

INTRODUZIONE ALLA COSMOLOGIA

*Appunti dal corso di Istituzioni di Astrofisica Teorica
anno accademico 2006-07*

Claudio Chiuderi

June 16, 2008

1 Introduzione

La cosmologia si propone di studiare la struttura e l'evoluzione dell'Universo osservabile. Questo studio viene fatto utilizzando le leggi della fisica, così come sono state dedotte dalle esperienze condotte sulla Terra. Non vi sono infatti indicazioni che tali leggi debbano essere modificate se applicate su grande scala. In un certo senso quindi, la cosmologia è anche un test della validità di tali leggi in un contesto assai più ampio di quello in cui sono state dedotte. L'unicità del soggetto studiato - per definizione non esistono altri universi *osservabili* - rende la cosmologia anomala nel quadro delle scienze fisiche. Infatti viene a mancare una delle caratteristiche fondamentali dell'approccio induttivo-deduttivo proprio della fisica e cioè la riproducibilità delle misure. Le osservazioni possono essere eseguite su un solo oggetto (non abbiamo *altri* universi da osservare) e vengono eseguite ad una ben determinata epoca. Questo fa sì che le osservazioni debbano essere interpretate correttamente nell'ambito di un modello teorico prima di procedere al loro utilizzo.

Le informazioni che riceviamo dall'ambiente cosmico sono per la maggior parte contenute nei segnali elettromagnetici che le varie sorgenti celesti ci inviano e tali informazioni sono propagate con la velocità della luce, che ha un valore finito. Questo fa sì che segnali provenienti da sorgenti a distanza diversa e registrati allo stesso istante siano stati emessi a tempi diversi. Di conseguenza, non è possibile ottenere un quadro istantaneo dell'Universo, a meno che non ci si limiti ad una piccola sezione locale, in cui l'effetto deformante dovuto alla velocità finita della luce sia trascurabile. Nell'interpretazione delle osservazioni dobbiamo quindi sempre tener presente che gli oggetti lontani ci appaiono come *erano* al momento dell'emissione del segnale luminoso e non come *sono* quando tale segnale viene ricevuto. D'altra parte, è proprio la finitezza della velocità di propagazione della luce che ci permette di poter studiare l'evoluzione cosmica e quindi di rimediare parzialmente al fatto di essere costretti a compiere le osservazioni ad un'epoca precisa (e per un tempo breve). Se infatti le caratteristiche di una certa classe di oggetti lontani appaiono diverse da quelle degli oggetti della stessa classe posti nelle nostre vicinanze, saremo portati a concludere che l'Universo ha subito un'evoluzione nel corso del tempo. Da qui l'importanza di sviluppare strumenti in grado di osservare sorgenti sempre più lontane e quindi più deboli. Queste considerazioni giustificano la necessità di elaborare modelli, senza i quali non saremmo neppure in grado di dare un significato alle osservazioni.

Poichè la dinamica su grande scala è dominata dalla gravità, l'unica tra le interazioni fondamentali che non decada troppo rapidamente con la distanza (le interazioni elettromagnetiche, che pure obbediscono ad una legge analoga a quella della gravità, sono di fatto schermate a causa dell'esistenza di cariche di segno opposto), è logico aspettarsi che la cosmologia debba essere inquadrata nell'ambito di una teoria della gravitazione. A tutt'oggi l'unica teoria della gravitazione che ha superato tutte le verifiche sperimentali che è stato possibile effettuare è la teoria della Relatività Generale (RG) sviluppata da Einstein e quindi i modelli cosmologici più accreditati sono modelli relativistici.

Non è possibile in questo corso trattare la RG al livello di dettaglio richiesto e quindi

ci limiteremo a descrivere brevemente le basi fisiche di tale teoria e a dedurre i risultati salienti che si ottengono dalle equazioni che derivano dall'applicazione della RG al problema cosmologico, senza peraltro dimostrarle. Si cercherà comunque, quando possibile, di giustificare tali equazioni. Queste lezioni vanno dunque intese come una prima introduzione al cosiddetto *modello standard* e di conseguenza molti argomenti, anche importanti, saranno tralasciati. Ad esempio, non verrà esaminata la storia termica dell'universo, nè verranno discussi gli aspetti critici del modello standard e le soluzioni proposte per ovviare a tali aspetti, nè infine il problema della formazione di strutture. Tutti questi argomenti verranno affrontati nell'ambito dei corsi della Laurea Specialistica in Fisica e Astrofisica.

1.1 Osservazioni

Poichè la cosmologia riguarda l'Universo nel suo insieme, potremmo dire che qualunque osservazione ha una valenza cosmologica. Tuttavia, le osservazioni veramente significative fino al 1970 erano solo un numero limitato. Quelle cruciali, cioè quelle che hanno portato all'attuale concezione della cosmologia, erano ancora meno e cioè:

- l'osservazione che il cielo non è uniformemente luminoso (paradosso di Olbers),
- l'osservazione dello spostamento verso il rosso delle righe spettrali delle galassie lontane ,
- l'osservazione del fondo di radiazione cosmica (CBR, Cosmic Background Radiation).

Negli ultimi anni, in particolare a partire dal 2000, si è accumulata una serie di nuove osservazioni che ha permesso di determinare con una notevole precisione i parametri che compaiono nel modello standard. Oggi la cosmologia viene descritta con un ragionevole grado di certezza da un piccolo numero di parametri, che ci permettono di ripercorrere la storia dell'Universo dal Big Bang fino ad oggi e di stabilire quale sarà la sua dinamica futura. Non sembra comunque il caso di adottare un atteggiamento trionfalistico, in quanto sono anche apparsi evidenti problemi del modello, alcuni dei quali potrebbero costringere ad una sua drastica revisione.

Ritornando alla situazione pre-1970, esaminiamo brevemente le osservazioni cruciali, la prima delle quali è menzionata più che altro per motivi storici e per dimostrare come fatti universalmente noti e in apparenza insignificanti possono permettere di arrivare a conclusioni niente affatto scontate.

1.1.1 Il paradosso di Olbers (1828)

Nonostante che il paradosso porti il nome di Olbers, esso era già stato messo in luce molto tempo prima, addirittura dallo stesso Keplero. Il fatto che la luminosità media del cielo sia molto minore di quella delle singole stelle pone un problema, se le seguenti condizioni sono verificate:

- a) Le stelle hanno tutte la stessa luminosità intrinseca,
- b) le stelle sono distribuite con una densità uniforme in uno spazio infinito,
- c) le stelle hanno una vita infinita.

Le ipotesi a) e b) implicano che il contributo cumulativo delle stelle alla luminosità apparente del cielo non dipende dalla distanza. Infatti, il numero di stelle tra r e $r + dr$ è proporzionale a r^2 (nell'ipotesi b) e la luminosità apparente scala con $1/r^2$. Quindi il contributo di un guscio sferico alla luminosità apparente del cielo non dipende dalla distanza a cui è situato il guscio. Di conseguenza, la luminosità integrata fino alla distanza D risulta proporzionale a D e quindi potrebbe assumere qualunque valore, pur di andare sufficientemente lontano. Se tuttavia una stella si trova a una distanza D , la sua luce impiega un tempo $T = D/c$ per giungere a noi. Ciò implica che la vita della stella deve essere almeno lunga almeno quanto T . D , e quindi T , possono divenire comunque grandi, ma la validità dell'ipotesi c) garantisce che comunque la luce di qualsiasi stella arriverà a noi e quindi il cielo dovrebbe avere la stessa luminosità delle stelle. D'altra parte, se non vale c), il paradosso scompare perchè al più potremo vedere quelle stelle situate ad una distanza tale che il tempo di percorrenza della luce dalla stella fino a noi sia inferiore alla durata della vita della stella stessa. La soluzione del paradosso di Olbers, implica quindi che almeno una delle tre suddette condizioni non sia soddisfatte e, come abbiamo visto, quella cruciale è l'ultima delle tre, che implica che le stelle devono evolversi, cioè nascere e morire.

1.1.2 Lo spostamento verso il rosso (1929)

Negli anni '20, Hubble condusse uno studio sistematico degli spettri delle galassie e trovò che la lunghezza d'onda delle righe spettrali era sistematicamente spostata verso il rosso rispetto a quella misurata in laboratorio e che tale spostamento aumentava con la distanza, D , della galassia da noi. Detta λ_e la lunghezza d'onda emessa, che si suppone sia la stessa di quella misurata in laboratorio (le leggi della fisica atomica sono le stesse!) e λ_o la lunghezza d'onda osservata, posto $\Delta\lambda = \lambda_o - \lambda_e$, Hubble trovò che:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_e} = \frac{\lambda_o - \lambda_e}{\lambda_e} = \alpha D \quad (1.1)$$

dove α è una costante. Questo è il dato diretto d'osservazione. **Se** lo spostamento in lunghezza d'onda viene interpretato come dovuto ad un **effetto Doppler** (non relativistico), se cioè si pone

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_e} = \frac{v}{c}$$

si ottiene

$$v = (\alpha c)D = H_o D. \quad (1.2)$$

H_o è la *costante di Hubble* e la precedente relazione lineare tra v e D viene detta *legge di Hubble* e stabilisce che le galassie appaiono allontanarsi da noi con una velocità proporzionale

alla loro distanza. L'implicazione immediata è che l'Universo non è statico, ma appare dotato di un moto di espansione. La costante H_0 ha evidentemente le dimensioni di s^{-1} , ma essa viene comunemente espressa in unità più direttamente legate all'osservazione e cioè $km s^{-1} Mpc^{-1}$. A causa delle difficoltà della misura il valore della costante di Hubble è variato notevolmente nel corso degli anni. Si usa perciò scrivere:

$$H_0 = h \times 100 km s^{-1} Mpc^{-1} = h \times 2.33 \times 10^{-18} s^{-1}. \quad (1.3)$$

e mantenere esplicita la dipendenza da h nelle varie formule. Le misure più recenti danno $h = 0.72$.

Una discussione più approfondita della legge di Hubble e delle sue implicazioni cosmologiche è rimandata al capitolo seguente.

1.1.3 Il fondo di radiazione cosmica (1965)

Nel 1965 Penzias e Wilson, nel corso di una ricerca sulle cause di un rumore di fondo che disturbava le trasmissioni radio transoceaniche, scoprirono che lo spazio è permeato da una radiazione elettromagnetica (quasi) perfettamente isotropa. Le prime misure, effettuate a lunghezze d'onda radio, suggerivano che lo spettro potesse essere ben rappresentato da quello di un corpo nero alla temperatura di circa $3 K$. Successive misure, in particolare quelle eseguite a bordo del satellite CoBE (Cosmic Background Explorer) a partire dal 1990, hanno permesso di determinare che lo spettro è in effetti quello di un corpo nero con temperatura $T = 2.725 \pm 0.0001 K$.

