

APPUNTI ASTROFISICA TEORICA
Anno accademico 2008-09

Claudio Chiuderi

July 2, 2009

Questi appunti riguardano argomenti trattati durante il corso di Istituzioni di Astrofisica Teorica nell'anno accademico 2008-2009 che non sono reperibili (o lo sono in maniera diversa) nel testo di riferimento : "The Physics of Stars" di A.C. Phillips.

1 Modelli politropici

Consideriamo un sistema autogravitante, cioè un sistema di gas all'equilibrio le cui uniche forze in gioco siano quelle di pressione e attrazione gravitazionale, per il quale scriviamo l'equilibrio come:

$$-\nabla P + \rho \mathbf{g} = 0$$

Consideriamo il sistema all'equilibrio, quindi non ci devono essere moti d'insieme ($\mathbf{u} = 0$) e non vi deve essere una dipendenza esplicita dal tempo ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$). Sotto queste ipotesi si può pensare che la simmetria del sistema sia di tipo sferico, per cui riscriviamo l'equilibrio come:

$$-\frac{dP}{dr} - \rho(r)g(r) = 0$$

In realtà l'ipotesi di sfericità non è completamente fondata in quanto il moto di rotazione intorno ad un asse ed eventuali campi magnetici possono introdurre, oltre a direzioni privilegiate nello spazio, anche delle deformazioni che però, essendo piccole, trascureremo. Sfruttando il teorema di Gauss possiamo descrivere l'andamento dell'accelerazione di gravità in funzione della coordinata radiale:

$$\mathbf{g}(r) = -G \frac{m(r)}{r^2} \mathbf{e}_r$$

Dove la massa in funzione di r si può scrivere come:

$$m(r) = \int_0^r \rho(r) 4\pi r^2 dr \quad (1.1)$$

Riscriviamo quindi l'equilibrio come:

$$G \frac{m(r)\rho(r)}{r^2} - \frac{dP}{dr} = 0 \quad (1.2)$$

In questo modo abbiamo un'equazione in due incognite (ρ , P): manca un'equazione per poter chiudere il sistema. Facciamo l'ipotesi *barotropica* cioè si supponiamo che la pressione dipenda dalla densità e solo da quella ($P(\rho)$). Fra tutti i tipi di dipendenza scegliamo, per motivi storici, una dipendenza di tipo *politropico*, cioè che obbedisce ad una legge del tipo:

$$P = k\rho^{1+\frac{1}{n}}$$

Vediamo cosa significano alcuni valori di n :

- $n \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad P \sim \rho$ *isoterma* $T = \text{cost.}$
- $n \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad P^n = k^n \rho^{n+1}$ caso *omogeneo* $\rho = \text{cost.}$
- $n = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad P \sim \rho^{\frac{5}{3}}$ si può avere in due casi:
 1. Gas perfetto monoatomico adiabatico.
 2. Gas degenere non relativistico.
- $n = 3 \quad \Rightarrow \quad P \sim \rho^{\frac{4}{3}}$ Anche qui si possono avere due casi:
 1. Modello standard.
 2. Gas degenere relativistico.

L'ipotesi barotropica sostituisce l'equazione dell'energia, nel senso che si suppone che esista un'equazione dell'energia che risolta ci dia una relazione politropica. È un'ipotesi forte! Vediamo un caso.

1.1 Modello standard

Si suppone che la pressione sia composta da due parti: una dovuta alla pressione del gas e l'altra alla pressione di radiazione:

$$p = p_g + p_r = \frac{R}{\mu} \rho T + \frac{1}{3} a T^4 \quad (1.3)$$

L'ipotesi fondamentale del modello standard è che la relazione di proporzionalità fra la pressione totale e quella del gas sia una costante:

$$p_g = \beta p_{tot} \quad \rightarrow \quad p_r = (1 - \beta) p_{tot}$$

Questa è un'ipotesi molto forte. Consideriamo il rapporto fra la pressione del gas e quella di radiazione:

$$\frac{p_g}{p_r} = \frac{\beta}{1 - \beta} = \frac{\frac{R}{\mu} \rho T}{\frac{1}{3} a T^4}$$

Da cui, ricavando la temperatura:

$$T^3 = \frac{1 - \beta}{\beta} \frac{3R}{\mu a} \rho$$

$$T = \left[\frac{1 - \beta}{\beta} \frac{3R}{\mu a} \rho \right]^{\frac{1}{3}}$$

Chiamando k la costante di proporzionalità fra T e ρ e sostituendo nella (1.3) si ottiene:

$$p = \frac{Rk}{\mu} \rho^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{3} a \rho^{\frac{4}{3}}$$

Ed abbiamo, quindi, trovato una relazione di tipo politropico. Riesaminando il rapporto fra p_g e p_r

$$\frac{p_g}{p_r} = \frac{3\beta\rho}{(1 - \beta)aT^3}$$

Ci si rende conto come in condizioni "normali" debba prevalere la pressione del gas e quindi β sia molto vicino ad uno. Il termine di radiazione, però, diviene significativamente importante all'aumentare delle temperatura; ci si aspetta, quindi, che diventi importante per stelle calde.

1.2 Equazione di Lane-Emden

Questi semplici modelli non sono solo fittizi ma servono per cominciare a capire il funzionamento di sistemi di questo tipo e per testare altri modelli più complessi. Infatti su particolari problemi devono dare gli stessi risultati. Inoltre si trova, inaspettatamente, che i risultati ottenuti non sono molto distanti dai modelli "buoni". Vogliamo ora riscrivere l'equazione per l'equilibrio (1.2) adimensionalizzando. Isoliamo la massa:

$$\frac{r^2}{G\rho} \frac{dp}{dr} = -m(r)$$

Derivando questa equazione si ottiene:

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{G\rho} \frac{dp}{dr} \right) = -\frac{dm(r)}{dr}$$

Tenendo conto della (1.1) si può scrivere:

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)$$

da cui:

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{G\rho} \frac{dp}{dr} \right) = -4\pi r^2 \rho$$

