APPUNTI ASTROFISICA I

Claudio Chiuderi

November 14, 2006

1 Onde in un campo gravitazionale

L'equazione generale per lo spostamento lagrangiano $\boldsymbol{\xi}$:

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{r}, t),$$

in presenza di un campo gravitazionale $\boldsymbol{g}$ è :

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\xi}}{\partial t^2} = c_s^2 \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\xi}) + (\gamma - 1)\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\xi}) + \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{\xi}). \tag{1.1}$$

1.1 Geometria piana, $\boldsymbol{g} = cost$, $T_0 = cost$.

In un'atmosfera piana isoterma avremo $c_s^2 = cost.$ e $\boldsymbol{g} = (0, 0, -g)$. Il termine di ordine 0, cioè la condizione di equilibrio, è:

$$\boldsymbol{\nabla} P_o = \rho_o \boldsymbol{g} \qquad => \qquad \frac{dP_o}{dz} = -\rho_o g$$

L'equazione di stato ci fornisce un legame fra la pressione e la densità:

$$P_o = \frac{k_B}{m} \rho_o T_o \qquad => \qquad \rho_o = \frac{m}{k_B T_o} P_o$$

Da cui:

$$\frac{dP_o}{dz} = -\frac{mg}{k_B T_o} P_o$$

Integrando e ponendo le condizioni al contorno si ottiene:

$$P(z) = P(0) e^{-\frac{mg}{k_B T_o} z}$$

cioè la pressione diminuisce in modo esponenziale con l'altezza. Come si vede la scala su cui varia la pressione in un'atmosfera isoterma (*scala d'altezza*) è:

$$H = \frac{k_B T}{mg}$$

L'andamento della pressione e della densità è quindi:

$$\begin{cases} P(z) = P(0)e^{-\frac{z}{H}} \\ \\ \rho(z) = \rho(0)e^{-\frac{z}{H}} \end{cases}$$

Distinguiamo ora due casi, uno dove la velocità del disturbo è solo lungo z e l'altra quando è in una direzione qualunque:

a) propagazione verticale : $\boldsymbol{v} = v(z)\boldsymbol{e}_z$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c_s^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + (\gamma - 1)g\frac{\partial v}{\partial z} + g\frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c_s^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \gamma g\frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

Se cercassimo la soluzione con le trasformate di Fourier otterremmo:

$$\left(-\omega^2 + k^2 c_s^2 + ik\gamma g\right)\hat{v} = 0$$

Che, dovendo essere valida per qualunque $\hat{v}$, non ha soluzione se k e ω sono reali. Nell'equazione per la velocità nessuna quantità dipende dalle variabili rispetto cui si trasforma (z e t) ma bisogna considerare che questa equazione è stata ottenuta da un sistema e, in questo sistema, P e ρ dipendono da z. Si noti però che t è una *variabile ignorabile* e quindi possiamo scrivere la soluzione come:

$$v = \hat{v}(z)e^{i\omega t}$$

In questo modo si riduce l'equazione per la velocità ad un'EDO nella sola *variabile non ignorabile* z:

$$-\omega^2\hat{v} - c_s^2\hat{v}'' + \gamma g\hat{v}' = 0$$

Questo tipo di equazioni si schematizzano come:

$$aY'' + bY' + cY = 0$$

E si risolvono:

$$a\delta^2 + b\delta + c = 0 \qquad => \qquad \delta_{1,2} = \frac{1}{2a}\left[-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right]$$

$$Y = Ae^{\delta_1 z} + Be^{\delta_2 z}$$

Nel nostro caso:

$$c_s^2\delta^2 - \gamma g\delta + \omega^2 = 0 \qquad => \qquad \delta_{1,2} = \frac{1}{2c_s^2}\left[\gamma g \pm \sqrt{\gamma^2 g^2 - 4c_s^2\omega^2}\right]$$

Le due soluzioni $\delta_{1,2}$ possono essere anche complesse coniugate se:

$$4c_s^2\omega^2 > \gamma^2 g^2$$

Nel cui caso:

$$c_s^2\delta^2 - \gamma g\delta + \omega^2 = 0 \qquad => \qquad \delta_{1,2} = \frac{1}{2c_s^2}\left[\gamma g \pm i\sqrt{4c_s^2\omega^2 - \gamma^2 g^2}\right]$$

Chiamando $k = \sqrt{4c_s^2\omega^2 - \gamma^2 g^2}$ si arriva alla soluzione:

$$\hat{v} = \exp\left[\frac{\gamma g}{2c_s^2} z\right]\left(Ae^{ikz} + Be^{-ikz}\right)$$

che sostituita in $v = \hat{v}e^{i\omega t}$ dà:

$$v = \exp\left[\frac{\gamma g}{2c_s^2} z\right]\left(Ae^{i(kz-\omega t)} + Be^{-i(kz+\omega t)}\right)$$

Sono onde che si propagano con ampiezza crescente con le z. Questa soluzione è valida sotto la condizione, ricavata dalla positività della radice:

$$\omega^2 > \frac{\gamma^2 g^2}{4c_s^2} = \omega_a^2,$$

dove ω_a è detta *frequenza acustica*.

$$\omega_a = \frac{1}{2}\frac{\gamma g}{c_s} = \frac{1}{2}\frac{\gamma g c_s}{\gamma \frac{k_B T}{m}} = \frac{c_s}{2H}$$

Si può quindi esprimere la frequenza acustica anche in funzione della scala d'altezza. Nel caso in cui $4c_s^2\omega^2 < \gamma^2 g^2$ gli esponenziali nella soluzione sono tutti reali e quindi l'onda non si propaga.

Vediamo ora quale sia il significato della frequenza acustica, che si comporta come una frequenza di taglio. Per creare un'onda è necessario che il periodo dell'onda sia piccolo rispetto al tempo necessario perchè l'atmosfera si adatti ad un nuovo equilibrio.In altre parole, se quando modifichiamo leggermente le condizioni alla base l'atmosfera ha il tempo di riadattarsi alle nuove condizioni di equilibrio prima che queste siano nuovamente variate. non si ha la propagazione di un 'onda (che presuppone che solo una parte del sistema, quello raggiunto dalla perturbazione, sia cambiato), ma semplicemente una trasformazione quasi-statica delle condizioni di equilibrio. Il tempo per il riequilibrio dipenderà dalla velocità del suono, che rappresenta la velocità con cui il disturbo si propaga, e dal valore della gravità che si oppone alla propagazione verso l'alto delle perturbazioni. Sarà quindi proporzionale a c_s e inversamente proporzionale a g e quindi la frequenza sarà $\propto g/c_s \propto \omega_a$. Per avere propagazione ondosa sarà quindi necessario che la perturbazione avvenga in tempi brevi, ossia che la frequenza sia sufficientemente alta e quindi $\omega > \omega_a$.