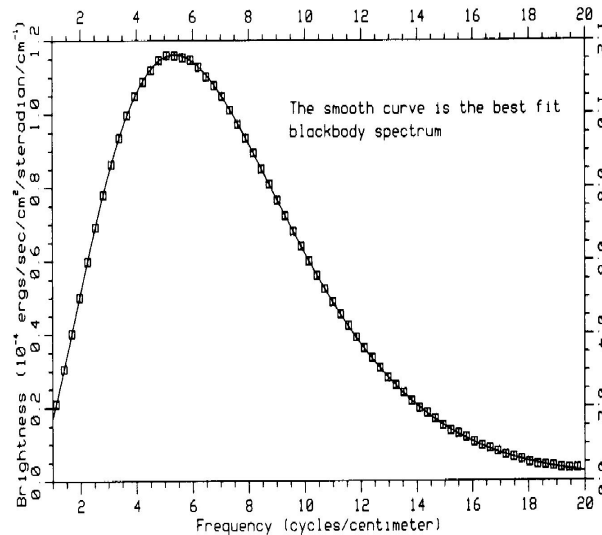


Figura 1: Lo spettro del fondo di radiazione cosmica (CBR) misurato da CoBE

La possibilità che esistesse una simile radiazione era stata prevista da Gamow negli anni '40 nell'ipotesi che l'Universo primordiale avesse una temperatura estremamente elevata e che tale temperatura fosse diminuita nel corso del tempo a causa dell'espansione dell'Universo suggerita dalla legge di Hubble. Lo studio delle caratteristiche della radiazione cosmica di fondo, CBR (Cosmic Background Radiation) che, come vedremo, è l'oggetto più vecchio con cui siamo venuti a contatto, è divenuto oggi uno dei principali strumenti di indagine cosmologica. Sulle proprietà della CBR e sulle informazioni che se ne traggono ritorneremo nei capitoli successivi.

Negli anni recenti, gli sviluppi tecnologici da un lato e l'aumento impressionante della potenza dei calcolatori dall'altro, hanno enormemente aumentato il numero e la precisione delle osservazioni significative ed hanno permesso un serrato confronto tra i modelli teorici ed i dati osservati. Ne sono risultate alcune profonde modifiche dei fondamenti della cosmologia che si presenta, una volta di più, come un campo in continua evoluzione. Discuteremo più avanti la situazione attuale e ne indicheremo le presumibili linee di sviluppo.

2 Omogeneità e isotropia dell'Universo

Tutti i modelli cosmologici moderni hanno in comune alcune ipotesi fondamentali, in parte suggerite dalle osservazioni, in parte frutto dei paradigmi scientifici post-galileiani. La prima di queste ipotesi, detta *Principio Cosmologico*, è di fatto una generalizzazione della visione copernicana che nega alla Terra una posizione privilegiata. Secondo tale principio: *"La struttura spaziale media dell'Universo appare la stessa a qualsiasi osservatore"*. L'adozione di questo principio appare inevitabile se si vuol procedere alla costruzione di modelli cosmologici. Se esso non fosse valido, non avremmo nessuna garanzia che le nostre osservazioni siano significative. Osserviamo che il Principio Cosmologico riguarda solo le proprietà spaziali e non esclude che la struttura media dell'Universo possa subire un'evoluzione temporale.

Il Principio Cosmologico può tuttavia essere generalizzato a includere anche l'indipendenza della struttura media dall'epoca dell'osservazione. In questo caso si parla di *Principio Cosmologico Perfetto*. Una delle motivazioni alla base di tale principio è che esso rimuoverebbe la distinzione fra spazio e tempo presente nel modello imperfetto, distinzione che sarebbe contraria allo spirito della relatività. E' evidente che se si adotta il Principio "perfetto" nessuna evoluzione è permessa: il modello che ne risulta è quello dell'*Universo stazionario*, modello che ha avuto i suoi sostenitori in passato, ma che attualmente è stato abbandonato, in quanto inconciliabile con le più recenti osservazioni, in particolare quelle relative alla CBR.

I modelli cosmologici correnti si fondano su una descrizione di tipo fluido. L'Universo è rappresentato cioè da un fluido cosmico, di cui le galassie sono l'equivalente delle molecole, in perfetta analogia con la descrizione fluida di un gas in cui la struttura molecolare discreta viene sostituita da una struttura media continua. Interviene a questo punto un'altra ipotesi fondamentale e cioè quella che prescrive che il fluido cosmico sia omogeneo ed isotropo. Il fluido cosmico ha quindi una densità costante, ciò che significa che la densità media delle galassie non dipende né dalla distanza dall'osservatore, né dalla direzione di osservazione.

Possiamo chiederci quanto questa ipotesi sia suffragata dalle osservazioni. A prima vista la distribuzione delle galassie in una qualunque immagine del cielo non appare uniforme, ma naturalmente quando si vuol parlare di densità media, a cui il concetto di omogeneità si riferisce, bisogna prima specificare su quali volumi viene calcolata la media. Per esempio, la densità media della Galassia è circa $2 \times 10^{-24} gcm^{-3}$, quella di un ammasso di galassie circa $2 \times 10^{-27} gcm^{-3}$, quella di un superammasso circa $2 \times 10^{-29} gcm^{-3}$. In maniera più quantitativa, l'analisi delle sorgenti infrarosse del catalogo ricavato dalla missione spaziale IRAS (Fig. c1) ha rivelato che la fluttuazione quadratica media del numero di galassie contenute in un cubo di lato $L = 90 Mpc$, $\delta N_g / N_g \simeq 0.2$ e diminuisce all'aumentare del volume della cella su cui si effettua la media.

L'isotropia può essere verificata dalle osservazioni meglio dell'omogeneità, per esempio dallo studio della correlazione angolare delle posizioni delle galassie di luminosità maggiore di un certo valore limite. La probabilità composta di trovare due galassie negli elementi di

angolo solido $d\Omega_1$ e $d\Omega_2$, separati da un angolo θ è data da

$$dP = N^2 d\Omega_1 d\Omega_2 [1 + w(\theta)]$$

dove N è la densità superficiale media di galassie e $w(\theta)$ è la funzione di correlazione. Nel caso di distribuzione isotropa $w(\theta) \equiv 0$. Come si vede dalla Figura 2, $w(\theta)$ tende effettivamente a zero per angoli $\theta \gtrsim 6^\circ$.

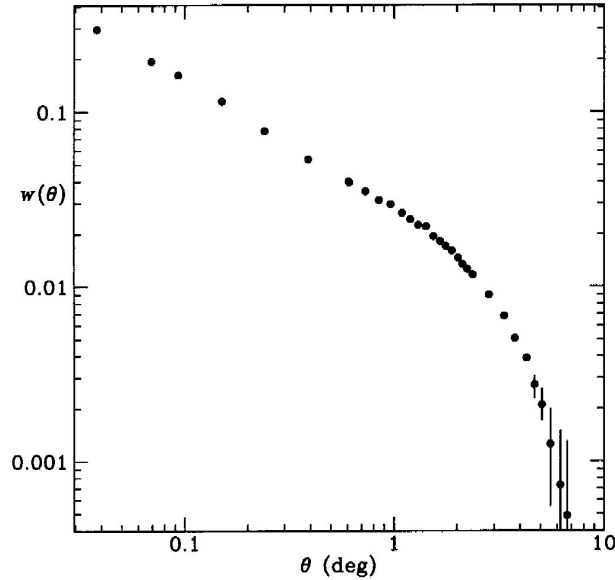


Figura 2: *La funzione di correlazione $w(\theta)$ in funzione di θ*

Come vedremo, una delle più significative prove a sostegno dell'isotropia deriva dalle osservazioni della CBR, la cui isotropia su scale angolari dell'ordine di qualche grado risulta verificata meglio di una parte su 10^4 . D'altra parte, l'isotropia osservata, combinata con il Principio Cosmologico, implica l'omogeneità. Infatti, se da ogni punto di osservazione l'Universo appare identico e se dalla Terra esso appare isotropo, ne segue che esso è isotropo per qualunque osservatore e quindi omogeneo. Naturalmente queste conclusioni si applicano solo alla parte visibile dell'Universo; nulla vieta di speculare che la parte visibile sia solo una frazione (omogenea) di un Universo assai più grande e disomogeneo. Ma si tratta appunto di una speculazione.

Se la legge di Hubble viene considerata come una prova dell'espansione dell'Universo, l'isotropia osservata suggerisce che anche l'espansione debba essere isotropa. Il fatto che l'espansione sia apparentemente centrata su di noi non contraddice affatto il Principio Cosmologico. Per capirlo, basta considerare quello che accade a dei granelli di sabbia incollati sulla superficie di una palla che si gonfia. Ciascun granello vede tutti gli altri allontanarsi

da sè e quindi giudica di essere al centro dell'espansione, mentre in realtà l'unica cosa che cambia è la mutua distanza tra i granelli. Un analogo esempio a tre dimensioni è quello dei chicchi di uvetta in un immenso panettone in procinto di lievitare. Anche qui l'espansione non ha un centro geometrico, ma è semplicemente un *cambiamento di scala*. Se così è, se ne può concludere che l'espansione dell'Universo (omogeneo ed isotropo !) può essere descritta da una singola funzione del tempo, $a(t)$, che regola tale variazione di scala.

Per vedere la cosa con un maggiore dettaglio, consideriamo tre galassie A , B e C che ad un certo istante definiscono il triangolo ABC e ad un tempo successivo il triangolo $A'B'C'$, come mostrato in Figura 3.

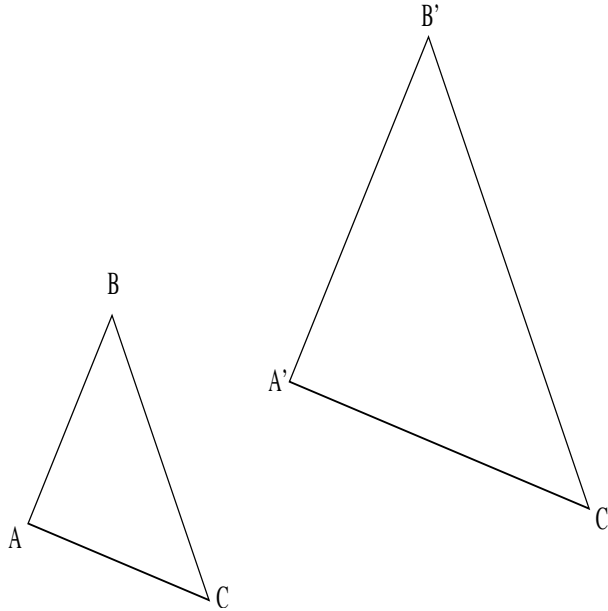


Figura 3: *Tre galassie a due tempi successivi*

L'isotropia dell'espansione significa che l'osservatore in A vede la variazione frazionaria della distanza $AB \rightarrow A'B'$ uguale a quella di $AC \rightarrow A'C'$, mentre l'osservatore in C giudica che la variazione frazionaria di $AC \rightarrow A'C'$ sia uguale a $BC \rightarrow B'C'$. Il triangolo $A'B'C'$ è pertanto simile ad ABC . Tutte le distanze debbono quindi variare secondo la legge:

$$\ell(t) = \ell(t_0) \frac{a(t)}{a(t_0)}, \quad (2.1)$$

dovv t_0 è un tempo di riferimento. Derivando la precedente espressione rispetto al tempo si ha:

$$\frac{d\ell}{dt} = v(t) = \ell(t_0) \frac{\dot{a}(t)}{a(t_0)} = \ell(t) \frac{\dot{a}(t)}{a(t)},$$

Troviamo quindi che la velocità apparente con cui si allontanano due galassie è proporzionale alla loro distanza, come vuole la legge di Hubble. La funzione che lega la velocità di recessione alla distanza è detta *parametro di Hubble*,

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}. \quad (2.2)$$

La costante di Hubble, H_0 , è semplicemente il valore attuale del parametro di Hubble. Osservare che in questo quadro la velocità di recessione non deve essere pensata come l'espansione del sistema delle galassie in uno spazio esterno vuoto (l'Universo per definizione contiene tutto, non c'è niente al di fuori di esso in cui espandersi), ma piuttosto come un'espansione dello spazio che separa le galassie stesse.