Sfruttando l'ipotesi barotropica $P = P(\rho)$ abbiamo tutto in funzione di ρ . Scegliamo come grandezze per descrivere il sistema p, T, ρ che si comportano in modo simile: hanno un massimo al centro e decrescono verso il bordo fino a zero (facciamo l'ipotesi che siano zero dal bordo in poi). Usiamo come scala di adimensionalizzazione per ciascuna quantità il loro valore al centro della stella : p_c, T_c, ρ_c . Ricaviamo le varie funzioni:

- $\rho = \rho_c \Phi^n(r)$ Si sceglie una dipendenza dall'indice politropico si tipo esponenziale di una funzione ignota.
- $P = k(\rho_c \Phi^n)^{1+\frac{1}{n}} = k\rho_c^{\frac{n+1}{n}} \Phi^{n+1} = P_c \Phi^{n+1}$ dove si è indicato $P_c = k\rho_c^{\frac{n+1}{n}}$.
- Ricaviamo la temperatura dall'equazione di stato $P = \frac{R}{\mu} \rho T$:

$$T = \frac{\mu}{R} \frac{P}{\rho} = \frac{\mu P_c}{R \rho_c} \frac{\Phi^{n+1}}{\Phi^n} = T_c \Phi$$

Si ha quindi che *la funzione Φ rappresenta la distribuzione di temperatura all'interno della stella.*

Sostituendo:

$$\frac{1}{4\pi G \rho_c} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[\frac{r^2}{\rho_c \Phi^n} P_c (n+1) \Phi^n \frac{d\Phi}{dr} \right] = -\Phi^n$$

$$\frac{(n+1)P_c}{4\pi G\rho_c^2} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = -\Phi^n$$

Adimensionalizzando le lunghezze r in modo da rendere la costante 1 si ottiene:

$$\xi = \frac{r}{a}$$

da cui:

$$a = \left(\frac{(n+1)P_c}{4\pi G\rho_c^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{(n+1)\frac{R}{\mu}\rho_c T_c}{4\pi G\rho_c^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\frac{R}{\mu}}{4\pi G} (n+1) \frac{T_c}{\rho_c} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Si ottiene così :

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\Phi}{d\xi} \right) = -\Phi^n \quad (1.4)$$

Questa è l'equazione Lane-Emden che dipende dal solo parametro n . Questo vuol dire che fissato n un sistema autogravitante soggetto alle ipotesi politropiche è descritto da questa equazione qualunque siano $\rho_c; T_c; P_c$. Svolgendo le derivate si ottiene:

$$\Phi'' + \frac{2}{\xi} \Phi' + \Phi^n = 0$$

L'equazione di L-E è un edo del secondo ordine, dobbiamo, quindi, fissare le condizioni iniziali:

1. $\Phi(0) = 1$ Si vuole che i valori centrali siano quelli rispetto ai quali si è adimensionalizzato.
2. $\Phi'(0) = 0$ Non si vogliono singolarità nella derivata in 0.

Questa equazione differenziale è lineare solo per i valori $n = 0$ e $n = 1$. La sappiamo risolvere solo in pochi casi:

n=0

$$(\xi^2 \Phi')' = -\xi^2 \quad \rightarrow \quad \xi^2 \Phi' = -\frac{\xi^3}{3} + c_1$$

Se applichiamo la condizione al contorno sulla derivata prima notiamo che la costante c_1 deve essere zero. Integrando nuovamente si ottiene:

$$\Phi = -\frac{\xi^2}{6} + c_2$$

Applicando la condizione sul valore della Φ al centro si ottiene $c_2 = 1$, da cui:

$$\Phi = -\frac{\xi^2}{6} + 1 \quad (1.5)$$

Questa soluzione rappresenta il sistema fino al primo zero di Φ .

n=1

$$\frac{1}{\xi^2} (\xi^2 \Phi')' = -\Phi$$

$$\Phi'' + \frac{2}{\xi} \Phi' + \Phi = 0$$

Questa equazione ha come soluzione le funzioni sferiche di Bessel. Si compie una sostituzione:

- $\Phi = \frac{\theta}{\xi}$
- $\Phi' = \frac{\theta'}{\xi} - \frac{\theta}{\xi^2}$
- $\Phi'' = \frac{\theta''}{\xi} - \frac{2\theta'}{\xi^2} + \frac{2\theta}{\xi^3}$

Sostituendo:

$$\frac{\theta''}{\xi} - \frac{2\theta'}{\xi^2} + \frac{2\theta}{\xi^3} + \frac{2\theta'}{\xi^2} - \frac{2\theta}{\xi^3} + \frac{\theta}{\xi} = 0$$

$$\theta'' = -\theta$$

Questa è l'equazione di un oscillatore armonico con soluzione:

$$\Phi = \frac{1}{\xi} A \sin(\xi + \delta)$$

Applicando le condizioni al contorno:

$$\Phi = \frac{\sin \xi}{\xi}$$

che ha il primo zero in $\xi = \pi$ cioè $r = \pi a$. Vicino a zero possiamo sviluppare:

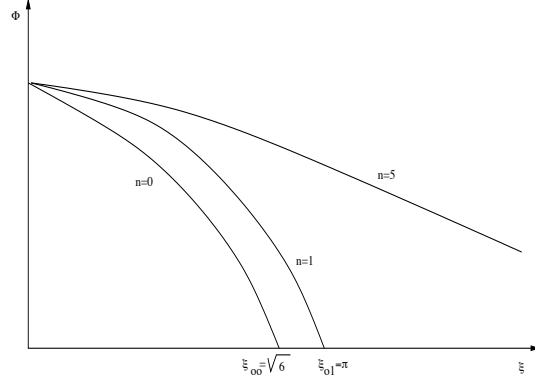


Figura 1: $\Phi(\xi)$ con il suo primo zero

$$\Phi \simeq 1 - \frac{\xi^2}{6} + o(\xi^2)$$

Si può dimostrare che la soluzione (1.5) è valida per tutte le equazioni di L-E, infatti le soluzioni dell'equazione di L-E devono avere parità definita e la prima potenza dispari è nulla per la condizione sulla derivata prima. Se si utilizza uno sviluppo polinomiale della soluzione del tipo:

$$\Phi = 1 + a\xi^2 + b\xi^4 + \dots$$

e si sostituisce nella (1.4) si ottengono i valori per le costanti:

$$a = -\frac{1}{6} \quad b = \frac{n}{120}$$

n=5 L'unico altro valore di n con soluzione analitica è 5, da cui si ricava:

$$\Phi = \frac{1}{\left(1 + \frac{\xi^2}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}}$$

Questo valore di n non ha nessun significato fisico, la soluzione non ha zeri al finito, ma solo un asintoto orizzontale in zero per $\xi \rightarrow \infty$.