Tornando un attimo alla soluzione tentata con Fourier ci si può rendere conto che si poteva risolvere il problema supponendo che il numero d'onda k fosse un numero complesso $(k = k_r + ik_i)$ trasformando la relazione di dispersione in:

$$\omega^2 = k^2 c_s^2 + ik\gamma g \qquad => \qquad \omega^2 = \left(k_r^2 - k_i^2 + i2k_r k_i\right) c_s^2 + ik_r\gamma g - \gamma g k_i$$

Separando la parte reale da quella immaginaria:

$$\omega^2 = c_s^2\left(k_r^2 - k_i^2\right) - k_i g\gamma$$
$$0 = 2c_s^2 k_i k_r + k_r\gamma g \qquad => \qquad k_i = -\frac{\gamma g}{2c_s^2}$$

Quest'ultima, sostituita nella precedente equazione dà:

$$\omega^2 = k_r^2 c_s^2 + \frac{\gamma^2 g^2}{4c_s^2} = k_r^2 c_s^2 + \omega_a^2$$

Si ha quindi $\omega > \omega_a$ e si ritrova la soluzione precedente. Si noti però come questo sia un caso fortuito . In genere niente ci garantisce che un procedimento di questo tipo porti a risultati fisicamente sensati.
Il fatto che l'onda cresca in ampiezza mentre sale è dovuto alla conservazione dell'energia. L'energia cinetica associata al fronte d'onda sarà proporzionale a $\rho_0 v^2 \propto \rho_0 \xi^2$. Ma via via che l'onda sale la densità dell'atmosfera decresce e quindi il disturbo aumenta la sua ampiezza. Com'è facile verificare, la quantità $< \rho_0 \xi^2 >$, dove si è effettuata una media sia sullo spazio che sul tempo, risulta costante se si sostituiscono le espressioni per ρ_0 e ξ precedentemente trovate.

b) propagazione obliqua: $\boldsymbol{v} = v_x(x,z)\boldsymbol{e}_x + v_z(x,z)\boldsymbol{e}_z$ Nessuno dei coefficienti delle equazioni che costituiscono il sistema di partenza dipende dalla coordinata x e quindi una tale coordinata è ignorabile e possiamo fare uno sviluppo di Fourier lungo x. D'altra parte, nulla è cambiato lungo z e, visto che è possibile ottenere il risultato corretto sviluppando in serie di Fourier anche secondo z pur di considerare k_z una quantità complessa, potremo supporre che tutte le quantità del primo ordine contengano un fattore

$$e^{1(k_x x + \hat{k}_z z)},$$

dove si è introdotta la notazione $\hat{k}_z$ per indicare appunto che si tratta di una quantità complessa. Nello scrivere così abbiamo implicitamente supposto che il piano coordinato (x,z) sia definito dai due vettori $\boldsymbol{g}$ e $\boldsymbol{k}$. Nel caso che stiamo considerando quindi:

$$\boldsymbol{v} = (v_x, 0, v_z)\,, \quad \boldsymbol{k} = (k_x, 0, \hat{k}_z) \quad \boldsymbol{g} = (0, 0, -g).$$

Con queste posizioni l'equazione delle onde diviene:

$$-\omega^2 \boldsymbol{v} = c_s^2 i\boldsymbol{k}(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}) - (\gamma-1)g\boldsymbol{e}_z(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}) - i\boldsymbol{k}gv_z$$

Sviluppiamo questa espressione per componenti:

(x)

$$-\omega^2 v_x + c_s^2 k_x(k_x v_x + \hat{k}_z v_z) + ik_x g v_z = 0$$

$$(k_x^2 c_s^2 - \omega^2)v_x + (c_s^2 k_x \hat{k}_z + ik_x g)v_z = 0$$

(z)

$$-\omega^2 v_z + c_s^2 k_z(k_x v_x + \hat{k}_z v_z) + ik_z g v_z + i(\gamma-1)g(k_x v_x + \hat{k}_z v_z) = 0$$

$$\left[c_s^2 k_x k_z + i(\gamma-1)gk_x\right] v_x + \left[c_s^2 \hat{k}_z^2 - \omega^2 + i\hat{k}_z g + i(\gamma-1)g\hat{k}_z\right] v_z = 0$$

Si ottiene quindi un sistema:

$$(k_x^2 c_s^2 - \omega^2) v_x + (c_s^2 k_x \hat{k}_z + i k_x g) v_z = 0$$

$$\left[c_s^2 k_x \hat{k}_z + i(\gamma - 1) g k_x \right] v_x + \left[c_s^2 \hat{k}_z^2 - \omega^2 + i\gamma g \hat{k}_z \right] v_z = 0$$

Annullando il determinante del sistema per determinare le condizioni per l'esistenza delle soluzioni non nulle :

$$\omega^4 - \omega^2 \left[c_s^2 (k_x^2 + \hat{k}_z^2) + i\gamma g \hat{k}_z \right] + (\gamma - 1) g^2 k_x^2 = 0$$

Sostituendo $\hat{k}_z = k_z + i k_i$, dove ora k_z è una quantità reale, si trovano due equazioni:

$$k_i = -\frac{1}{2H} = -\frac{\omega_a}{c_s}$$

$$\omega^4 - \omega^2 \left[c_s^2 (k_x^2 + k_z^2) - \omega_a^2 + 2\omega_a^2 \right] + (\gamma - 1) g^2 k_x^2 = 0$$

Definendo una nuova frequenza dipendente dalla gravità:

$$\omega_g^2 = (\gamma - 1) \frac{g^2}{c_s^2}$$

Si ottiene:

$$\omega^4 - \omega^2 \left[c_s^2 (k_x^2 + k_z^2) + \omega_a^2 \right] + \omega_g^2 k_x^2 c_s^2 = 0$$

Valutiamo l'ordine di grandezza di questa frequenza rispetto a quella acustica:

$$\frac{\omega_a}{\omega_g} = \frac{\gamma g}{2c_s} \frac{c_s}{g\sqrt{\gamma - 1}} = \frac{\gamma}{2\sqrt{\gamma - 1}} > 1$$

Quindi la frequenza acustica è sempre maggiore di quella gravitazionale ma il rapporto è sempre vicino a uno. Dovendo ω essere reale si trova la condizione:

$$k_z^2 = \frac{1}{c_s^2\omega^2}\left[\omega^2(\omega^2-\omega_a^2) - k_x^2c_s^2(\omega^2-\omega_g^2)\right] \geq 0$$

