} - \frac{\gamma^2}{\epsilon} = -n_r$$

I livelli di energia degli stati legati sono dati quindi da

$$\begin{aligned} E_{n_r, \ell} &= -\frac{\hbar^2}{2ma^2} \epsilon^2 \\ &= -\frac{\hbar^2}{2ma^2} \frac{\gamma^4}{\left[ \sqrt{\gamma^2 + (\ell + \frac{1}{2})^2} + \frac{1}{2} + n_r \right]^2} \\ &= -D \frac{1}{\left[ \sqrt{1 + (\ell + \frac{1}{2})^2 x^2} + (\frac{1}{2} + n_r)x \right]^2}. \end{aligned}$$

dove

$$x = \frac{1}{\gamma}$$

Nell'ipotesi  $\gamma \gg 1$  sviluppiamo questo risultato in serie di  $x$  fino al II ordine. Tenendo conto degli sviluppi :

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x^2} &\approx 1 + \frac{x^2}{2} \\ \left[ \frac{1}{1+ax+bx^2} \right]^2 &\approx [1-ax+(a^2-b)x^2]^2 \approx 1-2ax+(3a^2-2b)x^2, \end{aligned}$$

si ottiene

$$E_{n_r, \ell} \approx -D \left[ 1 - \frac{2(n_r + \frac{1}{2})}{\gamma} - \frac{(\ell + \frac{1}{2})^2}{\gamma^2} + 3 \frac{(n_r + \frac{1}{2})^2}{\gamma^2} \right]$$

È chiaro che questa approssimazione ha senso solo per piccoli valori dei numeri quantici, altrimenti i termini trascurati diventano importanti perchè dipendono da potenze di  $n_r$  e  $\ell$ . I tre termini possono essere interpretati:

- il primo termine costante è legato al valore del minimo del potenziale. Infatti il  $V$  nel punto di minimo  $r = a$  vale  $-D$ ;
- il secondo termine un termine vibrazionale di pulsazione

$$\omega = \sqrt{\frac{2D}{ma^2}}$$

legato al fatto che intorno al minimo il potenziale rappresenta un oscillatore armonico;

- il terzo e il quarto termine rappresentano l'energia rotazionale proporzionale

a

$$\frac{D}{\gamma^2} = \frac{\hbar^2}{2ma^2} = \frac{\hbar^2}{2I} \text{ dove } I \text{ è il momento d'inerzia del sistema.}$$



### 3.6

Considerare il seguente gradino di potenziale in 3 dimensioni

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ V_0, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Derivare le leggi di riflessione e rifrazione per un'onda piana che incide obliquamente e determinare le condizioni per la riflessione totale.

### Soluzione

Notiamo che l'equazione di Schrödinger è separabile in coordinate cartesiane, essendo l'Hamiltoniano dato da:

$$\mathcal{H} = \begin{cases} \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m}, & \text{se } x < 0, \\ \frac{p_x^2}{2m} + V_0 + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m}, & \text{se } x > 0 \end{cases}.$$

Come si vede dall'Hamiltoniano il sistema è simmetrico per rotazioni intorno all'asse  $x$ , possiamo quindi fissare la direzione di incidenza nel piano  $xz$ , ponendo  $p_y = E_y = 0$ . Per la separabilità abbiamo per l'energia:

$$E = E_x + E_z$$

e per la relativa autofunzione:

$$\Psi(x, z) = \psi(x)\phi(z).$$

Nella coordinata  $z$  il moto è libero, mentre nella coordinata  $x$  si ha un potenziale a gradino. Ponendo

$$k_x = \sqrt{\frac{2mE_x}{\hbar^2}}, \quad k_z = \sqrt{\frac{2mE_z}{\hbar^2}},$$

abbiamo, normalizzazione a parte,

$$\begin{aligned} \phi(z) &= e^{ik_z z} \\ \psi(x) &= \begin{cases} e^{ik_x x} + R e^{-ik_x x}, & \text{se } x < 0 \\ T e^{ik'_x x}, & \text{se } x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

dove

$$k'_x = \sqrt{\frac{2m(E_x - V_0)}{\hbar^2}}.$$

Abbiamo posto  $E_x > V_0$  poichè viene altrimenti non si avrebbe corrente trasmessa per  $x > 0$  e quindi non si avrebbe rifrazione.

Imponendo le condizioni di continuità per la  $\psi(x)$  e la  $\psi'(x)$  in  $x = 0$ , si ottiene

$$R = \frac{k_x - k'_x}{k_x + k'_x} \quad T = \frac{2k_x}{k_x + k'_x}$$

Poichè  $k'_z = k_z$  gli angoli di incidenza e di riflessione sono uguali. Si ha riflessione totale solo se  $R = 1, T = 0$ , cioè solo se  $k_x = 0, E_x = 0$  e l'onda si propaga nella direzione  $z$ .

La situazione presenta analogie e differenze rispetto al caso delle onde elettromagnetiche, per le quali vale la legge di Snell. Nel presente caso  $V_0$ , cioè la variazione del potenziale, assume il ruolo di cambiamento dell'indice di rifrazione. Mentre per i fotoni vale la semplice relazione ( $n$  = indice di rifrazione)

$$k = \frac{\omega}{c} n = \frac{E}{\hbar c} n,$$

per le particelle la relazione è più complicata

$$k = \sqrt{\frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}}.$$

In termini dei vettori d'onda gli angoli sono dati da

$$\sin \alpha = \frac{k_z}{\sqrt{k_z^2 + k_x^2}} \quad \sin \alpha' = \frac{k_z}{\sqrt{k_z^2 + k_x'^2}}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'} = \frac{\sqrt{k_z^2 + k_x'^2}}{\sqrt{k_z^2 + k_x^2}} = \sqrt{\frac{E_z + E_x - V_0}{E_z + E_x}}.$$

Risulta quindi che:

1. se  $V_0 > 0$  avremo  $\sin \alpha' > \sin \alpha$  e quindi  $\alpha' > \alpha$ ; viceversa se  $V_0 < 0$  avremo  $\alpha' < \alpha$ .
2. Il caso della riflessione completa, che si ha nel passaggio da un mezzo più rifrangente ad uno meno rifrangente, richiederebbe dunque che sia un particolare valore negativo di  $V_0$ . Tuttavia per le onde di materia  $\sin \alpha' = 1$  solo se  $k_x' = 0$ , cioè se  $E_x = V_0$ , che non ha senso fisico per  $V_0 < 0$ .



### 3.7

Un nucleo di dimensioni  $5 \cdot 10^{-13}$ cm é schematizzato come una buca di potenziale di profondità 10 MeV.

Trovare la minima massa di una particella all'interno del nucleo.

#### Soluzione

Ricordiamo che per una buca sferica di raggio  $a$  e profondità  $V_0$  in uno stato di momento angolare  $\ell = 0$ , gli stati legati si ottengono come soluzioni dell'equazione

$$\sin ka = \pm \sqrt{\frac{\hbar^2}{2mV_0a^2}} ka \quad (\cot ka < 0)$$

dove  $k = \sqrt{2m(E + V_0)/\hbar^2}$ .

La suddetta equazione ha soluzioni solo se

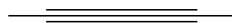
$$\sqrt{\frac{\hbar^2}{2mV_0a^2}} < \frac{2}{\pi}$$

$$mc^2 > \frac{\pi^2 \hbar^2 c^2}{8V_0a^2}.$$

Nel nostro caso, ponendo  $V_0 = 10 \text{ MeV}$ ,  $a = 5 \cdot 10^{-13}$ cm, si ottiene

$$mc^2 > 192.3 \text{ MeV}.$$

Ricordando che stati di momento angolare con  $\ell > 0$  si ottengono, a massa  $m$  fissata, per valori più alti di  $V_0$ , possiamo desumere che, date le disequazioni su riportate, a fissato  $V_0$ , tali stati necessitano di valori di massa più alti di quello trovato per  $\ell = 0$ .



### 3.8

Un oscillatore armonico piano ha come hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2}m\omega^2(q_x^2 + q_y^2).$$

- a) Si dica quali sono i livelli energetici e la loro degenerazione;
- b) si scriva l'hamiltoniano in termini degli operatori

$$\eta_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x + ia_y) \quad \eta_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x - ia_y)$$

con

$$a_x = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} q_x + i\sqrt{\frac{1}{2m\omega\hbar}} p_x \quad a_y = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} q_y + i\sqrt{\frac{1}{2m\omega\hbar}} p_y$$

e dei loro hermitiano coniugati;

- c) si scriva l'operatore momento angolare per questo problema; cosa si può dire sul momento angolare a fissato livello di energia?

### Soluzione

a)

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_x + \mathcal{H}_y = \hbar\omega(a_x^\dagger a_x + a_y^\dagger a_y + 1)$$

Gli autovalori di  $\mathcal{H}$  sono dati da

$$E = (n + 1)\hbar\omega \quad \text{con } n = 0, 1, \dots$$

ai quali corrispondono gli autostati  $|n_x, n_y\rangle$  con  $n_x + n_y = n$ ,  $n_x > 0$ ,  $n_y > 0$ , che possiamo anche scrivere nella forma

$$|k, n - k\rangle \quad \text{con } k = 0, 1, \dots, n.$$

$E_n$  è quindi degenera  $n + 1$  volte.

b) In termini degli operatori  $\eta$  si ottiene

$$a_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_+ + \eta_-) \quad a_y = \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_+ - \eta_-)$$

$$\mathcal{H} = \hbar\omega(\eta_+^\dagger \eta_- + \eta_-^\dagger \eta_+ + 1)$$

c) Per questo sistema il momento angolare ha solo componente lungo l'asse  $z$ . Poichè

$$q_x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a_x + a_x^\dagger) \quad p_x = \frac{1}{i}\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(a_x - a_x^\dagger)$$

abbiamo

$$L = q_x p_y - q_y p_x = \frac{\hbar}{2i} [(a_x + a_x^\dagger)(a_y - a_y^\dagger) - (a_y + a_y^\dagger)(a_x - a_x^\dagger)] = \frac{\hbar}{2i} [a_x^\dagger a_y - a_x a_y^\dagger]$$

In linea di principio dovrebbe essere possibile trovare un set di autostati comuni ad  $\mathcal{H}$  ed  $L$ , poiché si dimostra facilmente che i due operatori commutano. Ci limitiamo tuttavia a studiare, come richiesto, gli elementi di matrice di  $L$

nei sottospazi relativi a ciascun autovalore dell'energia, cioè a  $n$  fissato. Si ottiene

$$\langle k', n - k' | L | k, n - k \rangle = \delta_{k', k+1} \sqrt{(k+1)(n-k)} - \delta_{k', k-1} \sqrt{k(n-k+1)}$$

Si vede subito che gli elementi diagonali, cioè i valori di aspettazione di  $L$  negli autostati dell'energia che abbiamo trovato, sono nulli. In questi autostati accade quindi o che  $\ell = 0$ , oppure che, presumibilmente, sono presenti combinazioni di  $\ell$  e di  $-\ell$ .

In ciascun sottospazio relativo ad un valore  $E_n$  la matrice di  $L$  ha questa forma:

$$L^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{n} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\sqrt{n} & 0 & \sqrt{2(n-1)} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2(n-1)} & 0 & \sqrt{3(n-2)} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3(n-2)} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \sqrt{n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\sqrt{n} & 0 \end{pmatrix}$$

$L^{(n)}$  è tridiagonale, antisimmetrica rispetto alla diagonale principale, simmetrica rispetto a quella opposta. Si può dimostrare in generale che gli autovalori sono

$$\ell = -n, -n+2, \dots, n-2, n.$$

Si possono facilmente calcolare gli autovalori per i primi valori di  $n$ :

$$\begin{aligned} \text{per } n = 0 & \quad \ell = 0 \\ \text{per } n = 1 & \quad \ell = \pm 1 \\ \text{per } n = 2 & \quad \ell = 0, \pm 2 \\ \text{per } n = 3 & \quad \ell = \pm 1, \pm 3 \end{aligned}$$

### 3.9

Una particella in un potenziale sfericamente simmetrico è in uno stato descritto dal pacchetto d'onda

$$\psi((x, y, z) = C(xy + yz + zx)e^{-\alpha r^2}$$

- a) Quale è la probabilità che una misura del quadrato del momento angolare dia per risultato 0?
- b) Quale è la probabilità che dia  $6\hbar^2$ ?
- c) Se si trova che il valore del numero quantico angolare è 2, quali sono le probabilità relative ai possibili valori di  $m$ ?

#### Soluzione

Introducendo le coordinate sferiche mediante la A.10, possiamo scrivere

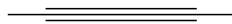
$$\begin{aligned} \psi(r, \theta, \phi) &= C r^2 e^{-\alpha r^2} (\sin^2 \theta \sin \phi \cos \phi + \sin \theta \cos \theta \sin \phi + \sin \theta \cos \theta \cos \phi) = \\ &= \frac{C}{2i} r^2 e^{-\alpha r^2} \left\{ \frac{1}{2} \sin \theta (e^{2i\phi} - e^{-2i\phi}) + \sin \theta \cos \theta [e^{i\phi}(1+i) - e^{-i\phi}(1-i)] \right\} = \\ &= \frac{C}{2i} r^2 e^{-\alpha r^2} \sqrt{\frac{8\pi}{15}} [Y_2^{-2} - Y_2^2 - (1+i)Y_2^1 + (1-i)Y_2^{-1}] \end{aligned}$$

- a) La particella si trova in uno stato con  $\ell = 2$ , quindi  $P(\ell = 0) = 0$ .
- b)  $P(L^2 = 6\hbar^2) = P(\ell = 2) = 1$
- c) La probabilità di trovare un certo valore di  $L_z$  è dato dal modulo quadro del coefficiente della relativa Armonica Sferica, dopo avere integrato su  $r$  e normalizzato la funzione d'onda. Il risultato dell'integrazione su  $r$  è un termine uguale per tutte le componenti che può essere trascurato. Avremo quindi

$$1 + 1 + |1 + i|^2 + |1 - i|^2 = 1 + 1 + 2 + 2 = 6$$

e le probabilità richieste sono date da

$$\begin{aligned} P(L_z = -2\hbar) &= \frac{1}{6} \\ P(L_z = +2\hbar) &= \frac{1}{6} \\ P(L_z = -1\hbar) &= \frac{1}{3} \\ P(L_z = +1\hbar) &= \frac{1}{3} \\ P(L_z = 0\hbar) &= 0 \end{aligned}$$



### 3.10

La funzione d'onda dello stato fondamentale dell'atomo d'idrogeno è:

$$\psi_{1,0,0} = \sqrt{\frac{1}{\pi r_0^3}} e^{-\frac{r}{r_0}}$$

dove  $r_0 = \hbar^2/me^2$  è il raggio di Bohr.

- a) Determinare a quale distanza dal nucleo la densità di probabilità di trovare l'elettrone è massima.
- b) Determinare inoltre il valore d'attesa della posizione dell'elettrone.

#### Soluzione

Poiché si richiede la probabilità di trovare l'elettrone a fissata distanza dal nucleo (o meglio di trovare la massa ridotta a fissata distanza dal Centro di Massa) indipendentemente dalla direzione, occorre integrare la distribuzione di probabilità su tutto l'angolo solido.

$$P(r) dr = \int d\Omega |\psi_{1,0,0}|^2 r^2 dr = 4\pi |\psi_{1,0,0}|^2 r^2 dr = \frac{4r^2}{r_0^3} e^{-\frac{2r}{r_0}} dr$$

- a) La densità di probabilità di trovare l'elettrone è massima per  $r$  soluzione dell'equazione

$$\frac{dP(r)}{dr} = \frac{4}{r_0^3} \left[ 2r - 2\frac{r^2}{r_0} \right] e^{-\frac{2r}{r_0}} = 0 \quad \text{con} \quad \frac{d^2P(r)}{dr^2} < 0.$$

Quindi il massimo richiesto si ha in  $r = r_0$  ( $r = 0$  corrisponde ad un minimo).

- b) Il valore d'attesa della posizione dell'elettrone, usando la formula (A.2), è dato da

$$\langle r \rangle = \int_0^\infty dr r P(r) = \frac{4}{r_0^3} \int_0^\infty dr r^3 e^{-\frac{2r}{r_0}} = \frac{r_0}{4} \int_0^\infty d\alpha \alpha^3 e^{-\alpha} = \frac{3}{2} r_0.$$

### 3.11

Lo stato di una particella di massa  $m$  è descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} (e^{i\varphi} \sin \vartheta + \cos \vartheta) g(r),$$

dove

$$\int |g(r)|^2 r^2 dr = 1$$

e  $\varphi$ ,  $\vartheta$  sono gli angoli azimutale e polare rispettivamente.

- Quali sono i possibili risultati di una misura della componente  $L_z$  del momento angolare della particella in questo stato?
- Qual'è la probabilità di ottenere ciascuno di tali possibili risultati?
- Quale'è il valore di attesa di  $L_z$ ?

### Soluzione

- c) Mediante la formula (A.17), la funzione d'onda può essere riscritta nella forma

$$\psi(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{3}} (Y_1^0 - \sqrt{2} Y_1^1) g(r);$$

quindi i possibili valori  $L_z$  sono  $+\hbar$  e  $0$ .

Supponendo normalizzata la sua parte radiale, la funzione d'onda è complessivamente normalizzata. Infatti

$$\begin{aligned} \int |\psi|^2 d\vec{r} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_0^\infty dr r^2 g(r) \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi (1 + \cos \varphi \sin 2\vartheta) \sin \vartheta = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta = 1 \end{aligned}$$

Quindi  $P(L_z = \hbar) = 2/3$  e  $P(L_z = 0) = 1/3$

- c)  $\langle L_z \rangle = 2/3 \cdot \hbar + 1/3 \cdot 0 = 2/3 \hbar$

### 3.12

Si consideri un atomo d'idrogeno negli stati  $2p$  (trascurando lo spin dell'elettrone). Si consideri inoltre la base degli autostati comuni agli operatori  $\mathbf{H}, \mathbf{L}^2, \mathbf{L}_z$ .

- a) Si denotino con  $|\psi_+\rangle, |\psi_0\rangle, |\psi_-\rangle$  gli stati normalizzati della base corrispondenti rispettivamente a  $m = +1, 0, -1$ . Si immerga l'atomo di idrogeno in un campo magnetico esterno  $\mathbf{B}$  parallelo all'asse  $z$  e sia l'energia di interazione data da

$$W = -\beta\mathbf{B} \cdot \mathbf{L}.$$

Calcolare i nuovi livelli di energia del sistema.

- b) Si consideri lo stato

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}(|\psi_+\rangle + \sqrt{2}|\psi_0\rangle + |\psi_-\rangle).$$

Calcolare  $\langle E \rangle$  e  $\Delta E^2 = \langle (E - \langle E \rangle)^2 \rangle$  nello stato  $|\psi\rangle$ .

- c) Nella rappresentazione  $|\psi_+\rangle, |\psi_0\rangle, |\psi_-\rangle$ , in cui  $L_z$  è diagonale, si ha

$$L_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_y = \frac{\hbar}{i\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcolare i valori medi di  $L_x$  e  $L_y$  nello stato  $|\psi(t)\rangle$ .

### Soluzione

- a) L'energia dei livelli  $2p$  in assenza del campo magnetico è

$$E_2 = -\frac{\mu c^2 \alpha^2}{8}$$

dove  $\mu$  è la massa ridotta dell'elettrone e  $\alpha$  la costante di struttura fine. Il contributo di energia relativo al campo magnetico corrisponde all'operatore

$$\widehat{W} = -\beta B \widehat{L}_z$$

che commuta con il resto dell'Hamiltoniano. Inoltre gli stati considerati sono autostati di  $\widehat{L}_z$ , quindi i nuovi livelli di energia sono

$$E_2^{+1} = -\frac{\mu c^2 \alpha^2}{8} - \beta \hbar B \quad E_2^0 = -\frac{\mu c^2 \alpha^2}{8} \quad E_2^{-1} = -\frac{\mu c^2 \alpha^2}{8} + \beta \hbar B,$$

dove i livelli sono stati indicizzati con il valore del numero quantico  $m$ .

- b) Lo stato  $|\psi\rangle$  è normalizzato. Si ha quindi:

$$\langle E \rangle = \left(\frac{1}{2}\right)^2 (1^2 E_2^{+1} + (\sqrt{2})^2 E_2^0 + 1^2 E_2^{-1}) = -\frac{\mu c^2 \alpha^2}{4}$$

$$\begin{aligned} \Delta E^2 &= \langle (E - \langle E \rangle)^2 \rangle = \\ &= \langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2 = \\ &= \frac{1}{4} [(E_2^{+1})^2 + 2(E_2^0)^2 + (E_2^{-1})^2] - \langle E \rangle^2 = \\ &= \frac{1}{2} \beta^2 \hbar^2 B^2 \end{aligned}$$



- c) Nella rappresentazione considerata il vettore di stato è rappresentato dalla matrice ad un colonna

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Avremo quindi:

$$\begin{aligned} \langle L_x \rangle &= \frac{1}{2} (1 \quad \sqrt{2} \quad 1) \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \hbar \\ \langle L_y \rangle &= \frac{1}{2} (1 \quad \sqrt{2} \quad 1) \frac{\hbar}{i\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

### 3.13

Una particella in un potenziale  $V(r)$  è descritta dalla funzione d'onda

$$\psi_E(r, \vartheta, \varphi) = Ae^{-\frac{r}{a_0}} \quad (a_0 \text{ costante})$$

autostato dell'Hamiltoniano.

- a) Qual è il contenuto di momento angolare dello stato?  
 b) Supponendo che il potenziale si annulli nel limite  $r \rightarrow \infty$ , trovare l'autovalore dell'energia considerando in questo limite l'equazione radiale

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] + V(r) \right\} \psi_E(r, \vartheta, \varphi) = E\psi_E(r, \vartheta, \varphi)$$

- c) Dal valore di  $E$  ricavare  $V(r)$ , utilizzando sempre l'equazione radiale.

### Soluzione

- a) Poichè la funzione d'onda non dipende da  $\vartheta$  e  $\varphi$  il sistema è in uno stato con  $\ell = m = 0$ .  
 b) Poichè

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} e^{-\frac{r}{a_0}} = -\frac{1}{a_0} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 e^{-\frac{r}{a_0}} = -\frac{1}{a_0} \frac{1}{r^2} \left[ 2r - \frac{1}{a_0} r^2 \right] e^{-\frac{r}{a_0}} = \left[ -\frac{2}{a_0} \frac{1}{r} + \frac{1}{a_0^2} \right] e^{-\frac{r}{a_0}},$$

sostituendo nell'equazione radiale si ottiene

$$\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{2}{a_0} \frac{1}{r} - \frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{a_0^2} + V(r) = E.$$

Al limite per  $r \rightarrow \infty$  troviamo l'autovalore dell'energia:

$$E = -\frac{\hbar^2}{2\mu a_0^2}$$

c) Sostituendo nell'equazione precedente il valore di  $E$  trovato, abbiamo

$$V(r) = -\frac{\hbar^2}{\mu a_0} \frac{1}{r}.$$

Se  $a_0$  è il raggio di Bohr ( $a_0 = \frac{\hbar^2}{\mu e^2}$ ), si ottiene il potenziale dell'atomo d'Idrogeno  $V(r) = -\frac{e^2}{r}$ .



# Capitolo 4

## Spin

### 4.1

La funzione di spin di una particella di spin  $\frac{1}{2}$  ha la seguente forma nella rappresentazione in cui  $S_z$  è diagonale

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} \cos \delta \\ e^{i\beta} \sin \delta \end{pmatrix}.$$

Esiste una direzione  $\hat{n}$  dello spazio tale che il risultato della misura della componente dello spin lungo  $\hat{n}$  possa essere previsto con certezza?

### Soluzione

Notiamo che lo stato è già normalizzato. Dette  $\vartheta$  e  $\varphi$  le coordinate sferiche angolari che individuano la direzione  $\hat{n}$ , tale stato deve essere autostato dell'operatore:

$$\begin{aligned} \vec{S} \cdot \hat{n} &= \frac{\hbar}{2} \left[ \sin \vartheta \cos \varphi \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \sin \vartheta \sin \varphi \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \cos \vartheta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] = \\ &= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta e^{-i\varphi} \\ \sin \vartheta e^{i\varphi} & -\cos \vartheta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Gli autovettori di  $\vec{S} \cdot \hat{n}$  sono ovviamente  $\pm \frac{\hbar}{2}$ , mentre gli autovalori sono:

$$|\vec{S} \cdot \hat{n} = +\frac{\hbar}{2}\rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\vartheta}{2} \\ \sin \frac{\vartheta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix} \quad |\vec{S} \cdot \hat{n} = -\frac{\hbar}{2}\rangle = \begin{pmatrix} \sin \frac{\vartheta}{2} \\ -\cos \frac{\vartheta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix}$$

Abbiamo quindi due possibilità

1.  $\varphi = \beta - \alpha$ ,  $\delta = \frac{\vartheta}{2}$
2.  $\varphi = \beta - \alpha$ ,  $\delta = \frac{\vartheta + \pi}{2}$

---

### 4.2

Una particella di spin  $\frac{1}{2}$  si trova in uno stato in cui il valor di attesa di  $S_x$  è  $\frac{\hbar}{2}\alpha$  e quello di  $S_y$  è  $\frac{\hbar}{2}\beta$  con  $\alpha$  e  $\beta$  compresi tra  $-1$  e  $1$ .

Mostrare che deve valere la condizione  $\alpha^2 + \beta^2 \leq 1$ , e che per  $\alpha^2 + \beta^2 \leq 1$  il problema ammette due soluzioni, mentre per  $\alpha^2 + \beta^2 = 1$  se ne ha una sola. In quest'ultimo caso calcolare la probabilità di trovare lo spin della particella orientato parallelamente o antiparallelamente rispetto all'asse  $z$ .