Per tutti gli altri possibili valori di n la soluzione va cercata per via numerica. Le funzioni Φ (di Lane-Emden) sono tabulate insieme al valore del primo zero che è chiamato ξ_{0n} . Si definisce *Raggio della stella di indice politropico n* il valore $R_n = a\xi_{0n}$. Essendo le funzioni ρ , p , T nulle dopo il primo zero allora queste si raccordano regolarmente con il vuoto. Si capisce ora lo scarso significato fisico del modello politropico con indice $n = 5$ in quanto il primo zero è situato all'infinito e quindi rappresenta un sistema autogravitante di dimensioni infinite.

Cerchiamo, adesso, la massa totale di questi sistemi:

$$m(r) = \int_0^r 4\pi r^2 \rho(r) dr = 4\pi a^3 \int_0^\xi \xi^2 \rho(\xi) d\xi = -4\pi a^3 \rho_c \int_0^\xi \xi^2 \Phi^n(\xi) d\xi$$

Sfruttando l'equazione di L-E (1.4) si ottiene:

$$m(\xi) = -4\pi a^3 \rho_c \int_0^\xi \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\Phi}{d\xi} \right) d\xi = -4\pi a^3 \rho_c \left[\xi^2 \frac{d\Phi}{d\xi} \right]_\xi = -4\pi a^3 \rho_c \xi^2 \Phi'$$

Per calcolare la massa totale basta quindi andare a calcolare $m(\xi_{on})$:

$$M = m(\xi_{on}) = -4\pi a^3 \rho_c \xi_{on}^2 \Phi'(\xi_{on})$$

Quindi una volta tabulati i valori del primo zero e quelli della funzione di L-E e della sua derivata in questo punto, abbiamo già gli strumenti per ottenere un gran numero di informazioni. Proviamo ora a calcolare la densità media della stella:

$$\langle \rho \rangle = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R_n^3} = -\frac{4\pi a^3 \rho_c}{\frac{4}{3}\pi a^3 \xi_{on}^3} \xi_{on}^2 \Phi' = -2\rho_c \frac{\Phi'}{\xi_{on}}$$

$\langle \rho \rangle$ dipende solo da ρ_c e dall'indice politropico n . Si può quindi ricavare la densità centrale di una stella avendo solo la massa totale, il raggio e la funzione di L-E di indice politropico n . Per definire completamente il sistema servono anche le costanti T_c e p_c .

$$a \propto \sqrt{\frac{n+1}{\rho_c^2} \rho_c^{\frac{n+1}{n}}} = \sqrt{n+1} (\sqrt{\rho_c})^{\frac{1}{n}-1}$$

Se $n=1$ a non dipende da ρ_c e quindi nemmeno R .

$$M \propto a^3 \rho_c \sim \rho_c^{(\frac{1}{n}-1)\frac{3}{2}+1} = \rho_c^{(\frac{3}{n}-1)\frac{1}{2}}$$

Quindi se $n = 3$, M non dipende da ρ_c : questo caso è fisicamente importante poiché rappresenta il modello standard e anche il caso di una stella degenera relativistica. $n=3$ è rigorosamente valido nel caso di un gas relativistico e perciò un sistema di questo tipo ha un solo valore di M possibile qualunque sia stata la sua storia precedente.

Dalle precedenti espressioni appare chiaro che $R = a f(n)$ e $M = a^3 \rho_c g(n)$, dove f e g sono funzioni solo dell'indice politropico n . Avremo quindi:

$$\bar{\rho} \propto M/R^3 \propto (\rho_c g(n)/f(n)),$$

e quindi il rapporto $\bar{\rho}/\rho_c$ è funzione solo dell'indice n .

Nel modello standard $p = k\rho^{\frac{4}{3}}$ con $k = \left[\left(\frac{R}{\mu} \right)^4 \frac{3}{a} \frac{1-\beta}{\beta^4} \right]^{\frac{4}{3}}$ dove in questo caso a rappresenta la *costante di Stefan-Boltzman*. Calcolato il valore della massa totale si ottiene:

$$M \simeq M_{\odot} \frac{(1-\beta)^{\frac{1}{2}}}{\mu^2 \beta^2}$$

Se il sole fosse descritto da un modello standard si potrebbe porre $M = M_{\odot}$ per ricavare β che risulterebbe $\beta \simeq 1 - 10^{-4}$ (Si considera sempre $\mu = \frac{1}{2}$ come nel caso di un gas costituito da idrogeno completamente ionizzato). Ricordando le espressioni per le pressioni del gas e di radiazione si ricava che la pressione è praticamente soltanto quella del gas. I modelli politropici non danno risultati molto diversi dai modelli più raffinati, basta che vengano applicati a zone lontane dal nucleo o dal bordo della stella.

2 Stabilità degli equilibri

L'esistenza di uno stato di equilibrio non garantisce il suo mantenimento nel tempo. Infatti, un equilibrio, cioè uno stato in cui le forze in gioco hanno una risultante nulla, è caratterizzato da un insieme di ben precisi valori di tutte le grandezze fisiche. Qualora uno o più di questi valori vengano variati, l'equilibrio non può essere mantenuto ed il sistema evolve dinamicamente. Se si considerano piccole perturbazioni dei parametri di equilibrio, si hanno essenzialmente due possibilità: la forza risultante tende a riportare il sistema nella posizione di equilibrio oppure tende a farlo ulteriormente allontanare da tale posizione. Nel primo caso, si instaura un regime oscillatorio, l'ampiezza della perturbazione rimane piccola e l'equilibrio è detto *stabile*. Nel secondo l'ampiezza della perturbazione cresce e il sistema è detto *instabile*. Il caso intermedio, cioè quello in cui la perturbazione non cambia il perfetto bilanciamento delle forze, vien chiamato equilibrio *marginale*.