Dovendo essere k_z reale si ottiene la condizione:

$$0 \leq k_x^2c_s^2 \leq \frac{\omega^2(\omega^2-\omega_a^2)}{\omega^2-\omega_g^2}$$

Oppure $\omega \geq \omega_a$ o $\omega \leq \omega_g$. C'è quindi una banda di frequenza nella quale non ci può essere propagazione del distrurbo:

$$\omega_g^2 \leq k_x^2c_s^2 \leq \omega_a^2$$

Quindi ci può essere propagazione solo dove le frequenze sono simultaneamente:

- Inferiori sia a ω_g che a k_xc_s. *Modi g.*
- Superiori sia a ω_a che a k_xc_s. *Modi p.*

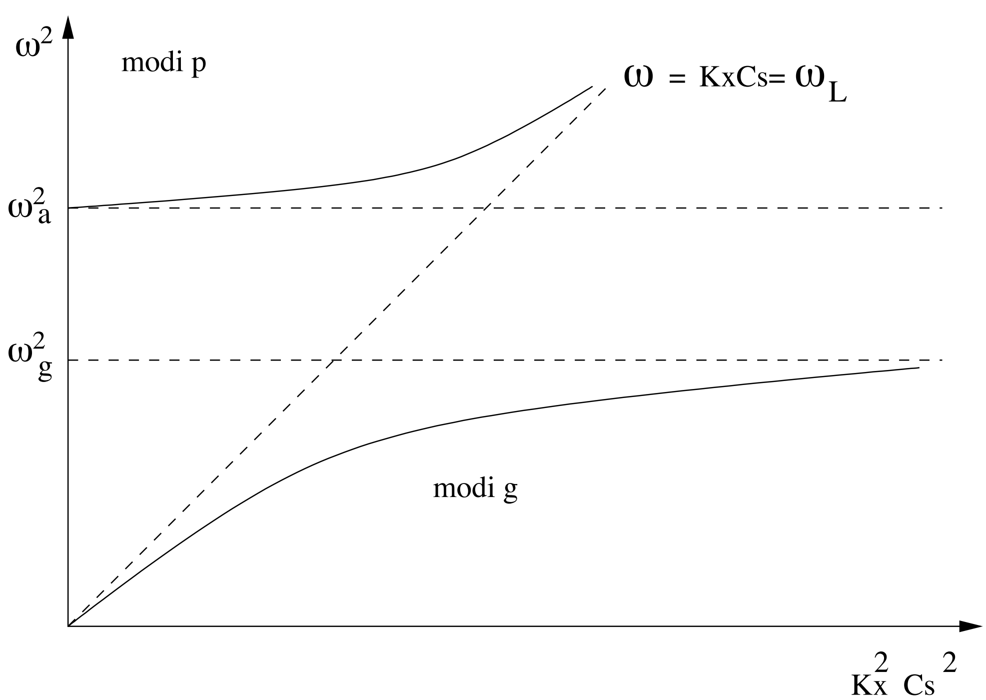

Figure 1: La relazione di dispersione per le onde in un'atmosfera con gravità

Questi due modi di propagazione sono fisicamente distinti dalla natura della forza di riequilibrio, nel caso dei modi g si tratta della forza di Archimede, mentre nel caso dei modi p si tratta della pressione.

Le tre frequenze prendono il nome di:

- ω_a *frequenza di taglio acustica*
- ω_g *frequenza di taglio gravitazionale o di Brunt-Vaisala (B-V)*
- ω_L *frequenza di Lamb*

In realtà la frequenza di B-V corrisponde alla frequenza di oscillazione di una particella fluida in una atmosfera con gravità, come ora dimostreremo ed è uguale alla frequenza gravitazionale solo nel caso di atmosfera isoterma.

Consideriamo infatti una particella fluida (di fatto, una bolla di fluido) che venga spostata adiabaticamente dalla posizione z a $z+\delta z$. Nella posizione di partenza la densità e pressione della bolla sono ρ_i e P_i, rispettivamente uguali a quelle dell'ambiente circostante (equilibrio!) ρ_e e P_e. Nella posizione finale si avrà

$$\rho_e(z+\delta z) = \rho_e + \delta\rho_e = \rho_e + \big(\frac{d\rho_e}{dz}\big)_(z)\delta z$$

e

$$\rho_i(z+\delta z) = \rho_i + \delta\rho_i = \rho_i + \frac{\rho_i}{\gamma\, P_i}\delta P_i,$$

dove si è fatto uso della relazione $P\rho^{-\gamma} = cost$, valida per trasformazioni adiabatiche. Poichè tutte le grandezze interne sono uguali a quelle esterne in z, potremo scrivere la precedente equazione come:

$$\rho_i(z+\delta z) = \rho_e + \delta\rho_i = \rho_e + \frac{\rho_e}{\gamma\, P_e}\delta P_e.$$

Utilizzando ora l'equazione dell'equilibrio idrostatico $dP_e/dz = -\rho_e g$, otteniamo infine:

$$\delta\rho_i = -\frac{g}{c_s^2}\rho_e\delta z$$

. La forza che agisce sulla bolla sarà:

$$\boldsymbol{F} = (\delta\rho_i - \delta\rho_e)\,\boldsymbol{g},$$

e quindi

$$F = -(\delta\rho_i - \delta\rho_e)g = (\frac{g}{c_s^2} + \frac{1}{\rho_e}\frac{d\rho_e}{dz})\,\rho_e\delta z$$

La forza è quindi proporzionale allo spostamento ed il moto è dunque un moto armonico con frequenza

$$N^2 = -g\,(\frac{g}{c_s^2} + \frac{1}{\rho_e}\frac{d\rho_e}{dz}),$$

quando la precedente espressione è una quantità positiva. Utilizzando ora l'equazione di stato $P = (k_B/m)\rho T$, e nuovamente l'equazione per l'equilibrio idrostatico si può esprimere N^2 nella forma :

$$N^2 = \frac{(\gamma - 1)\, g}{c_s^2} + \frac{g}{T_e}\frac{dT_e}{dz} = \omega_g^2 + \frac{g}{T_e}\frac{dt_e}{dz}.$$

Come si vede, N^2 coincide con ω_g solo nel caso isotermo, mentre nel caso generale si ha un contributo anche da ∇T.

Si noti infine come i modi g non si possano propagare esclusivamente in verticale. Infatti in questo caso k_x sarebbe zero e quindi la condizione sulla realtà di k_z diverrebbe:

$$k_z^2 = \frac{1}{c_s^2 \omega^2}\omega^2(\omega^2 - \omega_a^2)$$

Ma nei modi g, $\omega < \omega_g < \omega_a$ e quindi la propagazione verticale non è possibile.