**Soluzione**

Detti  $|\psi\rangle$  lo stato in esame e  $|\pm\rangle$  gli autostati di  $S_z$  relativi agli autovalori  $\pm\hbar/2$ , abbiamo

$$|\psi\rangle = a|+\rangle + b|-\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

dove  $a$  e  $b$  sono due costanti da determinare. In questo stato i valori medi di  $S_x$  e di  $S_y$  sono

$$\begin{aligned} \langle S_x \rangle &= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} a^* & b^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} (a^*b + ab^*) \\ \langle S_y \rangle &= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} a^* & b^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2} i(a^*b - ab^*) \end{aligned}$$

Possiamo scegliere liberamente la fase in modo che

$$a > 0 \quad b = |b| e^{i\vartheta}.$$

Dalla condizione di normalizzazione

$$|a|^2 + |b|^2 = 1 \Rightarrow |b|^2 = 1 - a^2 \Rightarrow b = \sqrt{1 - a^2} e^{i\vartheta}.$$

Le relazioni per i valori medi diventano:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\hbar} \langle S_x \rangle &= a 2\Re(b) = 2a\sqrt{1 - a^2} \cos \vartheta \\ \frac{2}{\hbar} \langle S_y \rangle &= -ia 2i\Im(b) = 2a\sqrt{1 - a^2} \sin \vartheta \end{aligned}$$

e, per le condizioni imposte dal problema,

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{4}{\hbar^2} (\langle S_x \rangle^2 + \langle S_y \rangle^2) = 4a^2(1 - a^2) \quad \text{con } a^2 \leq 1.$$

Il lato destro di questa equazione rappresenta, nella variabile  $a^2$ , una parabola con concavità rivolta verso il basso, simmetrica rispetto all'asse  $a^2 = 1/2$ , che assume il suo massimo valore in  $a^2 = 1/2$ , per cui

$$\alpha^2 + \beta^2 \leq 4a^2(1 - a^2)|_{a^2=1/2} = 1$$

Ogni altro valore di  $\alpha^2 + \beta^2 < 1$  corrisponde a due valori di  $a^2$  simmetrici rispetto ad  $a^2 = 1/2$ .

Nel caso  $\alpha^2 + \beta^2 = 1$  abbiamo  $a = 1/\sqrt{2} = |b|$ , quindi

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\vartheta} |-\rangle.$$

Quindi le probabilità richieste sono entrambi uguali a  $1/2$ .

**4.3**

Un fascio di atomi di spin  $\frac{1}{2}$  che si muove nella direzione dell'asse  $y$  viene sottoposto ad una serie di misure da parte di apparati del tipo Stern-Gerlach nel modo seguente:

- a) La prima misura accetta gli atomi con  $s_z = \frac{\hbar}{2}$  e rigetta gli atomi con  $s_z = -\frac{\hbar}{2}$ .

- b) La seconda misura accetta gli atomi con  $s_n = \frac{\hbar}{2}$  e rigetta gli atomi con  $s_n = -\frac{\hbar}{2}$ , dove  $s_n$  è l'autovalore dell'operatore  $\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}$  e  $\hat{\mathbf{n}}$  versore disposto nel piano  $xz$  ad un angolo  $\vartheta$  rispetto all'asse  $z$ .
- c) La terza misura accetta gli atomi con  $s_z = -\frac{\hbar}{2}$  e rigetta gli atomi con  $s_z = \frac{\hbar}{2}$ . Qual è l'intensità del fascio finale rispetto a quella del fascio che sopravvive alla prima misura? Come bisogna orientare la direzione  $\hat{\mathbf{n}}$  del secondo apparato se si vuole ottenere la massima intensità finale possibile?

### Soluzione

Dopo il passaggio nel primo apparato gli atomi sono descritti da un autostato di  $S_z$  corrispondente all'autovalore  $+\hbar/2$ . Utilizzando i risultati dell'esercizio (4.1) tale stato si può scrivere come sovrapposizione di autostati di  $\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}$  nella forma

$$\begin{aligned} \left| S_z = +\frac{\hbar}{2} \right\rangle &= c_+ \left| \vec{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} = +\frac{\hbar}{2} \right\rangle + c_- \left| \vec{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} = -\frac{\hbar}{2} \right\rangle, \\ c_+ &= \left\langle \vec{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} = +\frac{\hbar}{2} \left| S_z = +\frac{\hbar}{2} \right\rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\vartheta}{2} & \sin \frac{\vartheta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \cos \frac{\vartheta}{2} \\ c_- &= \left\langle \vec{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} = -\frac{\hbar}{2} \left| S_z = +\frac{\hbar}{2} \right\rangle = \begin{pmatrix} \sin \frac{\vartheta}{2} & -\cos \frac{\vartheta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \sin \frac{\vartheta}{2}. \end{aligned}$$

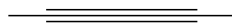
Dopo la seconda misura l'intensità del fascio si sarà ridotta quindi di un fattore  $\cos^2 \frac{\vartheta}{2}$ , mentre lo stato di ciascun atomo

$$\left| \vec{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} = +\frac{\hbar}{2} \right\rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\vartheta}{2} \\ \sin \frac{\vartheta}{2} \end{pmatrix} = \cos \frac{\vartheta}{2} \left| S_z = +\frac{\hbar}{2} \right\rangle + \sin \frac{\vartheta}{2} \left| S_z = -\frac{\hbar}{2} \right\rangle$$

La terza misura riduce ulteriormente l'intensità del fascio di un fattore  $\sin^2 \frac{\vartheta}{2}$ , per cui complessivamente si il rapporto tra l'intensità del fascio finale e quella del fascio che sopravvive alla prima misura è dato da

$$\cos^2 \frac{\vartheta}{2} \sin^2 \frac{\vartheta}{2} = \frac{1}{4} \sin^2 \vartheta$$

Tale rapporto è massimo per  $\vartheta$  uguale  $\pi/2$  oppure  $3\pi/2$ .



## 4.4

Un sistema di tre particelle diverse di spin  $\frac{1}{2}$  ha come Hamiltoniano

$$H = V(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 + \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{\sigma}_3 + \vec{\sigma}_3 \cdot \vec{\sigma}_1),$$

dove  $V$  è una costante.

Si determinino gli autovalori di  $H$ , la loro degenerazione e i relativi autostati.

### Soluzione

Detto  $\vec{J}$  lo spin totale del sistema ed  $j$  il numero quantico relativo, abbiamo

$$\mathcal{H} = V \frac{1}{2} \frac{4}{\hbar^2} \left[ (\vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{S}_3)^2 - \vec{S}_1^2 - \vec{S}_2^2 - \vec{S}_3^2 \right] = \frac{2V}{\hbar^2} \left[ J^2 - \frac{9}{4} \hbar^2 \right]$$

Ricordiamo che ne caso di due particelle di spin  $1/2$ , se indichiamo con  $|j, j_z\rangle$  l'autostato dello spin totale e con  $|\pm, \pm\rangle$  gli autostati degli spin delle singole particelle, abbiamo i seguenti possibili stati:

$$j_{12} = 0 \quad |0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+, -\rangle - |-, +\rangle)$$

$$j_{12} = 1 \quad \begin{cases} |1, +1\rangle = |+, +\rangle \\ |1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+, -\rangle + |-, +\rangle) \\ |1, -1\rangle = |-, -\rangle \end{cases}$$

Combinando una coppia di particelle con  $j_{12} = 0$  con la terza particella di spin  $1/2$  si hanno due stati con  $j = 1/2$ :

$$j_{123} = \frac{1}{2} \quad \begin{cases} |\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+, -, +\rangle - |-, +, +\rangle) \\ |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+, -, -\rangle - |-, +, -\rangle) \end{cases}$$

Utilizziamo i coefficienti di Clebsh-Gordan e combiniamo ora la terza particella di spin  $1/2$  con una coppia di particelle con  $j_{12} = 1$ . Si hanno quattro stati con  $j = 3/2$ :

$$j_{123} = \frac{3}{2} \quad \begin{cases} |\frac{3}{2}, +\frac{3}{2}\rangle = |m_{12} = +1, m_3 = +1/2\rangle = |+, +, +\rangle \\ |\frac{3}{2}, +\frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}|m_{12} = +1, m_3 = -1/2\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|m_{12} = 0, m_3 = +1/2\rangle \\ = \sqrt{\frac{1}{3}}(|+, +, -\rangle + |+, -, +\rangle + |-, +, +\rangle) \\ |\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}|m_{12} = -1, m_3 = +1/2\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|m_{12} = 0, m_3 = -1/2\rangle \\ = \sqrt{\frac{1}{3}}(|+, +, -\rangle + |+, -, +\rangle + |-, +, +\rangle) \\ |\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\rangle = |m_{12} = -1, m_3 = -1/2\rangle = |-, -, -\rangle \end{cases}$$

e due stati con  $j = 3/2$ :

$$j_{123} = \frac{1}{2} \quad \begin{cases} |\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|m_{12} = +1, m_3 = -1/2\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}|m_{12} = 0, m_3 = +1/2\rangle \\ = \sqrt{\frac{2}{3}}|+, +, -\rangle - \sqrt{\frac{1}{6}}|+, -, +\rangle - \sqrt{\frac{1}{6}}|-, +, +\rangle \\ |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}|m_{12} = 0, m_3 = -1/2\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|m_{12} = -1, m_3 = +1/2\rangle \\ = \sqrt{\frac{1}{6}}|+, -, -\rangle + \sqrt{\frac{1}{6}}|-, +, -\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|-, -, +\rangle \end{cases}$$

Notiamo che abbiamo determinato quattro stati con  $j = 1/2$ , invece di due. Per risolvere questa ambiguità scriviamo il generico stato con  $j = 1/2, j_z = 1/2$  nella forma

$$|\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}(|+, +, -\rangle + e^{i\alpha}|+, -, +\rangle + e^{i\beta}|-, +, +\rangle)$$

che tiene conto del fatto che, per motivi di simmetria, gli stati delle tre particelle devono avere lo stesso peso, e imponiamo che esso sia ortogonale allo stato  $j = 3/2, j_z = 1/2$  che sovrapposizione degli stessi stati di singola particella. Otteniamo così la relazione

$$1 + e^{i\alpha} + e^{i\beta} = 0, \quad \text{cioè } \cos \alpha + \cos \beta = -1 \quad \text{e } \sin \alpha + \sin \beta = 0$$

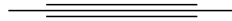
per cui  $\alpha = -\beta = 2\pi/3$ . In definitiva

$$|\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} \left( |+, +, -\rangle + e^{i\frac{2}{3}\pi} |+, -, +\rangle + e^{-i\frac{2}{3}\pi} |-, +, +\rangle \right)$$

Analogamente si procede per lo stato  $j = 1/2, j_z = 1/2$ . In definitiva gli autovalori dell'Hamiltoniano sono:

$$J = \frac{1}{2} \quad E_0 = \frac{2V}{\hbar^2} \left[ \frac{3}{4}\hbar^2 - \frac{9}{4}\hbar^2 \right] = -3V \quad \text{con degenerazione 2}$$

$$J = \frac{3}{2} \quad E_1 = \frac{2V}{\hbar^2} \left[ \frac{15}{4}\hbar^2 - \frac{9}{4}\hbar^2 \right] = +3V \quad \text{con degenerazione 4}$$



## 4.5

Si consideri una particella di spin  $\frac{1}{2}$  della quale si misura la somma delle componenti  $x$  ed  $z$  dello spin  $S_x + S_z$ . Quali sono i possibili risultati della misura? Se successivamente si misura  $S_y$ , qual è la probabilità di trovare il valore  $+\frac{\hbar}{2}$ ?

### Soluzione

Osserviamo che

$$S_x + S_y = \sqrt{2} \mathbf{S} \cdot \mathbf{n}$$

dove  $\mathbf{n}$  è il versore nella direzione della bisettrice del piano  $xz$  ( $\vartheta = \pi/4, \varphi = 0$ ). Poichè gli autovalori di  $\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}$  sono  $\pm\hbar/2$  per qualsiasi  $\mathbf{n}$ , i possibili risultati della misura sono  $\pm\hbar/\sqrt{2}$ . Dopo la misura lo spin della particella si troverà nel piano  $xz$ , quindi la probabilità di trovare uno qualsiasi dei due possibili autovalori di  $S_y$  è uguale ad  $1/2$ .







## Capitolo 5

# Evoluzione temporale

### 5.1

Considerare un oscillatore armonico di massa  $m$  con energia potenziale

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

che si trova all'istante  $t = 0$  in uno stato determinato dalle seguenti condizioni:

- a) ogni misura di energia dà con certezza valori che soddisfano la relazione

$$\hbar\omega < E < 3\hbar\omega$$

- b) Il valore di attesa dell'energia è

$$\langle E \rangle = \frac{11}{6}\hbar\omega.$$

- c) Il valore di attesa della coordinata è:

$$\langle x \rangle = -\sqrt{\frac{8\hbar}{9m\omega}}$$

Identificare tale stato. Determinare poi in quali istanti il valor medio della coordinata è positivo e massimo.

### Soluzione

Ricordiamo la soluzioni per l'equazione agli autovalori per l'Hamiltoniano dell'oscillatore armonico:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \quad ; \quad \hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$$

Imponiamo ora le condizioni del problema:

- a) I possibili valori di energia misurati sono

$$E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega \quad \text{e} \quad E_2 = \frac{5}{2}\hbar\omega$$

Lo stato del sistema è quindi

$$|\psi\rangle = c_1|1\rangle + c_2|2\rangle \quad \text{con} \quad |c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$$

b) L'energia media è data da:

$$\langle E \rangle_\psi = |c_1|^2 E_1 + |c_2|^2 E_2 = \frac{1}{2} \hbar \omega (3|c_1|^2 + 5|c_2|^2) = \frac{11}{6} \hbar \omega$$

Questa condizione, insieme alla precedente, comporta

$$|c_1|^2 = \frac{2}{3} \quad \text{e} \quad |c_2|^2 = \frac{1}{3}.$$

La fase di uno dei coefficienti può essere fissata arbitrariamente, quindi

$$c_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad \text{e} \quad c_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{i\delta}.$$

c) Utilizzando le formule A.6 riportate in appendice, abbiamo

$$\begin{aligned} \langle x \rangle_\psi &= (c_1^* \langle 1| + c_2^* \langle 2|) \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a + a^+) (c_1 |1\rangle + c_2 |2\rangle) = \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (c_1^* \langle 1| + c_2^* \langle 2|) (\sqrt{2} c_2 |1\rangle + \sqrt{2} c_1 |2\rangle) = \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} (c_1^* c_2 + c_2^* c_1) = -\sqrt{\frac{8\hbar}{9m\omega}}. \end{aligned}$$

Quindi

$$c_1^* c_2 + c_2^* c_1 = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Sostituendo le espressioni per  $c_1$  e  $c_2$  si ottiene:

$$\cos \delta = -1 \quad \Rightarrow \quad \delta = \pi \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} \\ c_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

In conclusione

$$|\psi\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} |1\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} |2\rangle.$$

Al tempo  $t$ , applicando il propagatore allo stato  $|\psi\rangle$ ,

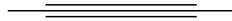
$$|\psi(t)\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} e^{-i\frac{3}{2}\omega t} |1\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-i\frac{5}{2}\omega t} |2\rangle.$$

Infine determiniamo il valor di attesa di  $x$  al tempo  $t$ :

$$\begin{aligned} \langle x(t) \rangle_\psi &= \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} (c_1^*(t) c_2(t) + c_2^*(t) c_1(t)) = \\ &= -\frac{4}{3} \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \cos \omega t. \end{aligned}$$

Si ha quindi:

$$\begin{aligned} \langle x(t) \rangle_\psi &> 0 \quad \text{se} \quad t \in \left( \frac{(4n+1)\pi}{2\omega}, \frac{3(4n+1)\pi}{2\omega} \right) \quad \text{per} \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ \langle x(t) \rangle_\psi &= \max_t \langle x \rangle_\psi(t) \quad \text{se} \quad t = \frac{(2n+1)\pi}{\omega} \quad \text{per} \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$



## 5.2

L'hamiltoniano di un sistema quantistico a due livelli può essere scritto come

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2}\hbar\omega(|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|)$$

dove  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$  sono gli autoket ortonormali appartenenti agli autovalori  $-\hbar\omega/2$  e  $+\hbar\omega/2$  rispettivamente. Si considerino l'operatore lineare  $a = |0\rangle\langle 1|$  ed il suo coniugato hermitiano  $a^\dagger$ .

a) Dimostrare che valgono le seguenti relazioni:

$$\{a, a^\dagger\} = aa^\dagger + a^\dagger a = 1 \quad ; \quad a^2 = a^{\dagger 2} = 0$$

$$[\mathcal{H}, a] = -\hbar\omega a \quad ; \quad [\mathcal{H}, a^\dagger] = +\hbar\omega a^\dagger$$

e che l'operatore  $N = aa^\dagger$  ha autovalori 0 ed 1 e che i suoi autoket sono i ket di base. Esprimere l'hamiltoniano in termini di  $N$  e dell'identità  $I$ .

b) Supponendo che il sistema si trovi all'istante iniziale  $t = 0$  nell'autostato dell'operatore hermitiano  $A = a + a^\dagger$  corrispondente all'autovalore 1, determinare i valori di aspettazione di  $A$  e di  $A^2$  e l'indeterminazione  $\langle(\Delta A)^2\rangle$  in funzione del tempo  $t$ .

c) Detto  $B = -i(a - a^\dagger)$  un altro operatore hermitiano, determinare anche  $\langle B \rangle$ ,  $\langle B^2 \rangle$  e  $\langle(\Delta B)^2\rangle$  in funzione del tempo. Verificare la relazione di indeterminazione fra  $A$  e  $B$ .

### Soluzione

a) Dall'equazione agli autovalori per  $\mathcal{H}$  si ha

$$\mathcal{H}|0\rangle = -\frac{\hbar\omega}{2}|0\rangle \quad \mathcal{H}|1\rangle = +\frac{\hbar\omega}{2}|1\rangle$$

Tenendo conto del fatto che gli stati  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$  sono un set ortonormale,

$$a = |0\rangle\langle 1| \quad a^\dagger = |1\rangle\langle 0|$$

$$\{a, a^\dagger\} = aa^\dagger + a^\dagger a = |0\rangle\langle 1|1\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 0|0\rangle\langle 1| = |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| = 1$$

$$a^2 = |0\rangle\langle 1|0\rangle\langle 1| = 0$$

$$a^{\dagger 2} = |1\rangle\langle 0|1\rangle\langle 0| = 0$$

$$[\mathcal{H}, a] = -\frac{1}{2}\hbar\omega(|0\rangle\langle 0|0\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 1|0\rangle\langle 1| - |0\rangle\langle 1|0\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1|1\rangle\langle 1|) = -\hbar\omega|0\rangle\langle 1| = -\hbar\omega a$$

$$[\mathcal{H}, a^\dagger] = -\frac{1}{2}\hbar\omega(|0\rangle\langle 0|1\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|1\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 0|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 0|1\rangle\langle 1|) = -\hbar\omega|1\rangle\langle 0| = \hbar\omega a^\dagger$$

$$N = aa^\dagger = |0\rangle\langle 1|1\rangle\langle 0| = |0\rangle\langle 0|$$

$$N|0\rangle = |0\rangle\langle 0|0\rangle = |0\rangle \Rightarrow |0\rangle \text{ autoket corrispondente all'autovalore } 1$$

$$N|1\rangle = |0\rangle\langle 0|1\rangle = 0 = 0|1\rangle \Rightarrow |1\rangle \text{ autoket corrispondente all'autovalore } 0$$

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2}\hbar\omega(|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1| + |0\rangle\langle 0| - |0\rangle\langle 0|) = -\frac{1}{2}\hbar\omega(2N - I) = \hbar\omega\left(\frac{I}{2} - N\right)$$

b) Consideriamo lo stato

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

$|\psi\rangle$  è autoket di  $A$  corrispondente all'autovalore 1. Infatti

$$A|\psi\rangle = (|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|)\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle + |0\rangle + |1\rangle) = 1 \cdot |\psi\rangle$$

Al tempo  $t$  lo stato  $|\psi\rangle$  sarà dato da

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{i\frac{\omega}{2}t}|0\rangle + e^{-i\frac{\omega}{2}t}|1\rangle)$$

Notiamo che

$$\begin{aligned} [\mathcal{H}, A] &= [\mathcal{H}, a] + [\mathcal{H}, a^\dagger] = \hbar\omega(a - a^\dagger) = -i\hbar\omega B \neq 0 \\ [\mathcal{H}, B] &= -i([\mathcal{H}, a] - [\mathcal{H}, a^\dagger]) = i\hbar\omega(a + a^\dagger) = i\hbar\omega A \neq 0. \end{aligned}$$

$A$  e  $B$  non commutano con  $\mathcal{H}$ , quindi i valori medi di tali grandezze dipendono dal tempo. Infatti

$$\begin{aligned} \langle A \rangle_\psi &= \frac{1}{2} (\langle 0|e^{-i\frac{\omega}{2}t} + \langle 1|e^{i\frac{\omega}{2}t}) (a + a^\dagger) (e^{i\frac{\omega}{2}t}|0\rangle + e^{-i\frac{\omega}{2}t}|1\rangle) = \\ &= \frac{1}{2} (\langle 0|e^{-i\frac{\omega}{2}t} + \langle 1|e^{i\frac{\omega}{2}t}) (e^{i\frac{\omega}{2}t}|1\rangle + e^{-i\frac{\omega}{2}t}|0\rangle) = \\ &= \frac{1}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) = \cos \omega t \\ \langle A^2 \rangle_\psi &= \langle (a + a^\dagger)(a + a^\dagger) \rangle_\psi = \langle aa^\dagger + a^\dagger a \rangle_\psi = \langle \{a, a^\dagger\} \rangle_\psi = \langle I \rangle_\psi = 1 \\ \langle (\Delta A)^2 \rangle_\psi &= \langle A^2 \rangle_\psi - \langle A \rangle_\psi^2 = 1 - \cos^2 \omega t = \sin^2 \omega t \\ \langle B \rangle_\psi &= -i\frac{1}{2} (\langle 0|e^{-i\frac{\omega}{2}t} + \langle 1|e^{i\frac{\omega}{2}t}) (a - a^\dagger) (e^{i\frac{\omega}{2}t}|0\rangle + e^{-i\frac{\omega}{2}t}|1\rangle) = \\ &= -i\frac{1}{2} (\langle 0|e^{-i\frac{\omega}{2}t} + \langle 1|e^{i\frac{\omega}{2}t}) (e^{-i\frac{\omega}{2}t}|0\rangle - e^{+i\frac{\omega}{2}t}|1\rangle) = \\ &= -i\frac{1}{2} (e^{-i\omega t} - e^{i\omega t}) = -\sin \omega t \\ \langle B^2 \rangle_\psi &= \langle i^2(a - a^\dagger)(a - a^\dagger) \rangle_\psi = -\langle -aa^\dagger - a^\dagger a \rangle_\psi = \langle \{a, a^\dagger\} \rangle_\psi = \langle I \rangle_\psi = 1 \\ \langle (\Delta B)^2 \rangle_\psi &= \langle B^2 \rangle_\psi - \langle B \rangle_\psi^2 = 1 - \sin^2 \omega t = \cos^2 \omega t \end{aligned}$$

Per quanto riguarda la relazione di indeterminazione tra  $A$  e  $B$  abbiamo:

$$\Delta A \cdot \Delta B = |\sin \omega t| \cdot |\cos \omega t|$$

Ricordiamo che, per ogni stato, deve valere

$$\Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle|$$

Verifichiamo che valga anche in questo caso:

$$\begin{aligned} [A, B] &= -i[a + a^\dagger, a - a^\dagger] = \\ &= -i([a, a] + [a^\dagger, a] - [a, a^\dagger] - [a^\dagger, a^\dagger]) = \\ &= -i(a^\dagger a - aa^\dagger - aa^\dagger + a^\dagger a) = \\ &= 2i(aa^\dagger - a^\dagger a) = 2i(|0\rangle\langle 1|1\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 0|0\rangle\langle 1|) = \\ &= 2i(|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|) = -\frac{4i}{\hbar\omega} \mathcal{H} \\ \langle [A, B] \rangle_\psi &= -\frac{4i}{\hbar\omega} \frac{1}{2} (\langle 0|e^{-i\frac{\omega}{2}t} + \langle 1|e^{i\frac{\omega}{2}t}) \mathcal{H} (e^{i\frac{\omega}{2}t}|0\rangle + e^{-i\frac{\omega}{2}t}|1\rangle) = \\ &= -i(\langle 0|e^{-i\frac{\omega}{2}t} + \langle 1|e^{i\frac{\omega}{2}t}) (-e^{i\frac{\omega}{2}t}|0\rangle + e^{-i\frac{\omega}{2}t}|1\rangle) = \\ &= -i(-1 + 1) = 0 \end{aligned}$$

Il principio d'indeterminazione è verificato in quanto

$$|\sin \omega t| \cdot |\cos \omega t| \geq 0$$

### 5.3

Una particella si trova in una buca di potenziale infinitamente profonda

$$V(x) = \begin{cases} \infty, & \text{se } x < 0 \text{ e } x > a; \\ 0, & \text{se } 0 < x < a \end{cases}.$$

Nello stato descritto dalla funzione d'onda all'istante  $t=0$

$$\psi(x, 0) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \text{ e } x > a; \\ Ax(a-x), & \text{se } 0 < x < a \end{cases}$$

determinare:

- la distribuzione di probabilità per le differenti energie della particella,
- il valore di attesa dell'energia e la sua dispersione,
- la funzione d'onda al generico istante  $t$ .

### Soluzione

Per questo sistema gli autovalori e le corrispondenti autofunzioni dell'energia sono:

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2ma^2}, \quad \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

I quesiti posti richiedono che la funzione d'onda sia correttamente normalizzata, quindi determiniamo  $A$ :

$$\frac{1}{|A|^2} = \int_0^a x^2(a-x)^2 dx = a^5 \int_0^1 t^2(1-t)^2 dt = \frac{a^5}{30} \Rightarrow A = \sqrt{\frac{30}{a^5}}$$

a parte un fattore di fase arbitrario.