Quali sono le strutture che nel nostro modello possono essere considerate le molecole del gas cosmico, cioè le strutture che mantengono le loro dimensioni senza partecipare al moto di espansione cosmica? Gli atomi, la Terra, le stelle non si espandono perchè sono tenuti insieme da forze interne di natura elettrica o gravitazionale. Se si esamina il caso della Galassia si può procedere così. Consideriamo la Galassia come un sistema sferico di massa M_G e di raggio R_G . Il potenziale gravitazionale è $\simeq GM_G/R_G$ e la velocità di fuga $v_f = (2GM_G/R_G)^{1/2}$. Inserendo i dati per la Galassia si ottiene $v_f/c \simeq 10^{-3}$. D'altra parte la velocità di recessione del bordo della Galassia dovuta al moto di espansione cosmica, vista dal centro della Galassia stessa, sarebbe $v/c = (\dot{a}/a)R_G/c = H_0R_G/c \simeq 3 \times 10^{-6}$, che è trascurabile rispetto alla velocità di fuga. Per una Galassia quindi le forze interne dominano rispetto agli effetti dell'Universo in espansione. Questo giustifica l'ipotesi di considerare le galassie come le "molecole" del gas cosmico.

Se la legge di espansione è universale, allora **tutte** le lunghezze devono trasformarsi allo stesso modo e quindi anche la lunghezza che separa due successive creste in un treno d'onde, cioè la lunghezza d'onda di un fotone. Se indichiamo che λ_e la lunghezza d'onda all'istante dell'emissione e con λ_o la lunghezza d'onda all'istante dell'osservazione, avremo quindi dalla (2.1)

$$\frac{\lambda_e}{\lambda_o} = \frac{a(t_e)}{a(t_o)}. \quad (2.3)$$

Poichè l'Universo si sta espandendo $a(t_o) > a(t_e)$ e quindi $\lambda_o > \lambda_e$: la lunghezza d'onda delle righe spettrali risulta spostata verso il rosso. In cosmologia lo spostamento percentuale delle lunghezze d'onda (*redshift*) viene tradizionalmente indicato con la lettera z e la precedente relazione ci permette di scrivere:

$$z = \frac{\lambda_o - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{\lambda_o}{\lambda_e} - 1 = \frac{a(t_o)}{a(t_e)} - 1. \quad (2.4)$$

Questa importantissima relazione ci dice che una semplice osservazione spettroscopica viene ad assumere una rilevanza cosmologica in quanto ci permette di conoscere il rapporto tra i valori che il fattore di scala assume agli istanti di emissione e di ricezione di un fotone,

Alla stessa relazione possiamo arrivare anche attraverso l'interpretazione Doppler della lege di Hubble che lega il *redshift* alla distanza. Consideriamo infatti il moto di un fotone emesso da una galassia all'istante t con una frequenza $\nu(t)$. Il fotone sarà ricevuto all'istante $t + dt$ da un altro osservatore posto a distanza $\Delta\ell = cdt$ con una frequenza spostata per effetto Doppler, $\nu(t + dt)$. Quindi:

$$d\nu = \nu(t + dt) - \nu(t) = -(\Delta v/c)\nu.$$

Ma $\Delta v = H\Delta\ell = Hcdt$, e quindi .

$$\frac{d\nu}{dt} = -H\nu = -\frac{\dot{a}}{a}\nu \implies \nu \propto \frac{1}{a}.$$

Possiamo quindi scrivere:

$$\frac{\nu_e}{\nu_o} = \frac{\lambda_o}{\lambda_e} = \frac{a(t_o)}{a(t_e)},$$

riottenendo quindi la (2.3).

Va tuttavia sottolineato il fatto che la fondamentale equazione (2.4) può essere ottenuta **senza** ricorso ad un'interpretazione di tipo Doppler, ma semplicemente imponendo la legge universale di dilatazione delle lunghezze.

La semplice applicazione dei concetti di omogeneità e isotropia ci ha portato a postulare l'esistenza di un fattore di scala universale, $a(t)$, che regola il moto di espansione cosmica. E' evidente che uno degli scopi dei modelli cosmologici dovrà appunto essere quello di determinare la funzione $a(t)$.

3 Le basi fisiche della Relatività Generale

La relatività Generale (RG) è sostanzialmente una teoria della gravitazione. Si tratta di una teoria formalmente complessa, la cui trattazione esula dalle possibilità di questo corso. Ci limiteremo quindi a riassumere i principali concetti della relatività ristretta, che si suppone nota, e a descrivere brevemente le basi fisiche della RG come premessa alla comprensione dei modelli cosmologici che su di essa si basano. Enunceremo quindi le equazioni che derivano dall'applicazione della RG alla cosmologia senza derivarle e discuteremo le loro soluzioni.

Il concetto di relatività riguarda le trasformazioni che le equazioni della fisica subiscono quando si esegua una trasformazione di coordinate dinamica, che cioè coinvolga anche il tempo. La relatività galileiana, che riguarda l'invarianza formale (o *covarianza*) delle equazioni della meccanica classica quando siano scritte in due sistemi di riferimento in moto rettilineo uniforme uno rispetto all'altro, era già stata magistralmente descritta da Galileo stesso e le formule che consentono di passare da un sistema all'altro sono note come trasformazioni di Galileo. Secondo questa prima variante della relatività è possibile determinare soltanto il moto relativo dei due sistemi, ma nessuna esperienza di meccanica può metterne in evidenza il moto assoluto. La relatività galileiana tuttavia non può essere estesa ai fenomeni elettromagnetici: le equazioni di Maxwell infatti non sono invarianti per trasformazioni di Galileo. Esse avrebbero la forma nota soltanto in un particolare sistema inerziale, mentre in tutti gli altri la struttura delle equazioni cambierebbe. Di conseguenza, dovrebbe essere possibile distinguere il moto assoluto rispetto a tale sistema eseguendo delle esperienze di elettromagnetismo. Ma la verifica sperimentale della precedente affermazione, eseguita da Michelson, portò a un risultato paradossale: il sistema di riferimento ancorato alla Terra, evidentemente non inerziale, risultava essere il sistema privilegiato. Inoltre, i risultati dell'esperimento mostravano che la velocità della luce non si componeva con quella dell'osservatore o della sorgente, ma era la stessa in tutti i sistemi inerziali. Questi fatti spinsero Einstein a riconsiderare la formulazione della relatività galileiana e ad elaborare la teoria della relatività ristretta. Nella formulazione di Einstein le formule di passaggio da un sistema inerziale ad un altro non sono quelle di Galileo bensì le trasformazioni di Lorentz, che sono anche quelle che lasciano invarianti in forma le equazioni di Maxwell. Le trasformazioni di Lorentz convergono a quelle di Galileo per valori della velocità relativa dei due sistemi piccole rispetto alla velocità della luce. Come conseguenza della relatività ristretta, il moto assoluto di un sistema inerziale non è determinabile neppure con esperienze di elettromagnetismo. Il prezzo da pagare per questa generalizzazione del principio di relatività, che peraltro risulta inevitabile a causa dell'esperienza di Michelson, è l'abbandono dei concetti di spazio e tempo assoluti della meccanica newtoniana e l'introduzione di un nuovo continuo quadrimensionale, lo *spazio-tempo*. La geometria dello spazio-tempo non è euclidea (a differenza di quella dello spazio geometrico newtoniano) e le trasformazioni di Lorentz possono essere considerate delle pseudo-rotazioni nel nuovo spazio. Una delle caratteristiche salienti della relatività ristretta risiede nella geometrizzazione della fisica. Questo è reso evidente dall'uso del concetto di intervallo. Preso un sistema di riferimento inerziale ($x_0 = ct, x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$), si considerino due eventi infinitamente vicini e si definisca

la quantità ds , detta *intervallo* (infinitesimo) tra i due eventi:

$$ds^2 = dx_0^2 - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) = dx_0^2 - d\ell^2$$

L'intervallo è un invariante relativistico, cioè il suo valore rimane inalterato per passaggio da un sistema di riferimento inerziale ad un altro per mezzo delle trasformazioni di Lorentz. Dall'invarianza dell'intervallo è possibile derivare tutta la cinematica relativistica e, usando il principio di causalità, è anche possibile dimostrare che la velocità della luce rappresenta la velocità limite con la quale si possono trasmettere le interazioni. D'altra parte, la forma del ds^2 definisce la geometria dello spazio-tempo: la presenza del segno meno davanti a $d\ell^2$ dimostra appunto che si tratta di una geometria non euclidea. Le proprietà fisiche nei sistemi inerziali vengono in qualche modo trasferite nelle proprietà geometriche dello spazio-tempo.

La relatività ristretta riguarda dunque la covarianza delle equazioni della fisica rispetto ad una classe ben precisa, ristretta appunto, di trasformazioni cioè quella tra riferimenti inerziali. A questo punto viene naturale chiedersi se il principio di relatività non possa essere esteso ad una classe più ampia di trasformazioni che, alla luce di quanto sopra detto, dovrebbe ancora una volta riflettersi nelle caratteristiche geometriche dello spazio-tempo. Ciò porta a considerare espressioni più generali dell'intervallo, del tipo

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{3.1}$$

dove si è usata la convenzione di somma sugli indici ripetuti. Gli elementi del tensore metrico, $g_{\mu\nu}$, definiscono la geometria dello spazio-tempo per la classe di trasformazioni di coordinate che si considerano. Come vedremo tra breve, il problema della generalizzazione del principio di covarianza si intreccia con quello di una teoria relativistica della gravitazione. Infatti, è chiaro che la teoria di Newton non è compatibile con i principi della relatività speciale, ed in particolare, con il fatto che la velocità della luce rappresenta un limite superiore alla velocità di propagazione di un qualunque segnale. La legge di Newton, infatti, stabilisce che la forza gravitazionale che si esercita tra due masse al tempo t , dipende dal valore della distanza tra le masse **allo stesso istante**. Se la distanza cambia, anche la forza cambia **istantaneamente**. Questo presuppone che l'azione della gravità si propaghi con velocità infinita, una conclusione inaccettabile a livello relativistico. E' quindi necessario sviluppare una teoria relativistica della gravità: la modifica proposta da Einstein permette di estendere il principio di covarianza a trasformazioni tra sistemi non inerziali.

Che il problema della generalizzazione, se possibile, non sia banale, è dimostrato da una serie di considerazioni. Ricordiamo per prima cosa che il concetto di massa viene usato in meccanica newtoniana in due accezioni diverse: la *massa inerziale*, che è una proprietà della materia che sostanzialmente resiste al moto e la *massa gravitazionale* che provoca una forza e quindi un moto. Logicamente, queste due quantità non avrebbero ragione di essere uguali tra loro. Ma il risultato di esperienze estremamente precise mostra che esse sono *identiche*. Questa *equivalenza* fa sì che tutti i corpi cadano con la stessa accelerazione, ma ha anche altre importanti conseguenze. Si consideri quel che succede quando si voglia descrivere la meccanica da un sistema non inerziale (per esempio un sistema ancorato ad un

disco rotante). Si osserva la nascita di nuove forze (per esempio la forza centrifuga) dette appunto *forze inerziali*. In realtà quel che nasce sono delle accelerazioni, indipendenti dalla massa perché di origine puramente cinematica. Invece di parlare di accelerazioni possiamo parlare di forze, pur di moltiplicare le suddette accelerazioni per la massa inerziale. Possiamo sempre eliminare tali forze dalla nostra descrizione passando ad un sistema inerziale.