Teoricamente, per determinare l'esistenza di uno stato di equilibrio dovremmo imporre che la risultante di **tutte** le forze che agiscono sul sistema sia nulla. In pratica, ciò non è possibile e quindi il calcolo della configurazione di equilibrio coinvolge in genere solo le forze dominanti e quindi esso non rappresenta la situazione reale in cui sono presenti anche altre forze che, in prima istanza, vengono considerate trascurabili.

Di conseguenza, le condizioni di equilibrio non sono mai perfettamente soddisfatte e la realtà è meglio rappresentata da un equilibrio (teorico) perturbato, ciò che rende essenziale

un'analisi di stabilità . Infatti, se ci poniamo il problema della verifica (sperimentale o osservativa) dell'esistenza di una configurazione di equilibrio ci rendiamo facilmente conto che in realtà potremo effettuare una tale verifica solo per sistemi stabili o moderatamente instabili, intendendo con ciò che la velocità con cui i parametri caratteristici del sistema cambiano rispetto ai valori di equilibrio sia tale da far sì che essi non vengano sostanzialmente alterati durante la misura. Ne consegue che il concetto fisico (non matematico!) di equilibrio ha senso solo se riferito a una ben definita scala di tempo. In altre parole, non siamo interessati a trovare equilibri che durino per tutta l'eternità: quel che vogliamo, è trovare se esistono degli stati che non subiscano modifiche essenziali sulle scale di tempo di interesse.

L'importanza dell'analisi di stabilità aumenta con il numero di gradi di libertà del sistema. Infatti, se consideriamo un sistema con un solo grado di libertà, la sua energia sarà funzione di un solo parametro e quindi un estremo potrà essere solo un massimo o un minimo. Quindi, su due stati di equilibrio possibili, uno solo sarà stabile e il rapporto, \mathcal{R} tra il numero di equilibri stabili e quello di tutti i possibili equilibri sarà uguale a $1/2$. In un sistema con due gradi di libertà, in cui potrò pensare di rappresentare l'energia come una superficie nella spazio dei due parametri che la caratterizzano, si avranno quattro possibili estremi e cioè un massimo assoluto (una cima), un minimo assoluto (una conca) e due selle (passi di montagna). Quest'ultime debbono essere considerate equilibri instabili, poichè solo le perturbazioni in una certa direzione sono stabili. In definitiva, su quattro configurazioni possibili, solo una è stabile, cioè $\mathcal{R} = 1/4$. Ciò fa sospettare che per un sistema con n gradi di libertà si possa scrivere $\mathcal{R} = 1/2^n$. Anche se non è possibile provare una tale affermazione, è evidente che in un sistema con un numero grandissimo di gradi di libertà, come un fluido o un plasma, la quasi totalità degli equilibri è instabile!

Un sistema autogravitante è definito dalle equazioni:

$$\frac{dP}{dr} = -G\rho \frac{m(r)}{r^2}$$

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho$$

$$P = P(\rho) \quad \text{per esempio} \quad K \rho^{1+\frac{1}{n}}.$$

Trattiamo approssimativamente l'equazione dell'equilibrio sostituendo a tutte le grandezze i loro valori medi (cioè in pratica scrivendo $dP/dr \simeq P/R$ e così via). Otteniamo così

$$P \simeq \frac{GM\rho}{R}.$$

Si osservi che mentre la dipendenza di P dalle altre variabili non è fissata (da cui deriva la necessità di aggiungere una relazione tra P e ρ per chiudere il sistema) il secondo membro, che indicheremo con Q , è perfettamente specificato. Inoltre, poichè ρ , M e R non sono variabili indipendenti potremo scrivere

$$\frac{1}{R} \simeq \left(\frac{4\pi\rho}{M}\right)^{1/3} \rightarrow Q \simeq KM^{2/3}\rho^{4/3},$$

con $K = G(4\pi/3)^{1/3}$. La condizione di equilibrio è quindi $P_{eq} = Q$.

Un'analisi semplificata della stabilità si può ottenere con mezzi grafici. Infatti consideriamo un grafico in cui riportiamo le curve $\log P$ e $\log Q = \log K + (2/3)\log M + (4/3)\log \rho$ in funzione di $\log \rho$. La curva che rappresenta $\log(Q)$ sarà una retta di pendenza $4/3$, mentre quella che rappresenta $\log P$ non è nota. Supponiamo tuttavia che essa abbia l'aspetto mostrato nella figura. Il valore di ρ corrispondente all'incrocio delle due curve rappresenta, per quanto detto sopra, il valore della densità all'equilibrio e quello di $P(=Q)$ quello della pressione di equilibrio.

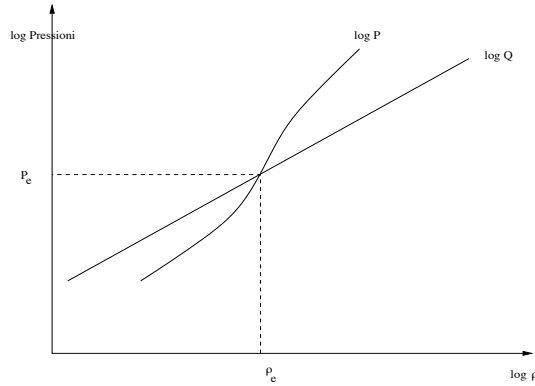


Figura 2: Le curve $\log P$, $\log Q$ nel caso di un equilibrio stabile

Ora è facile rendersi conto che la situazione rappresentata in figura corrisponde ad un equilibrio stabile. Infatti se la stella subisce una compressione, cioè se $\log \rho$ aumenta, $\log P$ aumenta più rapidamente di $\log(Q)$ e quindi la forza "espansiva" domina su quella "compressiva" ed il sistema reagirà alla compressione espandendosi, cioè riportandosi verso la situazione di equilibrio, comportamento caratteristico dei sistemi stabili. La condizione di stabilità può essere quindi scritta nella forma