- La probabilità di trovare la particella nello stato  $n$ -simo è data dal modulo quadro di

$$\begin{aligned} c_n &= \langle n | \psi \rangle = \int_0^a \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a} \sqrt{\frac{30}{a^5}} x(a-x) dx = \frac{4\sqrt{15}}{n^3\pi^3} (1 - \cos n\pi) = \\ &= \frac{4\sqrt{15}}{n^3\pi^3} (1 - (-1)^n) \end{aligned}$$

Poiché la funzione d'onda è simmetrica rispetto a  $x = a/2$ , essa ha solo componenti che hanno la stessa proprietà, le autofunzioni con  $n$  dispari.

- Il valore di attesa dell'energia è dato da

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= \langle \psi | \mathcal{H} | \psi \rangle = \int_0^a \psi^*(x) \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \right) \psi(x) dx = \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{30}{a^5} \int_0^a x(a-x)(-2) dx = \\ &= \frac{\hbar^2}{2m} \frac{60}{a^2} \int_0^1 t(1-t) dt = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{10}{a^2} \end{aligned}$$

Per ottenere la dispersione, calcoliamo prima il valor di attesa di  $E^2$ :

$$\begin{aligned} \langle E^2 \rangle &= \langle \psi | \mathcal{H} \mathcal{H} | \psi \rangle = \int_0^a \left| -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) \right|^2 dx = \\ &= \frac{\hbar^4}{4m^2} \frac{30}{a^5} 4a = \frac{\hbar^4}{m^2} \frac{30}{a^4} \end{aligned}$$

$$\Delta E = \sqrt{\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2} = \sqrt{\frac{\hbar^4}{m^2 a^4} (30 - 25)} = \sqrt{5} \frac{\hbar^2}{ma^2}$$

- c) Per conoscere la funzione d'onda all'istante  $t$  applichiamo l'operatore di evoluzione:

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= e^{-i\frac{Ht}{\hbar}} \psi(x, t=0) = \\ &= \sum_n c_n \psi_n(x) e^{-i\frac{E_n t}{\hbar}} = \\ &= \sum_n \sqrt{\frac{30}{a}} \frac{4}{(2n+1)^3 \pi^3} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{a} \exp\left\{-i \frac{\hbar \pi^2 (2n+1)^2}{2ma^2} t\right\} \end{aligned}$$

## 5.4

All'istante  $t = 0$  una particella di spin  $\frac{1}{2}$ , momento magnetico  $\mu = g\mathbf{S}$  e massa infinita si trova in uno stato nel quale la probabilità di trovare il valore  $\hbar/2$  facendo una misura di  $S_z$  è  $2/3$ , e i valori di attesa di  $S_x$  e  $S_y$  sono uguali e entrambi positivi. La particella è immersa in un campo magnetico costante  $\mathbf{B}$  parallelo all'asse  $y$ .

- Scrivere il vettore di stato all'istante  $t = 0$  e determinare il valore di attesa comune di  $S_x$  e  $S_y$ .
- Calcolare il valore massimo e minimo della probabilità di trovare il valore  $\hbar/2$  in una misura di  $S_z$  durante l'evoluzione temporale del sistema.

### Soluzione

- a) L'Hamiltoniano del sistema è dato da

$$\mathcal{H} = -g\mathbf{S} \cdot \mathbf{B} = -gBS_y$$

A parte un fattore di fase complessivo arbitrario, lo stato del sistema all'istante iniziale può essere scritto in termini degli autostati di  $S_z$  nella forma

$$|\psi(0)\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} |+\rangle + e^{i\alpha} \sqrt{\frac{1}{3}} |-\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ e^{i\alpha} \end{pmatrix}$$

I valori medi di  $S_x$  e  $S_y$  sono dati da

$$\begin{aligned} \frac{2}{\hbar} \langle S_x \rangle &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & e^{-i\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ e^{i\alpha} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{3} (e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cos \alpha \\ \frac{2}{\hbar} \langle S_y \rangle &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & e^{-i\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ e^{i\alpha} \end{pmatrix} = i \frac{\sqrt{2}}{3} (-e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \sin \alpha \\ \langle S_x \rangle &= \langle S_y \rangle \Rightarrow \sin \alpha = \cos \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

dovendo essere  $\langle S_x \rangle$  e  $\langle S_y \rangle$  positivi. In definitiva lo stato a  $t = 0$  è

$$|\psi(0)\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \left( |+\rangle + \frac{1+i}{2} |-\rangle \right)$$

e il valore di attesa di  $S_x$  e  $S_y$  è

$$\langle S_x \rangle = \langle S_y \rangle = \frac{\hbar}{2} \frac{2\sqrt{2}}{3} \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\hbar}{3}$$

b) All'istante  $t > 0$

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\frac{\gamma t}{\hbar}} |\psi(0)\rangle = e^{i\omega\sigma_y t} \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1+i}{2} \end{pmatrix}$$

dove abbiamo introdotto la grandezza  $\omega = gB/2$ . Applicando la nota proprietà (A.27), si ottiene

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= (I \cos \omega t + i\sigma_y \sin \omega t) \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1+i}{2} \end{pmatrix} \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1+i}{2} \end{pmatrix} \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} \cos \omega t + \frac{1+i}{2} \sin \omega t \\ \frac{1+i}{2} \cos \omega t - \sin \omega t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La probabilità di trovare il valore  $\hbar/2$  in una misura di  $S_z$  è data dal modulo quadro della relativa componente:

$$\begin{aligned} P\left(S_z = +\frac{\hbar}{2}\right) &= \frac{2}{3} \left| \cos \omega t + \frac{1+i}{2} \sin \omega t \right|^2 = \\ &= \frac{2}{3} \left( \cos^2 \omega t + \frac{1}{2} \sin^2 \omega t + \sin \omega t \cos \omega t \right) \end{aligned}$$

Troviamo il punto di massimo:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{2}{3} \omega \left( \cos 2\omega t - \frac{\sin 2\omega t}{2} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan 2\omega t = 2$$

Questa equazione ha due soluzioni. La prima

$$t = \frac{1}{2\omega} [\arctan 2 + (2n+1)\pi]$$

corrisponde al punto di massimo cercato. Esiste poi un'altra soluzione,

$$t = \frac{1}{2\omega} (\arctan 2 + 2n\pi),$$

ma corrisponde ad un punto di minimo perché la derivata seconda è ivi negativa.

## 5.5

Una particella, vincolata a muoversi su un segmento di lunghezza  $L$ , all'istante  $t = 0$  si trova in uno stato in cui una misura di energia può fornire, con uguale probabilità, solo due valori: il valore più basso  $E_1$  e quello immediatamente superiore  $E_2 = 4E_1$ .

- Scrivere l'espressione della funzione d'onda normalizzata (contenente un parametro arbitrario).
- Determinare tale parametro sapendo che all'istante  $t = 0$  il valor di attesa dell'impulso della particella è  $\langle p \rangle = \frac{4}{3} \frac{\hbar}{L}$ .
- Determinare qual è l'istante di tempo successivo a  $t = 0$  in cui il valor di attesa dell'impulso assume per la prima volta il valore zero.

**Soluzione**

Per questo sistema gli autovalori e le corrispondenti autofunzioni dell'energia sono:

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2mL^2}, \quad \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

a) Lo stato è sovrapposizione di  $\psi_1(x)$  e di  $\psi_2(x)$

$$\psi(x) = c_1 \psi_1(x) + c_2 \psi_2(x)$$

Poiché le probabilità di trovare  $E_1$  ed  $E_2$  sono uguali abbiamo

$$|c_1|^2 = |c_2|^2.$$

Trascurando una fase complessiva arbitraria, possiamo scrivere:

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1(x) + e^{i\alpha} \psi_2(x))$$

b) Calcoliamo l'impulso di attesa. Come è noto l'impulso di attesa in un autostato dell'energia è nullo nel caso di un potenziale simmetrico. Abbiamo quindi

$$\langle p \rangle_{t=0} = \frac{1}{2} [\langle \psi_1 | p | \psi_1 \rangle + \langle \psi_2 | p | \psi_2 \rangle + e^{i\alpha} \langle \psi_1 | p | \psi_2 \rangle + e^{-i\alpha} \langle \psi_2 | p | \psi_1 \rangle] = \frac{1}{2} [e^{i\alpha} I_1 + e^{-i\alpha} I_2]$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{2}{L} \frac{\hbar}{i} \int_0^L dt \sin \frac{\pi x}{L} \frac{2\pi}{L} \cos \frac{2\pi x}{L} = \\ &= \frac{4\hbar}{iL} \int_0^\pi dt \sin t \cos 2t = \\ &= \frac{2\hbar}{iL} \int_{-1}^1 dz (2z^2 - 1) = -\frac{8\hbar}{3iL} \\ I_2 &= \frac{2}{L} \frac{\hbar}{i} \int_0^L dt \sin \frac{2\pi x}{L} \frac{\pi}{L} \cos \frac{\pi x}{L} = \\ &= \frac{2\hbar}{iL} \int_0^\pi dt \sin 2t \cos t = \\ &= \frac{4\hbar}{iL} \int_{-1}^1 dz z^2 = \frac{8\hbar}{3iL} \end{aligned}$$

In definitiva

$$\langle p \rangle_{t=0} = \frac{1}{2} \frac{8\hbar}{3iL} [-e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}] = -\frac{8\hbar}{3L} \sin \alpha$$

Imponendo la condizione richiesta si ottiene

$$\sin \alpha = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \alpha_1 = -\frac{\pi}{6} \quad \text{oppure} \quad \alpha = \alpha_2 = \pi + \frac{\pi}{6}$$

c) Ad un istante di tempo  $t$  successivo avremo

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( e^{-i \frac{E_1 t}{\hbar}} \psi_1(x) + e^{i\alpha} e^{-i \frac{E_2 t}{\hbar}} \psi_2(x) \right)$$



e l'impulso di attesa sarà dato da

$$\begin{aligned} \langle p \rangle_t &= \frac{1}{2} \left[ e^{i\alpha} e^{i\frac{E_2-E_1}{\hbar}t} \langle \psi_1 | p | \psi_2 \rangle + e^{-i\alpha} e^{-i\frac{E_2-E_1}{\hbar}t} \langle \psi_2 | p | \psi_1 \rangle \right] = \\ &= \frac{1}{2} \frac{8\hbar}{3iL} \left[ -e^{i(\alpha+\omega t)} + e^{-i(\alpha+\omega t)} \right] = -\frac{8\hbar}{3L} \sin(\alpha + \omega t) \end{aligned}$$

A seconda della determinazione di alpha, il valor di attesa dell'impulso assumerà per la prima volta il valore zero quando  $\omega t = -\alpha_1$  oppure  $\omega t = -\alpha_2 + 2\pi$ . Nei due casi avremo, rispettivamente,

$$t = \frac{\pi}{6\omega} \quad \text{oppure} \quad t = \frac{5\pi}{6\omega}$$

## 5.6

Una particella di massa  $m$  si muove in un potenziale armonico di pulsazione  $\omega$ . Il suo stato all'istante  $t = 0$  è descritto dalla funzione

$$\psi(x, 0) = A(x^2 + 2\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}x)e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}.$$

Si determinino l'espressione della funzione d'onda in un successivo istante  $t > 0$  e il valor di attesa dell'energia.

### Soluzione

Notiamo che la funzione d'onda è il prodotto del termine esponenziale presente nelle autofunzioni dell'oscillatore armonico per un polinomio di II grado. Quindi essa può essere facilmente scritta come combinazione lineare delle prime tre autofunzioni.

$$\psi(x, 0) = c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x)$$

Esse sono (A.7):

$$\begin{aligned} \phi_0(x) &= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} \\ \phi_1(x) &= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} i\sqrt{2} \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} \\ \phi_2(x) &= -\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2m\omega}{\hbar} x^2 - 1\right) e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} \end{aligned}$$

Deve quindi risultare

$$A(x^2 + 2\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \left[ c_0 + c_1 i\sqrt{2} \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x - c_2 \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2m\omega}{\hbar} x^2 - 1\right) \right]$$

Applicando il principio di identità dei polinomi ricaviamo

$$\begin{aligned} c_0 &= A \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{-\frac{1}{4}} \frac{\hbar}{2m\omega} \\ c_1 &= -iA \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{-\frac{1}{4}} \frac{\hbar\sqrt{2}}{m\omega} \\ c_2 &= -A \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{-\frac{1}{4}} \frac{\hbar}{\sqrt{2}m\omega} \end{aligned}$$

Determiniamo  $A$  in modo che  $\psi$  sia normalizzata. Poiché le  $\phi_n$  lo sono già, deve risultare

$$\sum_{n=0}^2 |c_n|^2 = 1,$$

da cui si ottiene facilmente

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{11}} \quad c_1 = \frac{8}{\sqrt{11}} \quad c_2 = \frac{2}{\sqrt{11}}$$

La funzione d'onda al tempo  $t$  è quindi

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{11}} \phi_0(x) e^{-\frac{1}{2} \omega t} + \frac{8}{\sqrt{11}} \phi_1(x) e^{-\frac{3}{2} \omega t} + \frac{2}{\sqrt{11}} \phi_2(x) e^{-\frac{5}{2} \omega t},$$

e l'energia media ad ogni istante è data da

$$\langle E \rangle = |c_0|^2 E_0 + |c_1|^2 E_1 + |c_2|^2 E_2 = \frac{1}{11} \frac{1}{2} \hbar \omega + \frac{8}{11} \frac{3}{2} \hbar \omega + \frac{2}{11} \frac{5}{2} \hbar \omega = \frac{35}{22} \hbar \omega$$

## 5.7

Una particella di massa infinita e spin  $\frac{1}{2}$  si trova all'istante  $t = 0$  in uno stato in cui la probabilità di osservare la componente dello spin lungo la direzione positiva dell'asse  $z$  è  $\frac{1}{4}$  e lungo la direzione negativa è  $\frac{3}{4}$ . Questa informazione determina lo stato a meno di un parametro.

La particella è sottoposta ad un campo magnetico  $\vec{B}$  costante e uniforme diretto lungo l'asse  $x$ .

- Scrivere l'espressione dello stato iniziale (incluso un parametro indeterminato).
- Scrivere l'hamiltoniana del sistema (l'operatore momento magnetico della particella è  $\vec{\mu} = g\vec{S}$ ).
- Scrivere l'espressione dello stato (sempre contenente un parametro indeterminato) in funzione del tempo.
- Determinare per quali valori del parametro accade che la funzione d'onda a un certo istante di tempo si riduce a un autostato di  $\sigma_z$  e trovare a quali tempi ciò accade.

### Soluzione

- A parte un fattore di fase complessivo arbitrario, lo stato del sistema all'istante iniziale può essere scritto in termini degli autostati di  $S_z$  nella forma

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{2} |+\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\alpha} |-\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} e^{i\alpha} \end{pmatrix}$$

- L'Hamiltoniano del sistema è dato da

$$\mathcal{H} = -g\mathbf{S} \cdot \mathbf{B} = -gBS_x = -\hbar\omega\sigma_x \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dove

$$\omega = \frac{gB}{2}$$

Gli autovalori e i corrispondenti autovettori di  $\mathcal{H}$  sono

$$\begin{aligned} E_1 = -\hbar\omega \quad |1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle + |-\rangle) \\ E_2 = \hbar\omega \quad |2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle - |-\rangle) \end{aligned}$$

c) All'istante  $t > 0$

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= e^{-i\frac{\mathcal{H}t}{\hbar}} |\psi(0)\rangle = \\ &= e^{i\omega t} |1\rangle \langle 1|\psi(0)\rangle + e^{-i\omega t} |2\rangle \langle 2|\psi(0)\rangle = \\ &= e^{i\omega t} \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(1 + \sqrt{3}e^{i\alpha}\right) \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle + |-\rangle) + e^{-i\omega t} \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(1 - \sqrt{3}e^{i\alpha}\right) \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle - |-\rangle) = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \cos \omega t + i\sqrt{3}e^{i\alpha} \sin \omega t \right] |+\rangle + \frac{1}{2} \left[ i \sin \omega t + \sqrt{3}e^{i\alpha} \cos \omega t \right] |-\rangle \end{aligned}$$

d) Supponiamo che al tempo  $t = T$  sia  $|\psi(T)\rangle = |+\rangle$ . Deve risultare:

$$\begin{aligned} i \sin \omega T + \sqrt{3}e^{i\alpha} \cos \omega T &= 0 \\ \sin \omega T - \sqrt{3}e^{i(\alpha+\pi/2)} \cos \omega T &= 0 \\ \tan \omega T &= \sqrt{3}e^{i(\alpha+\pi/2)} \end{aligned}$$

Poichè  $\omega T$  deve essere reale, deve risultare

$$\alpha + \pi/2 = 0, \pi \quad \Rightarrow \quad \phi = -\pi/2, \pi/2$$

Nei due casi avremo:

$$\begin{aligned} \phi = -\pi/2 \quad \Rightarrow \quad T &= \frac{1}{\omega} \arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{\omega} \left( n + \frac{1}{3} \right), \quad n = 0, 1, \dots \\ \phi = \pi/2 \quad \Rightarrow \quad T &= \frac{1}{\omega} \arctan(-\sqrt{3}) = \frac{\pi}{\omega} \left( n - \frac{1}{3} \right), \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

dove si è tenuto conto del fatto che  $T > 0$ .

## 5.8

L'Hamiltoniano di un rotatore isotropo in un campo magnetico uniforme è dato da

$$H = \frac{L^2}{2I} + \alpha L_z$$

con  $\alpha$  costante. Il suo stato è descritto al tempo  $t=0$  dalla funzione d'onda

$$\psi(\vartheta, \phi) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{15}{16\pi}} \sin^2(\theta) \sin(2\phi).$$

Si determini l'espressione della funzione d'onda ad un successivo istante  $t$ .

**Soluzione**

Le autofunzioni dell'hamiltoniano sono le Armoniche sferiche e gli autovalori sono

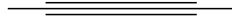
$$\frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2I} + \alpha\hbar m, \quad \ell = 0, 1, 2, \dots, \quad m = 0, \pm 1, \dots$$

La funzione d'onda che rappresenta lo stato iniziale può essere scritta come:

$$\psi(\vartheta, \phi, t=0) = \frac{1}{4i} \sqrt{\frac{15}{16\pi}} \sin^2(\theta) (e^{2i\phi} - e^{-2i\phi}) = \frac{1}{2i} (Y_2^2(\vartheta, \phi) - Y_2^{-2}(\vartheta, \phi))$$

Ad un successivo istante  $t$  avremo:

$$\psi(\vartheta, \phi, t) = e^{-i\frac{\mathcal{H}t}{\hbar}} \psi(\vartheta, \phi, t=0) = \frac{1}{2i} \left( Y_2^2(\vartheta, \phi) e^{-i[\frac{6\hbar}{2I} + 2\alpha]t} - Y_2^{-2}(\vartheta, \phi) e^{-i[\frac{6\hbar}{2I} - 2\alpha]t} \right)$$

**5.9**

Si consideri un sistema avente come hamiltoniano l'operatore:

$$\mathcal{H} = E_0|1\rangle\langle 1| + \sqrt{2}E_0|1\rangle\langle 2| + \sqrt{2}E_0|2\rangle\langle 1|.$$

Se il sistema si trova inizialmente nello stato  $|1\rangle$  con che probabilità si troverà nello stato  $|2\rangle$  al tempo  $t$ ? Determinare il periodo delle oscillazioni tra gli stati  $|1\rangle$  e  $|2\rangle$ .

**Soluzione**

Nella rappresentazione della base  $|1\rangle, |2\rangle$  l'Hamiltoniano diventa la matrice:

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} E_0 & \sqrt{2}E_0 \\ \sqrt{2}E_0 & 0 \end{pmatrix} = E_0\mathcal{H}' \quad \text{dove} \quad \mathcal{H}' = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Dall'equazione secolare ricaviamo gli autovalori di  $\mathcal{H}'$ :

$$\det(\mathcal{H}' - \lambda I) = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -1, 2$$

A  $\lambda = -1$  corrisponde l'autovalore  $E_1 = -E_0$  di  $\mathcal{H}$  e l'autostato  $|E_1\rangle$  dato da:

$$\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

da cui si ottiene, previa normalizzazione:

$$|E_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} |1\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} |2\rangle$$

Analogamente a  $\lambda = 2$  corrisponde l'autovalore  $E_1 = 2E_0$  di  $\mathcal{H}$  e l'autostato  $|E_2\rangle$  dato da:

$$|E_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} |1\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} |2\rangle$$

Invertendo le relazioni ottenute abbiamo

$$\begin{aligned} |1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} |E_1\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |E_2\rangle \\ |2\rangle &= -\sqrt{\frac{2}{3}} |E_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} |E_2\rangle \end{aligned}$$

Inizialmente il sistema è nello stato

$$|\psi(t=0)\rangle = |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|E_1\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|E_2\rangle$$

mentre all'istante  $t$  sarà nello stato

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{i\frac{E_0 t}{\hbar}}|E_1\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}e^{-i\frac{2E_0 t}{\hbar}}|E_2\rangle = \frac{1}{3}e^{i\frac{E_0 t}{\hbar}} \left[ \left(1 + 2e^{-i\frac{3E_0 t}{\hbar}}\right)|1\rangle - \sqrt{2}\left(1 - e^{-i\frac{3E_0 t}{\hbar}}\right)|2\rangle \right]$$

Le probabilità di trovare al tempo  $t$  il sistema in uno dei vettori di base sono

$$P_{|1\rangle}(t) = \frac{1}{9} \left| 1 + 2e^{-i\frac{3E_0 t}{\hbar}} \right|^2 = \frac{1}{9} \left( 5 + 4 \cos \frac{3E_0 t}{\hbar} \right)$$

$$P_{|2\rangle}(t) = \frac{2}{9} \left| 1 - e^{-i\frac{3E_0 t}{\hbar}} \right|^2 = \frac{4}{9} \left( 1 - \cos \frac{3E_0 t}{\hbar} \right)$$

Le probabilità oscillano con frequenza  $\omega = 3E_0/\hbar$ . Il periodo richiesto è quindi

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi\hbar}{3E_0} = \frac{h}{3E_0}$$


---

## 5.10

L'hamiltoniano di una particella di spin  $\frac{1}{2}$  sia

$$\mathcal{H} = -g\vec{S} \cdot \vec{B}$$

dove  $\vec{s}$  è lo spin e  $\vec{B}$  è un campo magnetico diretto lungo l'asse  $z$ .

Determinare:

- La forma esplicita in funzione di  $\vec{S}$  e  $\vec{B}$  dell'operatore  $\dot{\vec{S}}$ .
- Gli autostati di  $(\dot{\vec{S}})_y$  e i corrispondenti autovalori.
- L'evoluzione temporale di uno stato che coincida al tempo  $t=0$  con uno dei suddetti autostati e il valore di attesa dell'hamiltoniano.

### Soluzione

- L'equazione di evoluzione per l'operatore  $\vec{S}$  è

$$\dot{\vec{S}} = \frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\mathcal{H}, \vec{S}] = -\frac{igB}{\hbar}[S_z, \vec{S}]$$

(poichè  $\vec{S}$  non dipende esplicitamente dal tempo  $\frac{\partial \vec{S}}{\partial t} = 0$ . Esplicitando per ciascuna componente:

$$\begin{aligned} \dot{S}_x &= -\frac{igB}{\hbar}[S_z, S_x] = gBS_y \\ \dot{S}_y &= -\frac{igB}{\hbar}[S_z, S_y] = -gBS_x \\ \dot{S}_z &= -\frac{igB}{\hbar}[S_z, S_z] = 0, \end{aligned}$$

dove abbiamo usato  $\vec{S} = \hbar/2\vec{\sigma}$  e le relazioni di commutazione per le matrici di Pauli riportate in (A.24).

b) Gli autovalori di  $(\dot{S})_y$  sono gli autovalori di  $-\frac{gB\hbar}{2}\sigma_x$ , cioè

$$\lambda_1 = -\hbar\omega \quad \lambda_2 = \hbar\omega \quad \text{dove } \omega = \frac{gB}{2}.$$

Gli autostati sono gli stessi di  $\sigma_x$ , cioè, nella base di  $\sigma_z$

$$|\lambda_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad |\lambda_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

c) Supponiamo che al tempo  $t = 0$  il sistema sia nello stato

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

Al tempo  $t > 0$  esso sarà nello stato

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\frac{\mathcal{H}t}{\hbar}} |\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ e^{-i\omega t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{i\omega t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\omega t} \\ e^{i\omega t} \end{pmatrix}$$

Il valore di attesa dell'energia è:

$$\begin{aligned} \langle E \rangle_\psi &= -gB \langle \psi(0) | S_z | \psi(0) \rangle = \\ &= -\frac{gB}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{gB}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

## 5.11

Un rotore piano è un sistema rigido di due particelle che può ruotare liberamente in un piano. Indicando con  $I$  il suo momento d'inerzia, determinare, nel sistema relativo:

- gli autovalori dell'energia e le rispettive autofunzioni
- i possibili valori del momento angolare, la loro probabilità ed il valore di attesa del momento angolare nello stato descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(\varphi) = N \cos^2 \varphi$$

- l'evoluzione temporale dello stato  $\psi$ .

### Soluzione

- L'hamiltoniano del sistema è

$$\mathcal{H} = \frac{L^2}{2I} = \frac{L_z^2}{2I} = -\frac{\hbar^2}{2I} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

dove abbiamo assunto che il piano in cui il sistema si muove sia il piano  $oxy$ . Autovalori e autofunzioni dei  $\mathcal{H}$  sono

$$E_m = \frac{\hbar^2 m^2}{2I} \quad \psi_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Gli autovalori sono doppiamente degeneri per ogni  $m$  fuorché per  $m = 0$ .