La forza di gravità è proporzionale alla massa gravitazionale, ma, a causa dell'equivalenza tra i due tipi di masse, possiamo considerare che essa sia proporzionale alla massa inerziale, assumendo quindi il carattere di forza inerziale. E, come tutte le forze di questo tipo, deve essere possibile eliminarla attraverso un'opportuna trasformazione di coordinate. Che quest'ultima affermazione, apparentemente paradossale, sia fisicamente accettabile risulta chiaro riflettendo al seguente esperimento ideale. Si consideri un sistema in caduta libera, per esempio un ascensore a cui sia stato reciso il cavo di sostegno. Questo sistema è a tutti gli effetti un sistema inerziale, nonostante la presenza della gravità. Infatti, in meccanica newtoniana un sistema è inerziale se un corpo non soggetto a forze rimane in quiete o si muove di moto rettilineo e uniforme e questo è quanto succede nell'ascensore in caduta libera, poichè tutti i corpi cadono con la stessa accelerazione, indipendentemente dalla loro massa. Inversamente, un sistema in cui si noti la presenza della gravità potrà sempre essere descritto come un sistema senza gravità, ma sottoposto ad un moto accelerato in senso inverso a quello della gravità.

Da quanto precede risulta come sia effettivamente possibile eliminare la gravità, ma solo *localmente* nello spazio e nel tempo. Infatti l'ascensore prima o poi finirà la sua corsa contro il suolo e in un ascensore troppo grande sarà possibile notare che le traiettorie non sono parallele, ma convergenti. L'eliminazione della gravità è dunque possibile solo in regioni sufficientemente piccole dello spazio-tempo in cui la gravità possa essere considerata costante. Non sarà viceversa possibile trovare una trasformazione *globale* che elimini la gravità ovunque, in accordo con la fisica e il buon senso.

Per quel che riguarda gli aspetti geometrici, lo spazio-tempo sarà descritto dal tensore metrico $g_{\mu\nu}$. Localmente sarà sempre possibile effettuare una trasformazione di coordinate che riduca $g_{\mu\nu}$ alla forma tipica dei sistemi inerziali, cioè quella della relatività ristretta. Ma cosa determina la geometria globale dello spazio-tempo? Einstein, assorbendo le idee già esposte da Mach, postula che la struttura spazio-temporale sia determinata dalla distribuzione di materia su grande scala, anzi, secondo i dettami della relatività ristretta che prescrive l'equivalenza tra massa ed energia, dalla distribuzione di energia su grande scala. Gli effetti gravitazionali della distribuzione di massa-energia sono trasferiti nella struttura geometrica dello spazio-tempo e in questo senso il tensore metrico, $g_{\mu\nu}$, rappresenta il campo gravitazionale.

Naturalmente la geometrizzazione della gravitazione, tipica della RG, ci obbliga a riformulare le leggi della fisica in modo che esse risultino naturalmente esprimibili in forma covariante, cioè in modo che la loro espressione formale risulti inalterata per qualunque trasformazione di coordinate dello spazio-tempo. Per esempio, il principio di inerzia dovrà venire espresso nella forma: *"un corpo in moto non soggetto a forze percorre una geodetica*

dello spazio-tempo”, la geodetica essendo definita come la curva di minor lunghezza tra due punti dati. Nello spazio-tempo di Newton (e anche in quello della relatività ristretta) la geodetica è una retta, in accordo con la definizione newtoniana del principio di inerzia. La presenza di un campo gravitazionale determina una differente geometria dello spazio tempo e quindi le geodetiche non saranno più rette. Ma la formulazione della legge d’inerzia rimane la stessa.

Gli sviluppi formali della teoria costruita sulle basi sopra esposte porta a formulare le equazioni di Einstein, un sistema di 10 equazioni non lineari nelle 10 componenti indipendenti del tensore simmetrico $g_{\mu\nu}$. Le equazioni di Einstein possono essere scritte nel modo seguente:

$$G_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^2} T_{\mu\nu} \quad (3.2)$$

Il tensore simbolico $G_{\mu\nu}$ è costruito a partire da $g_{\mu\nu}$ e quindi racchiude in sé tutte le informazioni sulla geometria dello spazio-tempo, mentre $T_{\mu\nu}$ è il tensore energia-impulso che compendia le informazioni relative alla distribuzione di massa-energia. Si noti una delle caratteristiche fondamentali della RG: si tratta di una teoria senza parametri aggiustabili che consentano di adattarla alle varie applicazioni. Questo aspetto della teoria, di grande eleganza formale, la rende, in linea di principio, vulnerabile. Finora tuttavia, tutte le previsioni della RG sono state verificate dall’esperienza.

Il procedimento con il quale si affrontano i problemi relativi alla risoluzione delle equazioni di Einstein può essere così schematizzato. Si adotta una forma del tensore metrico che contenga in sé le eventuali simmetrie suggerite dall’applicazione che si sta considerando. Una tale forma conterrà un certo numero di parametri e di funzioni incognite. Si sceglie un tensore energia-impulso che descriva le sorgenti di campo proprie del problema studiato. Si scrivono le equazioni di Einstein ottenendo in tal modo un sistema di equazioni differenziali non lineari nelle funzioni incognite contenute nel $g_{\mu\nu}$. La soluzione di questo sistema determina le funzioni incognite e permette quindi di conoscere la struttura geometrica dello spazio-tempo.

4 La metrica di Robertson-Walker

Le considerazioni svolte precedentemente sull'omogeneità e isotropia dell'Universo e le indicazioni che da queste emergono sull'esistenza di un fattore di scala cosmico, ci portano a considerare un a forma dell'intervallo infinitesimo tra due eventi del tipo:

$$\begin{aligned} ds^2 &= c^2 dt^2 - a^2(t) d\ell^2 \\ &= c^2 dt^2 - a^2(t) g_{ik} dx^i dx^k \quad (i, k = 1, 3), \end{aligned} \quad (4.1)$$

dove si dovrà imporre la condizione che la parte spaziale del tensore metrico, $g_{\mu\nu}$, sia omogenea e isotropa. Si pone quindi il problema di determinare tutte le possibili geometrie aventi questa caratteristica. Robertson e Walker hanno dimostrato che esistono solo tre geometrie con la proprietà richiesta, limitando così notevolmente il numero dei casi possibili. Per comprendere la natura di queste geometrie, cominciamo con l'esaminare il caso della geometria delle superfici a due dimensioni. Il piano è evidentemente una superficie che ha queste proprietà. Ogni punto di un piano può essere mappato in qualunque altro punto con una opportuna trasformazione di coordinate e non esistono direzioni preferenziali nel piano. L'elemento infinitesimo di linea nel piano può essere scritto come

$$d\ell^2 = dx^2 + dy^2$$

oppure, usando coordinate polari nel piano,

$$d\ell^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$$

. Entrambe le forme rappresentano la stessa geometria, quella del piano.

Se consideriamo ora un'altra geometria, quella della superficie di una sfera, ci accorgiamo che anch' essa è omogenea e isotropa (tutti i punti sono equivalenti), ma con caratteristiche geometriche differenti da quelle del piano. Per esempio, due rette localmente parallele finiscono con l'incontrarsi (si pensi a due meridiani che sono paralleli tra loro all'equatore, ma si incontrano al polo). Inoltre, la somma degli angoli interni di un triangolo tracciato sulla superficie sferica è maggiore di 180° . Si tratta quindi di una geometria *non euclidea*. Data l'equazione della sfera, $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, si ottiene per la distanza infinitesima tra due punti sulla superficie

$$d\ell^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx^2 + dy^2 + \frac{(x dx + y dy)^2}{R^2 - (x^2 + y^2)}$$

e, introducendo un sistema di coordinate polari nello spazio

$$x = R \sin\theta \cos\phi,$$

$$y = R \sin\theta \sin\phi,$$

$$z = R \cos\theta,$$

si ottiene la ben nota espressione per l'elemento di linea sulla sfera :

$$d\ell^2 = R^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) = R^2 d\Omega^2 \quad (4.2)$$

Si osservi che R è una costante e quindi può essere assorbita nella definizione dell'unità di misura delle lunghezze. La forma (4.2) pertanto definisce la geometria della superficie sferica in maniera intrinseca, cioè senza riferimento allo spazio 3D euclideo in cui la sfera è immersa. Non esiste alcuna trasformazione di coordinate $(\theta, \phi) \rightarrow (\xi, \eta)$ che permetta di scrivere la (4.2) nella forma euclidea, $d\ell^2 = d\xi^2 + d\eta^2$. È facile verificare che lo spazio descritto dalla (4.2) ha caratteristiche profondamente diverse dallo spazio euclideo 2D del piano. Infatti, preso come centro il punto posto al polo della sfera potremo scrivere l'equazione della circonferenza tracciata sulla superficie sferica come il luogo dei punti che hanno la stessa distanza dal centro. In pratica si tratta di calcolare la lunghezza di un *parallelo* alla colatitudine θ , che risulta pari a $2\pi R \sin\theta$. Daltra parte, il raggio della circonferenza tracciata sulla superficie sferica, ossia la distanza dei punti della circonferenza dal polo, è l'*arco di meridiano* $R\theta$ e quindi il rapporto tra circonferenza e raggio risulta $2\pi \sin\theta/\theta \leq 2\pi$. La lunghezza della circonferenza cresce fino a $\theta = \pi/2$, per poi diminuire fino a zero per $\theta = \pi$. Analogamente, l'elemento d'area del cerchio sulla superficie della sfera, cioè l'area della calotta sferica è:

$$dA = (R \sin\theta d\phi)(R d\theta) = R^2 \sin\theta d\theta d\phi$$

che integrato dà :

$$A = 2\pi R^2 (1 - \cos\theta).$$

Quindi l'area aumenta sempre raggiungendo il valore $4\pi R^2$ per $\theta = \pi$. Possiamo anche immaginare che il raggio della sfera tridimensionale, R , dipenda dal tempo: la geometria della superficie rimarrebbe la stessa e solo l'unità di misura delle lunghezze varierebbe nel tempo. Nello spazio euclideo 3D la situazione verrebbe descritta dicendo che la sfera si sta espandendo. Sulla superficie sferica 2D, una volta definito ad un certo istante il sistema di coordinate geografiche, ogni punto manterrebbe nel tempo il valore delle proprie coordinate, ma la distanza tra due punti (misurata sulla superficie sferica) varierebbe col tempo. Ancora una volta, non abbiamo bisogno di fare riferimento allo spazio euclideo 3D in cui la sfera è immersa. Questo tipo di sistema di riferimento, in cui ogni punto conserva inalterato il valore delle proprie coordinate al passare del tempo, viene detto sistema *comovente* ed è particolarmente adatto in cosmologia. Di fatto esso viene adottato in tutti i modelli cosmologici. Le precedenti considerazioni si generalizzano facilmente al caso degli spazi omogeni e isotropi tridimensionali. Basta infatti considerare una sfera 3D immersa in un ipotetico spazio euclideo quadridimensionale, descritto dalle coordinate (x, y, z, w) . L'equazione della sfera sarà

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = R^2$$

. Procedendo come sopra, avremo:

$$\begin{aligned} d\ell^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2 \\ &= dx^2 + dy^2 + dz^2 + \frac{(xdx + ydy + zdz)^2}{R^2 - (x^2 + y^2 + z^2)} \end{aligned}$$

Passando a coordinate polari nello spazio geometrico 3D

$$\begin{aligned} x &= r \sin\theta \cos\phi \\ y &= r \sin\theta \sin\phi \end{aligned}$$

$z = r \cos \theta$
 si ottiene;

$$\begin{aligned} d\ell^2 &= dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 + \frac{r^2 dr^2}{R^2 - r^2} \\ &= \frac{R^2}{R^2 - r^2} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \end{aligned}$$

dove si è posto $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$. La precedente equazione si può mettere sotto la forma:

$$d\ell^2 = R^2 \left(\frac{d(r/R)^2}{1 - (r/R)^2} + (r/R)^2 d\Omega^2 \right)$$

Convenendo di misurare le distanze rispetto a R e indicando ancora con r la quantità adimensionale r/R , si arriva alla forma finale:

$$d\ell^2 = R^2 \left(\frac{dr^2}{1 - r^2} + r^2 d\Omega^2 \right).$$

Ricordando che la forma dell'elemento di linea nello spazio euclideo 3D si può scrivere $d\ell^2 = R^2(dr^2 + r^2 d\Omega^2)$, dove r è ancora la coordinata radiale adimensionale, si vede che i casi euclideo e sferico si possono riunire nella forma:

$$d\ell^2 = R^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right), \quad (4.3)$$

dove $k = 0$ nel caso euclideo e $k = 1$ nel caso sferico. R può essere una funzione del tempo, in analogia a quanto discusso per il caso 2D. In tal caso la coordinata radiale adimensionale r è definita rispetto ad un generico valore R_0 (il valore numerico di una coordinata può essere qualsiasi e si conserva nel tempo per un sistema comovente), mentre $R = R(t)$.