Questo studio può essere applicato a qualunque tipo di atmosfera, anche stellare. Si ha quindi che, individuate queste oscillazioni, si potrebbero ricavare la velocità del suono, cioè la temperatura, e la gravità locale . Questo è quindi un mezzo per ottenere indirettamente informazioni sull'interno delle stelle che non è accessibile all'osservazione diretta. Questo metodo è basato su un risultato fisico generale, e cioè il fatto che ogni sistema meccanico possiede frequenze proprie di oscillazione che dipendono dalla struttura del sistema stesso.

Anche se abbiamo considerato un sistema piano-parallelo, l'analisi fatta potrà essere considerata come l'analisi *locale* per un problema sferico. Per quanto riguarda i modelli globali di oscillazione di un'atmosfera sferica non isoterma, il problema cambia radicalmente ma i modi di propagazione sono sempre quelli e quindi anche in questo caso è possibile definire delle zone di propagazione. È istruttivo è mettere in grafico le zone di propagazione in funzione della coordinata radiale, supponedo però che le curve caratteristiche relative alle frequenze acustiche e gravitazionali possano anche intersecarsi. Si noti infatti che nella definizione delle frequenze caratteristiche compaiono sia la temperatura (in c_s) che il suo gradiente (in N_{BV}), entrambe variabili con r, e la gravità locale, a sua volta dipendente da r.

Le onde possono propagarsi solo nelle "cavità" permesse . All'esterno delle cavità le onde sono onde stazionarie, di ampiezza che decresce esponenzialmente con la distanza dalla parete della cavità stessa (*onde evanescenti*). Se la parete di una cavità è situata vicino alla superficie è possibile osservare l'onda evanescente. Teoricamente si trova che i modi-p (periodo di circa 5 min) sono superficiali mentre i modi-g (periodo intorno ai 40 min) sono modi profondi e le loro onde evanescenti non affiorano. Si pensi che l'onda evanescente di un modo-g che arriva alla superficie dovrebbe avere un'ampiezza di qualche cm.

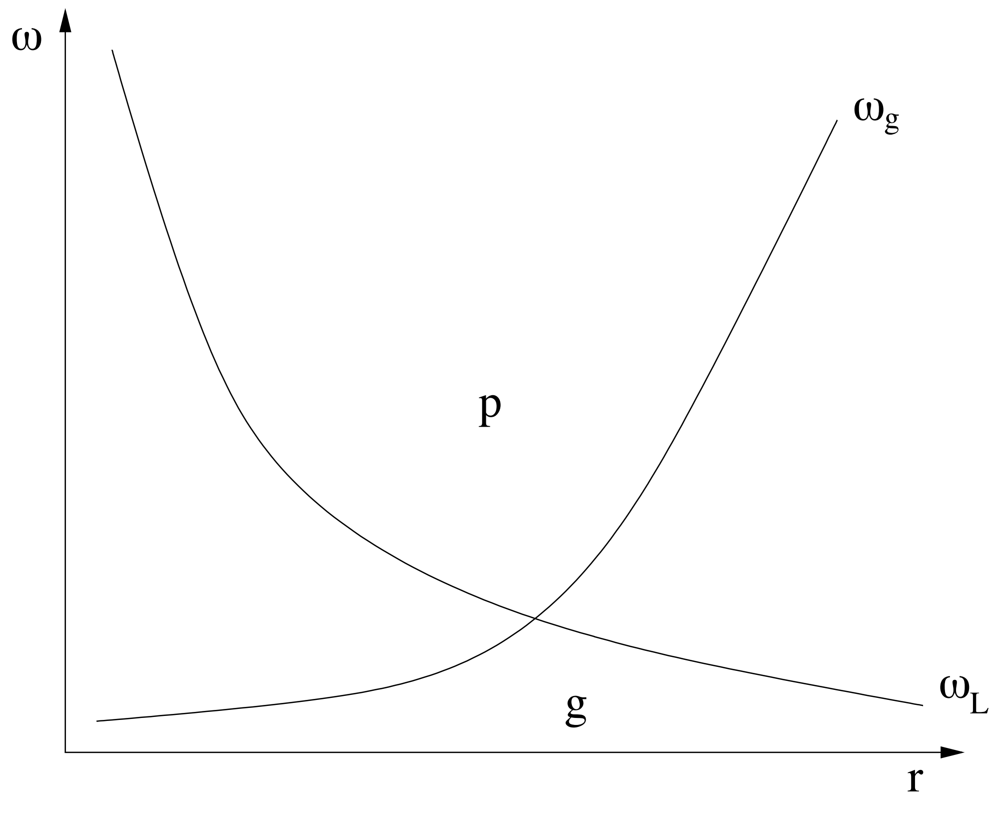

Figure 2: rappresentazione schematica delle zone di propagazione

Le oscillazioni si osservano sperimentalmente o attraverso la variazione di intensità luminosa di una riga oppure, in modo molto più preciso, con un'analisi spettroscopica dello spostamento Doppler delle righe. Si può misurare anche la zona di coerenza in fase dell'onda e questa è legata alla componente orizzontale del vettore d'onda. Nel caso sferico, esiste una relazione tra il numero d'onde orizzontale, determinato dall'osservazione della zona di coerenza, e il valore del *numero quantico azimutale*, l. Si noti che in qualunque problema agli autovalori in simmetria sferica è sempre possibile separare la parte radiale dalla parte angolare, e che quest'ultima ha come soluzioni le armoniche sferiche Y_{lm}. La relazione è

$$k_x^2 \quad \rightarrow \quad \frac{l(l+1)}{r^2}.$$

Gli autovalori saranno in generale funzione di tre numeri quantici, $\omega = \omega(n, l, m)$, dove n si riferisce alla "quantizzazione" in direzione radiale, mentre l e m si riferiscono rispettivamente alla "quantizzazione" in latitudine e longitudine. In un problema a perfetta simmetria sferica non ci sono direzioni privilegiate e quindi gli autovalori non dipendono da m. Se si include l'effetto della rotazione, la simmetria è rotta perchè l'asse di rotazione è un asse privilegiato e la degenerazione degli autovalori è tolta. L'effetto è analogo a quello di un campo magnetico sui livelli atomici (effetto Zeeman). Studiando la struttura fine dello spettro delle oscillazioni è quindi possibile ricavare informazioni sulla distribuzione della velocità angolare con la profondità.