- b) Fissiamo, con opportuna scelta della fase, la costante  $N$  mediante la normalizzazione.

$$\begin{aligned} 1 &= |N|^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \cos^4 \varphi = |N|^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \left[ \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2\varphi + \frac{1}{8} \cos 4\varphi \right] = \\ &= |N|^2 \left[ \frac{3}{8} 2\pi + 0 + 0 \right] \Rightarrow |N|^2 = \frac{4}{3\pi} \Rightarrow N = \frac{2}{\sqrt{3\pi}} \end{aligned}$$

La funzione d'onda è sovrapposizione di due autostati dell'hamiltoniano. Infatti

$$\begin{aligned} \psi(\varphi) &= \frac{2}{\sqrt{3\pi}} \cos^2 \varphi = \frac{1}{2\sqrt{3\pi}} (e^{2i\varphi} + e^{-2i\varphi} + 2) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \psi_2(\varphi) + \frac{1}{\sqrt{6}} \psi_{-2}(\varphi) + \sqrt{\frac{2}{3}} \psi_0(\varphi) \end{aligned}$$

Tenendo conto del fatto che le autofunzioni di  $\mathcal{H}$  sono anche autofunzioni di  $L_z$ , le probabilità richieste sono date da

$$P(L_z = 0) = \frac{2}{3} \quad P(L_z = 2) = \frac{1}{6} \quad P(L_z = -2) = \frac{1}{6}$$

e il valore di attesa del momento angolare da

$$\langle L_z \rangle = \frac{2}{3} \cdot 0 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot (-2) = 0$$

- c) Lo stato al tempo  $t > 0$  è descritto dalla funzione d'onda

$$\begin{aligned} \psi(\varphi, t) &= \frac{1}{\sqrt{6}} \psi_2(\varphi) e^{-i \frac{E_2 t}{\hbar}} + \frac{1}{\sqrt{6}} \psi_{-2}(\varphi) e^{-i \frac{E_{-2} t}{\hbar}} + \sqrt{\frac{2}{3}} \psi_0(\varphi) e^{-i \frac{E_0 t}{\hbar}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3\pi}} \left( \cos 2\varphi e^{-i \frac{E_2 t}{\hbar}} + 1 \right) \end{aligned}$$

## 5.12

Un oscillatore armonico di massa  $m$  e pulsazione  $\omega$  si trova in uno stato tale che il valore di attesa dell'energia è:

$$\langle \mathcal{H} \rangle = \frac{3}{2} \hbar \omega,$$

lo scarto quadratico medio è dato da

$$\langle (\mathcal{H} - \langle \mathcal{H} \rangle)^2 \rangle = \frac{1}{2} (\hbar \omega)^2,$$

ed inoltre una misura dell'energia *non* può dare un risultato maggiore di  $3\hbar\omega$ .

- Quali risultati si possono ottenere facendo una misura dell'energia e con quali probabilità?
- Scrivere il più generale vettore di stato compatibile con le informazioni suddette.
- Sapendo che all'istante  $t = 0$  il valore di attesa dell'operatore di posizione  $x$  è il massimo possibile, determinarne il valore ad un istante  $t$  successivo.

**Soluzione**

a) Essendo  $E \leq 3\hbar\omega$  i risultati di una misura dell'energia possono essere

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega \quad E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega \quad E_2 = \frac{5}{2}\hbar\omega$$

corrispondenti ai primi tre autoket dell'energia. Lo stato dell'oscillatore è quindi

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle + c|2\rangle, \quad \text{con } |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 = 1$$

I coefficienti  $a, b$  e  $c$  sono inoltre soggetti alle condizioni imposte dal problema

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{H} \rangle &= \left[ \frac{1}{2}|a|^2 + \frac{3}{2}|b|^2 + \frac{5}{2}|c|^2 \right] \hbar\omega = \frac{3}{2}\hbar\omega \\ \langle (\mathcal{H} - \langle \mathcal{H} \rangle)^2 \rangle &= \langle \mathcal{H}^2 \rangle - \langle \mathcal{H} \rangle^2 = \\ &= \left[ \frac{1}{4}|a|^2 + \frac{9}{4}|b|^2 + \frac{25}{4}|c|^2 \right] \hbar^2\omega^2 - \frac{9}{4}\hbar^2\omega^2 = \\ &= \frac{1}{2}\hbar^2\omega^2 \end{aligned}$$

Le tre condizioni suddette consentono di determinare i moduli quadri dei tre coefficienti e, quindi, le probabilità richieste:

$$P(E = \frac{1}{2}\hbar\omega) = |a|^2 = \frac{1}{4} \quad P(E = \frac{3}{2}\hbar\omega) = |b|^2 = \frac{1}{2} \quad P(E = \frac{5}{2}\hbar\omega) = |c|^2 = \frac{1}{4}$$

b) Ponendo uguale a 0 la fase di  $a$ , possiamo scrivere:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\beta}|1\rangle + \frac{1}{2}e^{i\gamma}|2\rangle$$

c) Utilizzando le formule (A.5,A.6), si ricava:

$$\begin{aligned} X|\psi\rangle &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left[ b|0\rangle + (a + \sqrt{2}c)|1\rangle + \sqrt{2}b|2\rangle + \sqrt{3}c|3\rangle \right] \\ \langle X \rangle &= \langle \psi|X|\psi\rangle = \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left[ a^*b + b^*(a + \sqrt{2}c) + \sqrt{2}c^*b \right] = \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left[ 2\Re(a^*b) + 2\sqrt{2}\Re(b^*c) \right] = \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \cos\beta + \cos(\gamma - \beta) \right] \end{aligned}$$

Poiché  $\beta$  e  $\gamma$  sono indipendenti  $\langle X \rangle$  è massimo quando

$$\cos\beta = \cos(\gamma - \beta) = 1 \quad \text{cioè per } \beta = \gamma = 0$$

Lo stato richiesto è quindi:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{1}{2}|2\rangle$$

che, al tempo  $t > 0$  sarà dato da

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2}e^{-i\frac{1}{2}\omega t}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{3}{2}\omega t}|1\rangle + \frac{1}{2}e^{-i\frac{5}{2}\omega t}|2\rangle$$



Ripetendo il calcolo già fatto per  $\langle X \rangle$  a  $t = 0$  si ottiene

$$\langle X(t) \rangle = \frac{2 + \sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \cos \omega t$$


---

### 5.13

L'Hamiltoniano di un rotatore isotropo in un campo magnetico uniforme è dato da

$$\mathcal{H} = \frac{L^2}{2I} + \alpha L_z.$$

All'istante  $t = 0$  la sua funzione d'onda è

$$\psi(\vartheta, \phi, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} [Y_1^{+1}(\vartheta, \phi) + Y_1^{-1}(\vartheta, \phi)].$$

Qual'è la sua funzione d'onda al tempo  $t$ ? Calcolare il valore di  $t$  per cui la funzione d'onda è proporzionale a

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (Y_1^{+1}(\vartheta, \phi) - Y_1^{-1}(\vartheta, \phi)).$$

#### Soluzione

Il problema è simile al 5.8 e utilizzeremo alcuni risultati.

All'istante  $t > 0$  avremo:

$$\psi(\vartheta, \phi, t) = e^{-i\frac{\hbar t}{I}} \psi(\vartheta, \phi, t=0) = \frac{1}{\sqrt{2}} [Y_1^{+1}(\vartheta, \phi)e^{-i[\frac{\hbar}{I} + \alpha]t} + Y_1^{-1}(\vartheta, \phi)e^{-i[\frac{\hbar}{I} - \alpha]t}]$$

Per rispondere alla seconda domanda imponiamo che il rapporto tra i coefficienti delle due armoniche sia  $-1$

$$\frac{e^{-i[\frac{\hbar}{I} - \alpha]t}}{e^{-i[\frac{\hbar}{I} + \alpha]t}} = e^{-2i\alpha t} = -1 \quad \Rightarrow \quad 2\alpha t = (2n + 1)\pi \quad \Rightarrow \quad t = \frac{(2n + 1)\pi}{2\alpha}$$


---

### 5.14

Una particella di spin  $\frac{1}{2}$  con momento magnetico  $\vec{\mu} = \mu_0 \vec{s}$  e spin  $\vec{S}$ , è posta in un campo magnetico costante diretto lungo l'asse  $x$ . All'istante  $t = 0$ , si misura  $S_z = \frac{\hbar}{2}$ . Trovare le probabilità per un qualsiasi istante successivo che la particella venga trovata con  $S_y = \pm \frac{\hbar}{2}$ .

#### Soluzione

L'hamiltoniano del sistema, supponendo di trascurare il termine cinetico, è

$$\mathcal{H} = -\mu_0 \vec{s} \cdot \vec{B} = -\frac{\mu_0 B \hbar}{2} \sigma_x = -\hbar \omega \sigma_x \quad \text{dove} \quad \omega = \frac{\mu_0 B}{2}$$

Risolviamo il problema usando l'equazione di Schrödinger per l'evoluzione del generico stato:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \hbar\omega \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0$$

da cui si ricava

$$\begin{cases} i \frac{da_1}{dt} + \omega a_2 = 0 \\ i \frac{da_2}{dt} + \omega a_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{d^2 a_{1,2}}{dt^2} + \omega^2 a_{1,2} = 0$$

Le soluzioni sono

$$a_{1,2}(t) = A_{1,2} e^{i\omega t} + B_{1,2} e^{-i\omega t}$$

All'istante  $t = 0$  lo stato è autostato di  $S_z$  con autovalore  $+\hbar/2$ , quindi

$$a_1(0) = 1 \text{ e } a_2(0) = 0 \Leftrightarrow A_1 + B_1 = 1 \text{ e } A_2 + B_2 = 0$$

Imponendo queste condizioni nell'equazione di Schrödinger si ha

$$\begin{aligned} i \frac{da_1}{dt} \Big|_{t=0} &= -\omega A_1 + \omega B_1 = -\omega a_2 \Big|_{t=0} = 0 \\ i \frac{da_2}{dt} \Big|_{t=0} &= -\omega A_2 + \omega B_2 = -\omega a_1 \Big|_{t=0} = -\omega \end{aligned}$$

Abbiamo complessivamente 4 equazioni

$$\begin{cases} A_1 + B_1 = 1 \\ A_1 - B_1 = 0 \\ A_2 + B_2 = 0 \\ A_2 - B_2 = 1 \end{cases}$$

che hanno soluzione

$$A_1 = B_1 = A_2 = -B_2 = \frac{1}{2}$$

Sostituendo nell'equazione per  $a_{1,2}$  troviamo

$$\psi(t) = \begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ i \sin \omega t \end{pmatrix}$$

che è normalizzato. Gli autostati di  $S_y$  sono

$$|S_y = +\frac{\hbar}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad |S_y = -\frac{\hbar}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

e le probabilità richieste

$$\begin{aligned} P(S_y = +\frac{\hbar}{2}) &= \left| \langle S_y = +\frac{\hbar}{2} | \psi(t) \rangle \right|^2 = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ i \sin \omega t \end{pmatrix} \right|^2 = \\ &= \frac{1}{2} (\cos \omega t + \sin \omega t)^2 = \frac{1}{2} (1 + \sin 2\omega t) \\ P(S_y = -\frac{\hbar}{2}) &= \left| \langle S_y = -\frac{\hbar}{2} | \psi(t) \rangle \right|^2 = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ i \sin \omega t \end{pmatrix} \right|^2 = \\ &= \frac{1}{2} (\cos \omega t - \sin \omega t)^2 = \frac{1}{2} (1 - \sin 2\omega t) \end{aligned}$$

Come controllo è facile vedere che la loro somma vale 1.

## 5.15

Si consideri un sistema a due livelli e si consideri la base composta dalle due autofunzioni  $|\psi_1\rangle$  e  $|\psi_2\rangle$  dell'Hamiltoniana  $H_0$  con autovalori rispettivamente  $E_1$  ed  $E_2$ .

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_0|\psi_1\rangle &= E_1|\psi_1\rangle \\ \mathcal{H}_0|\psi_2\rangle &= E_2|\psi_2\rangle \\ \langle\psi_i|\psi_j\rangle &= \delta_{i,j} \quad i, j = 1, 2\end{aligned}\tag{5.1}$$

Si consideri quindi un nuovo sistema con Hamiltoniana  $\mathcal{H}_0 + W$ , dove il termine di accoppiamento  $W$ , nella base  $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle\}$ , è dato dalla matrice 2x2  $W_{ij}$  con  $W_{11} = W_{22} = 0$  e  $W_{12} = W_{21} = w$  dove  $w$  è una costante reale positiva.

- Determinare come variano le autofunzioni e gli autovalori del sistema per effetto dell'accoppiamento.
- Se all'istante  $t = 0$  il sistema, in presenza dell'accoppiamento, si trova con certezza nello stato  $|\psi_1\rangle$ , in quali istanti (se esistono) il sistema si troverà di nuovo nella stessa condizione?
- Calcolare la probabilità di trovare il sistema nello stato  $|\psi_2\rangle$  al tempo  $t$ .

### Soluzione

- a) Nello spazio sotteso dai vettori di base  $|\psi_1\rangle$  e  $|\psi_2\rangle$  abbiamo

$$\mathcal{H}_0 = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \quad W = \begin{pmatrix} 0 & W \\ W & 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + W = \begin{pmatrix} E_1 & W \\ W & E_2 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori di  $\mathcal{H}$  si ricavano da  $(E_1 - \lambda)(E_2 - \lambda) - W^2 = 0$ :

$$\lambda_{\pm} = \frac{E_1 + E_2 \pm \sqrt{(E_1 - E_2)^2 + W^2}}{2}$$

Gli autovettori  $|\lambda_{\pm}\rangle$  si ricavano dalle equazioni

$$\mathcal{H}|\lambda_{\pm}\rangle = \lambda_{\pm}|\lambda_{\pm}\rangle$$

Imponendo la normalizzazione. SI trova facilmente, scegliendo opportunamente le fasi,

$$\begin{aligned}|\lambda_+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{(\lambda_+ - E_1)^2 + W^2}} \begin{pmatrix} W \\ \lambda_+ - E_1 \end{pmatrix} \\ |\lambda_-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{(\lambda_- - E_1)^2 + W^2}} \begin{pmatrix} W \\ \lambda_- - E_1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

- Il sistema si troverà con certezza nello stato  $|\psi_1\rangle$  quando la probabilità di trovarlo nello stato  $|\psi_2\rangle$  è nulla. Questo ci rinvia al quesito successivo.
- lo stato al tempo  $t > 0$  è

$$\begin{aligned}|\psi(t)\rangle &= e^{-i\frac{\mathcal{H}t}{\hbar}}|\psi_1\rangle = \\ &= e^{-i\frac{\lambda_+t}{\hbar}}|\lambda_+\rangle\langle\lambda_+|\psi_1\rangle + e^{-i\frac{\lambda_-t}{\hbar}}|\lambda_-\rangle\langle\lambda_-|\psi_1\rangle = \\ &= e^{-i\frac{\lambda_+t}{\hbar}}\frac{W}{(\lambda_+ - E_1)^2 + W^2} \begin{pmatrix} W \\ \lambda_+ - E_1 \end{pmatrix} + e^{-i\frac{\lambda_-t}{\hbar}}\frac{W}{(\lambda_- - E_1)^2 + W^2} \begin{pmatrix} W \\ \lambda_- - E_1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Introducendo le grandezze

$$\Delta = \frac{E_2 - E_1}{2} \quad \text{e} \quad \Sigma = \frac{E_2 + E_1}{2}$$

si ottiene

$$\lambda_{\pm} - E_1 = \Delta \pm \sqrt{\Delta^2 + W^2} \quad \text{e} \quad \lambda_{\pm} = \Sigma \pm \sqrt{\Delta^2 + \omega^2}.$$

La probabilità di trovare il sistema nello stato  $|\psi_2\rangle$  al tempo  $t$  è data dal modulo quadro di  $\langle\psi_2|\psi\rangle$ , che dopo brevi calcoli si trova valere

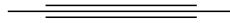
$$\langle\psi_2|\psi\rangle = \frac{\omega}{2\sqrt{\Delta^2 + W^2}} e^{-i\frac{\Sigma t}{\hbar}} \sin \frac{\sqrt{\Delta^2 + \omega^2}}{\hbar} t$$

Quindi la risposta al quesito è

$$P(|\psi(t)\rangle = |\psi_2\rangle) = |\langle\psi_2|\psi\rangle|^2 = \frac{\omega^2}{4(\Delta^2 + W^2)} \sin^2 \frac{\sqrt{\Delta^2 + \omega^2}}{\hbar} t$$

Questa probabilità è nulla, e  $|\psi(t)\rangle = |\psi_1\rangle$  come richiesto dal precedente quesito, quando

$$t = \frac{n\pi\hbar}{\sqrt{\Delta^2 + \omega^2}} \quad \text{con} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$



## Capitolo 6

# Teoria Perturbativa

### 6.1

Un rotatore piano é un sistema costituito da due particelle rigidamente connesse che ruotano in un piano.

- Sia  $m$  la massa ridotta delle due particelle e  $a$  la loro distanza. Determinare autovalori e autofunzioni dell'energia.
- Supporre che il sistema abbia momento di dipolo elettrico  $\vec{d}$  e che sia immerso in un debole campo elettrico uniforme  $\vec{E}$  nel piano di rotazione. Considerando l'interazione con il campo elettrico come perturbazione, valutare la prima correzione non nulla ai livelli di energia.

### Soluzione

- Detto  $I = mR^2$  il momento d'inerzia, l'hamiltoniano è dato dal puro termine cinetico:

$$\mathcal{H} = \frac{L^2}{2I} = \frac{L_z^2}{2I} = -\frac{\hbar^2}{2I} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

dove abbiamo assunto che il piano in cui il sistema si muove sia il piano  $xy$ . Autovalori e autofunzioni dei  $\mathcal{H}$  sono

$$E_m = \frac{\hbar^2 m^2}{2I} \quad \psi_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Gli autovalori sono doppiamente degeneri per ogni  $m$  fuorché per  $m = 0$ .

- La perturbazione è data, supponendo il campo elettrico  $\vec{E}$  diretto lungo l'asse  $x$ , da

$$\mathcal{H}' = -dE \cos \varphi$$

Premettiamo il calcolo del generico elemento di matrice di  $\cos \varphi$  nella base di  $\mathcal{H}$ :

$$\begin{aligned} \langle n | \cos \varphi | m \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi e^{i(m-n)\varphi} \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[ \int_0^{2\pi} d\varphi e^{i(m-n+1)\varphi} + \int_0^{2\pi} d\varphi e^{i(m-n-1)\varphi} \right] = \\ &= \frac{1}{2} [\delta_{m,n-1} + \delta_{m,n+1}] \end{aligned}$$

La correzione al livello  $n$ -simo dell'energia al I ordine è data da:

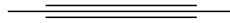
$$E_n^{(1)} = -dE \langle n | \cos \varphi | m \rangle = -dE [\delta_{n,n-1} + \delta_{n,n+1}] = 0.$$

Occorre quindi calcolare la correzione al II ordine:

$$\begin{aligned} E_n^{(2)} &= (dE)^2 \sum_{m \neq n} \frac{|\langle n | \cos \varphi | m \rangle|^2}{E_n - E_m} = \\ &= \frac{(dE)^2}{4} \left[ \frac{1}{E_n - E_{n-1}} + \frac{1}{E_n - E_{n+1}} \right] = \\ &= \frac{(dE)^2}{4} \frac{2I}{\hbar^2} \left[ \frac{1}{n^2 - (n-1)^2} + \frac{1}{n^2 - (n+1)^2} \right] = \\ &= \frac{I}{2} \left( \frac{dE}{\hbar} \right)^2 \frac{1}{4n^2 - 1} \end{aligned}$$

Notiamo che la correzione al II ordine può essere calcolata senza tener conto della degenerazione, poiché nei termini della sommatoria in cui si annulla il denominatore, cioè quelli con  $m = -n$ , sono nulli i denominatori.

Notiamo, infine, che, dato che  $E_n^{(2)}$  dipende ancora da  $n^2$ , la degenerazione non viene eliminata.



## 6.2

Una particella di massa  $m$  è immersa in una buca infinita di potenziale di larghezza  $a$  in una dimensione:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq x \leq L; \\ \infty, & \text{altrove.} \end{cases}$$

Essa è soggetta ad una perturbazione data dal potenziale:

$$W(x) = Lw_0 \delta\left(x - \frac{L}{2}\right)$$

dove  $w_0$  è una costante reale.

- a) Calcolare al prim'ordine in  $w_0$  le modificazioni ai livelli di energia della particella apportate da  $W(x)$ .
- b) Risolvere il problema esattamente, mostrando che i valori dell'energia sono dati da una delle due equazioni:

$$\sin(kL/2) = 0$$

oppure

$$\tan(kL/2) = -\frac{\hbar^2 k}{mLw_0}.$$

Discutere i risultati ottenuti in funzione del segno e della grandezza di  $w_0$ . Fare vedere che, nel limite  $w_0 \rightarrow 0$ , si ritrovano i risultati del punto a).

**Soluzione**

- a) In assenza di perturbazione gli autovalori e le corrispondenti autofunzioni dell'energia sono:

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2mL^2}, \quad \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

La correzione del prim'ordine ai livelli di energia è data da

$$\begin{aligned} E_n^{(1)} &= \int_0^L dx \psi_n^*(x) W(x) \psi_n(x) = \\ &= \frac{2}{L} L\omega_0 \int_0^L dx \sin^2 \frac{n\pi x}{L} \delta\left(x - \frac{L}{2}\right) = \\ &= 2\omega_0 \sin^2 \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{per } n \text{ pari,} \\ 2\omega_0 & \text{per } n \text{ dispari.} \end{cases} \end{aligned}$$

- b) per trovare la soluzione esatta, imponiamo che la funzione d'onda, escludendo il punto  $x = L/2$ , abbia la forma di una soluzione per una particella libera che, però, si annulli in  $x = 0$  e  $x = L$ .

$$\psi(x) = \begin{cases} A \sin kx & \text{per } 0 \leq x \leq L/2, \\ B \sin k(L-x) & \text{per } L/2 \leq x \leq L. \end{cases}$$

La continuità della funzione d'onda comporta che

$$\begin{aligned} \psi\left(\frac{L}{2}^-\right) = \psi\left(\frac{L}{2}^+\right) &\Rightarrow A \sin \frac{kL}{2} = B \sin \frac{kL}{2} \\ &\text{cioè} \\ A = B &\text{ oppure } A \neq B \text{ e } \sin \frac{kL}{2} = 0 \end{aligned}$$

Invece la derivata prima deve essere discontinua per la presenza della  $\delta$  nel potenziale:

$$\psi'\left(\frac{L}{2}^+\right) - \psi'\left(\frac{L}{2}^-\right) = \frac{2m}{\hbar^2} L\omega_0 \psi\left(\frac{L}{2}\right)$$

Mettendo insieme le due condizioni possiamo distinguere due casi

1. caso  $A \neq B$  e  $\sin \frac{kL}{2} = 0$ . Quest'ultima relazione comporta che

$$\frac{kL}{2} = n\pi \quad n = 0, 1, \dots \quad \Rightarrow \quad k = \frac{2n\pi}{L}.$$

Quindi, anche nel calcolo esatto, ritroviamo in questo caso la parte di spettro del pozzo di potenziale corrispondente alle autofunzioni dispari rispetto a  $x = L/2$ . Le stesse autofunzioni non sono modificate dalla perturbazione. Infatti, dalla condizione su  $\psi'$  si ha

$$-Ak \cos \frac{kL}{2} - Bk \cos \frac{kL}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad A = -B.$$

La funzione d'onda per  $L/2 \leq x \leq L$  è data da

$$\psi(x) = -A \sin k(L-x) = A \sin k(L-x) = A \sin kx \cos kL - A \cos kx \sin kL = A \sin kx,$$

essendo  $\cos kL = 1$  e  $\sin kL = 0$ . Possiamo dire che, poichè si tratta di funzioni d'onda che si azzerano in  $x = L/2$ , esse non sentono la presenza del nuovo termine di potenziale che solo in tale punto è non nullo.

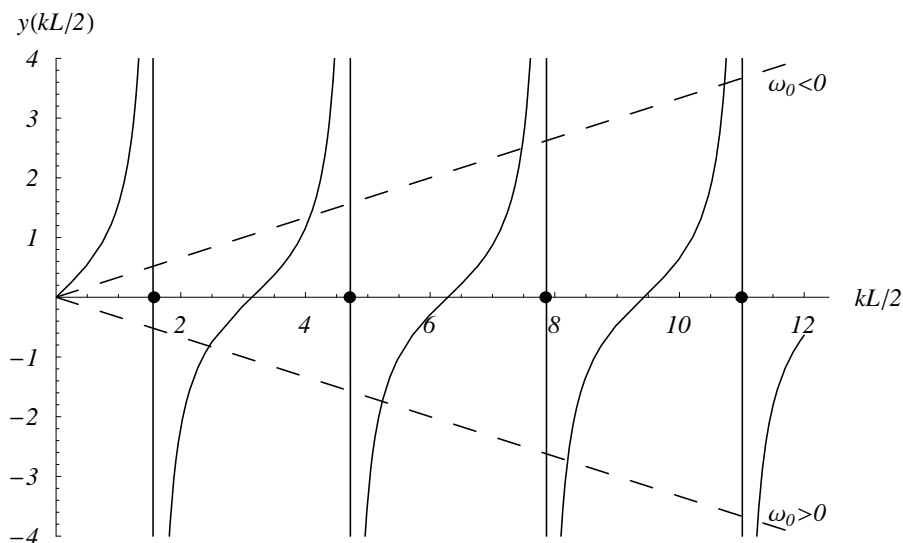


Figura 6.1: Soluzione grafica dell'equazione per i livelli di energia corrispondenti ad autofunzioni simmetriche. Le rette tratteggiate corrispondono a due diversi valori di  $\omega_0$ . I valori di  $kL/2$  corrispondenti alle autofunzioni antisimmetriche del pozzo di potenziale sono segnati con un cerchietto.