Abbiamo dunque trovato due geometrie nello spazio 3D che obbediscono alla condizione di essere omogenee ed isotrope. Robertson e Walker hanno dimostrato che esiste soltanto un altro caso. L'elemento di linea anche in questo caso può essere messo nella forma (4.3), con $k = -1$. La superficie corrispondente nel caso 2D sarebbe quella di un iperboloide.

Si può quindi concludere che la forma più generale dell'intervallo infinitesimo tra due eventi per descrivere i modelli cosmologici è:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right) \quad (4.4)$$

Questa è la cosiddetta metrica di Robertson-Walker (RW), dove (r, θ, ϕ) sono coordinate adimensionali comoventi.

La validità della metrica di RW può venire immediatamente verificata su due test cruciali: lo spostamento verso il rosso delle righe spettrali (*redshift*) e la legge di Hubble.

Osserviamo innanzitutto che la base osservativa dell'espansione dell'Universo è costituita dalla misura dello spostamento verso il rosso delle righe spettrali emesse da galassie di cui si conosce la distanza. Il secondo passo per giungere alla legge di Hubble, cioè la proporzionalità tra velocità di recessione e distanza, deriva da un'interpretazione del *redshift* in termini di effetto Doppler, per di più nella sua versione non relativistica. In RG tuttavia le traiettorie dei fotoni e l'eventuale variazione della loro frequenza sono completamente determinate dalla metrica. La possibilità di ricavare la relazione data dall'Eq. (2.4) rappresenta dunque un buon banco di prova per la validità della metrica di RW. Consideriamo l'emissione di un treno d'onde da parte di una galassia tra gli istanti t_e e $t_e + dt_e$ e supponiamo che lo stesso treno d'onde sia ricevuto da un osservatore posto su un'altra galassia, che supporremo situata nell'origine delle coordinate. Ciascuna delle due galassie mantiene inalterato il valore delle proprie coordinate spaziali, visto che abbiamo adottato un sistema di coordinate comoventi. Siccome l'osservatore è situato nell'origine, il raggio di luce incidente si muove radialmente e quindi $d\theta = d\phi = 0$. La propagazione di un raggio luminoso è espressa dall'equazione $ds = 0$ e nella metrica di RW questo implica:

$$\frac{cdt}{a(t)} = -\frac{dr}{(1 - kr^2)^{1/2}},$$

dove il segno meno tiene conto del fatto che il raggio luminoso si muove radialmente verso l'origine cioè che r decresce durante il tragitto. Integrando la precedente equazione tra l'evento inizio dell'emissione (t_e, r_e) e l'evento inizio dell'osservazione $(t_0, 0)$ si ottiene :

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} = -\int_{r_e}^0 \frac{dr}{(1 - kr^2)^{1/2}}.$$

Analogamente se consideriamo gli eventi relativi alla fine dell'emissione e della ricezione del treno donde avremo:

$$\int_{t_e+dt_e}^{t_0+dt_0} \frac{cdt}{a(t)} = -\int_{r_e}^0 \frac{dr}{(1 - kr^2)^{1/2}}.$$

Siccome come già detto, il valore delle coordinate di entrambe le galassie rimane costante nel tempo (non la distanza fisica, che cambia col tempo), i due integrali a secondo membro delle precedenti equazioni sono identici. Eguagliando i primi membri si ottiene facilmente:

$$\int_{t_0}^{t_0+dt_0} \frac{cdt}{a(t)} = \int_{t_e}^{t_e+dt_e} \frac{cdt}{a(t)},$$

cioè, dato che gli integrali sono estesi a intervalli infinitesimi:

$$\frac{dt_0}{a(t_0)} = \frac{dt_e}{a(t_e)}$$

Ricordiamo ora che il prodotto νdt rappresenta il numero di oscillazioni contenute nel treno onde, numero che non cambia durante il tragitto. Quindi $\nu_e dt_e = \nu_0 dt_0$, da cui:

$$\frac{dt_e}{dt_0} = \frac{\nu_0}{\nu_e} = \frac{\lambda_e}{\lambda_0} = \frac{a(t_e)}{a(t_0)}$$

e infine

$$z = \frac{\lambda_o - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{\lambda_o}{\lambda_e} - 1 = \frac{a(t_o)}{a(t_e)} - 1. \quad (4.5)$$

La metrica di RW ci permette dunque di prevedere l'esistenza del redshift come effetto dell'espansione dell'Universo, Eq. (2.4), senza far ricorso a interpretazioni in termini di effetto Doppler.

Per verificare che la legge di Hubble è correttamente prevista dalla metrica di RW consideriamo la *distanza propria*, $\ell(t)$, cioè la distanza che separa, ad un determinato istante, due punti che hanno le stesse coordinate θ e ϕ , nell'ambito di tale metrica. Si avrà evidentemente:

$$\ell(t) = a(t) \int \frac{dr}{(1 - kr^2)^{1/2}} = a(t)f(r, k). \quad (4.6)$$

Derivando la precedente equazione si ottiene:

$$\frac{d\ell}{dt} = \frac{da}{dt} f(r, k) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \ell(t) = H(t)\ell(t),$$

cioè la corretta espressione della legge di Hubble. 1

5 I modelli di Friedmann e il modello standard

5.1 Le equazioni di Friedmann

La metrica di RW descritta nel precedente capitolo determina completamente il primo membro delle equazioni di Einstein, cioè il tensore $G_{\mu\nu}$. Per affrontare il problema cosmologico secondo lo schema delineato nel Cap.3, è necessario ora scegliere la forma corretta del tensore $T_{\mu\nu}$ che rappresenta la distribuzione delle sorgenti fisiche della gravità. Nel caso in cui si adotti un modello fluido si può dimostrare che il tensore energia-impulso assume la forma:

$$T_{\mu\nu} = (P + \rho c^2)u_\mu u_\nu - P g_{\mu\nu} \quad (5.1)$$

dove

$$u_\mu = \frac{dx_\mu}{ds} = \frac{dx_\mu}{cd\tau}$$

è la quadrivelocità (τ è il tempo proprio). Si osservi che ρc^2 è la densità di energia totale e comprende quindi tutte le forme di energia, qualunque sia la loro natura, e che sia ρ che P sono costanti nello spazio, ma possono essere funzioni del tempo.

In un sistema di coordinate comoventi, la sola componente della quadrivelocità diversa da zero è $u_0 = 1$. Introducendo questa espressione nelle equazioni di Einstein la scelta $\mu = \nu = 0$ determina una prima equazione, mentre le scelte $\mu = \nu = 1, 2, 3$ producono tutte la stessa equazione, cosa non sorprendente vista l'omogeneità e l'isotropia dello spazio geometrico. Le equazioni risultanti, le cosiddette *equazioni di Friedmann* sono:

$$\frac{\dot{a}^2 + kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3c^2}(\rho c^2) \quad (5.2)$$

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\rho c^2 + 3P)a \quad (5.3)$$

Si osservi il nuovo ruolo che la pressione assume in RG. Nell'equazione per \ddot{a} il termine contenente P appare sommato a ρc^2 e quindi la pressione appare come una sorgente aggiuntiva di gravità, in contrasto con la meccanica newtoniana, dove la pressione agisce in senso contrario alla gravità. Questo tuttavia non è sorprendente, poichè la pressione essa stessa è una forma di energia (è infatti associata all'energia cinetica del moto disordinato) e deve quindi essere conteggiata fra le sorgenti della gravità.

Poichè nelle due equazioni di Friedmann compaiono le incognite $a(t)$, $\rho(t)$ e $P(t)$ (oltre alla costante k), per risolverle sarà necessario avere un'equazione di stato cioè una relazione tra P e ρ .

Storicamente le equazioni di Friedmann sono state scritte e risolte prima della scoperta di Hubble e quindi all'epoca avevano un po' il sapore di un problema accademico. Einstein

infatti cercava delle soluzioni statiche, in accordo con quanto noto in quel periodo. Tuttavia le equazioni di Friedmann non ammettono soluzioni di questo tipo. Questo risulta immediatamente dalla (5.3) ponendo $\ddot{a} = 0$. In tal caso si ottiene infatti la condizione $\rho c^2 + 3P = 0$ che non può essere soddisfatta poichè sia P che ρ sono quantità definite positive.

Le equazioni di Einstein possono tuttavia essere modificate in modo da ammettere soluzioni statiche. Questo si ottiene aggiungendo al tensore $G_{\mu\nu}$ al primo membro (quello che contiene le caratteristiche geometriche) un termine proporzionale a $g_{\mu\nu}$, che per motivi di convenienza viene scritto nella forma $c^2\Lambda g_{\mu\nu}$, dove Λ è una costante, detta *costante cosmologica*. Si noti che la presenza di questo termine introduce nella teoria un parametro aggiustabile, cosa che Einstein giudicava esteticamente sgradevole.

A seguito dell' introduzione della costante cosmologica le equazioni di Friedmann vengono modificate. Di fatto esse mantengono la struttura delle (5.2) e (5.3) pur di sostituire P e ρ con P' e ρ' , dove

$$P' = P + P_\Lambda = P - \frac{\Lambda c^4}{8\pi G} \quad (5.4)$$

$$\rho' = \rho + \rho_\Lambda = \rho + \frac{\Lambda c^2}{8\pi G} \quad (5.5)$$

Esplicitamente:

$$\dot{a}^2 + kc^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}(\rho c^2 + \rho_\Lambda c^4)a^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \left([\rho c^2 + \frac{\Lambda c^4}{8\pi G}] a^2 \right) \quad (5.6)$$

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2} [(\rho + \rho_\Lambda)c^2 + 3(P + P_\Lambda)] = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\rho c^2 + 3P - \frac{\Lambda c^4}{4\pi G})a. \quad (5.7)$$

La condizione per l'esistenza di un modello statico diviene ora:

$$\rho c^2 + 3P - \frac{\Lambda c^4}{4\pi G} = 0,$$

e questa può essere soddisfatta da un'opportuna scelta della costante cosmologica senza violare il carattere positivo definito di densità e pressione. In particolare, se la pressione è trascurabile rispetto alla densità di energia, il che equivale a porre formalmente $P = 0$ (modelli di *polvere*), si ottiene $\rho = (\Lambda c^2)/(4\pi G)$ e, sostituendo questa espressione nella (5.6):

$$k = \Lambda a^2.$$

k è quindi una quantità positiva e, potendo assumere solo i valori $0, \pm 1$, dovrà essere $k = 1$ e quindi $\Lambda = 1/a^2$. Si vede dunque che l'introduzione della costante cosmologica equivale a postulare l'esistenza di una nuova sorgente di energia, la cui natura è peraltro sconosciuta, con densità $\rho_\Lambda c^2$, che obbedisce all'insolita equazione di stato:

$$P_\Lambda = -\rho_\Lambda c^2. \quad (5.8)$$

Ricordando il commento dopo la (5.2), ci si rende conto che una pressione *negativa* agisce in senso *contrario* alla gravità ed assume quindi il ruolo che in meccanica newtoniana tipico della pressione positiva.