1.2 Onde radiali in sistemi autogravitanti.

Studiamo adesso un caso più concreto di propagazione delle onde in un sistema autogravitante. Si utilizza un approccio di tipo Lagrangiano con:

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_o + \boldsymbol{\xi}(t) \qquad \xi(0) = 0$$

Trattandosi di un problema a simmetria sferica la particella fluida che seguiamo lungo l'evoluzione del sistema è una buccia sferica infinitamente sottile. Per identificare un guscio si può usare la sua coordinata radiale, ma questa non è la sola possibilità. Infatti, considerato che la funzione per la massa:

$$m(r) = \int_0^r 4\pi r^2 \rho(r) dr$$

è monotona crescente e quindi invertibile si può definire un guscio in base alla massa che contiene. Si cambiano quindi le variabili da $(r_o;\ t)$ a $(m;\ t)$, mentre le derivate divengono:

$$\frac{\partial}{\partial r_o} = \frac{\partial m}{\partial r_o}\frac{\partial}{\partial m} = 4\pi r_o^2 \rho_o \frac{\partial}{\partial m}$$

Si osservi che in questo schema la variabile indipendente è m, mentre r diviene una variabile dipendente $r = r(m,t)$. Il significato fisico di r è quindi la posizione all'istante t del guscio sferico che include la massa m. Scriviamo adesso l'equazione dell'equilibrio in queste nuove variabili:

$$\frac{\partial P_o}{\partial r_o} = -G\frac{m\rho}{r_o^2} \qquad => \qquad 4\pi r_o^2 \rho \frac{\partial P_o}{\partial m} = -G\frac{m\rho}{r_o^2}$$

Si ha quindi un vantaggio immediato, ovvero scompare dall'equazione la densità.

$$\frac{\partial P_o}{\partial m} = -G\frac{m}{4\pi r_o^4} \tag{1.2}$$

Scriviamo l'equazione di moto nello schema Lagrangiano:

$$\rho_o \frac{dv}{dt} = \rho\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = -\frac{\partial P}{\partial r} - \frac{Gm\rho}{r^2}$$

Si considerano le quantità all'equilibrio più le loro variazioni al primo ordine:

$$\rho = \rho_o + \rho_1 \qquad r = r_o + \xi \quad etc...$$

Da cui:

$$(\rho_o + \rho_1)\frac{\partial^2 (r_o + \xi)}{\partial t^2} = -m\frac{\partial (P_o + P_1)}{\partial r} - \frac{Gm(\rho_o + \rho_1)}{(r_o + \xi)^2} =$$
$$= -4\pi r^2 \rho \frac{\partial}{\partial m}(P_o + P_1) - \frac{Gm(\rho_o + \rho_1)}{(r_o + \xi)^2}$$

Poichè le quantità con pedice $_o$ non dipendono dal tempo la precedente equazione diviene:

$$(\rho_o + \rho_1)\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -4\pi r_o^2 \rho_o \left(1 + \frac{\xi}{r_o}\right)^2 \left(1 + \frac{\rho_1}{\rho_o}\right) \frac{\partial}{\partial m}(P_o + P_1) - G\frac{m\rho_o \left(1 + \frac{\rho_1}{\rho_o}\right)}{r_o^2 \left(1 + \frac{\xi}{r_o}\right)^2}$$

Separando i termini di ordine zero da quelli di ordine 1, si ottiene:

all'ordine 0

$$0 = 4\pi r^2 \rho \frac{\partial P_o}{\partial m} - \frac{G m \rho_o}{r_o^2}$$

e all'ordine 1

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -4\pi r_o^2 \left(\frac{\rho_1}{\rho_o} + \frac{2\xi}{r_o}\right) \frac{\partial P_o}{\partial m} - 4\pi r_o^2 \frac{\partial P_1}{\partial m} - G \frac{m}{r_o^2} \left(\frac{\rho_1}{\rho_o} - \frac{2\xi}{r_o}\right) =$$

$$= -4\pi r_0^2 \frac{\rho_1}{\rho_o} \left(\frac{\partial P_o}{\partial m} + G \frac{m}{4\pi r_o^4}\right) - 8\pi r_o^2 \frac{\xi}{r_o} \left(\frac{\partial P_o}{\partial m} - G \frac{m}{4\pi r_o^4}\right) - 4\pi r_o^2 \frac{\partial P_1}{\partial m}$$

Sfruttando l'equazione (1.2) il primo termine fra parentesi tonde è nullo e il secondo lo si può esprimere in funzione del doppio di uno dei due membri della (1.2):

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -16\pi r_0^2 \frac{\xi}{r_o} \frac{\partial P_o}{\partial m} - 4\pi r_0^2 \frac{\partial P_1}{\partial m}$$

Se riuscissimo ad esprimere P_1 in funzione di ξ avremo un'equazione in una sola variabile. Consideriamo l'equazione di continuità:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho_o \boldsymbol{v}) = \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} \rho_o + \rho_o (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}) = 0$$

$$\left(\frac{\partial \rho_1}{\partial t}\right)_m + \rho_o (\boldsymbol{\nabla} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t}) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho_1 + \rho_o (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\xi})\right] = 0$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_o} = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} = -\frac{1}{r_o^2} \frac{\partial}{\partial r_o} (r_o^2 \xi)$$

Dall'equazione dell'energia:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)_m = 0 \qquad => \qquad S = cost.$$

e quindi:

$$S_1 = \frac{P_1}{P_o} - \gamma \frac{\rho_1}{\rho_o} = 0$$

$$P_1 = \gamma P_o \frac{\rho_1}{\rho_o} = -\gamma P_o \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} = -\gamma P_o \frac{1}{r_0^2} \frac{\partial}{\partial r_o} (r_o^2 \xi)$$

Che sostituito nell'equazione per il primo ordine:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 4\pi r_0^2 \frac{\partial}{\partial m} \left[\gamma P_o \frac{1}{r_0^2} \frac{\partial}{\partial r_o} (r_o^2 \xi) \right] - 16\pi r_0^2 \frac{\xi}{r_o} \frac{\partial P_o}{\partial m}$$

A questo punto conviene riscrivere l'equazione usando come variabile indipendente r_o ottenendo:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial}{\partial r_o} \left[\gamma P_o \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r_o} (r_o^2 \xi) \right] - \frac{4}{\rho_o} \frac{\xi}{r_o} \frac{\partial P_o}{\partial r_o}$$

In questa equazione niente dipende dal tempo, si può quindi sviluppare con Fourier in questa variabile ponendo:

$$\xi(r,t) = \xi(r) e^{-i\omega t}$$

e ottenendo

$$-\omega^2 \rho_o \xi = \frac{\partial}{\partial r_o} \left[\gamma P_o \frac{1}{r_o} \frac{\partial}{\partial r_o} (r_o^2 \xi) \right] - 4 \frac{\xi}{r_o} \frac{\partial P_o}{\partial r_o} \tag{1.3}$$

Questa è l'equazione che regola le piccole oscillazioni radiali di un sistema autogravitante sferico.