2. caso  $A = B$ , che corrisponde a funzioni d'onda pari rispetto a  $x = L/2$ .  
Dalla condizione su  $\psi'$  si ha

$$-Ak \cos \frac{kL}{2} - Ak \cos \frac{kL}{2} = \frac{2m}{\hbar^2} L \omega_0 A \sin \frac{kL}{2} \quad \Rightarrow \quad \tan \frac{kL}{2} = -\frac{\hbar^2 k}{mL\omega_0}$$

Per trovare questa parte dello spettro risolviamo graficamente questa equazione cercando le intersezioni tra le due curve

$$y = \tan \frac{kL}{2} \quad \text{e} \quad y = -\frac{\hbar^2 k}{mL\omega_0} = -\frac{2\hbar^2}{mL^2\omega_0} \frac{kL}{2}$$

In Fig. (6.1) vediamo le soluzioni per due valori di segno opposto di  $\omega_0$ . Quando  $\omega_0 \rightarrow 0$  le soluzioni tendono ai valori

$$\frac{kL}{2} = (2j+1)\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{(2j+1)\pi}{L}, \quad \text{con } j = 0, 1, \dots$$

cioè

$$E = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2mL^2}, \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

Si riottengono cioè gli autovalori con  $n$  dispari del caso imperturbato. Notiamo che la soluzione che nel limite  $\omega_0 \rightarrow 0^-$  corrisponde a  $k = \pi/L$  compare solo se

$$\frac{2\hbar^2}{mL^2|\omega_0|} > 1 \quad \Rightarrow \quad |\omega_0| < \frac{2\hbar^2}{mL^2}$$



### 6.3

Trovare al I ordine in teoria delle perturbazioni le variazioni dei livelli energetici di un atomo idrogenoide prodotte dall'aumento di una unità nella carica del nucleo, dovuta, ad esempio, a un decadimento  $\beta$ .

Usando il risultato esatto, discutere la validità della approssimazione usata.

#### Soluzione

Ricordiamo che lo spettro dell'energia dell'atomo idrogenoide di numero atomico  $Z$  è dato da

$$E_n^0 = -\frac{1}{2} mc^2 Z^2 \alpha^2 \frac{1}{n^2}$$

dove  $n = 1, 2, \dots$  e  $\alpha = e^2/\hbar c$  è la costante di struttura fine. Per effetto dell'aumento di carica l'energia potenziale risulta modificata:

$$\mathcal{V} = -\frac{(Z+1)e^2}{r} = -\frac{Ze^2}{r} - \frac{e^2}{r} = \mathcal{V}^0 + \mathcal{V}^1$$

La correzione al I ordine è data quindi da

$$E_n^1 = \langle n^0 | \mathcal{V}^1 | n^0 \rangle = -e^2 \langle \frac{1}{r} \rangle_{n^0}.$$

Utilizzando il risultato del Teorema del Viriale,  $\langle \mathcal{T} \rangle = -\langle \mathcal{V} \rangle / 2$ , (vedi es. 1.10) abbiamo

$$E_n^0 = \langle \mathcal{T} + \mathcal{V} \rangle_{n^0} = \frac{1}{2} \langle \mathcal{V} \rangle_{n^0} = -\frac{1}{2} Ze^2 \langle \frac{1}{r} \rangle_{n^0}$$

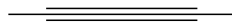
e, quindi,

$$E_n^1 = \frac{2E_n^0}{Z}.$$

Confrontando questo risultato con quello esatto,

$$E_n = -\frac{1}{2} mc^2 (Z+1)^2 \alpha^2 \frac{1}{n^2} = -\frac{1}{2} mc^2 \alpha^2 \frac{1}{n^2} (Z^2 + 2Z + 1) = E_n^0 + E_n^1 - \frac{1}{2} mc^2 \alpha^2 \frac{1}{n^2}$$

si vede che si tratta di una buona approssimazione se  $Z \gg 1$ .



### 6.4

Un oscillatore armonico tridimensionale ha una costante elastica  $k'$  lungo l'asse  $z$  leggermente diversa dalle costanti  $k$  lungo gli assi  $x$  e  $y$ , cioè la sua energia potenziale é

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2} k(x^2 + y^2) + \frac{1}{2} k' z^2$$

Si scriva la funzione d'onda dello stato fondamentale. Notare che essa non rappresenta uno stato di momento angolare definito. Perché?

Al prim'ordine in  $(k - k')$  quali sono gli stati di momento angolare diverso da 0 presenti nello stato fondamentale?

### Soluzione

Lo spazio delle funzioni d'onda è il prodotto tensoriale degli spazi relativi a tre oscillatori disposti lungo i tre assi. Ponendo

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{e} \quad \sqrt{\frac{k'}{m}}$$

e, utilizzando l'espressione A.7 per le autofunzioni dell'Oscillatore Armonico, si ottiene

$$\begin{aligned} \psi_{0,0,0}(x, y, z) &= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m\omega'}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x^2+y^2)} e^{-\frac{m\omega'}{2\hbar}z^2} = \\ &= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m\omega'}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x^2+y^2+z^2)} e^{-\frac{m(\omega'-\omega)}{2\hbar}z^2} = \\ &= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m\omega'}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(r^2)} e^{-\frac{m(\omega'-\omega)}{2\hbar}r^2 \cos^2 \theta} \end{aligned}$$

La dipendenza esponenziale da  $\cos^2 \theta$  segnala la presenza di contributi da tutte le autofunzioni di  $\mathcal{L}^2$ .  $\psi$  non dipende invece da  $\phi$ , quindi è autofunzione di  $\mathcal{L}_z$  corrispondente all'autovalore nullo.

Per il calcolo perturbativo poniamo

$$V(x, y, z) = V^0(x, y, z) + V^1(z)$$

dove

$$V(x, y, z) = V(r) = \frac{1}{2}kr^2 \quad \text{e} \quad V^1(z) = \frac{1}{2}(k' - k)z^2$$

Al I ordine si hanno, tenendo conto delle proprietà di fattorizzazione delle funzioni d'onda e dell'esercizio 2.10, i seguenti risultati:

$$E_0^1 = \langle 000|V^1|000\rangle = \frac{1}{2}(k' - k) \int dz z^2 |\psi_0(z)|^2 = \frac{1}{2}(k' - k) \langle z^2 \rangle_0 = \frac{\hbar}{4} \frac{k' - k}{\sqrt{km}}.$$

Poiché

$$\langle j|z^2|0\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} [\sqrt{2}\delta_{j,2} + \delta_{j,0}],$$

abbiamo

$$|0^1\rangle = \sum_{m \neq 0} \frac{\langle m|V^1|0\rangle}{E_0 - E_m} |m\rangle = \frac{1}{2}(k' - k) \left[ \frac{\sqrt{2}\hbar}{2m\omega} \frac{1}{2\hbar\omega} |2\rangle \right] = \frac{k' - k}{\sqrt{2}k} |2\rangle$$

e, infine,

$$\psi'_0(x, y, z) = \psi_0(x)\psi_0(y) \left[ \psi_0(z) - \frac{k' - k}{4\sqrt{2}k} \psi_2(z) \right] = \psi_0(x, y, z) \left[ 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} (4z^2 - 1) \frac{k' - k}{4\sqrt{2}k} \right]$$

dove si è tenuto conto del fatto che, per le (A.7, A.9),

$$\psi_2(z) = \psi_0(z) \left[ -\frac{1}{2\sqrt{2}} (4z^2 - 1) \right]$$

Poiché  $z^2 = r^2 \cos^2 \theta$ , alla funzione d'onda al I ordine contribuiscono gli stati di momento angolare con  $\ell = 0, 2$ , come si evince dalle (A.18).

## 6.5

Considerare una particella di massa  $m$  e carica  $q$  in presenza di forza elastica e campo elettrico costante:

$$V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 - q\mathcal{E}x.$$

Calcolare in teoria perturbativa le correzioni prodotte dalla presenza del campo elettrico ai livelli di energia al I e II ordine e ai corrispondenti autoket al I ordine.

### Soluzione

Detto

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}' + \mathcal{H}^\infty \quad \text{dove} \quad \mathcal{H}' = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \quad \text{e} \quad \mathcal{H}^\infty = -q\mathcal{E}x,$$

l'Hamiltoniano del sistema, possiamo calcolare immediatamente la correzione al I ordine ai livelli energetici utilizzando il risultato per  $\langle x \rangle_n$  trovato nell'esercizio 2.9:

$$E_n^1 = 0 \quad \forall n \in N$$

Calcoliamo ora la correzione a I ordine per i ket, utilizzando sempre i risultati dell'esercizio 2.9:

$$\begin{aligned} |n\rangle &= |n^{(0)}\rangle - q\mathcal{E} \sum_{m \neq n} \frac{\langle m^{(0)} | x | n^{(0)} \rangle}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} |m^{(0)}\rangle = \\ &= |n^{(0)}\rangle - q\mathcal{E} \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left[ \frac{\sqrt{n} |(n-1)^{(0)}\rangle}{\hbar\omega(n-n+1)} + \frac{\sqrt{n+1} |(n+1)^{(0)}\rangle}{\hbar\omega(n-n-1)} \right] = \\ &= |n^{(0)}\rangle + q\mathcal{E} \sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega^3}} \left[ \sqrt{n+1} |(n+1)^{(0)}\rangle - \sqrt{n} |(n-1)^{(0)}\rangle \right] \end{aligned}$$

L'effetto della perturbazione al I ordine è quindi quello di miscelare ciascuno stato stazionario con gli stati adiacenti.

La correzione al II ordine ai livelli dell'energia è data da:

$$E_n^2 = \sum_{m \neq n} \frac{|\langle m^{(0)} | \mathcal{H}^1 | n^{(0)} \rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} = q^2 \mathcal{E}^2 \frac{\hbar}{2m\omega} \left[ \frac{n+1}{-\hbar\omega} + \frac{n}{\hbar\omega} \right] = -\frac{q^2 \mathcal{E}^2}{2m\omega^2}.$$

Questo problema può essere risolto esattamente, consentendo così una verifica dei risultati perturbativi. Infatti

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 - q\mathcal{E}x = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \left( x - \frac{q\mathcal{E}}{m\omega^2} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{q^2 \mathcal{E}^2}{m\omega^2}$$

L'Hamiltoniano descrive quindi un'oscillatore armonico la cui posizione di riposo è traslata in  $x = \frac{q\mathcal{E}}{m\omega^2}$  e la cui energia spostata del valore costante  $-\frac{1}{2} \frac{q^2 \mathcal{E}^2}{m\omega^2}$ . La traslazione della posizione non influisce lo spettro che deriva solo dall'algebra dei commutatori:

$$\left[ x - \frac{q\mathcal{E}}{m\omega^2}, p \right] = [x, p] = i\hbar$$

A causa della ridefinizione dell'energia potenziale lo spettro :

$$E_n = E_n^0 - \frac{q^2 \mathcal{E}^2}{2m\omega^2}.$$

Pertanto il risultato trovato al II ordine in teoria perturbativa è il risultato esatto.

## 6.6

Si aggiunga al potenziale elastico l'interazione

$$V(x) = \frac{1}{2} m\alpha^2 x^2.$$

Calcolare lo spostamento dei livelli di energia al primo e secondo ordine perturbativo. Paragonare il risultato con il valore esatto.

### Soluzione

Calcoliamo preliminarmente gli elementi di matrice della perturbazione nella base data dagli autostati imperturbati dell'energia. Utilizzando le formule (A.5, A.6), si ottiene facilmente

$$\langle n|x^2|m\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} \left[ \sqrt{n(n-1)} \delta_{n,m+2} + \sqrt{(n+1)(n+2)} \delta_{n,m-2} + (2n+1) \delta_{n,m} \right].$$

La correzione al I ordine al livello  $n$ -simo è data da

$$E_n^{(1)} = \langle n|V|n\rangle = \frac{1}{2} m\alpha^2 \frac{\hbar}{2m\omega} (2n+1) = \frac{1}{2} \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\hbar\alpha^2}{\omega}.$$

La correzione al II ordine è invece

$$\begin{aligned} E_n^{(2)} &= \sum_{m \neq n} \frac{|\langle n|V|m\rangle|^2}{(n-m)\hbar\omega} = \\ &= \left(\frac{\hbar\alpha^2}{4\omega}\right)^2 \left[ \frac{n(n-1)}{2\hbar\omega} + \frac{(n+1)(n+2)}{-2\hbar\omega} \right] = \\ &= -\frac{\hbar\alpha^4}{8\omega^3} \left(n + \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Il risultato esatto si ottiene considerando un oscillatore di pulsazione

$$\omega' = \sqrt{\omega^2 + \alpha^2}$$

i cui livelli di energia sono

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \sqrt{\omega^2 + \alpha^2} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega \sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{\omega^2}} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{\omega^2} - \frac{1}{8} \left(\frac{\alpha^2}{\omega^2}\right)^2 + \dots \right]$$

I termini della serie perturbativa che abbiamo calcolato coincidono con lo sviluppo di Mc Laurin nel parametro  $\alpha^2/\omega^2$  fino al II ordine.



## 6.7

Si aggiunga al potenziale elastico l'interazione

$$\mathcal{H}^1 = \lambda x^4.$$

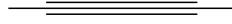
Calcolare lo spostamento dei livelli di energia al I ordine perturbativo.

**Soluzione**

Per il calcolo possiamo utilizzare il risultato dell'esercizio 2.11:

$$E_n^1 = \langle n^{(0)} | \mathcal{H}^1 | n^{(0)} \rangle = \lambda \langle n^{(0)} | x^4 | n^{(0)} \rangle = \frac{3\hbar^2 \lambda}{4m^2 \omega^2} [2n^2 + 2n + 1]$$

Notiamo che l'approssimazione al I ordine è giustificata solo per i livelli più bassi poiché, per quanto  $\lambda$  sia piccolo, la correzione cresce con  $n^2$ .

**6.8**

Un oscillatore armonico piano ha come hamiltoniana

$$H_0 = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2} m\omega^2(x^2 + y^2)$$

- Si dica quali sono i livelli energetici e la loro degenerazione.
- Se si aggiunge ad  $H_0$  una perturbazione  $V_1 = \epsilon x$  si calcolino perturbativamente le correzioni ai livelli al primo e al secondo ordine.
- Se si aggiunge ad  $H_0$  una perturbazione  $V_2 = \epsilon x^2$  si calcolino perturbativamente le correzioni ai livelli al primo e al secondo ordine.
- Si confrontino i risultati ottenuti in b) e c) con i rispettivi risultati esatti.

**Soluzione**

- Lo spazio di Hilbert è il prodotto tensoriale degli spazi relativi a due oscillatori di uguale frequenza disposti lungo gli assi  $x$  e  $y$ .

Quindi lo spettro dell'energia è dato da

$$E_n = \hbar\omega(n + 1)$$

dove  $n$  è la somma di due interi  $n_x$  e  $n_y$ . La degenerazione è pari a  $n + 1$ .

- La perturbazione esiste solo nella direzione  $x$ :

$$\begin{aligned} E_{n_x}^1 &= \epsilon \langle n_x | x | n_x \rangle = 0 \\ E_{n_x}^2 &= -\frac{\epsilon^2}{2m\omega^2} \end{aligned}$$

dove abbiamo usato i risultati dell'esercizio 6.5. In definitiva la perturbazione è la stessa per tutti i livelli

$$E_n^2 = \hbar\omega(n + 1) - \frac{\epsilon^2}{2m\omega^2}$$

- Utilizzando i risultati dell'esercizio 6.6 troviamo:

$$\begin{aligned} E_{n_x}^1 &= \frac{\hbar\epsilon}{m\omega} \left( n_x + \frac{1}{2} \right) \\ E_{n_x}^2 &= -\frac{\hbar\epsilon^2}{2m^2\omega^3} \left( n_x + \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

In definitiva, al II ordine abbiamo

$$\begin{aligned} E_{n_x, n_y} &= \hbar\omega(n_x + n_y + 1) + \frac{\hbar\epsilon}{m\omega} \left(n_x + \frac{1}{2}\right) - \frac{\hbar\epsilon^2}{4m\omega^3} \left(n_x + \frac{1}{2}\right) = \\ &= \hbar\omega \left( \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{m\omega^2} - \frac{\epsilon^2}{2m^2\omega^4} \right) \left(n_x + \frac{1}{2}\right) + \hbar\omega \left(n_y + \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Non si ha degenerazione a meno di particolari valori di  $\epsilon$ .

- d) Nel caso della perturbazione  $V_1$  sappiamo che la teoria perturbativa al II ordine coincide con il risultato esatto.

Nel caso della perturbazione  $V_2$  possiamo scrivere:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2} m\omega^2 (x^2 + y^2) + \epsilon x^2 = \frac{1}{2m} p_x^2 + \frac{1}{2} m\omega'^2 x^2 + \frac{1}{2m} p_y^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 y^2$$

dove

$$\omega'^2 = \omega^2 + \frac{2\epsilon}{m}.$$

Avremo quindi

$$\begin{aligned} E_{n_x, n_y} &= \hbar\omega' \left(n_x + \frac{1}{2}\right) + \hbar\omega \left(n_y + \frac{1}{2}\right) = \hbar\omega \sqrt{1 + \frac{2\epsilon}{m\omega^2}} \left(n_x + \frac{1}{2}\right) + \hbar\omega \left(n_y + \frac{1}{2}\right) = \\ &= \hbar\omega \left[ 1 + \frac{\epsilon}{m\omega^2} - \frac{1}{2} \left( \frac{\epsilon}{m\omega^2} \right)^2 + O(\epsilon^2) \right] \left(n_x + \frac{1}{2}\right) + \hbar\omega \left(n_y + \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

La serie perturbativa al II ordine coincide pertanto con lo sviluppo di McLaurin in  $\epsilon$  del risultato esatto.



## 6.9

L'Hamiltoniano per un sistema a due stati ha la forma

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(0)} + \lambda\mathcal{H}^{(1)} = \begin{pmatrix} a & \lambda\Delta \\ \lambda\Delta & b \end{pmatrix} \quad (\lambda > 0)$$

- a) Risolvere il problema agli autovalori dell'energia esattamente determinando autovettori ed autovalori.
- b) Assumendo  $\lambda|\Delta| \ll |a - b|$ , risolvere lo stesso problema con la teoria perturbativa fino al primo ordine negli autovettori e fino al secondo ordine negli autovalori.
- c) Assumendo che le energie non perturbate siano quasi degeneri,

$$|a - b| \ll \lambda|\Delta|$$

mostrare che i risultati ottenuti in a) sono simili a quelli che si otterrebbero applicando la teoria perturbativa degenere ( $a = b$ ).

**Soluzione**

Si vede immediatamente che autovettori ed autovalori di

$$\mathcal{H}^{(0)} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

sono dati da

$$\begin{aligned} |E_1\rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{corrispondente a } E_1 = a, \\ |E_2\rangle &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{corrispondente a } E_2 = b. \end{aligned}$$

a) Gli autovalori di  $\mathcal{H}$  sono dati dall'equazione secolare

$$\begin{aligned} (a - \omega)(b - \omega) - \lambda^2 \Delta^2 &= 0 \\ \omega_{\pm} &= \frac{a+b}{2} \pm \sqrt{\frac{(a-b)^2}{4} + \lambda^2 \Delta^2} \end{aligned}$$

Gli autovettori corrispondenti si hanno risolvendo i due sistemi omogenei

$$\begin{pmatrix} a & \lambda\Delta \\ \lambda\Delta & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \omega_{\pm} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

e imponendo la normalizzazione. Si ottiene così l'equazione

$$\begin{aligned} a\alpha + \lambda\Delta\beta &= \omega_{\pm}\alpha \\ \beta &= \frac{\omega_{\pm} - a}{\lambda\Delta} \alpha \\ |\psi_{\pm}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 \Delta^2 + (\omega_{\pm} - a)^2}} \begin{pmatrix} \lambda\Delta \\ \omega_{\pm} - a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) Calcoliamo le correzioni al primo ordine agli autovalori:

$$\begin{aligned} E_1^{(1)} &= \lambda \langle 1 | H^{(1)} | 1 \rangle = \lambda \Delta \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \\ E_2^{(1)} &= \lambda \langle 2 | H^{(1)} | 2 \rangle = \lambda \Delta \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Calcoliamo le correzioni agli autostati al I ordine:

$$\begin{aligned} |1\rangle^{(1)} &= |1\rangle + \frac{\langle 2 | \lambda \mathcal{H}^{(1)} | 1 \rangle}{E_1 - E_2} |2\rangle = |1\rangle + \frac{\lambda\Delta}{a-b} |2\rangle \\ |2\rangle^{(1)} &= |2\rangle + \frac{\langle 1 | \lambda \mathcal{H}^{(1)} | 2 \rangle}{E_2 - E_1} |1\rangle = |2\rangle - \frac{\lambda\Delta}{a-b} |1\rangle \end{aligned}$$

c) Calcoliamo le correzioni al secondo ordine agli autovalori:

$$\begin{aligned} E_1^{(2)} &= \frac{|\langle 1 | \lambda \mathcal{H}^{(1)} | 2 \rangle|^2}{E_2 - E_1} = \frac{\lambda^2 \Delta^2}{a-b} \\ E_2^{(2)} &= \frac{|\langle 2 | \lambda \mathcal{H}^{(1)} | 1 \rangle|^2}{E_1 - E_2} = -\frac{\lambda^2 \Delta^2}{a-b} \end{aligned}$$

Notiamo che, ovviamente, questi risultati coincidono con il termine del II ordine dello sviluppo in serie in  $\lambda$  degli autovalori esatti. Infatti

$$\omega_{\pm} = \frac{a+b}{2} \pm \frac{a-b}{2} \sqrt{1 + \frac{4\lambda^2 \Delta^2}{(a-b)^2}} = \frac{a+b}{2} \pm \frac{a-b}{2} \left( 1 + \frac{2\lambda^2 \Delta^2}{(a-b)^2} \right) = \begin{cases} a + \frac{\lambda^2 \Delta^2}{a-b} \\ b - \frac{\lambda^2 \Delta^2}{a-b} \end{cases}.$$

- d) Applichiamo la teoria perturbativa degenerata nel caso ( $a = b$ ). Occorre diagonalizzare la perturbazione.

$$\det \begin{pmatrix} -E^{(1)} & \lambda\Delta \\ \lambda\Delta & -E^{(1)} \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad E^{(1)} \pm \lambda\Delta$$

Per confrontare questo risultato con quello esatto, notiamo che se

$$|a - b| \ll \lambda|\Delta|$$

ha senso lo sviluppo in serie:

$$\begin{aligned} \omega_{\pm} &= \frac{a+b}{2} \pm \lambda\Delta \sqrt{1 + \frac{(a-b)^2}{4\lambda^2\Delta^2}} = \frac{a+b}{2} \pm \lambda\Delta \pm \frac{1}{8} \frac{(a-b)^2}{\lambda^2\Delta^2} + \dots = \\ &= a \pm \lambda\Delta + O\left(\frac{(a-b)^2}{\lambda^2\Delta^2}\right) \end{aligned}$$

che coincide con il risultato precedente a meno di correzioni al II ordine nel parametro di sviluppo.



## 6.10

Si consideri l'hamiltoniana di una particella di spin 1/2 immersa in un campo magnetico  $\vec{B}$  uniforme e costante che si ottiene trascurando il termine cinetico:

$$\mathcal{H} = -\mu\hbar\vec{B}\cdot\vec{\sigma}$$

Si consideri il caso in cui  $\vec{B}$  giace sul piano xz con

$$\epsilon = \frac{B_x}{B_z} \ll 1$$

- a) Si determinino con il formalismo della teoria delle perturbazioni indipendenti dal tempo gli autovalori di  $\mathcal{H}$  fino all'ordine  $\epsilon^2$  incluso, e gli autostati fino all'ordine  $\epsilon$ .
- b) Si determini poi la soluzione esatta per gli autovalori e gli autovettori.

### Soluzione

- a) Abbiamo

$$\mathbf{B} = (\epsilon B_z, 0, B_z)$$

e

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1 \quad \text{dove } \mathcal{H}_0 = -\mu\hbar B_z \sigma_z \text{ e } \mathcal{H}_1 = -\epsilon\mu\hbar B_z \sigma_x.$$

Consideriamo la parte imperturbata dell'hamiltoniano.  $\mathcal{H}_0$  è proporzionale a  $\sigma_z$ , quindi i suoi autovalori sono

$$\begin{aligned} E_- = -\mu\hbar B_z & \quad \text{corrispondente all'autostato } |-\rangle = |\sigma_z = +1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ E_+ = +\mu\hbar B_z & \quad \text{corrispondente all'autostato } |+\rangle = |\sigma_z = -1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Consideriamo  $\mathcal{H}_1$  come perturbazione. Nella rappresentazione di  $\mathcal{H}_0$  essa è data dalla matrice

$$\mathcal{H}_1 = \begin{pmatrix} \langle -|\mathcal{H}_1|-\rangle & \langle -|\mathcal{H}_1|+\rangle \\ \langle +|\mathcal{H}_1|-\rangle & \langle +|\mathcal{H}_1|+\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\epsilon\mu\hbar B_z \\ -\epsilon\mu\hbar B_z & 0 \end{pmatrix}$$



Si vede immediatamente che le correzioni al I ordine agli autovalori sono nulle.

Le correzioni al I ordine agli autostati sono date da

$$|n^{(1)}\rangle = \sum_{m \neq n} \frac{\langle m^{(0)} | \mathcal{H}_1 | n^{(0)} \rangle}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} |m^{(0)}\rangle$$

cioè

$$\begin{aligned} |E_-^{(1)}\rangle &= -\frac{1}{2\mu\hbar B_z} (-\mu\hbar B_z \varepsilon) |E_+\rangle = +\frac{\varepsilon}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ |E_+^{(1)}\rangle &= +\frac{1}{2\mu\hbar B_z} (-\mu\hbar B_z \varepsilon) |E_-\rangle = -\frac{\varepsilon}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Le correzioni al II ordine agli autovalori sono date da

$$E_n^{(2)} = \sum_{m \neq n} \frac{|\langle m^{(0)} | \mathcal{H}_1 | n^{(0)} \rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}}$$

cioè

$$E_-^{(2)} = -\frac{\mu\hbar B_z \varepsilon^2}{2} \quad E_+^{(2)} = +\frac{\mu\hbar B_z \varepsilon^2}{2}$$

b) Risolviamo ora esattamente il problema degli autovalori per

$$\mathcal{H} = -\mu\hbar B_z \Lambda \quad \text{dove} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & -1 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori di  $\Lambda$  sono  $\lambda_{1,2} \pm \sqrt{1 + \varepsilon^2}$  per cui quelli di  $\mathcal{H}$  sono:

$$E_{1,2} = \mp \mu\hbar B_z \sqrt{1 + \varepsilon^2}$$

Gli autovettori di  $\mathcal{H}$  sono gli stessi di  $\Lambda$  e sono della forma:

$$|E_{1,2}\rangle = \alpha_{1,2} \begin{pmatrix} 1 + \lambda_{1,2} \\ \varepsilon \end{pmatrix}$$

dove  $\alpha_{1,2}$  è un opportuna costante di normalizzazione.