$$\frac{d \log P}{d \log \rho} > \frac{d \log Q}{d \log \rho} = \frac{4}{3}.$$

Definendo la quantità

$$\Gamma = \frac{d \log P}{d \log \rho} = \frac{\rho}{P} \frac{dP}{d\rho},$$

potremo dunque scrivere che la condizione di stabilità per un sistema autogravitante richiede che sia

$$\Gamma > 4/3.$$

In realtà, la precedente disuguaglianza è soltanto una condizione sufficiente, ma non necessaria. Una trattazione rigorosa porta infatti a condizioni meno restrittive.

Finora abbiamo considerato la stabilità di una stella di massa fissata. Consideriamo ora una classe di modelli stellari, tutti descritti dalla stessa equazione di stato $P = P(\rho)$ per i quali ad ogni densità corrisponderà un ben preciso valore della massa. Chiediamoci ora come la stabilità dipenda dalla massa. Per un equilibrio stabile avremo:

$$\frac{d \log P}{d \log \rho} > \frac{d \log Q}{d \log \rho} = \frac{2}{3} \frac{d \log M}{d \log \rho} + \frac{4}{3}.$$

La condizione $\Gamma > 4/3$ implica quindi

$$\frac{d \log M}{d \log \rho} = \frac{\rho}{M} \frac{dM}{d\rho} > 0.$$

Sono quindi stabili tutti i modelli per i quali la massa è una funzione crescente della densità (o meglio della densità centrale, come risulterebbe da un'analisi più rigorosa).

3 Effetti quantistici

L'equazione dell'equilibrio idrostatico vale qualunque sia la natura della pressione che equilibria la gravità. Abbiamo già visto i casi in cui la pressione sia quella termica di un gas perfetto o quella di radiazione. Esiste tuttavia un'altra possibilità che si manifesta per stelle di piccola massa e di elevata densità. La massa piccola esclude l'importanza della pressione di radiazione. Un'alta densità è presente nelle fasi finali dell'evoluzione stellare quando sono cessate le reazioni nucleari nella parte centrale della stella. In questa situazione l'unica fonte di energia disponibile per la stella è quella gravitazionale e quindi la stella si contrae, con un conseguente aumento della densità. Se quest'ultima diviene sufficientemente elevata, entrano in gioco effetti quantistici che, come ora vedremo, possono fornire una nuova forma di pressione e permettere alla stella di trovare un nuovo stato di equilibrio.

3.1 La pressione quantistica

In regime quantistico vale la relazione (principio di indeterminazione)

$$\Delta p_x \Delta x \geq \hbar$$

$$p_{tot\ x} = p_x + \Delta p_x$$

Da cui:

$$p_{tot}^2 = (p_x + \Delta p_x)^2 + (p_y + \Delta p_y)^2 + (p_z + \Delta p_z)^2$$

Facendo la media e tenendo conto che i termini lineari sono a media nulla:

$$\langle p_{tot}^2 \rangle = \langle p^2 \rangle + \langle \Delta p^2 \rangle$$

Con $\Delta p^2 \geq \frac{\hbar^2}{\Delta L^2}$. Quindi $\langle p_{tot}^2 \rangle$ nel caso quantistico è sempre maggiore di quello classico. Una stima grossolana del volume a disposizione di una particella fermionica (degenerazione a causa dello spin due) appartenente ad un sistema con volume V e particelle N è:

$$\Delta L = \left(\frac{2V}{N} \right)^{\frac{1}{3}}$$

Da cui, con le espressioni precedenti, possiamo ricavare:

$$\langle p_{tot}^2 \rangle = \langle p^2 \rangle + \langle \Delta p^2 \rangle \geq \langle p^2 \rangle + \hbar^2 \left(\frac{N}{2V} \right)^{\frac{2}{3}}$$

Per l'energia di una singola particella si trova:

$$\langle E_k \rangle \geq \frac{\langle p^2 \rangle}{2m} + \frac{\hbar^2}{2m} \left\langle \frac{N}{2V} \right\rangle^{\frac{2}{3}}$$

Il termine quantistico prende il nome di *energia di Fermi* che indicheremo con ϵ_F .

In un sistema non relativistico (teorema del viriale)

$$P_{tot} = \frac{2}{3} \frac{\langle N E_k \rangle}{V} = \frac{2}{3} \frac{N}{V} \left(\frac{\langle p^2 \rangle}{2m} + \frac{\hbar^2}{2m} \left\langle \frac{N}{2V} \right\rangle^{\frac{2}{3}} \right)$$

La pressione è data quindi dalla somma di una pressione classica dovuta all'agitazione termica ed ad una quantistica dovuta al principio di esclusione di Pauli:

$$P_T = P_c + P_q$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P_q = \frac{2}{3} \frac{\hbar^2}{m \cdot 2^{\frac{5}{3}}} n^{\frac{5}{3}} = \frac{1}{3 \cdot 2^{\frac{5}{3}}} \frac{\hbar^2}{m} n^{\frac{5}{3}} \\ P_c = nk_B T \end{array} \right.$$

Calcolando il rapporto fra pressione quantistica e pressione classica otteniamo:

$$\frac{P_q}{P_c} = \frac{1}{3} \frac{\hbar^2}{m} \frac{n^{\frac{5}{3}}}{nk_B T} \propto \frac{n^{\frac{2}{3}}}{T}.$$

Quindi, poichè il rapporto fra le pressioni è determinato dal rapporto $\frac{n^{\frac{2}{3}}}{T}$, sistemi con bassa temperatura e/o alta densità obbediscono alla stessa fisica. Inserendo nell'espressione i dati per un sistema di elettroni si trova $P_q(e^-) \simeq 2 \cdot 10^{-27} n^{\frac{5}{3}}$.