Consideriamo ora un caso molto particolare (peraltro l'unico che permette una soluzione analitica) e cioè il caso poco realistico di una sfera omogenea, $\rho_o = \textit{costante}$. Si avrà allora:

$$m = \int_o^{r_o} 4\pi \rho r^2 dr = \frac{4\pi}{3} r_o^3 \rho_o$$

e l'equazione di ordine 0 si trasforma in:

$$\frac{\partial P_o}{\partial r_o} = -\frac{G\rho_o \frac{4\pi}{3} r_o^3 \rho_o}{r_o^2} = -\frac{4}{3}\pi G\rho_o^2 r_o, \tag{1.4}$$

e integrando fra r_o e R:

$$P_o = -\frac{4\pi}{3} G\rho_o^2 \frac{r_o^2}{2} + cost.$$

La costante ha il valore:

$$cost = \frac{4\pi}{6} G\rho_o^2 R^2$$

Per cui:

$$P_o = \frac{2\pi}{3} G\rho_o^2 (R^2 - r_o^2) \tag{1.5}$$

e finalmente

$$-\omega^2 \rho_o \xi = -\frac{\partial}{\partial r_o}\left[\frac{2\pi}{3}\gamma G\rho_o^2 \left(\frac{R^2}{r_o^2} - 1\right)\frac{\partial}{\partial r_o}(r_o^2 \xi)\right] + \frac{16\pi}{3} G\rho_o^2 \xi.$$

Compiamo adesso un cambio di variabile, passando dalla variabile r_o alla variabile adimensionale x:

$$x = \frac{r_o}{R} \qquad => \qquad \frac{\partial}{\partial r_o} = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial x}$$

$$-\omega^2 \rho_o \xi = -\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{2\pi}{3}\gamma G\rho_o^2 \left(\frac{1}{x^2} - 1\right)\frac{\partial}{\partial x}(x^2 \xi)\right] + \frac{16\pi}{3} G\rho_o^2 \xi$$

Riscriviamo quest'ultima equazione in un altro modo:

$$\left[\frac{2\pi}{3}\gamma G\rho_o^2 \left(\frac{1}{x^2} - 1\right)(x^2\xi)'\right]' = \frac{1}{x^2}\left(\frac{16\pi}{3} G\rho_o^2 + \omega^2 \rho_o\right)(x^2 \xi)$$

cosicchè l'equazione diviene formalmente uguale a:

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] = [q(x) - \lambda r(x)]\, y. \tag{1.6}$$

Questa equazione è ben nota in fisica matematica e prende il nome di *equazione di Sturm Liouville*, con la costante λ chiamata *autovalore*. Per ottenere delle soluzioni dobbiamo imporre le condizioni al contorno. Tipicamente i problemi di Sturm-Liouville sono legati all'imposizione del passaggio della soluzione per due punti. Supponiamo infatti di scegliere come una delle condizioni iniziali $y(0) = 0$. Se fissassimo, come si fa abitualmente anche il valore della derivata prima in zero, la soluzione sarebbe completamente determinata e senza specificare il valore di λ non avremmo più la libertà per imporre il passaggio nel secondo punto. D'altra parte, nulla si ottiene variando il valore di $y'(0)$. Infatti, essendo l'equazione omogenea in y, un cambiamento della derivata in zero equivale a moltiplicare la soluzione per una costante in quanto nell'intorno di $x = 0$ si ha

$$y(x) = y(0) + xy'(o) = xy'(o).$$

Questo dimostra che solo per particolari valori di λ sarà possibile soddisfare la condizione di passaggio nel secondo punto.

Le soluzioni dell'equazione di S-L ha le seguenti proprietà:

* Gli autovalori sono una serie discreta e numerabile e come tale possono essere ordinati. Nel nostro l'autovalore dipende dalla frequenza del moto $\lambda(\omega)$ per cui li ordineremo in ordine crescente di ω.

$$\omega_o \leq \omega_1 \leq \omega_2 \leq \ldots \omega_n$$

* L'autofunzione n-esima ha n zeri nell'intervallo di definizione.

* Le autofunzioni sono ortonormali fra loro nel senso che :

$$\int y_n(x) y_m(x) r(x) dx = \delta_{nm}$$

Le condizioni al contorno possono aiutare a determinare anche alcune cose, infatti sulla superficie deve valere:

$$P_o(R) = 0$$

poichè è la definizione stessa di superficie. Questo vale anche quando la stella oscilla e quindi:

$$P(R+\xi)=0 \qquad => \qquad P_o(R+\xi)+P_1(R+\xi)=0$$

Sviluppando con Taylor:

$$P_o(R)+\xi P_o'(R)+P_1(R)+\xi P_1'(R)=o \qquad => \qquad \xi P_o'(R)+P_1(R)=0$$

Abbiamo applicato la definizione di superficie e trascurato i termini di ordine superiore al primo. Da quest'ultima relazione ricaviamo:

$$\xi=-\frac{P_1(R)}{P_o'(R)}=\xi(R)=costante$$

In questo modo si determina che l'ampiezza dell'oscillazione è costante. Bisogna ricordare che in realtà si esprime come:

$$\xi(r;\ t)=\xi(r)e^{i\omega t}$$

e quindi il termine oscillante fa sì che $xi(R,t)$ assuma successivamente valori positivi e negativi, corrispondenti alle fasi di espansione e di contrazione.

Le condizioni al contorno sulla ξ sono:

$$\xi(0)=0 \qquad \xi(R)=1$$

Si noti che la realtà degli autovalori impone che ω^2 sia reale, ma non necessariamente positivo. ω può quindi essere reale o immaginario puro, a seconda che sia $\omega^2 \gtrless 0$,

$$\omega^2<0 \qquad => \qquad \omega=\pm i\nu$$
$$e^{\pm i\nu}=e^{-\nu}e^{nu}$$

Si hanno quindi due soluzioni delle quali una è crescente. Questa, per quanto piccola possa essere all'inizio, finirà con l'essere dominante rendendo instabile il sistema. Possiamo sfruttare l'ordinabilità degli autovalori dell'equazione per guardare solo ω_o (che prende il nome di *frequenza fondamentale*): se questa è positiva allora, essendo la minore, tutte le altre sono positive. Se questa è negativa allora il sistema è instabile anche se fosse l'unica.