## 6.11

Determinare, mediante la teoria perturbativa, gli autovalori dell'energia all'ordine  $A^2$  per una particella di massa  $m$  che si muove lungo l'asse  $x$  sotto l'azione del potenziale

$$U(x) = \frac{1}{2} kx^2 + Ax^3.$$

### Soluzione

Essendo nota la soluzione per il potenziale armonico, possiamo scrivere

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1 \quad \text{dove} \quad \mathcal{H}_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} kx^2 \quad \text{e} \quad \mathcal{H}_1 = Ax^3$$

e considerare  $\mathcal{H}_1$  come perturbazione.

Utilizzando le formule (A.4,A.6), si trova facilmente

$$\begin{aligned}\langle m|x^3|n\rangle &= \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{3/2} \langle m|(a+a^\dagger)^3|n\rangle = \\ &= \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{3/2} \left\{ \sqrt{n(n-1)(n-2)} \delta_{m,n-3} + \sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)} \delta_{m,n+3} \right. \\ &\quad \left. + 3\sqrt{(n+1)^3} \delta_{m,n+1} + 3\sqrt{n^3} \delta_{m,n-1} \right\}\end{aligned}$$

La correzione al I ordine per il livello imperturbato  $n$ -simo

$$E_n^{(0)} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

è data da (A.28)

$$E_n^{(1)} = A\langle n|x^3|n\rangle = 0$$

La correzione al II ordine è data da (A.29)

$$\begin{aligned}E_n^{(2)} &= A^2 \sum_{m \neq n} \frac{|\langle m|x^3|n\rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} = \\ &= A^2 \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^3 \frac{1}{\hbar\omega} \left\{ \frac{n(n-1)(n-2)}{3} + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{-3} + 9\frac{(n+1)^3}{-1} + 9n^3 \right\} = \\ &= -\frac{\hbar^2 A^2}{8m^3\omega^4} (30n^2 + 30n + 11).\end{aligned}$$

## 6.12

Una particella di massa  $m$  si muove nel piano  $xy$  soggetta ad un potenziale armonico di pulsazione  $\omega$ :

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2).$$

Si introduca la perturbazione

$$\mathcal{H}_1(x, y) = 2\lambda xy.$$

- Si risolva il problema degli autovalori e degli autostati di  $\mathcal{H}_0$ .
- Si calcoli la correzione al livello fondamentale dovuta a  $\mathcal{H}_1$  in teoria perturbativa al I e II ordine.
- Si calcoli la correzione al primo e al secondo livello eccitato dovuta a  $\mathcal{H}_1$  in teoria perturbativa al I ordine.

### Soluzione

Il problema è risolto esattamente nell'esercizio 6.17.

- Con ovvia assegnazione di simboli possiamo scrivere

$$\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_0^x \mathcal{H}_0^y$$

Quindi gli autovalori sono dati da

$$E_n^{(0)} = \hbar\omega(n+1) \quad \text{dove} \quad n = n_x + n_y \quad \text{con} \quad n_{x,y} = 0, 1, 2, \dots$$

e i relativi autostati, detti  $|n_x\rangle$  e  $|n_y\rangle$  gli autostati dell'oscillatore armonico unidimensionale per ciascuna delle due direzioni, da

$$|n^{(0)}\rangle = |n_x\rangle|n_y\rangle$$

b) Lo stato fondamentale è dato da

$$|0^{(0)}\rangle = |0_x\rangle|0_y\rangle$$

La correzione al I ordine è

$$E_0^{(1)} = \langle 0^{(0)} | 2\lambda xy | 0^{(0)} \rangle = 2\lambda (\langle 0 | x | 0 \rangle)^2 = 2\lambda \left( \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \langle 0 | 1 \rangle \right)^2 = 0$$

dove abbiamo usato le (A.5,A.6).

Al II ordine si ha, tenendo conto della (A.29):

$$\begin{aligned} E_0^{(2)} &= 4\lambda^2 \sum_{m \neq 0} \frac{|\langle 0^{(0)} | xy | m^{(0)} \rangle|^2}{(0-m)\hbar\omega} = \\ &= 4\lambda^2 \sum_{(n_x, n_y) \neq (0,0)} \frac{|\langle 0 | x | n_x \rangle \langle 0 | y | n_y \rangle|^2}{(-n_x - n_y)\hbar\omega} = \\ &= \frac{4\lambda^2}{\hbar\omega} \left( \frac{\hbar}{2m\omega} \right)^2 \frac{1}{-2} = -\frac{\lambda^2 \hbar}{2m^2 \omega^3} \end{aligned}$$

c) Il primo e al secondo livello eccitato sono degeneri; le correzioni sono quindi gli autovalori della matrice rappresentativa della perturbazione nel sottospazio relativo al livello.

Per il primo livello eccitato, doppiamente degenero, si ha:

$$\mathcal{H}_1 = \begin{pmatrix} \langle 10 | \mathcal{H}_1 | 10 \rangle & \langle 10 | \mathcal{H}_1 | 01 \rangle \\ \langle 01 | \mathcal{H}_1 | 10 \rangle & \langle 01 | \mathcal{H}_1 | 01 \rangle \end{pmatrix} = 2\lambda \begin{pmatrix} 0 & \frac{\hbar}{2m\omega} \\ \frac{\hbar}{2m\omega} & 0 \end{pmatrix}$$

i cui autovalori sono  $\pm \frac{\lambda\hbar}{m\omega}$ .

Il secondo livello eccitato è tre volte degenero, con autostati

$$|20\rangle, |11\rangle, |02\rangle,$$

quindi la matrice da diagonalizzare è:

$$\mathcal{H}_1 = \begin{pmatrix} \langle 20 | \mathcal{H}_1 | 20 \rangle & \langle 20 | \mathcal{H}_1 | 11 \rangle & \langle 20 | \mathcal{H}_1 | 02 \rangle \\ \langle 11 | \mathcal{H}_1 | 20 \rangle & \langle 11 | \mathcal{H}_1 | 11 \rangle & \langle 11 | \mathcal{H}_1 | 02 \rangle \\ \langle 02 | \mathcal{H}_1 | 20 \rangle & \langle 02 | \mathcal{H}_1 | 11 \rangle & \langle 02 | \mathcal{H}_1 | 02 \rangle \end{pmatrix} = \frac{\lambda\hbar}{m\omega} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

i cui autovalori sono 0 e  $\pm \frac{2\lambda\hbar}{m\omega}$ .

## 6.13

Due particelle di massa  $m$  sono vincolate a stare su una circonferenza di raggio  $R$ . Si calcolino i livelli energetici e si scrivano le autofunzioni.

Si supponga poi di accendere un'interazione tra le particelle con potenziale

$$V = V_0 \cos(\phi_1 - \phi_2),$$

dove  $\phi_1$  e  $\phi_2$  sono le coordinate angolari che identificano la posizione delle due particelle sulla circonferenza. Si scriva l'equazione di Schrödinger usando le variabili  $\alpha = \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}$  e  $\beta = \phi_1 - \phi_2$  e si mostri la sua separazione nelle nuove variabili determinando le proprietà di periodicità della funzione d'onda nelle nuove variabili. Si calcoli, infine, perturbativamente al primo ordine le correzioni agli autovalori dell'energia.

### Soluzione

Poiché l'Hamiltoniano si può scrivere nella forma

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 \quad \text{dove} \quad \mathcal{H}_i = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial \phi_i^2},$$

l'equazione di Schrödinger si separa nelle due variabili  $\phi_1$  e  $\phi_2$ . Le funzioni d'onda devono soddisfare la condizione di periodicità in queste variabili:  $\psi(\phi_i + 2\pi) = \psi(\phi_i)$ . Le autofunzioni e gli autovalori di  $\mathcal{H}$  sono quindi:

$$\psi_{k,l}(\phi_1, \phi_2) = \psi_k(\phi_1)\psi_l(\phi_2) \quad E_{k,l} = E_k E_l$$

dove

$$\psi_n(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{in\phi} \quad E_n = \frac{\hbar^2 n^2}{2mR^2} \quad n = 0, \pm 1, \dots$$

In presenza del potenziale  $V = V_0 \cos(\phi_1 - \phi_2)$  l'equazione di Schrödinger non è più separabile nelle variabili  $\phi_1$  e  $\phi_2$ .

Introducendo, invece, le nuove variabili

$$\alpha = \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \quad \text{e} \quad \beta = \phi_1 - \phi_2,$$

l'Hamiltoniano si separa in due termini dipendenti da una sola variabile:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{CM} + \mathcal{H}_r \quad \text{dove} \quad \mathcal{H}_{CM} = -\frac{\hbar^2}{2MR^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \quad \text{e} \quad \mathcal{H}_r = -\frac{\hbar^2}{2\mu R^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + V(\beta).$$

$\mathcal{H}_{CM}$  corrisponde al moto circolare libero del Centro di massa con massa  $M = 2m$  e posizione angolare  $\alpha \in [0, 2\pi]$  mentre  $\mathcal{H}_r$  corrisponde al moto della massa ridotta  $\mu = m/2$  in presenza del potenziale  $V(\beta)$  con  $\beta \in [0, 2\pi]$ .

In assenza di  $V(\beta)$  abbiamo le autofunzioni

$$\Psi_{k,l}(\alpha, \beta) = \Psi_k(\alpha)\Phi_l(\beta) \quad \text{corrispondenti agli autovalori} \quad E_{k,l} = \frac{\hbar^2 k^2}{2MR^2} + \frac{\hbar^2 l^2}{2\mu R^2}$$

con

$$\Psi_n(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{in\alpha} \quad \Phi_n(\beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{in\beta} \quad n = 0, \pm 1, \dots$$

La perturbazione attiene al solo Hamiltoniano  $\mathcal{H}_r$ . Notiamo che, poiché

$$\langle \Phi_k | V | \Phi_{-k} \rangle = \frac{V_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ik\beta} \cos \beta e^{-ik\beta} = 0 \quad \forall k,$$

sia la correzione allo stato fondamentale (non degenero) che le correzioni agli stati eccitati (doppiamente degeneri) sono nulle; in quest'ultimo caso, infatti, le matrici da diagonalizzare hanno elementi tutti nulli.

## 6.14

Una particella di massa  $m$  si trova in un pozzo a pareti infinite. Il fondo viene modificato da

$$V(x) = 0 \quad \text{per } 0 < x < L$$

a

$$V'(x) = V_0 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad \text{per } 0 < x < L.$$

Calcolare le correzioni al I ordine in  $V_0$  a tutti i livelli energetici.

### Soluzione

In assenza di perturbazione gli autovalori e le corrispondenti autofunzioni dell'energia sono:

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2mL^2}, \quad \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

La correzione del prim'ordine ai livelli di energia è data da

$$\begin{aligned} E_n^{(1)} &= \int_0^L dx \psi_n^*(x) V'(x) \psi_n(x) = \\ &= \frac{2V_0}{L} \int_0^L dx \sin^2 \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{\pi x}{L} = \\ &= \frac{2V_0}{\pi} \left[ \frac{1}{2} \int_0^\pi d\alpha \sin \alpha - \frac{1}{2} \int_0^\pi d\alpha \cos 2n\alpha \sin \alpha \right] = \\ &= \frac{2V_0}{\pi} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \int_0^\pi d\alpha \frac{1}{2} [\sin(2n+1)\alpha + \sin(1-2n)\alpha] \right\} = \\ &= \frac{2V_0}{\pi} \left[ 1 - \frac{1}{4} \left( \frac{2}{2n+1} + \frac{2}{1-2n} \right) \right] = \\ &= \frac{8V_0 n^2}{\pi(4n^2 - 1)} \end{aligned}$$

## 6.15

Due particelle di massa  $m$  si muovono lungo l'asse  $x$  interagendo mediante una forza elastica di costante  $k$ .

Supponendo che mentre si trovano nello stato fondamentale di energia  $E_0$ , la costante  $k$  si dimezzi improvvisamente, qual è la probabilità che una misura dell'energia dia come risultato l'energia dello stato fondamentale?

### Soluzione

Dette  $x_1$  e  $x_2$  le coordinate delle due particelle, introduciamo la coordinata del centro di massa e quella relativa

$$X = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad x = x_1 - x_2$$

e la massa totale  $M$  e la massa ridotta  $\mu$

$$M = 2m \quad \mu = \frac{m}{2}.$$

Ponendo

$$\Psi(X, x) = \Phi(X)\psi(x),$$

l'equazione di Schrödinger

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + V(x_1 - x_2) - W \right] \Psi(x_1, x_2) = 0$$

si separa nelle due equazioni

$$\begin{cases} \left[ -\frac{\hbar^2}{2M} \frac{d^2}{dX^2} - E_{CM} \right] \Phi(X) = 0 \\ \left[ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) - E \right] \psi(x) = 0 \end{cases} \quad (6.1)$$

con la condizione

$$W = E_{CM} + E.$$

Il centro di massa si muove di moto libero, mentre la massa ridotta descrive un oscillatore armonico. Ai fini del problema interessa solo il moto della coordinata relativa.

Inizialmente il sistema è descritto dalla funzione d'onda

$$\psi_0(x) = \left( \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2} \quad \text{dove} \quad \alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} = \sqrt[4]{\frac{mk}{\hbar^2}}.$$

Si vuole sapere la probabilità che, dopo il dimezzamento della costante elastica, l'oscillatore sia nello stato fondamentale del nuovo sistema, cioè nella stato descritto da:

$$\psi'_0(x) = \left( \frac{\alpha'}{\sqrt{\pi}} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\alpha'^2 x^2} \quad \text{dove} \quad \alpha' = \sqrt{\frac{m\omega'}{\hbar}} = \sqrt[4]{\frac{mk'}{\hbar^2}} = \frac{\alpha}{\sqrt[4]{2}}.$$

Si tratta di una perturbazione istantanea, nella quale lo stato della particella non cambia, mentre cambia il suo Hamiltoniano. Pertanto tale probabilità è data dal modulo quadro di

$$\begin{aligned} \langle \psi_0 | \psi'_0 \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \sqrt{\frac{\alpha\alpha'}{\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\alpha^2 + \alpha'^2)x^2} = \\ &= \sqrt{\frac{\alpha\alpha'}{\pi}} \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha^2 + \alpha'^2}} = \sqrt{\frac{2\alpha\alpha'}{\alpha^2 + \alpha'^2}}, \end{aligned}$$

dove si è usata l'espressione A.1 per l'integrale gaussiano riportata in Appendice. Quindi la probabilità richiesta è data da:

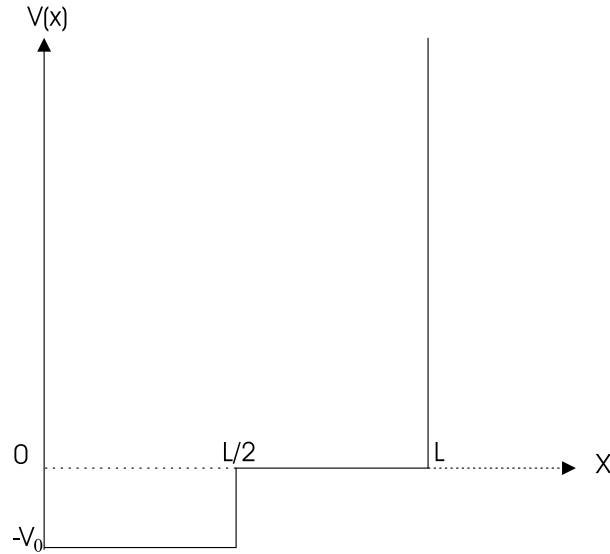
$$P_0 = \frac{2\alpha\alpha'}{\alpha^2 + \alpha'^2} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{2}(1 + \sqrt{2})} = 2^{\frac{5}{4}}(\sqrt{2} - 1) = 0.9852$$

## 6.16

Una particella di massa  $m$  si muove in una scatola unidimensionale con una piccola buca di potenziale data da

$$V(x) = \begin{cases} \infty, & \text{se } x < 0 \text{ e } x > L \\ -V_0, & \text{se } 0 < x < \frac{L}{2} \\ 0 & \text{se } \frac{L}{2} < x < L. \end{cases}$$

Trattare la piccola buca tra 0 e  $\frac{L}{2}$  come una perturbazione rispetto al normale pozzo di potenziale e calcolare l'energia dello stato fondamentale al prim'ordine.



### Soluzione

In assenza di perturbazione l'energia e l'autofunzioni dello stato fondamentale sono:

$$E_0 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2}, \quad \psi_0(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

La correzione del prim'ordine ai livelli di energia è data da

$$\begin{aligned} E_0^{(1)} &= \int_0^L dx \psi_0^*(x) H^1(x) \psi_0(x) = \\ &= \frac{2}{L} \int_0^{\frac{L}{2}} dx \sin^2 \frac{\pi x}{L} (-V_0) = \\ &= -\frac{V_0}{L} \int_0^{\frac{L}{2}} dx \left[ 1 - \cos \frac{2\pi x}{L} \right] = -\frac{V_0}{2} \end{aligned}$$

## 6.17

Si considerino due oscillatori armonici unidimensionali di uguali massa  $m$  e costante elastica  $k$ . Essi interagiscono tramite un'energia potenziale

$$\mathcal{H}^\infty = \alpha x_1 x_2,$$

dove  $x_1$  e  $x_2$  sono le posizioni dei due oscillatori.

- Determinare autovalori e autostati. (Suggerimento: separare il moto del centro di massa da quello della coordinata relativa).
- Nell'ipotesi in cui  $\alpha \ll k$ , calcolare al più basso ordine perturbativo non nullo le energie dei livelli.
- Confrontare i due risultati.

**Soluzione**

a) L'Hamiltoniano del sistema è

$$\mathcal{H} = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 + \alpha x_1 x_2$$

Introducendo le variabili suggerite:

$$X = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{e} \quad x = x_1 - x_2$$

l'Hamiltoniano diventa:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{CM} + \mathcal{H}_r$$

dove, detti  $P$  e  $p$  gli impulsi coniugati alle nuove variabili,  $M = 2m$  la massa totale e  $\mu = m/2$  la massa ridotta,

$$\mathcal{H}_{CM} = \frac{P^2}{2M} + (k + \alpha)X^2 \quad \text{e} \quad \mathcal{H}_r = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{1}{4}(k - \alpha)x^2$$

Il sistema presenta quindi un Hamiltoniano somma di due termini relativi a due moti oscillatori, uno di costante elastica  $2(k + \alpha)$  per il centro di massa e uno di costante elastica  $(k - \alpha)/2$  per il moto relativo. L'equazione di Schrödinger è dunque separabile nelle nuove variabili. Notiamo che questa separazione ha senso nell'ipotesi  $\alpha \ll k$ , altrimenti il moto relativo avrebbe un'energia potenziale non limitata inferiormente.

Lo spettro dell'energia è dato quindi da

$$E_{N_T, n_r} = E_{n_T} + E_{n_r} = \hbar\omega_T(n_T + \frac{1}{2}) + \hbar\omega_r(n_r + \frac{1}{2})$$

dove ho posto, detta  $\omega$  la pulsazione dei due oscillatori in assenza di interazione,

$$\begin{aligned} \omega_T &= \sqrt{\frac{2(k + \alpha)}{M}} = \sqrt{\frac{k + \alpha}{m}} = \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{1 + \frac{\alpha}{k}} = \omega \sqrt{1 + \frac{\alpha}{m\omega^2}} \\ \omega_r &= \sqrt{\frac{k - \alpha}{2\mu}} = \sqrt{\frac{k - \alpha}{m}} = \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{1 - \frac{\alpha}{k}} = \omega \sqrt{1 - \frac{\alpha}{m\omega^2}} \end{aligned}$$

b) In assenza di interazione i due oscillatori relativi al Centro di massa e alla coordinata relativa, hanno la stessa pulsazione  $\omega$ . Quindi i livelli di energia sono

$$E_n = \hbar\omega(n + 1) \quad \text{dove} \quad n = n_T + n_r = 0, 1, \dots$$

Ciascun livello  $n$  ha degenerazione pari a  $n + 1$ . Al I ordine in teoria perturbativa dobbiamo diagonalizzare la matrice della perturbazione nel sottospazio dei ket  $|n\rangle = |j, n - j\rangle = |j\rangle_1 |n - j\rangle_2$ . Usando i risultati dell'esercizio 2.10 abbiamo:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{j,k} &= \alpha^2 \langle j, n - j | x_1 x_2 | k, n - k \rangle = \\ &= \alpha \langle j, n - j | (X^2 - \frac{x^2}{4}) | k, n - k \rangle = \\ &= \alpha \left[ \langle j | X^2 | k \rangle \delta_{j,k} - \frac{1}{4} \langle n - j | x^2 | n - k \rangle \delta_{j,k} \right] = \\ &= \alpha \left[ \langle k | X^2 | k \rangle \delta_{j,k} - \frac{1}{4} \langle n - k | x^2 | n - k \rangle \delta_{j,k} \right] = \\ &= \alpha \left[ \frac{\hbar}{2M\omega} (2k + 1) - \frac{1}{4} \frac{\hbar}{2\mu\omega} (2(n - k) + 1) \right] \delta_{j,k} = \\ &= \frac{\alpha\hbar}{4m\omega} (2k - n) \delta_{j,k} \end{aligned}$$



La matrice è quindi diagonale e gli  $n + 1$  autovalori sono il prodotto di  $\alpha \frac{\hbar}{4m\omega}$  per

$$-n, 2 - n, 4 - n, \dots, n - 4, n - 2, n$$

- c) Sviluppando in serie di potenze di  $\alpha/k = \alpha/m\omega^2$  le espressioni per  $\omega_T$  e  $\omega_r$  e trascurando gli ordini superiori al secondo abbiamo

$$\omega_T = \omega \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{\alpha}{m\omega^2} - \frac{1}{8} \left( \frac{\alpha}{m\omega^2} \right)^2 \right]$$

$$\omega_r = \omega \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{\alpha}{m\omega^2} - \frac{1}{8} \left( \frac{\alpha}{m\omega^2} \right)^2 \right]$$

Possiamo quindi approssimare lo spettro dell'energia totale con l'espressione

$$E_{N_T, n_r} = \hbar\omega(n_T + n_r + 1) + \frac{1}{2} \frac{\alpha\hbar}{2m\omega} (n_T - n_r) - \frac{\hbar\omega}{8} \left( \frac{\alpha}{m\omega^2} \right)^2 (n_T + n_r + 1)$$

Il termine di ordine  $\alpha$  coincide con il risultato trovato in teoria perturbativa al I ordine perchè, se fissiamo a  $n$  la somma  $n_T + n_r$ , la loro differenza assume proprio i valori  $-n, 2 - n, 4 - n, \dots, n - 4, n - 2, n$ .



## 6.18

Considerare una particella di massa  $m$  vincolata a muoversi su un segmento di lunghezza  $a$ .

- a) Scrivere le prime 4 autofunzioni e i corrispondenti autovalori.
- b) La particella si trova nello stato fondamentale ( $n = 1$ ). Al tempo  $t = 0$  viene introdotto istantaneamente un potenziale quadrato di profondità  $-V_0$  ( $V_0 > 0$ ), di larghezza  $b \ll a$  centrato intorno a  $x = \frac{a}{2}$ . Se questo potenziale viene rimosso dopo un intervallo di tempo  $\Delta t$ , quale sarà la probabilità di trovare il sistema in ciascuno degli stati con  $n = 2, n = 3, n = 4$ ?

### Soluzione

- a) Autovalori ed autofunzioni richieste sono dati da

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2}, & \psi_1(x) &= \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi x}{a} \\ E_2 &= \frac{4\hbar^2 \pi^2}{2ma^2}, & \psi_2(x) &= \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{2\pi x}{a} \\ E_3 &= \frac{9\hbar^2 \pi^2}{2ma^2}, & \psi_3(x) &= \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{3\pi x}{a} \\ E_4 &= \frac{16\hbar^2 \pi^2}{2ma^2}, & \psi_4(x) &= \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{4\pi x}{a} \end{aligned}$$

- b) Le probabilità di transizione sono date da

$$P_{1 \rightarrow n}(\Delta t) = \left| -\frac{i}{\hbar} \int_0^{\Delta t} dt \langle n | \mathcal{H}^1 | 1 \rangle e^{i\omega_{n,1} t} \right|^2 = \frac{1}{\hbar^2} |\langle n | \mathcal{H}^1 | 1 \rangle|^2 \left| \frac{e^{i\omega_{n,1} \Delta t} - 1}{i\omega_{n,1}} \right|^2$$

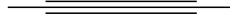
dove gli elementi di matrice sono dati da:

$$\langle n | \mathcal{H}^1 | 1 \rangle = -\frac{2V_0}{a} \int_{\frac{a-b}{2}}^{\frac{a+b}{2}} dx \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{\pi x}{a}$$

L'integrale è nullo per  $n = 2$  e  $n = 4$  perchè, l'integrando si presenta come il prodotto di una funzione antisimmetrica (l'autofunzione  $n$ -sima) per una funzione simmetrica (l'autofunzione dello stato fondamentale) per riflessioni rispetto al centro dell'intervallo d'integrazione.