$$\frac{P_q}{P_c} \simeq 2 \cdot 10^{-11} \frac{n^{\frac{2}{3}}}{T}$$

Ad esempio nel rame ($A = 64$) con una densità $\simeq 9 \text{ g/cm}^3$ si hanno densità numeriche dell'ordine di:

$$n_{ioni} = \frac{\rho}{Am_p} \simeq 8.5 \times 10^{22}$$

Un metallo come il rame mette a disposizione due elettroni per ione quindi $n_{e^-} \simeq 1.7 \times 10^{23}$. Se vogliamo che gli elettroni nel metallo siano quantistici occorre che:

$$\frac{P_q}{P_c} \gg 1 \quad \Rightarrow \quad T \ll 2 \times 10^{-11} (1.7 \times 10^{23})^{\frac{2}{3}} \simeq 6 \times 10^4,$$

condizione ovviamente verificata in condizioni normali. Quindi gli elettroni nei metalli sono praticamente sempre oggetti quantistici.

Se le particelle si trovano in regime ultrarelativistico potremo scrivere:

$$P_{qUR} = \frac{1}{3} \frac{\langle NE_k \rangle}{V} = \frac{N}{3V} \langle \epsilon_f \rangle = \frac{N}{3V} \langle \Delta pc \rangle = \frac{1}{3} n \hbar c \left(\frac{N}{2V} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\hbar c}{3 \cdot 2^{\frac{1}{3}}} n^{\frac{4}{3}}$$

Poichè la densità numerica è proporzionale alla densità di massa, le precedenti espressioni mostrano che sia il caso non relativistico che quello ultrarelativistico sono rappresentate da equazioni di stato politropiche, $n = 3/2$ per il caso NR e $n = 3$ per quello UR . Ricordando la discussione dell'equazione di Lane-Emden, si vede che configurazioni UR ammettono un solo valore della massa.

3.1.1 Trattazione rigorosa

Abbiamo trovato le espressioni per la pressione:

$$P_{NR} = \frac{2}{3} \frac{\langle E_k \rangle}{V}$$

$$P_q = \frac{(3\pi^2)^{\frac{2}{3}} \hbar^2}{5} \frac{n^{\frac{5}{3}}}{m}$$

Si noti come la temperatura compaia solo nel caso NR mentre nel caso UR non compare neanche la massa in quanto trascurabile rispetto all'impulso. In questo ultimo caso le relazioni sono dipendenti solo dalla densità numerica. I casi quantistici e ultrarelativistici sono descritti da politropiche rispettivamente di indici $n = \frac{2}{3}$ e $n = 3$. A questi risultati si può arrivare anche in modo rigoroso sfruttando la distribuzione di Fermi $f(\mathbf{p}, r, t)$ che sotto le ipotesi di spazio isotropo diviene:

$$f(p) = 2 \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{\exp\left[\frac{\epsilon - \mu}{k_B T}\right] + 1}$$

μ è detto *potenziale chimico*. Nel limite in cui la temperatura tende a zero, è facile rendersi conto che la distribuzione in energia delle particelle di un gas di Fermi sarà data da:

$$f(\epsilon) = \begin{cases} 1 & \epsilon < \mu \\ 0 & \epsilon > \mu \end{cases}$$

e la distribuzione di Fermi appare come in figura

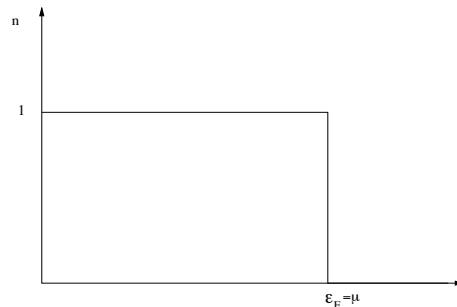


Figura 3: La distribuzione di Fermi nel caso completamente degenere

Il valore $\epsilon = \mu$ rappresenta l'estremo superiore delle energie degli stati occupati e definisce l'*energia di Fermi* $\epsilon_F = \mu$.

In queste condizioni, il numero totale di particelle, N , è dato da:

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} f(p) d^3p = 2 \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{p_F} 4\pi p^2 dp,$$

dove p_F è l'impulso corrispondente all'energia di Fermi.

Si ottiene quindi

$$\frac{N}{V} = p_F^3 \frac{8\pi}{3(2\pi\hbar)^3}$$

$$p_F = (3\pi^2\hbar^3)^{\frac{1}{3}} n^{\frac{1}{3}} \simeq 3.26 \times 10^{-27} n^{\frac{1}{3}}. \quad (3.1)$$

Come si vede l'impulso di Fermi è funzione soltanto della densità numerica. Con un ragionamento simile scriviamo l'energia:

$$E = \int_0^{\infty} \epsilon(p) f(p) d^3p = 2 \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{p_F} 4\pi \epsilon(p) p^2 dp$$

Nota l'energia E , che nel nostro caso rappresenta l'energia interna del sistema, possiamo ricavare la pressione utilizzando il Primo Principio della termodinamica:

$$dE = TdS - PdV,$$

che implica

$$P = - \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_S$$

Per risolvere l'integrale distinguiamo i casi non relativistico e ultrarelativistico:

- *Caso non relativistico*

$$E = 2 \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{p_F} 4\pi \frac{p^4}{2m} dp = \frac{V}{2\pi^2\hbar^3} \frac{p_F^5}{5}$$

Sostituendo l'impulso di Fermi con la (3.1) si trova:

$$E = \frac{V}{10\pi^2\hbar^3} (3\pi^2\hbar^3)^{\frac{5}{3}} \frac{n^{\frac{5}{3}}}{m}$$

Se dalla termodinamica esprimiamo l'energia interna in funzione dell'entropia e del volume:

Ma l'espressione che abbiamo trovato per l'energia presenta una dipendenza dal volume del tipo:

$$E \propto V \left(\frac{N}{V} \right)^{\frac{5}{3}} \propto V^{-\frac{2}{3}},$$

e quindi :

$$P = - \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_S = \frac{2}{3} \frac{E}{V} = \frac{2}{3} \frac{1}{10\pi^2 \hbar^3} (3\pi^2 \hbar^3)^{\frac{5}{3}} \frac{n^{\frac{5}{3}}}{m}$$

$$P_{qNR} = \frac{(3\pi^2)^{\frac{2}{3}} \hbar^2}{5} \frac{n^{\frac{5}{3}}}{m}$$

- *Caso ultrarelativistico*

$$E = \int_0^{p_F} \epsilon(p) f(p) d^3p \propto \int_0^{p_F} pc p^2 dp \propto n^{\frac{4}{3}}$$

Il resto dei calcoli è analogo al caso precedente. Si trova:

$$P_{UR} = (3\pi^2)^{\frac{1}{3}} \frac{\hbar c}{4} n^{\frac{4}{3}}$$

Il criterio per determinare se il sistema è degenere consiste nel confrontare l'energia di Fermi con $k_B T$.

$$\epsilon_F \gg k_B T$$

$$\epsilon_F \propto \frac{n^{\frac{2}{3}}}{m} \gg k_B T$$

e ritroviamo quindi in maniera rigorosa il risultato precedentemente ottenuto.

Landau fu il primo a chiedersi se erano possibili configurazioni stabili di stelle "fredde", cioè stelle sostenute dalla pressione quantistica. A causa del minor valore della massa, gli elettroni divengono degeneri prima dei protoni e sono quindi loro a fornire la pressione necessaria.

Il diagramma HR dimostra che stelle di questo genere possono esistere. Infatti il cosiddetto *ramo delle Nane Bianche* è costituito da stelle di alta temperatura efficace e bassa luminosità:

il , che hanno luminosità dell'ordine di $10^{-3} - 10^{-4}$ volte inferiori a quelle di Sequenza Principale di ugual T_e . Poichè

$$L = 4\pi\sigma R^2 T_e^4$$

i valori osservati della luminosità implicano che il raggio di una NB deve essere $R_{NB} \sim (0.3 - 0.01) R_{SP}$. Per quanto riguarda la massa si trova, dall'osservazione di stelle binarie con compagne NB, che è dell'ordine di una massa solare. Si hanno quindi oggetti di densità $\rho \sim (10^5 - 10^6) g/cm^3$ a cui corrispondono densità numeriche $n \sim 10^{29} - 10^{30} cm^{-3}$.

Le nane bianche sono descritte da equazioni politropiche di indice $n = 3/2$ a densità sufficientemente alte da essere completamente degeneri, rimanendo però in regime non relativistico. Questo implica

$$p_F \leq mc \quad \rightarrow \quad n \leq \frac{1}{3\pi^2} \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^3 \simeq 5 \times 10^{28} cm^{-3},$$

a cui corrisponde una densità $\rho \simeq 9 \times 10^4 g cm^{-3}$. All'aumentare della densità, il sistema diventa relativistico ($p_F \geq mc$) e, per densità altissime, ultrarelativistico ($p_F \gg mc$) e sarà quindi descritto da una politropica di indice $n = 3$, la cui massa è completamente fissata. Si capisce che questa situazione rappresenta un limite asintotico per altissime densità. La massa limite vien detta *massa di Chandrasekhar* e vale approssimativamente $1.43M_\odot$. Tale valore può essere trovato risolvendo l'equazione di Lane-Emden con $n = 3$ e determinando la massa di tale modello.

L'esistenza di una massa limite può essere dedotta anche dal metodo grafico già usato nella discussione della stabilità e riportato in figura. L'effetto della gravità è rappresentato da Q , con

$$\log Q = cost. + \frac{2}{3} \log M + \frac{4}{3} \log \rho.$$

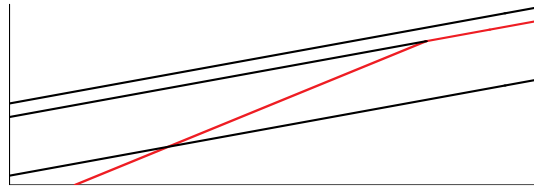


Figura 4: La curva rossa rappresenta $\log P$, le altre curve $\log Q$ per valori crescenti della massa

Le tre curve parallele rappresentano l'andamento di $\log Q$ per tre valori della massa. Siamo ora in grado di tracciare anche la curva $\log P$, che nel caso NR la pressione è una retta di pendenza $5/3$ e nel caso UR è una retta di pendenza $4/3$. E' evidente dal grafico che se la massa è inferiore ad un certo valore critico esisterà sempre un'intersezione tra le curve $\log P$ e $\log Q$ e quindi uno stato di equilibrio, che risulta essere stabile ($\Gamma > 4/3$). Al disopra di tale valore non esistono stati di equilibrio. Se la massa ha esattamente il valore critico, le curve $\log P$ e $\log Q$ si sovrappongono e si hanno infiniti stati di equilibrio con densità diversa, ma con lo stesso valore della massa.

Una trattazione un po' più quantitativa del problema è la seguente. Tratteremo separatamente il caso NR e quello UR.

- *Caso NR*

Consideriamo un sistema degenere di idrogeno completamente ionizzato di raggio R e massa $M = N(m_p + m_e)$, dove $N = N_p = N_e$ è il numero totale di protoni (uguale a quello degli elettroni per avere neutralità di carica). L'energia totale del sistema è la somma dell'energia cinetica e dell'energia gravitazionale. E' chiaro tuttavia che, a causa del valore delle masse delle particelle, nel termine di energia cinetica domina il contributo degli elettroni, mentre in quello di energia gravitazionale dominano i protoni. Di conseguenza:

$$E = N_e \epsilon(p) - \frac{\frac{3}{5} G (N m_p)^2}{R}$$

Se il sistema è NR, considerando la distanza tra particelle come $\left(\frac{2V}{N}\right)^{\frac{1}{3}}$, si può scrivere l'energia cinetica degli elettroni come:

$$\epsilon(p) = \frac{p^2}{2m_e} = \frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{1}{\left(\frac{2V}{N}\right)^{\frac{2}{3}}} = \frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{N^{\frac{2}{3}}}{\left(\frac{8\pi}{3} R^3\right)^{\frac{2}{3}}}$$