Compiamo uno studio di tipo qualitativo dell'equazione generale per le oscillazioni radiali (1.3).Introduciamo una nuova variabile:

$$\xi \rightarrow \phi = \frac{\xi}{r_o}$$

La (1.3) prende la forma:

$$\frac{d}{dr_o}\left[\frac{P_o}{r_o^2}\frac{d}{dr_o}(r_o^3\phi)\right] + \frac{1}{\gamma}\left(\rho_o\omega^2 - \frac{4}{r_o}\frac{dP_o}{dr_o}\right) r_o\phi = 0$$

Agiamo sul primo termine:

$$\frac{d}{dr_o}\left[\frac{P_o}{r_o^2}\frac{d}{dr_o}(r_o^3\phi)\right] = \left[\frac{P_o}{r_o^2}(3r_o^2\phi + r_o^3\phi')\right]' = [3P_o\phi + P_o r_o\phi']' =$$

$$= 3P_o'\phi + 4P_o\phi' + r_oP_o'\phi' + P_or_o\phi'' = 3P_o'\phi + \frac{1}{r_o^3}\left[(4r_0^3P_o + r_o^4P_o')\phi' + P_or_o^4\phi''\right] =$$

$$= 3P_o'\phi + \frac{1}{r_o^3}\left[r_o^4P_o\phi'\right]'$$

Per cui si può riscrivere l'intera equazione moltiplicando tutto per r_o^3 come:

$$\left[r_o^4P_o\phi'\right]' + \frac{r_o^4}{\gamma}\left[\rho_o\omega^2 - \frac{4}{r_o}P_o' + \frac{3\gamma}{r_o}P_o'\right]\phi = 0$$

$$\left[r_o^4P_o\phi'\right]' + \frac{r_o^4}{\gamma}\left[\rho_o\omega^2 - \frac{P_o'}{r_o}(4-3\gamma)\right]\phi = 0 \qquad (1.7)$$

Integrando in dr_o fra 0 e R si ottiene:

$$\int_0^R \frac{d}{dr_o}\left[r_o^4P_o\phi'\right]dr_o = -\frac{1}{\gamma}\int_0^R r_o^4\left[\rho_o\omega^2 - \frac{P_o'}{r_o}(4-3\gamma)\right]\phi dr_o$$

Il primo membro è nullo infatti essendo $\xi(0) = 0$ al massimo ϕ va all'infinito in zero come $\frac{1}{r_o}$ e quindi $r_o^4 \phi|_o = 0$. Quindi affinchè l'integrale al secondo membro sia sempre nullo deve valere:

$$\omega^2 = -\frac{\int_0^R P_o' r_o^3 (3\gamma - 4)\phi dr_o}{\int_0^R r_o^4 \rho_o \phi dr_o}$$

Questa è un'espressione formale per ω^2 in quanto ϕ è la soluzione del problema che non conosciamo. Possiamo però riscrivere questa espressione come:

$$\omega^2 = 3\left(\gamma - \frac{4}{3}\right) \frac{\int_o^R (-P_o') r_o^3 \phi dr_o}{\int_o^R r_o^4 \rho_o \phi dr_o}$$

Consideriamo questa espressione nel caso della funzione con ω minore, cioè quella con $n = 0$. Per le proprietà delle autofunzioni dell'equazione di S-L ϕ_o non ha zeri nell'intervallo di definizione. $P_o' < 0$ sempre in quanto la pressione decresce in modo monotono dal centro alla superficie. Si ricava quindi che la frazione composta dai due integrali è sempre positiva e quindi ω_o ha lo stesso segno di $(\gamma - \frac{4}{3})$.

Si ritrovano quindi le condizioni sulla stabilità del sistema:

$\gamma < \frac{4}{3}$ Il sistema è instabile.

$\gamma > \frac{4}{3}$ Il sistema è stabile.

Si noti come, non avendo mai sfruttato fino ad ora la costanza della densità, questo risultato è del tutto generale.

Torniamo ora al caso della sfera omogenea e cerchiamo la soluzione esplicita. Sostituendo la (1.5) e la sua derivata nella (1.7) si ottiene:

$$\left[r_o^4 P_o \phi'\right]' + \frac{r_o^4 \rho_o}{\gamma} \left[\omega^2 + 4\pi G \rho_o \left(\frac{4}{3} - \gamma\right)\right] \phi = 0$$

Utilizzando la variabile adimensionale ottenuta scalando r_o del raggio:

$$x = \frac{r_o}{R} \qquad => \qquad \frac{d}{dx} = R\frac{d}{dr_o}$$

$$\frac{1}{R}\left[R^4x^4\frac{2\pi}{3}G\rho^2R^2(1-x^2)\phi'\frac{1}{R}\right]' + \frac{R^4x^4\rho}{\gamma}\left[\omega^2+4\pi G\rho\left(\frac{4}{3}-\gamma\right)\right]\phi = 0$$

$$\left[x^4\frac{2\pi}{3}G\rho^2(1-x^2)\phi'\right]' + \frac{x^4\rho}{\gamma}\left[\omega^2+4\pi G\rho\left(\frac{4}{3}-\gamma\right)\right]\phi = 0,$$

e, poichè la densità è costante:

$$\frac{2\pi}{3}G\rho_o\left[x^4(1-x^2)\phi'\right]' + \frac{x^4}{\gamma}\left[\omega^2+4\pi G\rho_o\left(\frac{4}{3}-\gamma\right)\right]\phi = 0$$

Sviluppando le derivate e riaggiustando le costanti si ottiene:

$$(1-x^2)\phi'' + \left(\frac{4}{x}-6x\right)\phi' + \frac{3}{4\pi\gamma G\rho_o}\left[\omega^2+4\pi G\rho_o\left(\frac{4}{3}-\gamma\right)\right]\phi = 0.$$

Posto:

$$A = \frac{3}{4\pi\gamma G\rho_o}\left[\omega^2+4\pi G\rho_o\left(\frac{4}{3}-\gamma\right)\right]$$

si ottiene infine

$$(1-x^2)\phi'' + \left(\frac{4}{x}-6x\right)\phi' + A\phi = 0 \qquad (1.8)$$

Dalle condizioni al contorno per ξ si vede che ϕ è sottoposto alle condizioni :

$$\xi(0) = 0 \qquad => \qquad \phi(0) = costante$$

$$\xi(1) = 1 \qquad => \qquad \phi(1) = 1$$

Cerchiamo ora una soluzione nella forma:

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$\phi' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$\phi'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

Sostituendo nella (1.8) si ottiene:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n \left(x^{n-2} - x^n\right) + \sum_{n=0}^{\infty} n a_n \left(4x^{n-2} - 6x^n\right) + A \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

Raggruppando le potenza uguali:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n [n(n-1) + 4n] x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n [A - n(n-1) - 6n] x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n+3) x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n [A - n(n+5)] x^n = 0$$

Discutiamo i primi due termini della sommatoria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n+3) x^{n-2}$:

n=0 L'argomento della sommatoria è nullo e quindi a_o può essere qualunque.

n=1 L'argomento della sommatoria è $4a_1 x^{-1}$. Ma $a_1 = 0$ poichè se non lo fosse la $\phi(0)$ divergerebbe mentre le condizioni al contorno che vogliono $\phi(0) = costante$.