Equazioni di stato di questo tipo sono note in teoria quantistica dei campi e corrispondono ad un particolare tipo di vuoto. In tempi recenti si è diffuso il costume di indicare con il nome di *energia oscura* una qualunque forma di energia che obbedisca all'equazione di stato $P = -\rho c^2$.

L'introduzione della costante Λ , oltre a permettere di ottenere un modello statico con la scelta di un opportuno valore, amplia la rosa di modelli possibili. Infatti, se non siamo interessati alla soluzione statica, Λ può, in linea di principio, avere un valore qualunque, positivo o negativo. A titolo di esempio di modelli *esotici* possibili (ma si tratta di un esempio che ci tornerà utile in seguito), si consideri il caso in cui le sole sorgenti della gravità siano quelle legate alla presenza di Λ . La (5.7) con $P = \rho = 0$ dà:

$$\ddot{a} = \frac{\Lambda c^2}{3} a \Rightarrow a \propto e^{t/\tau}, \quad \tau = \left(\frac{3}{\Lambda c^2} \right)^{1/2} \quad (5.9)$$

La caratteristica importante di questo modello è legata al fatto che la presenza di una pressione negativa, P_Λ , ha cambiato il segno dell'accelerazione, dando luogo ad un'espansione esponenziale.

Dopo la scoperta di Hubble, che eliminava la necessità di trovare soluzioni statiche, Einstein ripudiò il termine cosmologico (dichiarando che era stato "il più grande errore della mia vita"). Tuttavia, recenti osservazioni cosmologiche sembrano richiedere la reintroduzione del termine cosmologico nelle equazioni di Einstein. Dopotutto, non era stato un errore ...

Per cercare di dare un'interpretazione fisica semplice alle equazioni di Friedmann, cerchiamo di ricavare la prima di esse in un modello newtoniano. Consideriamo dapprima il fatto che il modello omogeneo e isotropo di universo che stiamo considerando è un modello a simmetria sferica, in cui ogni punto può essere scelto come centro. D'altra parte, uno dei risultati salienti della teoria newtoniana della gravitazione stabilisce che una distribuzione sfericamente simmetrica di materia non crea campo gravitazionale all'interno di una cavità sferica: in altre parole, il campo gravitazionale in un determinato punto di una superficie sferica è creato solo dalla materia contenuta all'interno della sfera stessa. Questa proprietà rimane valida anche in RG nell'ipotesi di uno spazio geometrico omogeneo e isotropo.

L'omogeneità e l'isotropia sono inoltre proprietà che non vengono alterate nel tempo se vale la legge di Hubble. Per rendercene conto, consideriamo la variazione della densità all'interno di una sfera di raggio $R = R(t)$. La densità sarà data da

$$\rho = \frac{M}{(4\pi/3)R^3},$$

da cui derivando otteniamo:

$$\dot{\rho} = -3\frac{\rho}{R}\dot{R} = -3\rho H,$$

dove si è fatto uso della legge di Hubble : $\dot{R} = v = HR$. Poichè sia H che ρ non dipendono dalle coordinate spaziali, ne segue che, se vale la legge di Hubble e se ρ non dipende dalle coordinate spaziali ad un certo istante, tale proprietà è mantenuta a tempi successivi.

Consideriamo ora l'equazione di moto di una particella che si trovi sulla superficie di una sfera di raggio $R = R(t)$ e che partecipi solidalmente al moto di espansione di tale sfera. Si avrà: $\ddot{R} = -(GM)/R^2$, il cui integrale primo si scrive

$$\dot{R}^2 - \frac{2GM}{R} = C = cost$$

Esprimendo la massa in termini della densità totale , $M = (\rho + \rho_\Lambda)4\pi R^3/3$, si vede che la precedente equazione è identica all'equazione di Friedmann (5.6). Quello che in questa trattazione ovviamente manca è il legame tra la costante d'integrazione, C , e la costante k che definisce la geometria nella metrica di RW.

Un'interpretazione semplice dell'Eq. (5.7) deriva dal considerare il fatto che l'espansione dell'universo è necessariamente un'espansione adiabatica (non c'è nulla di esterno con cui scambiare calore !). Per una tale espansione, il Primo Principio della Termodinamica ci dice che :

$$PdV = -dU,$$

o, derivando rispetto al tempo:

$$P\frac{dV}{dt} = -\frac{dU}{dt}.$$

D'altra parte il volume è proporzionale ad a^3 e l'energia interna, U , può essere scritta come $U = \rho c^2 V \propto \rho c^2 a^3$. Si avrà quindi:

$$P\frac{da^3}{dt} = -\frac{d(\rho c^2)}{dt} \rightarrow 3Pa^2\dot{a} = -(\dot{\rho}c^2 a^3 + 3\rho c^2 a^2 \dot{a}). \quad (5.10)$$

Derivando rispetto al tempo la (5.2) e sostituendo l'espressione per $\dot{\rho}$ nella precedente relazione si ottiene la (5.7), avendo cura di sostituire P con $P' = P + P_\Lambda$.

5.2 Le soluzioni delle equazioni di Friedmann

Come già osservato in precedenza, per ottenere le soluzioni delle equazioni di Friedmann è necessario conoscere la relazione che intercorre tra P e ρ . Una maniera comoda di parametrizzare tale relazione consiste nello scrivere

$$P = w\rho c^2 \quad (5.11)$$

con w costante. Questa forma raggruppa diversi casi interessanti: $w = 0$, che corrisponde a modelli di polvere, $w = 1/3$ che si applica al caso in cui il sistema sia composto di particelle ultra-relativistiche e infine $w = 1$, che corrisponde a materia con il massimo di rigidità compatibile con la relatività. In quest'ultimo caso infatti, la velocità del suono sarebbe uguale alla velocità della luce. Anche l'equazione di stato di un gas non relativistico a temperatura T può essere messa nella forma (5.11). Infatti avremo:

$$P = (k/m)\rho_m T \quad e \quad \rho c^2 = \rho_m c^2 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{kT}{mc^2}\right).$$

Ponendo $\theta = (kT)/(mc^2)$ potremo scrivere $\rho_m = \rho(1 + \frac{3}{2}\theta)^{-1}$ e finalmente:

$$P = \frac{\theta}{1 + \frac{3}{2}\theta} \rho c^2.$$

P ha quindi un'espressione del tipo (5.11), con

$$w = \frac{\theta}{1 + \frac{3}{2}\theta}.$$

Si verifica facilmente che $w \ll 1$ per $T < 10^9 K$. Notiamo infine che $w = -1$ rappresenta il caso in cui si abbia soltanto la costante cosmologica o, più in generale, sia dominante la componente di energia oscura.

Sostituendo la forma parametrica dell'equazione di stato (5.11) nella (5.10) si ottiene:

$$w\rho c^2 \frac{da^3}{dt} = -\frac{d(\rho c^2 a^3)}{a^3} \quad \Rightarrow \quad \frac{da^3}{a^3} = -\frac{d\rho}{(1+w)\rho},$$

che integrata dà:

$$\rho a^{3(1+w)} = \text{cost.} \quad (5.12)$$

La precedente relazione ci dice che per un Universo di pura materia ($w = 0$) $\rho \propto a^{-3}$, mentre per un Universo di pura radiazione, o comunque composto solo da particelle ultra-relativistiche, per esempio fotoni e neutrini, $w = 1/3$ e $\rho \propto a^{-4}$. La costante cosmologica corrisponde ad una densità costante che non subisce gli effetti dell'espansione. Queste considerazioni ci fanno capire che la radiazione sarà la sorgente di energia dominante per valori di a che tendono a zero, mentre la costante cosmologica diventerà la caratteristica dominante per $a \rightarrow \infty$.

Poichè nei modelli di Friedmann il redshift è univocamente legato al fattore di scala, a , possiamo riscrivere la precedente relazione in termini del redshift, $z = (a_0/a) - 1$,

$$\rho(1+z)^{-3(1+w)} = cost \quad (5.13)$$

Consideriamo ora l'equazione (5.2) che riscriviamo nella forma:

$$kc^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho a^2 - \dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho a_0^2 - \dot{a}_0^2, \quad (5.14)$$

dove la seconda eguaglianza segue dall'aver valutato la costante del primo membro al momento attuale $t = t_0$ (d'ora in poi il pedice $_0$ indica che le grandezze sono valutate al tempo presente). Definendo la densità critica, ρ_c , e il parametro di densità, Ω come:

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}, \quad \Omega = \frac{\rho}{\rho_c} \quad (5.15)$$

dove $H = H(t) = \dot{a}(t)/a(t)$ è il parametro di Hubble già introdotto in precedenza, la precedente equazione si può scrivere:

$$kc^2 = H^2 a^2 (\Omega - 1) = H_0^2 a_0^2 (\Omega_0 - 1). \quad (5.16)$$

Poichè k può assumere solo i valori $0, +1, -1$, si vede che questa costante è determinata dal valore di $(\Omega_0 - 1)$. Quindi, *un Universo con curvatura spaziale positiva ha una densità maggiore di quella critica, mentre un Universo con curvatura spaziale negativa ha una densità inferiore a quella critica*. Se la densità assume esattamente il valore critico, la geometria dell'Universo è piatta, cioè euclidea. Da questa considerazione discende l'importanza di stimare il valore della densità di massa-energia al momento attuale. Il valore numerico della densità critica è:

$$\rho_{c0} = \rho_c(t_0) = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \simeq 1.88 \times 10^{-29} h^2 g cm^{-3},$$

o, usando unità più direttamente legate all'osservazione :

$$\rho_{c0} \simeq 2.76 \times 10^{11} h^2 M_{\odot} \text{ Mpc}^{-3}$$

Con $h = 0.72$ (vedi Cap. 1) le precedenti espressioni danno

$$\rho_{c0} \simeq 9.75 \times 10^{-30} \text{ g cm}^{-3} \simeq 1.43 \times 10^{11} M_{\odot} \text{ Mpc}^{-3}$$

Rinviando al seguito la discussione dei contributi noti o ipotizzati alla densità totale al momento attuale, riscriviamo la (5.14) utilizzando per kc^2 l'espressione data dalla seconda uguaglianza nella (5.16), ottenendo:

$$\dot{a}^2 = H^2 a^2 \Omega - H_0^2 a_0^2 (\Omega_0 - 1).$$

Utilizzando le definizioni di H e Ω , possiamo scrivere

$$H^2 \Omega = H_0^2 \Omega_0 \frac{\rho}{\rho_0},$$

e quindi

$$\dot{a}^2 = H_0^2 a_0^2 \left[\Omega_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right) \left(\frac{a}{a_0} \right)^2 + (1 - \Omega_0) \right], \quad (5.17)$$

dove, ricordiamolo, ρc^2 rappresenta la densità **totale** di massa-energia. Supponiamo che i contributi a tale densità provengano da materia ultrarelativistica, da materia non relativistica a pressione nulla (sostanzialmente galassie) e dall'energia oscura (cioè dall'esistenza di una costante cosmologica). Scriveremo dunque:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{\rho_{r0} \left(\frac{a_0}{a} \right)^4 + \rho_{m0} \left(\frac{a_0}{a} \right)^3 + \rho_{\Lambda}}{\rho_{r0} + \rho_{m0} + \rho_{\Lambda}}.$$