Rimane la probabilità di transizione al terzo stato per la quale l'integrale può essere approssimato con il prodotto del valore dell'integrando al centro dell'intervallo d'integrazione per l'ampiezza dell'intervallo stesso:

$$P_{1 \rightarrow 3}(\Delta t) \simeq \left( \frac{2V_0 b}{a} \right)^2 \frac{4}{\hbar^2 \omega_{3,1}^2} \sin^2(\omega_{3,1} \Delta t)$$



## 6.19

Una particella di massa  $m$  è libera di muoversi su una circonferenza di raggio  $R$ . Viene applicato un potenziale perturbante

$$V(\theta) = V_0 \sin \theta \cos \theta,$$

dove  $\theta$  è la posizione angolare sulla circonferenza. Individuate le funzioni d'onda del sistema imperturbato che diagonalizzano la matrice corrispondente a  $V$ , calcolare i livelli di energia al secondo ordine perturbativo.

### Soluzione

L'Hamiltoniano contiene il solo termine cinetico. Imponendo la condizione di periodicità sulla funzione d'onda, si trova:

$$E_n = \frac{n^2 \hbar^2}{2mR^2}, \quad \psi_n(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{in\theta}, \quad \text{con } n = 0, \pm 1, \dots$$

Il livello fondamentale è non degenere mentre tutti gli altri sono doppiamente degeneri. Per il calcolo delle correzioni valutiamo prima gli elementi di matrice della perturbazione.

$$\begin{aligned} \langle n | V | m \rangle &= \frac{V_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta e^{i(m-n)\theta} \sin \theta \cos \theta = \\ &= \frac{V_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\theta e^{i(m-n)\theta} \sin 2\theta = \\ &= \frac{V_0}{8i\pi} \left[ \int_0^{2\pi} d\theta e^{i(m-n+2)\theta} - \int_0^{2\pi} d\theta e^{i(m-n-2)\theta} \right] = \\ &= \frac{V_0}{4i} [\delta_{m,n-2} - \delta_{m,n+2}] \end{aligned}$$

Calcoliamo prima le correzioni al I e II ordine allo stato fondamentale:

$$E_0^{(1)} = \langle 0 | V | 0 \rangle = 0$$

$$E_0^{(2)} = \sum_{n \neq 0} \frac{|\langle n|V|0\rangle|^2}{E_0 - E_n} = \frac{V_0^2}{16} \left[ \frac{1}{E_0 - E_2} + \frac{1}{E_0 - E_{-2}} \right] = -\frac{V_0^2 m R^2}{16 \hbar^2}$$

Passiamo ora a calcolare le correzioni al I ordine per gli autovalori degeneri. Occorre diagonalizzare la matrice che rappresenta  $V$  nel sottospazio a 2 dimensioni sotteso da ciascun autovalore. Dall'espressione per  $\langle n|V|m\rangle$  si comprende immediatamente che solo nel caso  $n = 1$  si ha una matrice non nulla:

$$\begin{pmatrix} \langle +1|V|+1\rangle & \langle +1|V|-1\rangle \\ \langle -1|V|+1\rangle & \langle -1|V|-1\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{V_0}{4i} \\ -\frac{V_0}{4i} & 0 \end{pmatrix}$$

che ha autovalori

$$E_1^{(1,+)} = \frac{V_0}{4}, \quad E_1^{(1,-)} = -\frac{V_0}{4}$$

e corrispondenti autostati

$$|\psi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|-1\rangle + i|1\rangle) \quad |\psi_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle + i|-1\rangle)$$

Gli autovalori sono le correzioni al I ordine per il livello  $n = 1$ . Per tutti gli altri livelli, come si è detto, le matrici e quindi le correzioni sono nulle.

Per quanto riguarda le correzioni al II ordine, consideriamo prima quelle relative al primo livello usando, per  $n = \pm 1$ , la base costituita da  $|\psi_+\rangle$  e  $|\psi_-\rangle$ . Tenendo conto del fatto che, per  $n \neq 1$ ,

$$\langle \psi_+|V|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle -1|V|n\rangle - i\langle 1|V|n\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{V_0}{4i} (\delta_{n,-3} - \delta_{n,1} - i\delta_{n,-1} + i\delta_{n,3}),$$

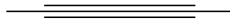
mentre ovviamente nella nuova base  $\langle \psi_+|V|\psi_-\rangle = 0$ , si ottiene

$$E_1^{(2,+)} = \sum_{n \neq \pm 1} \frac{|\langle \psi_+|V|n\rangle|^2}{E_1 - E_n} = \frac{V_0^2}{32} \left[ \frac{1}{E_1 - E_3} + \frac{1}{E_1 - E_{-3}} \right] = \frac{V_0^2 2mR^2}{16\hbar^2} \frac{1}{1-9} = -\frac{V_0^2 mR^2}{64\hbar^2}$$

Lo stesso risultato si ha per  $E_1^{(2,-)}$  in quanto i coefficienti dello sviluppo di  $|\psi_-\rangle$  e di  $|\psi_+\rangle$  nella vecchia base hanno lo stesso modulo.

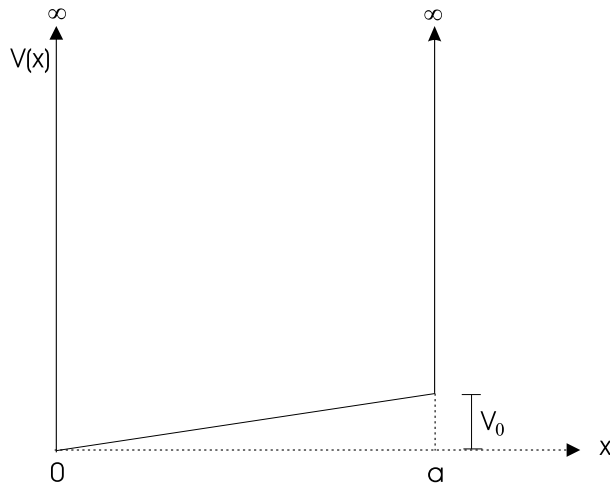
Per  $m \neq \pm 1$  non occorre diagonalizzare le matrici nei sottospazi degeneri perchè sono nulle. Si ha quindi

$$E_m^{(2)} = \sum_{n \neq m} \frac{|\langle n|V|m\rangle|^2}{E_m - E_n} = \frac{V_0^2}{16} \left[ \frac{1}{E_m - E_{m+2}} + \frac{1}{E_m - E_{m-2}} \right] = -\frac{V_0^2 mR^2}{16\hbar^2} \frac{1}{m^2 - 1}$$



## 6.20

Utilizzando la teoria perturbativa al primo ordine, calcolare i livelli di energia per una buca quadrata infinita unidimensionale di larghezza  $a$  il cui fondo è stato reso obliquo come mostrato in figura.



### Soluzione

La perturbazione è data da

$$\mathcal{H}^1 = \frac{V_0}{a} x \quad \text{per } 0 \leq x \leq a$$

Autovalori e autofunzioni imperturbati sono

$$E_n^{(0)} = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2ma^2}, \quad \psi_n^{(0)}(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad n = 1, 2, \dots$$

La correzione al I ordine ai livelli è data da

$$E_n^{(1)} = \frac{V_0}{a} \frac{2}{a} \int_0^a dx x \sin^2 \frac{n\pi x}{a} = \frac{2V_0}{n^2 \pi^2} \int_0^n \pi dz z \sin^2 z = \frac{V_0}{2}$$

La correzione è la stessa per tutti i livelli. Avremo quindi

$$E_n^{(0)} + E_n^{(1)} = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2ma^2} + \frac{V_0}{2}, \quad \forall n = 1, 2, \dots$$

## 6.21

Un corpo di massa  $m$  è vincolato, in un piano verticale, a ruotare intorno ad asse orizzontale mediante un'asta di massa trascurabile e lunghezza  $l$ . Trattando la forza peso in maniera perturbativa, si calcolino le correzioni al II ordine per i livelli di energia.

### Soluzione

L'Hamiltoniano imperturbato contiene solo energia cinetica

$$\mathcal{H}^0 = \mathcal{T} = \frac{L_z^2}{2I} = -\frac{\hbar^2}{2I} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

dove  $I = ml^2$  è il momento d'inerzia e  $\phi$  è l'angolo di rotazione intorno all'asse  $z$  che identifichiamo con l'asse di rotazione. Ponendo  $\phi = 0$  l'angolo relativo alla posizione

più bassa e fissando lo zero dell'energia potenziale a  $\phi = \pi/2$ , la perturbazione può essere scritta come

$$\mathcal{H}^1(\phi) = -mgl \cos \phi.$$

Le autofunzioni di  $\mathcal{H}^0$  sono le autofunzioni di  $L_z$ :

$$\psi_n(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{in\phi}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

e corrispondono agli autovalori

$$E_n^0 = \frac{n^2 \hbar^2}{2I}$$

doppiamente degeneri per  $n \neq 0$ .

Calcoliamo prima gli elementi di matrice

$$\begin{aligned} \langle n | \mathcal{H}^1 | k \rangle &= -\frac{mgl}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi e^{-in\phi} \cos \phi e^{ik\phi} = \\ &= -\frac{mgl}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi e^{i(k-n)\phi} \frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{2} = \\ &= -\frac{mgl}{2} (\delta_{k-n,1} + \delta_{k-n,-1}). \end{aligned}$$

La correzione al I ordine risulta quindi nulla

$$E_n^1 = 0$$

in quanto è nulla la correzione per lo stato fondamentale, l'unico non degenero, mentre per gli altri stati le matrici da diagonalizzare hanno tutte elementi nulli.

Le correzioni al II ordine possono essere calcolate dalla teoria non degenera in quanto, per la presenza delle  $\delta$  negli elementi di matrice, contribuiscono solo termini con denominatori diversi da zero.

$$\begin{aligned} E_n^2 &= \sum_{m \neq n} \frac{|\langle m | \mathcal{H}^1 | n \rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} = \\ &= \left( \frac{mgl}{2} \right)^2 \frac{2I}{\hbar^2} \left[ \frac{1}{E_n^{(0)} - E_{n+1}^{(0)}} + \frac{1}{E_n^{(0)} - E_{n-1}^{(0)}} \right] = \\ &= \frac{mg^2 l^2}{\hbar^2} \frac{1}{4n^2 - 1} \end{aligned}$$

## 6.22

Si calcolino autofunzioni e autovalori dell'energia per una particella di massa  $m$  confinata in un quadrato di lato  $L$ :

$$0 \leq x \leq L \quad 0 \leq y \leq L$$

Introdotta poi una perturbazione  $\mathcal{H}^1 = Cxy$ , si trovino le correzioni al I ordine per il livello fondamentale ed il primo livello eccitato.

**Soluzione**

Lo spazio delle funzioni d'onda è il prodotto tensoriale degli spazi relative a due pozzi di potenziale secondo due direzioni normali. Autovalori e autofunzioni imperturbati sono dati da:

$$\begin{aligned}\psi_{k,n}(x,y) &= \psi_n(x) \psi_k(y) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{k\pi x}{L} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{k\pi y}{L} \\ E_{k,n}^0 &= E_k^0 + E_n^0 = \frac{\pi^2 \hbar^2 (k^2 + n^2)}{2mL^2} \\ n &= 1, 2, \dots\end{aligned}$$

Per calcolare gli effetti della perturbazione sono necessari i seguenti elementi di matrice:

$$\begin{aligned}(\psi_1(x), x \psi_1(x)) &= \frac{2}{L} \int_0^L dx x \sin^2 \frac{\pi x}{L} = \frac{L}{\pi^2} \int_0^\pi dx x (1 - \cos 2x) = \frac{L}{2} \\ (\psi_2(x), x \psi_2(x)) &= \frac{2}{L} \int_0^L dx x \sin^2 \frac{2\pi x}{L} = \frac{2}{L} \frac{L^2}{\pi^2} \int_0^{2\pi} dx x \sin^2 x = \frac{L}{2} \\ (\psi_1(x), x \psi_2(x)) &= \frac{2}{L} \int_0^L dx x \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{2\pi x}{L} = \frac{2}{L} \frac{L^2}{\pi^2} \int_0^\pi dx x \sin x \sin 2x = \\ &= \frac{4L}{\pi^2} \int_0^\pi dx x \sin^2 x \cos x = \frac{4}{3} \frac{4L}{\pi^2} \int_0^\pi d \cos x (1 - \cos^2 x) = \\ &= -\frac{16}{9} \frac{L}{\pi^2}\end{aligned}$$

Per lo stato fondamentale abbiamo:

$$E_{1,1}^1 = (\psi_{1,1}(x,y), C xy \psi_{1,1}(x,y)) = C (\psi_1(x), x \psi_1(x))^2 = \frac{CL^2}{4}$$

Per il secondo livello siamo in presenza di degenerazione tra gli stati  $\psi_{1,2}$  e  $\psi_{2,1}$ . Occorre diagonalizzare la matrice

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$$

dove

$$\begin{aligned}A &= (\psi_{1,2}(x,y), C xy \psi_{1,2}(x,y)) = C (\psi_1(x), x \psi_1(x)) (\psi_2(y), y \psi_2(y)) = \frac{CL^2}{4} \\ B &= (\psi_{1,2}(x,y), C xy \psi_{2,1}(x,y)) = C (\psi_1(x), x \psi_2(x))^2 = \frac{256 CL^2}{81\pi^4}.\end{aligned}$$

Gli autovalori  $A \pm B$  danno le correzioni al primo stato eccitato:

$$E_{1,2}^1 = CL^2 \left( \frac{1}{4} \pm \frac{256}{81\pi^4} \right).$$



## Capitolo 7

# Particelle identiche

### 7.1

Un sistema composto di due particelle identiche di spin  $\frac{1}{2}$  e costretto a muoversi in una dimensione è descritto dall'hamiltoniana:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}m\omega^2(x_1^2 + x_2^2)$$

Determinare la funzione d'onda completa (parte spaziale e parte di spin) degli stati corrispondenti al livello fondamentale ed al primo livello eccitato, nonché i relativi autovalori di  $\mathcal{H}$ , di  $\vec{S}^2 = (\vec{S}_1 + \vec{S}_2)^2$  e di  $S_z$ .

#### Soluzione

Per la particella  $i$ -esima denotiamo con  $\psi_n(x_i)$  le autofunzioni dell'energia in un potenziale armonico unidimensionale e con  $\chi_{\pm}(i)$  gli autostati dello spin. Trattandosi di fermioni le autofunzioni comuni a  $\mathcal{H}$ ,  $S^2$ ,  $S_z$  devono essere antisimmetriche per lo scambio delle due particelle. Per quanto riguarda le coordinate spaziali possiamo costruire le seguenti autofunzioni del sistema completo aventi proprietà di simmetria definita (indicata con + e -):

$$\psi_0^+(x_1, x_2) = \psi_0(x_1)\psi_0(x_2) \quad \text{con energia } E = \hbar\omega$$

e

$$\left. \begin{aligned} \psi_1^+(x_1, x_2) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_0(x_1)\psi_1(x_2) + \psi_1(x_1)\psi_0(x_2)] \\ \psi_1^-(x_1, x_2) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_0(x_1)\psi_1(x_2) - \psi_1(x_1)\psi_0(x_2)] \end{aligned} \right\} \quad \text{con energia } E = 2\hbar\omega$$

Gli stati di spin possibili sono quelli di singoletto e di tripletto. Indicando con  $\chi^{s,s_z}$  gli stati di spin totale  $\vec{S}$  con  $S^2 = s(s+1)\hbar^2$  e  $S_z = s_z\hbar$  abbiamo uno stato antisimmetrico e tre stati simmetrici

$$\begin{aligned} \chi^{0,0} &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\chi_+(1)\chi_-(2) - \chi_-(1)\chi_+(2)] \\ \chi^{1,-1} &= \chi_-(1)\chi_-(2) \\ \chi^{0,0} &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\chi_+(1)\chi_-(2) + \chi_-(1)\chi_+(2)] \\ \chi^{1,+1} &= \chi_+(1)\chi_+(2) \end{aligned}$$

Le funzioni d'onda complessive completamente antisimmetriche sono:

$$\psi_0^+(x_1, x_2) \chi^{0,0} \quad \text{per lo stato fondamentale}$$

e

$$\left. \begin{array}{l} \psi_1^+(x_1, x_2) \chi^{0,0} \\ \psi_1^-(x_1, x_2) \chi^{1,-1} \\ \psi_1^-(x_1, x_2) \chi^{1,0} \\ \psi_1^-(x_1, x_2) \chi^{1,+1} \end{array} \right\} \quad \text{per il primo livello eccitato}$$

## 7.2

Due particelle identiche di massa  $m$  e non interagenti sono chiuse nella scatola  $|x| < a, |y| < b, |z| < c$ , con  $a > b > c > 0$ .

- a) Determinare autovalori ed autofunzioni dell'energia, precisando il grado di degenerazione, per il livello fondamentale ed il primo livello eccitato, nel caso di particelle prive di spin e nel caso di fermioni.
- b) Supponendo che si tratti di fermioni in uno degli autostati comuni allo spin totale e all'hamiltoniano corrispondenti al primo stato eccitato, determinare la probabilità di trovare entrambe le particelle nella regione  $x > 0$ .
- c) Supponiamo, sempre nel caso di fermioni, di aggiungere all'Hamiltoniano il termine

$$\lambda V = \lambda \frac{\pi^2 \hbar^2}{8ma^4} \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 \quad (\lambda \ll 1).$$

Si determinino le correzioni al primo ordine in teoria delle perturbazioni ai primi due livelli.

### Soluzione

Ciascuna delle particelle, se presente singolarmente, avrebbe autofunzioni dell'energia

$$\psi_{k,l,m}(\vec{r}) = \psi_k(x) \psi_l(y) \psi_m(z)$$

dove

$$\psi_k(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{a}} \cos \frac{k\pi x}{2a}, & \text{se } k \text{ è dispari;} \\ \sqrt{\frac{1}{a}} \sin \frac{k\pi x}{2a}, & \text{se } k \text{ è pari.} \end{cases}$$

all'interno della scatola e nulle all'esterno, corrispondenti agli autovalori

$$E_{k,l,m} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{8m} \left( \frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} + \frac{m^2}{c^2} \right).$$

- a) In assenza di spin lo stato fondamentale è non degenere, ha energia pari a  $2 E_{1,1,1}$  e funzione d'onda

$$\psi_{1,1,1}(\vec{r}_1) \psi_{1,1,1}(\vec{r}_2)$$

mentre il primo livello eccitato è degenere doppiamente, ha energia pari a  $E_{1,1,1} + E_{2,1,1}$  e funzioni d'onda

$$\begin{array}{l} \psi_{1,1,1}(\vec{r}_1) \psi_{2,1,1}(\vec{r}_2) \\ \psi_{2,1,1}(\vec{r}_1) \psi_{1,1,1}(\vec{r}_2) \end{array}$$



Nel caso di fermioni i livelli di energia non cambiano, mentre per quanto riguarda le funzioni d'onda la situazione è simile a quella del problema 7.1. Utilizzando la stessa notazione per gli stati di spin avremo uno stato fondamentale non degenero con funzione d'onda

$$\psi_{1,1,1}(\vec{r}_1) \psi_{1,1,1}(\vec{r}_2) \chi^{0,0}$$

mentre il primo livello eccitato è quattro volte degenero, ha energia pari a  $E_{1,1,1} + E_{2,1,1}$  e funzioni d'onda

$$\left. \begin{array}{l} \psi_1^+(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \chi^{0,0} \\ \psi_1^-(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \chi^{1,-1} \\ \psi_1^-(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \chi^{1,0} \\ \psi_1^-(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \chi^{1,+1} \end{array} \right\}$$

dove

$$\begin{aligned} \psi_1^+(\vec{r}_1, \vec{r}_2) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_{1,1,1}(\vec{r}_1) \psi_{2,1,1}(\vec{r}_2) + \psi_{2,1,1}(\vec{r}_1) \psi_{1,1,1}(\vec{r}_2)] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_1(x_1) \psi_2(x_2) + \psi_2(x_1) \psi_1(x_2)] \psi_1(y_1) \psi_1(z_1) \psi_1(y_2) \psi_1(z_2) \\ \psi_1^-(\vec{r}_1, \vec{r}_2) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_{1,1,1}(\vec{r}_1) \psi_{2,1,1}(\vec{r}_2) - \psi_{2,1,1}(\vec{r}_1) \psi_{1,1,1}(\vec{r}_2)] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_1(x_1) \psi_2(x_2) - \psi_2(x_1) \psi_1(x_2)] \psi_1(y_1) \psi_1(z_1) \psi_1(y_2) \psi_1(z_2) \end{aligned}$$

- b) Tenendo conto della normalizzazione relativa alla parte della funzione d'onda dipendente da  $y$  e  $z$ , dobbiamo calcolare:

$$\begin{aligned} P_{\pm}(x_1 > 0, x_2 > 0) &= \frac{1}{2} \int_0^a dx_1 \int_0^a dx_2 [\psi_1(x_1) \psi_2(x_2) \pm \psi_2(x_1) \psi_1(x_2)]^2 = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^a dx_1 \int_0^a dx_2 [\psi_1^2(x_1) \psi_2^2(x_2) + \psi_2^2(x_1) \psi_1^2(x_2) \pm \\ &\quad 2\psi_1(x_1) \psi_2(x_2) \psi_2(x_1) \psi_1(x_2)] = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} \pm 2 \left[ \int_0^a dx \psi_1(x) \psi_2(x) \right]^2 \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} \pm \frac{2}{a} \left[ \int_0^a dx \cos \frac{\pi x}{2a} \sin \frac{\pi x}{a} \right]^2 \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} \pm 2 \left[ \frac{4}{3\pi} \right]^2 \right\} \end{aligned}$$

- c) Per ciascuno stato richiesto  $|\psi\rangle$ , dobbiamo calcolare

$$\langle \psi | \lambda V | \psi \rangle = \lambda \frac{\pi^2 \hbar^2}{8ma^4} I$$

dove  $I$  è dato da

$$I = \langle \psi | x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 | \psi \rangle$$

Nello stato fondamentale

$$I = \langle x_1 \rangle \langle x_2 \rangle + \langle y_1 \rangle \langle y_2 \rangle + \langle z_1 \rangle \langle z_2 \rangle = 0$$

poiché, per la simmetria degli stati, ciascun valore d'attesa è nullo.

Nel caso del primo livello eccitato occorre diagonalizzare la matrice relativa alle due diverse funzioni d'onda (il potenziale non dipende dallo spin). Consideriamo prima gli elementi diagonali, per i quali si vede subito che le coordinate  $y$  e  $z$  danno contributo nullo:

$$\begin{aligned} I_{\pm,\pm} &= \langle \psi_1^\pm | x_1 x_2 | \psi_1^\pm \rangle = \\ &= \int_{-a}^a dx_1 dx_2 x_1 x_2 [\psi_1(x_1) \psi_2(x_2) \pm \psi_2(x_1) \psi_1(x_2)]^2 \end{aligned}$$

Sviluppato il quadrato, notiamo che i due termini quadratici danno risultato nullo poiché proporzionali al valore d'attesa di  $x$  in un autostato della buca. Si ottiene quindi

$$I_{\pm,\pm} = \pm 2 \left[ \int_{-a}^a dx x \psi_1(x) \psi_2(x) \right]^2 = \pm 2 \frac{32a}{9\pi^2}$$

come si ottiene dopo un'integrazione per parti. È facile vedere, con calcoli analoghi, che i termini non diagonali sono nulli. Quindi le correzioni al primo livello eccitato sono:

$$\langle \psi_1^\pm | \lambda V | \psi_1^\pm \rangle = \pm \frac{\hbar^2}{\pi^2 m a^2} \left( \frac{16}{9} \right)^2$$



### 7.3

Due particelle identiche di spin  $\frac{1}{2}$  si trovano in una sfera impenetrabile di raggio  $R$ .

- a) Determinare lo spettro e le autofunzioni dell'energia.
- b) Risolvere lo stesso problema nel caso intervenga anche una interazione

$$V = V_0 \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2,$$

dove  $\vec{S}_1$  e  $\vec{S}_2$  sono gli spin delle due particelle.

#### Soluzione

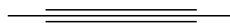


### 7.4

Determinare la funzione d'onda e l'energia dello stato fondamentale di una particella costretta a stare in una sfera di raggio  $R$ .

Si abbiano ora due particelle identiche non interagenti immerse in questo potenziale; si determini la loro funzione d'onda complessiva quando tutte e due le particelle sono nello stato fondamentale. Si discutano i casi che si tratti di due bosoni di spin 0 o di due fermioni di spin  $\frac{1}{2}$ .

#### Soluzione



## 7.5

Due fermioni identici di massa  $m$ , vincolati a muoversi su un segmento di lunghezza  $L$ , hanno entrambi componente lungo l'asse  $z$  dello spin pari a  $+\frac{\hbar}{2}$ . Quali sono l'energia minima del sistema e la funzione d'onda corrispondente? Se è presente un'energia potenziale di interazione  $k\delta(x_1-x_2)$ , come si modifica il valore già trovato dell'energia nel calcolo perturbativo al 1° ordine?

### Soluzione

Si tratta di un sistema di due fermioni identici non interagenti la cui funzione d'onda di spin

$$\chi(s_z^{(1)}, s_z^{(2)}) = \chi\left(+\frac{\hbar}{2}, +\frac{\hbar}{2}\right).$$

Ciascuna delle due particelle, se isolata, ha autofunzioni e autovalori dell'energia dati da

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L} \quad E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2} \quad \text{con } n = 1, 2, \dots$$

Poichè le due particelle sono non interagenti la parte spaziale della generica autofunzione sarà il prodotto di due autofunzioni relative all'hamiltoniano di singola particella e l'autovalore sarà la somma dei due corrispondenti autovalori dell'energia. Poichè tuttavia la funzione d'onda complessiva del sistema deve essere antisimmetrica nello scambio delle due particelle e la funzione di spin nel caso in considerazione è simmetrica, occorre che la parte spaziale sia antisimmetrica. Per questo lo stato di minima energia non può essere quello in cui le due particelle sono nello stato fondamentale, bensì

$$\Psi_{s_z^{(1)}, s_z^{(2)}}(x_1, x_2) = \frac{1}{2} (\psi_1(x_1)\psi_2(x_2) - \psi_2(x_1)\psi_1(x_2)) \chi\left(+\frac{\hbar}{2}, +\frac{\hbar}{2}\right)$$

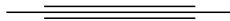
corrispondente al livello di energia

$$E_{1,2} = \frac{5\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$$

Introducendo il potenziale d'interazione, il livello di energia viene modificato dalla teoria perturbativa al I ordine del termine

$$\begin{aligned} E'_{1,2} &= k \int_0^L dx_1 \int_0^L dx_2 \Psi_{s_z^{(1)}, s_z^{(2)}}^*(x_1, x_2) \delta(x_1 - x_2) \Psi_{s_z^{(1)}, s_z^{(2)}}(x_1, x_2) \\ &= k \int_0^L dx \left| \Psi_{s_z^{(1)}, s_z^{(2)}}(x, x) \right|^2 = 0 \end{aligned}$$

a causa dell'antisimmetria della funzione integranda.