Quindi l'energia totale è:

$$E = N_e^{\frac{5}{3}} \frac{\hbar^2}{2m_e} \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{1}{R^2} - \frac{3}{5} \frac{G N_e^2 m_p^2}{R}$$

Il raggio di equilibrio si determina minimizzando l'energia rispetto alle variazioni di raggio, ossia risolvendo l'equazione $\partial E / \partial R = 0$. Da notare come siano possibili configurazioni di equilibrio in quanto i due termini componenti l'energia hanno segni diversi e diversa dipendenza da R . Da

$$\frac{\partial E}{\partial R} = -N_e^{\frac{5}{3}} \frac{\hbar^2}{m_e} \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{1}{R^3} + \frac{3}{5} \frac{G N_e^2 m_p^2}{R^2} = 0,$$

si ottiene quindi il raggio di equilibrio R_* ,

$$R_* = \frac{5}{3} \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{G m_e m_p^2} N^{-1/3},$$

ossia, in termini della massa del sistema ($N = \frac{M}{m_p}$).

$$R_* = \frac{5}{3} \left(\frac{3}{8\pi} \right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{Gm_e m_p^{5/3}} M^{-1/3},$$

da cui

$$\frac{R}{R_\odot} = \frac{5}{3} \left(\frac{3}{8\pi} \right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{Gm_e m_p^{5/3}} \frac{M_\odot^{1/3}}{R_\odot} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{-1/3} \sim 0,04 \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{-1/3}$$

E' facile verificare che l'equilibrio trovato è stabile. Infatti, calcolando la derivata seconda, $\partial^2 E / \partial R^2$ e sostituendo nell'espressione trovata il valore del raggio di equilibrio si ottiene $\partial^2 E / \partial R^2 > 0$, che implica che l'energia è minima e quindi che il sistema è stabile, come peraltro già determinato dalla soluzione grafica.

- *Caso UR* $\epsilon(p) = pc$

$$E = N_e^{4/3} \hbar c \left(\frac{3}{8\pi} \right)^{1/3} \frac{1}{R} - \frac{3}{5} \frac{GN_e^2 m_p^2}{R} = \frac{\alpha}{R}$$

In questo caso la dipendenza di E dal raggio è la stessa per i due termini e quindi non è possibile determinare il raggio di equilibrio. Infatti

$$\frac{\partial E}{\partial R} = -\frac{\alpha}{R^2}$$

non si annulla mai se non per $R \rightarrow \infty$. La variazione dell'energia è quindi determinata dal segno della costante α :

$\alpha > 0$ Se il raggio diminuisce l'energia diminuisce quindi la stella tende ad espandersi.

$\alpha < 0$ Se il raggio diminuisce anche l'energia diminuisce e quindi la stella è instabile per collasso.

Il discriminante è quindi il segno di α che adesso studiamo:

$$\alpha = N^{4/3} \hbar c \left(\frac{3}{8\pi} \right)^{1/3} - \frac{3}{5} GN_e^2 m_p^2$$

Quindi, se

$$N > \left[\frac{5}{3} \left(\frac{3}{8\pi} \right)^{1/3} \frac{\hbar c}{Gm_p^2} \right]^{3/2} \sim 1.7 \times 10^{57}$$

$\alpha < 0$ e il sistema collassa. Si ha quindi una massa critica per il sistema che è:

$$M_c \simeq 2.7 \times 10^{33}$$

dell'ordine della massa solare. Se il sistema ha una massa inferiore, allora tende ad espandersi diminuendo la sua densità media fino a che i suoi componenti passano ad uno stato NR dove possono trovare un equilibrio come nel punto precedente.

Se il nostro modello descrivesse una stella composta di soli neutroni, con la stessa massa, cioè con $M = Nm_n \simeq Nm_p$, potremmo ripetere i calcoli e l'unica differenza sarebbe che nel caso NR l'espressione del raggio di equilibrio conterrebbe un termine $m_n^{8/3}$ invece di $m_e m_p^{5/3}$. Avremmo quindi che il raggio della stella di neutroni sarebbe più piccolo di quello di una nana bianca di un fattore $(m_e/m_p) \simeq 5 \times 10^{-4}$.

Può essere istruttivo mettere in grafico la temperatura in funzione della densità evidenziando le discriminanti fra le zone non-degenere (ND)- degenere (D) e NR-Rel.

La condizione di degenerazione è fissata dall'equazione:

$$\frac{\rho^{2/3}}{T} \gg a$$

da cui si ricava:

$$\log T = \frac{2}{3} \log \rho - a$$

Il confine fra non relativistico e ultrarelativistico (che nel disegno abbiamo segnato come Rel) è dettato dall'equazione:

$$\rho^{1/3} \simeq p_F \simeq mc$$

Mentre quello fra la zona non degenere non relativistica e quella non degenere relativistica è fissata dalla condizione:

$$k_B T \simeq mc^2$$

dalla quale si ricava la temperatura alla quale le particelle diventano relativistiche, che è dell'ordine di $T \sim 10^8 K$.

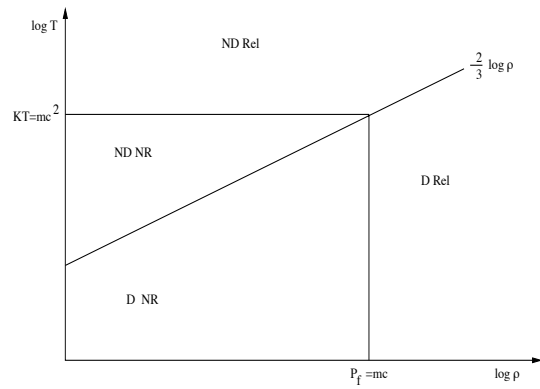


Figura 5: Le diverse regioni del piano $(\log T, \log \rho)$