Poichè:

$$\rho_{r0} + \rho_{m0} + \rho_{\Lambda} = \rho_{c0} \Omega_0,$$

la forma finale dell'equazione di Friedmann (5.17) è:

$$\dot{a}^2 = H_0^2 a_0^2 \left[\Omega_{r0} \left(\frac{a_0}{a} \right)^2 + \Omega_{m0} \left(\frac{a_0}{a} \right) + \Omega_{\Lambda} \left(\frac{a}{a_0} \right)^2 + (1 - \Omega_0) \right]. \quad (5.18)$$

Se esaminiamo in dettaglio i termini che compaiono a secondo membro della (5.18) vediamo che i primi tre sono definiti positivi, mentre il quarto può diventare negativo quando $\Omega_0 > 1$. La dinamica dell'universo dipende dunque dal peso relativo dei vari termini e la discussione tradizionale delle soluzioni dell'equazione di Friedmann coinvolgeva una completa casistica delle possibilità. Oggi tuttavia, grazie alle più recenti osservazioni, si conoscono con buona approssimazione i valori delle costanti che appaiono nella (5.18) e quindi non ha molto senso esaminare tutti i casi possibili, ma conviene piuttosto dedurre le conseguenze

che i dati osservativi suggeriscono. Riservandoci di ritornare in seguito brevemente sulla determinazione delle costanti Ω_0 , Ω_{r0} , e Ω_{m0} , cioè del valore del parametro globale di densità,

$$\Omega_0 = \Omega_{r0} + \Omega_{m0} + \Omega_\Lambda \quad (5.19)$$

e dei contributi separati di particelle ultrarelativistiche (essenzialmente fotoni e neutrini) e di materia non relativistica (essenzialmente galassie), diamo i valori attualmente (2003) accettati per tali costanti e per la costante di Hubble, $H_0 = h \times 100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$:

$$\begin{aligned} h &= 0.72 \pm 0.07, \\ \Omega_{r0} &\simeq 4.15 \times 10^{-5}, \\ \Omega_{m0} &\simeq 0.274 \pm 0.044, \\ \Omega_0 &= 1.02 \pm 0.02, \\ \Omega_\Lambda &= 0.73 \pm 0.04, \end{aligned} \quad (5.20)$$

dove il valore di Ω_Λ è stato dedotto dai precedenti utilizzando la (5.19).

Il modello di Friedmann ottenuto adottando i valori suddetti viene chiamato *modello standard* ed è attualmente il modello cosmologico di riferimento. Esso è in grado di spiegare correttamente un notevole numero di osservazioni, anche se vi sono alcuni aspetti, la cui trattazione esula da questa breve introduzione, che sembrano costringere a delle revisioni più o meno drastiche del modello stesso.

Ritornando all'analisi della (5.18), si vede che l'ultimo termine può essere trascurato e la dinamica dell'universo può essere divisa in varie fasi, a seconda che uno o l'altro dei termini rimanenti sia dominante. Prima di analizzare le successive fasi, osserviamo che la derivata seconda di $a(t)$, che otteniamo dalla (5.18) nella forma

$$2\ddot{a} = H_0^2 a_0 \left[-2 \Omega_{r0} \left(\frac{a_0}{a} \right)^3 - \Omega_{m0} \left(\frac{a_0}{a} \right)^2 + 2 \Omega_\Lambda \left(\frac{a}{a_0} \right) \right], \quad (5.21)$$

è sempre negativa per

$$\left(\frac{a_0}{a} \right)^3 \gtrsim \frac{2\Omega_\Lambda}{\Omega_{m0}} \simeq 5.33,$$

cioè per

$$z \gtrsim (5.33)^{1/3} - 1 \simeq 0.75 \quad (5.22)$$

In epoche precedenti a quella cui corrisponde tale *redshift* $\ddot{a} < 0$ e la curva $a(t)$ in funzione di t rivolge la concavità verso il basso. Esiste quindi un tempo **finito** nel passato in cui tale curva interseca l'asse dei tempi, cioè un valore di t per cui $a = 0$. Questo istante può evidentemente essere preso come origine dei tempi e viene indicato come l'istante del Grande Scoppio (*Big Bang*). Nel seguito misureremo *sempre* i tempi a partire dal Big Bang.

Come si vede, i modelli di Friedmann sono modelli esplosivi che partono da una densità infinita con una velocità iniziale infinita. E' chiaro che un'estrapolazione di tali modelli a $t = 0$ è altamente problematica, vista la loro natura di modelli basati sulla fisica classica (cioè

non quantistica) e il fatto che la fisica a densità altissime non è conosciuta. Potremo tuttavia estrapolare con sufficiente certezza fino a densità dell'ordine di quelle nucleari. Per stimare il *redshift*, z_n che compete a tale epoca, utilizziamo la relazione $\rho_m = \rho_{m0}(a_0/a)^3 = \rho_{m0}(1+z)^3$ e poniamo $\rho_m \simeq 10^{15} \text{ g cm}^{-3}$, cioè la densità tipica dei nuclei. Si ottiene così $z_n \simeq 5 \times 10^{14}$ e questo ci dice che possiamo ragionevolmente estrapolare i modelli di Friedmann almeno fino a questo *redshift*. Per vedere a quale tempo corrisponde il *redshift* appena trovato, osserviamo che in questa epoca l'evoluzione dell'universo è dominata dalla radiazione. Questo infatti è il termine più importante del secondo membro della (5.18), almeno fino a quando esso non diviene dello stesso ordine del successivo, cioè per

$$\frac{a}{a_0} = \frac{\Omega_{r0}}{\Omega_{m0}} \simeq 1.3 \times 10^{-4},$$

a cui corrisponde un *redshift* di $3750 \ll z_n$. In questa fase la soluzione della(5.18) con $\Omega_0 = 1$:

$$\dot{a}^2 \simeq H_0^2 a_0^2 \left[\Omega_{r0} \left(\frac{a_0}{a} \right)^2 \right],$$

è data da

$$\frac{a}{a_0} = (4H_0^2 \Omega_{r0})^{1/4} t^{1/2} \simeq 1.7 \times 10^{-10} t^{1/2},$$

con t misurato in secondi. Utilizzando questa espressione vediamo che il *redshift* z_n corrisponde ad un tempo $t_n \simeq 10^{-10} \text{ s}$. Possiamo quindi concludere che la descrizione dell'universo basata su una teoria classica della gravità può essere considerata affidabile a partire da tempi dell'ordine di 10^{-10} secondi dopo il *Big Bang*.

Un'altra conseguenza interessante del predominio della radiazione nelle fasi iniziali dell'universo è la possibilità di calcolare la temperatura in funzione del tempo. Infatti, dalla teoria del corpo nero sappiamo che la densità di energia radiante è proporzionale alla quarta potenza della temperatura, mentre la (5.13) con $w = 1/3$ ci dice che $\rho_r c^2 \propto a^{-4}$. da cui segue

$$T \propto a^{-1},$$

e quindi si potrà scrivere

$$\frac{T}{T_0} = \frac{a_0}{a} = (4H_0^2 \Omega_{r0})^{-1/4} t^{-1/2},$$

cioè

$$T(K) \simeq T_0 \frac{5.78 \times 10^9}{t^{1/2}} \simeq 1.6 \times 10^{10} t^{-1/2}. \quad (5.23)$$

Un secondo dopo il *Big Bang* l'universo aveva dunque una temperatura di circa 16 miliardi di gradi.

Come abbiamo già visto, ad un *redshift* $\simeq 3750$, cioè a circa 2×10^4 anni dopo il *Big Bang*, la materia comincia a prendere il sopravvento sulla radiazione e si entra in una fase in cui l'evoluzione dell'universo è dominata dalla materia, fase che dura fino a quando il termine proporzionale a Ω_Λ diventa dello stesso ordine di quello che lo precede a secondo membro della (5.18), cioè per $z \simeq 0.67$ (vedi Eq. (5.22)). Se ne deduce che al momento attuale ($z = 0$)

siamo già entrati nella fase in cui l'influenza dominante è quella della costante cosmologica o dell'energia oscura. Dalla (5.21) ricaviamo che $\ddot{a} > 0$ e quindi attualmente l'espansione dell'universo sta **accelerando** esponenzialmente. Infatti dalla (5.21) abbiamo:

$$\ddot{a} = H_0^2 \Omega_\Lambda a = (\Lambda c^2/3) a$$

la cui soluzione è appunto:

$$a(t) = a(t_i) e^{(t-t_i)/\tau},$$

dove $\tau = \sqrt{3/\Lambda c^2}$ [vedi anche la (5.9)] e t_i è il tempo a cui ha inizio la fase di vuoto.

Mentre l'origine esplosiva è comune a tutti i modelli di Friedmann, la *durata* dell'intervallo temporale che ci separa dal Big Bang, cioè l'età attuale dell'Universo, t_0 , dipende dal modello adottato. Dalla definizione della costante di Hubble, $H_0 = \dot{a}_0/a_0$ si vede che $1/H_0$ sarebbe il valore dell'età dell'Universo se la velocità di espansione fosse costante. Numericamente

$$1/H_0 \simeq 9.78 \times 10^9 h^{-1} \text{ anni} \simeq 13.6 \times 10^9 \text{ anni},$$

con $h = 0.72$.

Si osservi che questo valore dell'età dell'Universo sarebbe sovrastimato se l'accelerazione fosse sempre negativa, mentre potrebbe essere sottostimato nel caso in cui l'accelerazione (come sembra) divenga positiva a partire da una certa epoca.

5.3 Contributi alla densità di energia

Esaminiamo ora brevemente quali sono i contributi alla densità di energia che danno origine ai valori di Ω_{r0} , Ω_{m0} e Ω_Λ riportati nella (5.20).

Il valore di Ω_{r0} è ottenuto considerando il contributo dei fotoni della CBR e delle tre famiglie di neutrini che sopravvivono alle fasi iniziali dell'Universo. Questa componente è completamente trascurabile al giorno d'oggi.

La presenza di materia può essere messa in evidenza sia attraverso gli effetti gravitazionali che essa esercita nel suo intorno, che rivelando la radiazione emessa. E' evidente che il primo metodo permette di stimare la quantità di massa presente, indipendentemente dal fatto che essa emetta della radiazione o meno, mentre il secondo si applica evidentemente solo alla materia *luminosa*. Il procedimento comunemente adottato si basa sulla supposta conoscenza di una relazione tra la quantità media di materia (luminosa e non) e la radiazione totale emessa. La suddetta relazione ha la forma:

$$\rho_m = \ell \frac{M}{L}, \tag{5.24}$$

dove L è la luminosità dell'oggetto e M la sua massa. ℓ è la luminosità media per unità di volume della materia e M/L è il valor medio del rapporto tra massa e luminosità per la

categoria di oggetti considerata. La funzione universale di luminosità, ℓ , quantità nota con sufficiente precisione, vale

$$\ell = (2 \pm 0.2) \times 10^8 h L_{\odot} Mpc^{-1},$$

Le osservazioni mostrano che stelle meno massicce del Sole hanno un rapporto M/L minore di quello solare, mentre l'opposto è vero per stelle più massicce del Sole. Sulle base di queste stime, dovremmo concludere che, se il maggior contributo alla massa di una galassia venisse dalle stelle che la costituiscono, il rapporto M/L per le galassie dovrebbe attestarsi nell'intervallo $1 - 10M_{\odot}/L_{\odot}$. Di fatto, i valori per le galassie a spirale sono circa un ordine di grandezza maggiori e quelli per le ellittiche ancora più alti e questo spinge a pensare che la maggior parte della materia che costituisce le galassie non sia luminosa.