Nella prima sommatoria poniamo $m = n - 2$:

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n+3) x^{n-2} \qquad \rightarrow \qquad \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+2}(m+2)(m+5) x^m$$

e ponendo ora $m = n$ si ottiene un'unica sommatoria:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{a_{n+2}(n+2)(n+5) - a_n[A - n(n+5)]\}\, x^n = 0$$

Perchè questa equazione sia verificata devono essere nulli tutti i termini della sommatoria e quindi si ottiene una relazione di ricorrenza per gli a_n:

$$a_{n+2} = \frac{A - n(n+5)}{(n+2)(n+5)} a_n$$

Vediamo dunque che tutti i termini pari sono definiti a partire da a_0 e tutti quelli dispari sono definiti a partire da a_1. Poichè $a_1 = 0$, tutti i termini dispari sono tutti nulli. La serie contien dunque solo termini pari. Per studiare la convergenza della serie, consideriamo il limite del rapporto a_{n+2}/a_n per $n \to \infty$. Come si vede dalla precedente espressione,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+2}}{a_n} = -1.$$

Quindi, da un certo valore di n in poi, tutti i coefficienti sarebbero uguali e la serie divergerebbe in $x = 1$, mentre stiamo cercando una soluzione per cui $\phi(1) = 1$. Lunica possibilità di evitare una divergenza e di soddisfare quindi alla suddetta condizione al contorno è quella di supporre che la serie che definisce ϕ sia troncata e si riduca quindi a un polinomio. Dovrà quindi esistere un n_o tale che $a_{n_o} \neq 0$ mentre a_{n_o+2} (e quindi tutti i termini successivi) siano nulli. Questo avviene per tutti quei valori di n_0 per cui

$$n_0^2 + 5n_0 - A = 0.$$

Ad ogni n_0 corrisponde dunque un valore di A, o equivalentemente un valore di ω^2 , che soddisfa alla precedente relazione. La condizione su A determina quindi gli autovalori cioè i quadrati delle frequenze di oscillazione proprie del sistema. Il più piccolo di questi autovalori è quello che si ottien ponendo dalla condizione $n_0 = 0$ e quindi $A = 0$:

$$\omega_o^2 = 4\pi G \rho_o \left(\gamma - \frac{4}{3}\right)$$

Come si era trovato precedentemente il segno dell'autovalore più basso, e quindi la stabilità del sistema, è controllato dal segno di $\left(\gamma - \frac{4}{3}\right)$. In questo modo abbiamo determinato sia le ϕ_n che i loro autovalori:

- $n = 0$ => ϕ_o è una retta e quindi non ha altri zeri nell'intervallo di definizione.

- $n = 2$ => ϕ_1 è una parabola e quindi ha uno zero nell'intervallo di definizione.
- ...

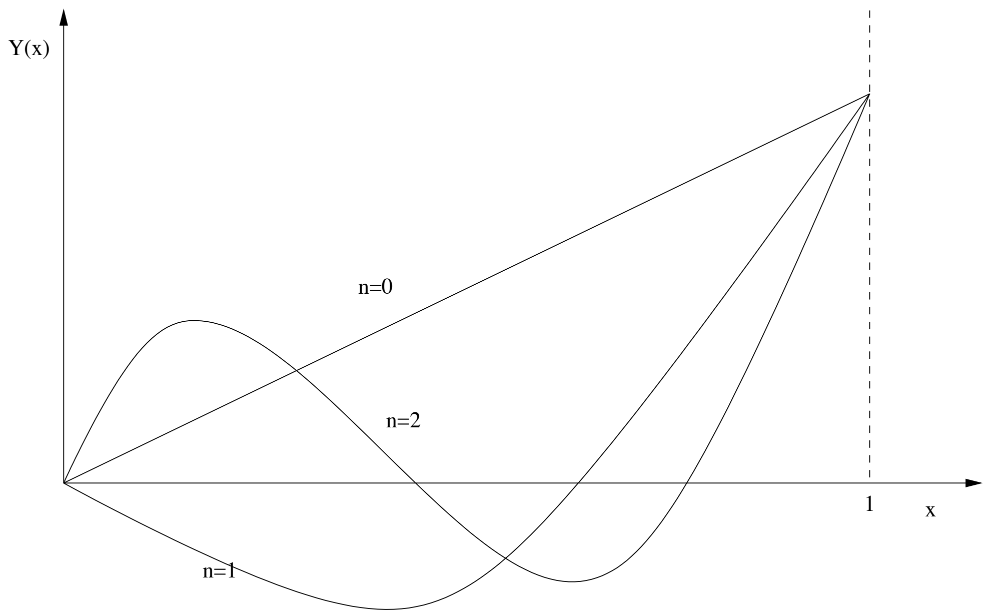

Figure 3: Le autofunzioni di ordine più basso per le oscillazioni di una sfera omogenea

L'espressione esplicita degli autovalori ω^2 è data da:

$$\omega^2 = -4\pi G\rho_o \left(\frac{4}{3} - \gamma\right) + \frac{2\pi\gamma G\rho_o}{3} A = 2\pi G\rho_o \left[2\left(\frac{4}{3} - \gamma\right) + \frac{\gamma}{3} A\right],$$

con $A = n_0^2 + 5n_0$.

La frequenza è quindi proporzionale a $\sqrt{G\rho_o}$ e il periodo a $\frac{1}{\sqrt{G\rho_o}}$ come si era già trovato in precedenza con considerazioni di tipo dimensionale.

Il modello a densità costante permette di ottenere analiticamente lo spettro delle frequenze di oscillazione.. Modelli più realistici si risolvono solo numericamente, la frequenza di oscillazione non è un insieme di frequenze distinte separate da un $\Delta\omega \propto G\rho$ ma è una sovrapposizione di tutti i possibili modi di oscillazione.