## 7.6

Un sistema di due particelle con spin  $\frac{1}{2}$  abbia l'Hamiltoniana:

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + V(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|) + \alpha(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|) \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$$

Discutere la struttura delle autofunzioni e ridurre il problema alla risoluzione di una equazione radiale. Considerare:

- a) il caso di due particelle distinguibili  
 b) il caso di due particelle identiche.

Indicazione: ricordare che  $\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$  si può esprimere in termini di  $\vec{S}_1 + \vec{S}_2$ .

### Soluzione



## 7.7

Due particelle non identiche di spin  $\frac{1}{2}$  sono costrette a muoversi su un segmento di lunghezza  $L$  interagendo con un potenziale

$$V = k \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2.$$

Determinare gli autovalori e le autofunzioni dell'Hamiltoniano.  
 Cosa succederebbe se le particelle fossero identiche?

### Soluzione

Poichè la presenza del potenziale influenza solo gli stati di spin e si tratta di particelle non identiche cerchiamo autofunzioni fattorizzate nella forma:

$$\Psi(1, 2) = \psi_{n_1, n_2}(x_1, x_2) \chi(\vec{s}_1, \vec{s}_2)$$

dove

$$\psi_{n_1, n_2}(x_1, x_2) = \psi_{n_1}(x_1) \psi_{n_2}(x_2)$$

dove  $\psi_n(x)$  con  $n = 1, 2, \dots$  sono le autofunzioni dell'energia per una particella nel pozzo di potenziale, e  $\chi(\vec{s}_1, \vec{s}_2)$  rappresenta gli autostati di spin. Il potenziale dipende soltanto dal prodotto scalare tra gli spin che vale

$$\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = \frac{1}{2} [(\vec{s}_1 + \vec{s}_2)^2 - s_1^2 - s_2^2] = \frac{1}{2} \left[ S^2 - \frac{3}{2} \hbar^2 \right].$$

Quindi la fattorizzazione si ha solo se utilizziamo gli autostati dello spin totale (di  $S^2$  e  $S_z$ ), cioè gli stati di singoletto e di tripletto.

In definitiva le autofunzioni comuni all'Hamiltoniano,  $S^2$  e  $S_z$  sono:

$$\Psi_{n_1, n_2; s, m_s}(x_1, x_2) = \psi_{n_1, n_2}(x_1, x_2) \chi_{s, m_s}$$

con

$$\begin{aligned} \chi^{0,0} &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\chi_+(1) \chi_-(2) - \chi_-(1) \chi_+(2)] \\ \chi^{1,-1} &= \chi_-(1) \chi_-(2) \\ \chi^{0,0} &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\chi_+(1) \chi_-(2) + \chi_-(1) \chi_+(2)] \\ \chi^{1,+1} &= \chi_+(1) \chi_+(2) \end{aligned}$$

e corrispondono agli autovalori dell'energia

$$E_{n,s} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} n^2 + k \left[ s(s+1) - \frac{3}{4} \right] \hbar^2 \quad \text{con } n^2 = n_1^2 + n_2^2 \text{ e } n_1, n_2 = 1, 2, \dots$$

con degenerazione pari a  $2s + 1$  moltiplicato la degenerazione che interviene se esiste più di una coppia  $(n_1, n_2)$  che porta allo stesso valore di  $n$ .

Se le particelle sono identiche occorre costruire le combinazioni simmetriche e antisimmetriche delle funzioni d'onda relative alle coordinate spaziali e imporre l'antisimmetria delle autofunzioni. Si ottiene così:

$$\Psi_{n_1, n_2; 0, 0}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_{n_1}(x_1) \psi_{n_2}(x_2) + \psi_{n_2}(x_1) \psi_{n_1}(x_2)] \chi^{0,0} \quad \text{per } E_{n,0}$$

e

$$\Psi_{n_1, n_2; 0, m_s}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_{n_1}(x_1) \psi_{n_2}(x_2) - \psi_{n_2}(x_1) \psi_{n_1}(x_2)] \chi^{1, m_s} \quad \text{per } E_{n,1}$$

## 7.8

Tre particelle identiche di massa  $m$  e spin  $1/2$  sono confinate sul segmento  $(0, a)$  dell'asse  $x$ . Esse sono soggette al potenziale

$$V = \alpha (\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 + \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_3 + \vec{S}_2 \cdot \vec{S}_3)$$

con  $\alpha < 0$ . Una misura della componente dello spin totale lungo l'asse  $z$  fornisce il valore  $S_z = +\frac{3}{2}\hbar$ . Scrivere le possibili autofunzioni dell'energia ed i relativi autovalori. Qual'è l'autofunzione dello stato fondamentale del sistema in questo stato di spin? Qual'è il relativo autovalore?

### Soluzione

Notiamo che il potenziale può essere riscritto nella forma

$$V = \frac{\alpha}{2} (S^2 - S_1^2 - S_2^2 - S_3^2),$$

per cui le autofunzioni dell'energia sono il prodotto di autofunzioni relative alle coordinate spaziali per autofunzioni dello spin totale. Si tratta di un sistema di tre fermioni in uno stato con  $S_z = +\frac{3}{2}\hbar$  ed  $s = \frac{3}{2}$  che è il massimo valore che  $s$  può assumere. Gli spin delle tre particelle hanno uguale componente  $z$ , quindi l'autofunzione dello spin totale è simmetrica e la parte dipendente dalle coordinate spaziali deve essere antisimmetrica:

$$\Psi_{n_1, n_2, n_3; \frac{3}{2}, +\frac{3}{2}}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\sqrt{3!}} \det \begin{vmatrix} \psi_{n_1}(x_1) & \psi_{n_1}(x_2) & \psi_{n_1}(x_3) \\ \psi_{n_2}(x_1) & \psi_{n_2}(x_2) & \psi_{n_2}(x_3) \\ \psi_{n_3}(x_1) & \psi_{n_3}(x_2) & \psi_{n_3}(x_3) \end{vmatrix} \chi^{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}}.$$

L'autovalore corrispondente è

$$E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) + \frac{3}{4} \alpha \hbar^2 \quad \text{con } n_1, n_2, n_3 = 1, 2, \dots$$

Dato lo stato di spin, anche nello stato fondamentale la parte spaziale dell'autofunzione deve essere antisimmetrica, quindi i tre numeri quantici devono essere diversi e tali che l'energia è minima, quindi  $n_1 = 1$ ,  $n_2 = 2$ ,  $n_3 = 3$ . Si ottiene così

$$\Psi_{1,2,3; \frac{3}{2}, +\frac{3}{2}}(x_1, x_2, x_3)$$

L'autovalore relativo è

$$E = \left[ \frac{7\pi^2}{ma^2} + \frac{3}{4} \alpha \right] \hbar^2.$$

## 7.9

Tre elettroni sono legati da un potenziale centrale; si trascurino le interazioni tra gli elettroni. Uno di essi si trova nello stato di energia  $E_1$  e funzione d'onda spaziale  $\psi_1$ , mentre gli altri due si trovano nello stato di energia  $E_2$  e funzione d'onda spaziale  $\psi_2$ . Si scrivano i possibili stati compatibili con la statistica di Fermi-Dirac e si dica quale è il loro spin.

Qual è la degenerazione totale del livello  $E = E_1 + 2E_2$  se  $\psi_1$  e  $\psi_2$  corrispondono entrambe a stati con  $\ell = 0$ ?

### Soluzione

Chiamiamo  $\psi_n^\pm$  l'autofunzione di un elettrone che si trova nel livello di energia  $n$  e nello stato di spin con  $m_s = \pm 1/2$ . Le due particelle nello stato con  $n = 2$  devono essere in stati di spin diverso, mentre l'altra particella può trovarsi indifferentemente in uno dei due stati di spin. Complessivamente abbiamo due possibilità che possiamo scrivere, antisimmettizzando mediante il determinante di Slater,

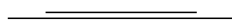
$$\Psi_{1,2,2;j=\frac{1}{2},m_j=+\frac{1}{2}}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\sqrt{3!}} \det \begin{vmatrix} \psi_1^+(x_1) & \psi_1^+(x_2) & \psi_1^+(x_3) \\ \psi_2^+(x_1) & \psi_2^+(x_2) & \psi_2^+(x_3) \\ \psi_2^-(x_1) & \psi_2^-(x_2) & \psi_2^-(x_3) \end{vmatrix}$$

e

$$\Psi_{1,2,2;j=\frac{1}{2},m_j=-\frac{1}{2}}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\sqrt{3!}} \det \begin{vmatrix} \psi_1^-(x_1) & \psi_1^-(x_2) & \psi_1^-(x_3) \\ \psi_2^+(x_1) & \psi_2^+(x_2) & \psi_2^+(x_3) \\ \psi_2^-(x_1) & \psi_2^-(x_2) & \psi_2^-(x_3) \end{vmatrix}$$

In queste espressioni  $j$  ed  $m_j$  sono i numeri quantici relativi alla somma degli spin. È facile vedere infatti, sviluppando i determinanti secondo la prima riga, che i due elettroni nel livello con  $n = 2$  sono in uno stato di singoletto; il loro spin totale è pertanto 0 e lo spin totale dei tre deve essere perciò  $1/2$ . Il valore della sua componente  $z$  è dato quindi dallo stato di spin dell'elettrone nel livello con  $n = 1$ .

Poiché non vi è degenerazione legata al momento angolare ( $\ell = 0$ ), la degenerazione del livello  $E = E_1 + 2E_2$  è pari a 2.



## 7.10

Due particelle identiche di spin  $\frac{1}{2}$ , non interagenti tra loro, sono vincolate a muoversi su una superficie sferica di raggio costante, in modo che i soli gradi di libertà sono quelli angolari e di spin. Tra tutti gli stati accessibili al sistema delle due particelle, determinare quanti sono gli stati che soddisfano le seguenti proprietà:

- a) sono autostati sia di  $L_z$  che di  $S_z$ , le componenti lungo l'asse  $z$  del momento angolare totale  $\vec{L} = \vec{L}^{(1)} + \vec{L}^{(2)}$  e dello spin totale  $\vec{S} = \vec{S}^{(1)} + \vec{S}^{(2)}$ , dove gli indici 1 e 2 si riferiscono alle due particelle;
- b) i numeri quantici  $\ell^{(1)}$  e  $\ell^{(2)}$  relativi ai momenti angolari delle due particelle sono 0 o 1;
- c) la configurazione dello spin totale è in uno stato di tripletto (autostato di  $S^2$  con  $s = 1$ ).

**Soluzione**

Gli stati richiesti sono prodotto di autostati del momento angolare totale per autostati dello spin totale.

La terza condizione indica che l'autostato del momento angolare totale deve essere antisimmetrico per lo scambio delle due particelle. Poiché per la seconda condizione  $\ell^{(1)} = 0, 1$  e  $\ell^{(2)} = 0, 1$ , abbiamo le seguenti possibilità:

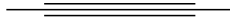
1.  $\ell^{(1)} = 0$  e  $\ell^{(2)} = 0$ : esiste un'unico stato  $|m^{(1)}, m^{(2)}\rangle = |0, 0\rangle$  che è simmetrico e quindi da escludere;
2.  $\ell^{(1)} = 0$  e  $\ell^{(2)} = 1$ : esistono tre stati  $|0, 0\rangle, |0, +1\rangle, |0, -1\rangle$
3.  $\ell^{(1)} = 1$  e  $\ell^{(2)} = 0$ : esistono tre stati  $|0, 0\rangle, |+1, 0\rangle, |-1, 0\rangle$ ; sia in questo caso che in quello precedente gli stati non hanno simmetria definita, ma, a partire da questi sei stati, possiamo considerare le tre combinazioni lineari simmetriche e le tre antisimmetriche;
4.  $\ell^{(1)} = 1$  e  $\ell^{(2)} = 1$ : potremo avere stati di momento angolare totale con  $\ell = 0, 1, 2$ . Poiché per i coefficienti di Clebsch-Gordan vale la relazione

$$\langle j^{(1)}, j^{(2)}, m^{(1)}, m^{(2)} | j^{(1)}, j^{(2)}, J, M \rangle = (-1)^{J-j^{(1)}-j^{(2)}} \langle j^{(2)}, j^{(1)}, m^{(2)}, m^{(1)} | j^{(2)}, j^{(1)}, J, M \rangle$$

risulta che gli stati con  $\ell = 0, 2$  sono simmetrici e non vanno considerati. Sono, invece, antisimmetrici gli stati corrispondenti a  $\ell = 1$

$$\begin{aligned} |\ell = 1, m = 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|m^{(1)} = +1, m^{(2)} = -1\rangle - |m^{(1)} = -1, m^{(2)} = +1\rangle) \\ |\ell = 1, m = +1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|m^{(1)} = +1, m^{(2)} = 0\rangle - |m^{(1)} = 0, m^{(2)} = +1\rangle) \\ |\ell = 1, m = -1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|m^{(1)} = -1, m^{(2)} = 0\rangle - |m^{(1)} = 0, m^{(2)} = -1\rangle) \end{aligned}$$

La risposta, quindi, è che si hanno complessivamente 6 stati relativamente al momento angolare che moltiplicato per 3, i possibili stati di spin totale, dà il numero totale di 18 stati.







## Capitolo 8

# Diffusione (Approssimazione di Born)

### 8.1

Determinare in approssimazione di Born la sezione d'urto differenziale per la diffusione elastica dal potenziale di Yukawa:

$$V(x) = V_0 \frac{e^{-\alpha r}}{\alpha r}.$$

e il potenziale Coulombiano:

$$V(x) = \frac{q_1 q_2}{r}.$$

### Soluzione

Applicando la formula A.32 al caso del potenziale di Yukawa otteniamo

$$\begin{aligned} f_B(q) &= -\frac{2\mu V_0}{\hbar^2 q} \int_0^\infty dr \sin(qr) \frac{e^{-\alpha r}}{\alpha r} r = \\ &= -\frac{2\mu V_0}{\hbar^2 q \alpha} \Im \int_0^\infty dr e^{-\alpha r + iqr} = \\ &= -\frac{2\mu V_0}{\hbar^2 q \alpha} \Im \frac{1}{\alpha - iq} = \\ &= -\frac{2\mu V_0}{\hbar^2 \alpha} \frac{1}{\alpha^2 + q^2} \end{aligned}$$

La sezione d'urto è quindi

$$\frac{d\sigma_B}{d\Omega} = \left( \frac{2\mu V_0}{\hbar^2 \alpha} \right)^2 \left( \frac{1}{\alpha^2 + 4k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right)^2$$

dove  $\theta$  è l'angolo tra la direzione d'incidenza e la direzione di diffusione.

Possiamo ottenere i risultati per il potenziale Coulombiano dalle formule precedenti mediante il limite

$$\alpha \rightarrow 0 \quad V_0 \rightarrow 0 \quad \frac{V_0}{\alpha} \rightarrow q_1 q_2$$

Il risultato è

$$\frac{d\sigma_B}{d\Omega} = \frac{q_1^2 q_2^2}{16E^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}$$

dove  $E = \hbar^2 k^2 / 2\mu$  l'energia della particella incidente sul centro di forza. Il risultato coincide con quello classico di Rutherford e con il risultato quantistico esatto (notare che la sezione d'urto non dipende da  $\hbar$ ).



## 8.2

Determinare in approssimazione di Born la sezione d'urto differenziale e totale per la diffusione elastica dal potenziale:

$$UV(x) = V_0 e^{-a^2 r^2}.$$

### Soluzione



# Appendice A

## Formule utili

### A.1 Integrali di uso frequente

#### A.1.1 Integrali Gaussiani

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (\text{A.1})$$

#### A.1.2 Integrali con funzioni esponenziali

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} dx x^n e^{-x} &= \left[ (-1)^n \frac{d^n}{d\alpha^n} \int_0^{+\infty} dx e^{-\alpha x} \right]_{\alpha=1} = \\ &= \left[ (-1)^n \frac{d^n}{d\alpha^n} \frac{1}{\alpha} \right]_{\alpha=1} = \\ &= n! \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

### A.2 Oscillatore armonico

#### A.2.1 Trattazione operatoriale

La soluzioni per l'equazione agli autovalori per l'Hamiltoniano dell'oscillatore armonico è :

$$E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega \quad ; \quad \hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle \quad (\text{A.3})$$

In termini degli operatori di creazione e distruzione

$$a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x - i\sqrt{\frac{1}{2m\omega\hbar}} p \quad a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x + i\sqrt{\frac{1}{2m\omega\hbar}} p \quad (\text{A.4})$$

abbiamo:

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a + a^\dagger) \quad p = \frac{1}{i}\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} (a - a^\dagger) \quad (\text{A.5})$$

Per  $a$  e  $a^\dagger$  valgono le relazioni

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \quad (\text{A.6})$$

### A.2.2 Trattazione nella rappresentazione X

$$\phi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{i^n}{\sqrt{2^n n!}} e^{-\frac{\xi^2}{2}} H_n(\xi) \quad \xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \quad (\text{A.7})$$

dove  $H_n$  é il polinomio di Hermite  $n$ -simo definito da

$$H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n e^{-\xi^2}}{d\xi^n} \quad (\text{A.8})$$

#### Primi polinomi di Hermite

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1; & H_1(x) &= 2x; & H_2(x) &= 4x^2 - 1; & H_3(x) &= 8x^3 - 12x \\ H_4(x) &= 16x^4 - 48x^2 + 12; & H_5(x) &= 32x^5 - 160x^3 + 120x \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

## A.3 Cambiamento di coordinate

Il passaggio da coordinate cartesiane a coordinate sferiche avviene mediante la trasformazione:

$$x = r \sin \theta \cos \phi \quad (\text{A.10})$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi \quad (\text{A.11})$$

$$z = r \cos \theta \quad (\text{A.12})$$

## A.4 Momento Angolare

### A.4.1 Trattazione operatoriale

Gli operatori  $J^2$ ,  $J_x$ ,  $J_y$ ,  $J_z$  soddisfano le seguenti relazioni di commutazione:

$$[J^2, J_x] = [J^2, J_y] = [J^2, J_z] = 0$$

$$[J_x, J_y] = i\hbar J_z \quad [J_y, J_z] = i\hbar J_x \quad [J_z, J_x] = i\hbar J_y$$

Indichiamo con  $|j, m\rangle$  il generico autoket comune a  $J^2$  e  $J_z$ :

$$J^2|j, m\rangle = j(j+1)\hbar^2|j, m\rangle \quad J_z|j, m\rangle = m\hbar|j, m\rangle$$

Gli operatori

$$J_{\pm} = J_x \pm J_y \quad (\text{A.13})$$

soddisfano le seguenti regole di commutazione con gli operatori  $J^2$  e  $J_z$ :

$$[J^2, J_{\pm}] = 0 \quad [J_z, J_{\pm}] = \pm J_{\pm}. \quad (\text{A.14})$$

Gli operatori  $J_{\pm}$  agiscono sugli autoket comuni ad  $J^2$  e  $J_z$  innalzando o abbassando di una unità il numero quantico azimutale:

$$J_{\pm}|l, m\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m\pm 1)} |l, m\pm 1\rangle \quad (\text{A.15})$$

### A.4.2 Le prime Armoniche Sferiche

$$Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \quad (\text{A.16})$$

$$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta, \quad Y_1^{\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\phi} \quad (\text{A.17})$$

$$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1), \quad Y_2^{\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{\pm i\phi},$$

$$Y_2^{\pm 2} = \mp \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{\pm 2i\phi} \quad (\text{A.18})$$

$$Y_3^0 = \sqrt{\frac{7}{16\pi}} (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta), \quad Y_3^{\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{21}{64\pi}} \sin \theta (5 \cos^2 \theta - 1) e^{\pm i\phi}$$

$$Y_3^{\pm 2} = \sqrt{\frac{105}{32\pi}} \sin^2 \theta \cos \theta e^{\pm 2i\phi}, \quad Y_3^{\pm 3} = \mp \sqrt{\frac{35}{64\pi}} \sin^3 \theta e^{\pm 3i\phi} \quad (\text{A.19})$$

## A.5 Le prime Bessel Sferiche

$$j_0(\rho) = \frac{\sin(\rho)}{\rho}, \quad j_1(\rho) = \frac{\sin(\rho)}{\rho^2} - \frac{\cos(\rho)}{\rho}, \quad (\text{A.20})$$

## A.6 Spin

### A.6.1 Matrici di Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.21})$$

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + \epsilon_{ijk} \sigma_k \quad (\text{A.22})$$

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = \sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2\delta_{ij} \quad (\text{A.23})$$

$$[\sigma_i, \sigma_j] = \sigma_i \sigma_j - \sigma_j \sigma_i = 2i\epsilon_{ijk} \sigma_k \quad (\text{A.24})$$

### A.6.2 Relazioni utili

$$(\vec{A} \cdot \vec{\sigma})(\vec{B} \cdot \vec{\sigma}) = (\vec{A} \cdot \vec{B}) I + i(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{\sigma} \quad (\text{A.25})$$

In particolare se  $\vec{A} = \vec{B}$

$$(\vec{A} \cdot \vec{\sigma})^2 = A^2 I \quad (\text{A.26})$$

$$e^{i\vec{\theta} \cdot \vec{\sigma}} = I \cos \theta + i(\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) \sin \theta \quad \text{dove } \vec{n} = \frac{\vec{\theta}}{\theta} \quad (\text{A.27})$$

## A.7 Teoria Perturbativa indipendente dal tempo

Sia dato l'Hamiltoniano

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1$$

dove il problema agli autovalori di  $\mathcal{H}_0$  sia stato risolto:

$$\mathcal{H}_0 |n^{(0)}\rangle = E_n^{(0)} |n^{(0)}\rangle.$$

Se l'autovalore  $E_n^{(0)}$  è non degenere e se gli elementi di matrice  $\langle m^{(0)} | \mathcal{H}_1 | n^{(0)} \rangle$  sono piccoli rispetto ai livelli  $E_n^{(0)}$ , abbiamo i seguenti sviluppi per gli autovalori  $E_n$  e gli autostati  $|n\rangle$  di  $\mathcal{H}$ :

$$\begin{aligned} E_n &= E_n^{(0)} + E_n^{(1)} + E_n^{(2)} + \dots \\ |n\rangle &= |n^{(0)}\rangle + |n^{(1)}\rangle + |n^{(2)}\rangle + \dots \end{aligned}$$

dove

$$E_n^{(1)} = \langle n^{(0)} | \mathcal{H}_1 | n^{(0)} \rangle \quad (\text{A.28})$$

$$E_n^{(2)} = \sum_{m \neq n} \frac{|\langle m^{(0)} | \mathcal{H}_1 | n^{(0)} \rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} \quad (\text{A.29})$$

$$|n^{(1)}\rangle = \sum_{m \neq n} \frac{\langle m^{(0)} | \mathcal{H}_1 | n^{(0)} \rangle}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} |m^{(0)}\rangle \quad (\text{A.30})$$

## A.8 Approssimazione di Born

Detti  $\vec{k}$  e  $\vec{k}'$  i vettori d'onda rispettivamente della particella incidente e di quella diffusa, l'ampiezza di diffusione in approssimazione di Born per il potenziale  $V(\vec{r})$  è data da

$$f_B(\vec{k}, \vec{k}') = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int d\vec{r} e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{r}'} V(\vec{r}') e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}'} \quad (\text{A.31})$$

dove  $\mu$  è la massa ridotta del sistema.

Nel caso di potenziale centrale l'espressione si semplifica:

$$f_B(q) = -\frac{2\mu}{\hbar^2 q} \int_0^\infty dr \sin(qr) V(r) r \quad (\text{A.32})$$

dove  $q = |\vec{k} - \vec{k}'|$ .

# Bibliografia

- [1] V. I. Kogan and V. M. Galitskiy. *Problems in Quantum Mechanics*. Prentice-Hall London, 1963.
- [2] I. I. Gol'dman and V. D. Krivchenkov. *Problems in Quantum Mechanics*. Pergamon Press London, 1961.
- [3] I. I. Gol'dman, V. D. Krivchenkov, V. I. Kogan, and V. M. Galitskiy. *Selected Problems in Quantum Mechanics*. Infosearch London, 1960.
- [4] D. Ter Haar. *Selected problems in Quantum Mechanics*. Infosearch Ltd. London, 1964.
- [5] G. Passatore. *Problemi di meccanica quantistica elementare*. Franco Angeli Milano, ii edition, 1981.
- [6] E. Merzbacher. *Quantum Mechanics*. Wiley New York, 1970.
- [7] L. Landau and E. Lifchitz. *Phys. Theor. vol. III (Mecanique Quantique)*. Mir Moscou, 1966.
- [8] A. Messiah. *Mecanique Quantique*, volume I e II. Dunod Paris, 1962.
- [9] R. Shankar. *Principles of Quantum Mechanics*. Plenum Press New York, ii edition, 1994.
- [10] G. Nardulli. *Meccanica Quantistica*, volume I e II. Franco Angeli Milano, 2001.
- [11] S. Flügge. *Practical Quantum Mechanics*, volume I e II. Springer Verlag Berlin, 1971.