Una conferma di questa ipotesi viene dallo studio delle caratteristiche delle galassie a spirale. Una galassia di questo tipo appare formata da un disco circolare composto da stelle e gas che ruota intorno al suo centro. La distribuzione di massa nella galassia determina il campo gravitazionale in cui si muovono le varie componenti e quindi le loro velocità orbitali. Se consideriamo un corpo di massa m che si muove in un'orbita circolare di raggio r con velocità v e indichiamo con $M(r)$ la massa contenuta all'interno della sfera di raggio r , dall'equazione di moto avremo:

$$M(r) = \frac{rv^2}{G}.$$

Nel caso in cui la massa sia concentrata centralmente, e quindi il valore di M sia una costante indipendente da r , si ricava dalla precedente equazione $v \propto r^{-1/2}$. Nel caso di una galassia a spirale la materia è invece distribuita su una regione assai vasta che, come vedremo, supera largamente le dimensioni della galassia visibile.

Se la galassia non è vista esattamente di faccia, le stelle (o la materia emittente) situati ai lati opposti della galassia avranno redshift diversi a causa dell'effetto Doppler. Sfruttando questa circostanza è possibile ottenere una *curva di rotazione*, cioè un grafico delle velocità orbitali delle stelle in funzione della distanza dal centro. Tipicamente, le velocità orbitali non presentano il decremento con la distanza atteso per le orbite kepleriane, neppure quando le misure si estendono a distanze molto maggiori delle dimensioni visibili della galassia utilizzando l'emissione nella riga a $21cm$ dell'idrogeno. Si osserva invece una curva di rotazione piatta, $v = cost.$, che dimostra che la massa della galassia è distribuita su una regione più estesa di quella tracciata dalla sua emissione ottica, come mostrato in Figura 4.

Questo comportamento può essere spiegato supponendo che la galassia sia di fatto un sistema sferoidale con una distribuzione di densità che decresce come $\rho \propto r^{-2}$. Di conseguenza, la massa all'interno della sfera di raggio r è proporzionale a r e quindi $v = cost.$ Si ottengono così valori per il raggio della distribuzione dell'ordine o superiori a 10 volte il raggio del disco visibile e valori di M/L dell'ordine di $10^2 M_{\odot}/L_{\odot}$. Da quanto precede si può concludere che la maggior parte della materia delle galassie a spirale ha una luminosità assai minore di quella delle stelle, e che si tratta quindi di *materia oscura*.

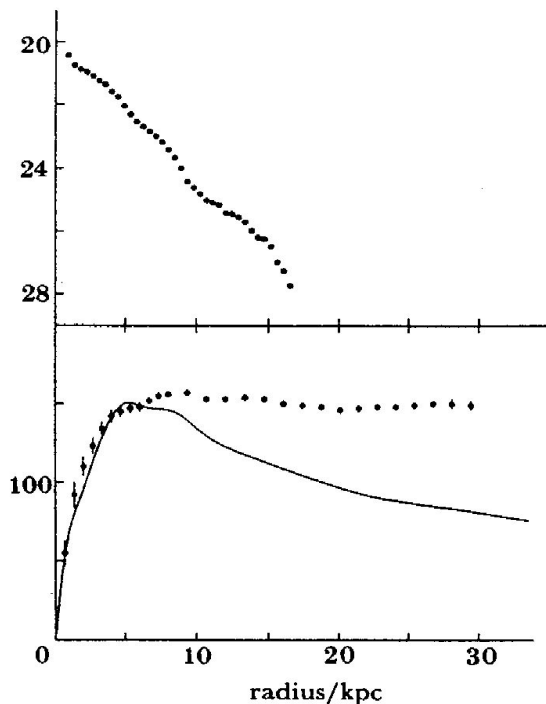


Figura 4: *In alto: grafico in scala logaritmica della distribuzione della luminosità di una galassia (NGC 3198) in funzione della distanza dal centro. In basso: i punti definiscono la curva di rotazione osservata e la linea a tratto intero la curva calcolata a partire dalla massa associata alla sola materia luminosa*

Le galassie ellittiche non presentano un'evidenza chiara di rotazione e quindi il metodo non è applicabile. Si possono tuttavia fare delle stime indirette che danno per M/L valori dell'ordine di qualche centinaio, sempre in unità solari. Quindi anche le galassie ellittiche sono costituite essenzialmente da materia oscura.

Si può infine stimare anche il valore del rapporto M/L per gli ammassi di galassie, che risulta dello stesso ordine di quello già ricavato per le galassie singole. Quindi il maggior contributo alla massa totale di un ammasso proviene dalle galassie che lo costituiscono. In conclusione, si può vedere che la stima di ρ_m si ottiene dal rapporto massa-luminosità per gli ammassi di galassie che, a causa delle loro ragguardevoli dimensioni, possono essere considerati rappresentativi della materia che costituisce l'Universo. Riunendo tutte queste osservazioni si giunge al già citato valore

$$\Omega_{m0} \simeq 0.274 \pm 0.044.$$

Se dunque la materia costituisse il contributo dominante alla densità di massa-energia dell'Universo, cioè se fosse assente il termine cosmologico, Ω_Λ , dovremmo concludere che $\Omega_0 \simeq \Omega_{m0} < 1$ e quindi il nostro Universo dovrebbe continuare ad espandersi indefinitamente, sia pure rallentando. Le osservazioni inoltre indicano che la materia è in maggioranza materia oscura. Ω_{m0} si riferisce infatti al contributo dovuto alla *totalità* della massa, sia essa

luminosa o oscura e qualunque sia la sua natura e quindi nulla ci dice circa la composizione della materia stessa.

E' possibile tuttavia ottenere una stima indipendente della quantità di materia *barionica*, cioè in ultima analisi della materia nella forma in cui la conosciamo sulla Terra. In estrema sintesi, questa stima si ottiene nel modo seguente. Il modello standard prevede che l'Universo attraversi una fase in cui vengono prodotti sia barioni che antibarioni dalla combinazione dei vari tipi di *quarks*. Barioni e antibarioni si annichilano vicendevolmente, ma poichè il numero totale di barioni supera quello degli antibarioni (il perchè di questa asimmetria non è chiaro) alla fine della fase di annichilazione rimane un residuo di barioni, che sono tutti e soli quelli contenuti nell'Universo attuale (il numero barionico si conserva e quindi non ne possono essere creati altri!). Non solo il numero barionico totale è fissato, ma lo è anche il rapporto tra il numero dei neutroni e quello dei protoni, che risulta pari a circa 1/7. A questa epoca la dinamica dell'Universo è ancora dominata dalla radiazione e la temperatura è dell'ordine di $10^{11}K$ (corrispondente a circa 1/10 di secondo dopo il Big Bang - vedi Eq. (5.23)). A questo punto divengono possibili le reazioni nucleari tra protoni e neutroni e comincia la *nucleosintesi primordiale*, che ha come risultato la formazione di elio e di altri elementi leggeri, quali il deuterio. La nucleosintesi primordiale non può tuttavia produrre elementi più pesanti. Infatti, sia la temperatura che la densità diminuiscono col tempo e viene quindi preclusa la possibilità di ottenere le condizioni necessarie per la bruciatura dell'elio e la conseguente formazione di elementi più pesanti quali carbonio, azoto, ossigeno Per ritrovare queste condizioni, bisognerà attendere la formazione delle stelle, nel cui interno possono verificarsi le condizioni appropriate per proseguire la nucleosintesi. Confrontando le previsioni dei calcoli sulla nucleosintesi primordiale basata sul modello standard con le osservazioni dell'abbondanza del deuterio, dell'elio e degli altri elementi leggeri e, in maniera più indiretta, ma molto precisa, dalle misure dell'anisotropia della CBR, si ottiene un valore del contributo *barionico* alla densità di massa:

$$\Omega_{b0} = 0.039 \pm 0.008.$$

Tenendo conto che $\Omega_{m0} = 0.274$, se ne deduce quindi che la materia barionica rappresenta solo il 13% della materia e questo naturalmente fa nascere la domanda: *qual'è la natura del rimanente 87%*? A tutt'oggi non ci sono risposte universalmente accettate, anche se sono state fatte proposte di vario genere, tutte basate su considerazioni teoriche sulla fisica, convenzionale e non, delle particelle elementari. Sia come sia, rimane il fatto che tutto sembra indicare che la materia che costituisce l'Universo è in maggioranza **oscura** e **non-barionica**.

D'altra parte, misure indipendenti, molto delicate, ma apparentemente affidabili, della polarizzazione della radiazione cosmica di fondo, permettono di concludere che il valore di Ω_0 , cioè del parametro di densità totale di massa-energia, è molto vicino all'unità (vedi la (5.20)). Siamo dunque costretti ad ammettere non solo che ci debba essere un contributo di energia oscura, $\Omega_\Lambda \neq 0$, ma anche che questo contributo sia dominante. Se queste stime verranno confermate, in particolare dalle misure che saranno effettuate dalla missione spaziale europea PLANCK (lancio previsto nel 2008), dovremo concludere che la materia costituisce solo una componente minoritaria della densità globale di massa-energia e che la materia barionica, cioè quella a noi familiare, rappresenta solo il 4% del totale. Se così è, nasce

evidentemente il problema di capire qual'è la natura dell'energia che sembra domini, ora e in futuro, la dinamica dell'Universo.

6 Conclusioni

Sperabilmente, questa brevissima introduzione ad un immenso argomento dovrebbe aver messo in luce alcuni punti che sono qui riassunti.

- La cosmologia non è un argomento ancora ben consolidato e di conseguenza è in continua evoluzione. Alcune (molte?) delle affermazioni contenute in questi appunti potrebbero cambiare a seguito di nuove osservazioni e dello sviluppo di nuove teorie.
- Il modello standard appare essere una buona base di partenza, ma è evidente che si tratta di un modello abbastanza primitivo dal punto di vista fisico. A ben pensare, l'unica fisica inclusa nel modello è quella della gravitazione. E' chiaro che un qualunque grado di realismo richiede un inserimento più dettagliato degli altri processi fisici che sappiamo essere importanti. Questo aspetto è particolarmente importante nel problema della formazione di strutture durante l'evoluzione del mezzo omogeneo postulato nel modello standard. Le strutture ci sono (stelle, galassie, ammassi, filamenti e vuoti) ed è logico chiedersi se esse possano formarsi come evoluzione di piccole perturbazioni del substrato omogeneo. Questo problema viene attualmente affrontato soprattutto per mezzo di simulazioni numeriche su supercalcolatori e questa sembra essere la via maestra per i prossimi anni.
- La natura della materia oscura e dell'energia oscura è in gran parte ignota. Considerando che la prima è la componente dominante della densità di materia e la seconda è determinante per l'evoluzione futura dell'Universo, è evidente che questo sarà il problema centrale della ricerca cosmologica a breve.

Infine, non è fuori luogo un'osservazione di tipo filosofico/logico. La cosmologia fisica (vedi Introduzione) si propone di *studiare la struttura e l'evoluzione dell'Universo osservabile utilizzando le leggi della fisica dedotte da esperienze condotte sulla Terra*. Queste leggi tuttavia si riferiscono **esclusivamente** alla materia **barionica**, che sembra essere una componente minoritaria della densità di energia cosmica. Di fatto stiamo supponendo, senza nessuna prova, che le stesse leggi si applichino anche a componenti della cui natura nulla sappiamo. La situazione è dunque altamente insoddisfacente da un punto di vista logico e non sarebbe sorprendente se alcune drastiche modifiche alle nostre idee si rendessero necessarie negli anni avvenire. Questa riflessione dovrebbe quantomeno frenare certi atteggiamenti trionfalistici che appaiono frequentemente sia nella letteratura popolare che in quella specialistica.