

# APPUNTI DI ASTROFISICA

Claudio Chiuderi

13 novembre 2008

# 1 Richiami di meccanica dei fluidi

Un fluido è definito come un mezzo continuo, descritto attraverso un certo numero di campi scalari o vettoriali. Ogni traccia della struttura discreta, cioè molecolare, del fluido è scomparsa. I campi comunemente usati per descrivere un fluido, sono le *velocità*,  $\mathbf{v}$ , la *pressione*,  $P$ , e la *densità*,  $\rho$ . Tutte queste quantità sono funzioni del spazio e del tempo e descrivono le caratteristiche medie di volumi di dimensione lineare piccola rispetto a quella del sistema nella sua totalità, ma comunque contenenti un grandissimo numero di particelle microscopiche. Questi volumetti sono detti particelle fluide e non vanno confusi con le particelle microscopiche che costituiscono il fluido nella realtà. Una definizione precisa di queste quantità è possibile solo partendo da una descrizione microscopica del fluido, cioè da una descrizione statistica delle sue proprietà. Il significato delle varie grandezze macroscopiche è tuttavia abbastanza intuitivo. Per esempio, il valore della densità in nel punto  $\mathbf{r}$ , al tempo  $t$  è definito come:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V},$$

dove  $\Delta m$  è la massa che al tempo  $t$  è contenuta nel volume  $\Delta V$  centrato intorno al punto  $\mathbf{r}$ . Il concetto di velocità è anch'esso chiaro se si pensa che la velocità di una particella fluida sia la media delle velocità delle particelle microscopiche che la costituiscono. Il concetto di pressione è più complicato, ma può essere comunque pensato come il limite della forze interne del gas per unità di superficie quando la superficie tende a zero.

Una volta adottata una descrizione continua, abbiamo ancora due possibilità equivalenti per descrivere la sua dinamica. Possiamo idealmente pensare di piazzare in ciascun punto dello spazio dei rivelatori di densità, pressione e velocità che registrino la variazione di queste quantità al passare del tempo. E' chiaro che ad istanti diversi i valori registrati si riferiranno a particelle fluide diverse, e precisamente a quelle che, nel momento della misura, si trovano a passare per il punto dove si trovano gli apparecchi registratori. La descrizione così ottenuta, che è evidentemente una descrizione completa delle caratteristiche dinamiche del fluido, viene detta descrizione *euleriana*. Alternativamente, si potrebbe pensare di piazzare i rivelatori *a bordo* delle particelle fluide. Ad ogni istante, verrebbero registrate la posizione della particella, la sua velocità e tutte le altre caratteristiche utili a definirne lo stato. E' chiaro che in questo schema ogni singola particella dovrebbe essere in qualche modo identificata, ma, una volta compiuta questa operazione, la descrizione ottenuta, detta descrizione *lagrangiana*, sarebbe altrettanto completa di quella euleriana. La maniera di identificare una particella non è univoca. Per esempio, un particella potrebbe essere definita in base alla sua posizione all'istante iniziale, ma qualunque grandezza che identifichi in maniera non ambigua una particella fluida è ugualmente accettabile. L'utilizzo di una o dell'altra descrizione è solo una questione di convenienza: vedremo in seguito in quali casi una scelta è preferibile all'altra. Poichè le due descrizioni sono equivalenti deve essere possibile trovare delle leggi di trasformazione che permettano di passare dall'una all'altra. Per determinarle, basta ricordare che in un caso(euleriano) il punto di osservazione è fisso, mentre nell'altro (lagrangiano) il punto di osservazione si muove solidalmente con la particella fluida, cioè *ne segue la traiettoria*. La derivata temporale di una qualunque quantità nello schema lagrangiano deve

dunque essere calcolata lungo la traiettoria. Per fissare le idee, consideriamo una funzione di due variabili,  $f(x, y)$ . Possiamo pensare la  $f(x, y)$  come una superficie generata dal moto del punto rappresentativo sul piano  $(x, y)$ . Il suo differenziale, cioè la variazione infinitesima di  $f$  per variazioni infinitesime arbitrarie  $dx$  e  $dy$  è data da

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

Se però il punto rappresentativo sul piano  $(x, y)$  è costretto a muoversi lungo una particolare curva su tale piano, curva descritta dall'equazione  $y = y(x)$ , avremo

$$dy = \frac{dy}{dx} dx,$$

e quindi

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} dx.$$

Questo ci permette di definire la *derivata lungo una curva* come:

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx}.$$

Ritornando alla descrizione lagrangiana, le derivate temporali saranno dunque derivate rispetto al tempo *lungo la traiettoria*. Indicando tali derivate con il simbolo  $\frac{d}{dt}$  e quelle fatte tenendo fissa la posizione, cioè le derivate euleriane, con il simbolo  $\frac{\partial}{\partial t}$ , vremo

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} v_x,$$

o, nel caso tridimensionale,

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla.$$

## 1.1 L'equazione di continuità

In meccanica dei fluidi, come del resto in tutta la fisica, hanno particolare importanza le grandezze conservate. Per essere espliciti, consideriamo una tipica grandezza conservata (in meccanica non relativistica), la massa. La massa contenuta in un volume  $V$  può essere scritta come

$$M = \int_V \rho dV,$$

dove  $\rho$  è la densità di massa. Poichè la massa si conserva, se il precedente integrale varia nel tempo (con  $V$  fisso), se ne deduce che parte della massa deve essere fluita attraverso la superficie che delimita  $V$ . Quindi

$$0 = \frac{dM}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \int_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS,$$

dove  $\mathbf{n}$  è la normale esterna alla superficie  $S$  nel punto considerato. Poichè il volume è fisso, utilizzando note formule potremo trasformare l'integrale di superficie in un integrale di volume, ottenendo:

$$\int_V \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} \right] dV,$$

e, siccome  $V$  è arbitrario ,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0. \quad (1.1)$$

E' questa l'equazione di continuità, che esprime appunto la conservazione della massa e che rappresenta la prima equazione fondamentale della meccanica dei fluidi.

L'equazione di continuità può essere riscritta sviluppando il termine contenente l'operatore  $\nabla$ , ottenendo:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho(\nabla \cdot \mathbf{v}) = \frac{d\rho}{dt} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0.$$

Consideriamo ora un fluido *incomprimibile*, cioè una fluido in cui le particelle (fluide) mantengano inalterata la propria densità durante il moto. Per definizione, la derivata lagrangiana della densità rispetto al tempo sarà nulla. Se ne deduce quindi che un fluido incomprimibile potrà essere caratterizzato dalla condizione

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Si osservi che la condizione di incomprimibilità non implica che la densità del fluido sia la stessa in tutti i punti, cioè che  $\nabla \rho = 0$ , o che la densità sia costante nel tempo in un determinato punto, cioè che  $\partial \rho / \partial t = 0$ , ma semplicemente la densità sia costante lungo la traiettoria di ogni particella fluida. In particolare in situazioni statiche ,  $\partial / \partial t = 0$  e  $\mathbf{v} = 0$ , si possono avere fluidi incomprimibili di densità variabile ( $\nabla \rho \neq 0$ ). L'acqua salata con un gradiente di salinità è un possibile esempio.

## 1.2 L'equazione di moto

Consideriamo ora l'equazione di moto di una particella fluida, cioè  $\mathbf{F} = m \mathbf{a}$ . E' ovvio che questa equazione andrà scritta nella rappresentazione lagrangiana. Infatti,  $\mathbf{F}$  è la forza che si esercita su una **ben definita particella** e  $\mathbf{a}$  è l'accelerazione che ne consegue. Quindi

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}.$$

L'equazione di moto si scrive dunque:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = \sum_k \mathbf{F}_k,$$

dove  $\sum \mathbf{F}$  rappresenta la somma di tutte le forze che agiscono sulla particella in questione. In meccanica dei fluidi è utile distinguere le forze dovute ai gradienti di pressione, che sono spesso dominanti, da tutte le altre. Dato un volume  $V$ , delimitato da una superficie  $S$ , la forza totale che le forze di pressione esercitano su di esso è data da

$$-\int_S P \mathbf{n} dS = -\int_V \nabla P dV,$$

dove  $\mathbf{n}$  è la normale esterna alla superficie  $S$  nel punto considerato. Quindi le forze dovute alla pressione sono date semplicemente da  $-\nabla P$ . Si scrive dunque :

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla P + \sum_k \mathbf{f}_k, \quad (1.2)$$

dove ora  $\sum \mathbf{f}$  include tutte le forze diverse da quelle dovute alla pressione.

Si osservi che nell'equazione di moto non compaiono termini connessi con l'eventuale interazione di una particella fluida con quelle adiacenti. Quando ciò avviene, cioè quando è possibile trascurare gli effetti della viscosità, della conduzione di calore e delle perdite radiative, si parla di *fluido perfetto*. E' evidente che in fluido perfetto ogni particella fluida evolve in modo adiabatico. Se  $s$  è l'entropia per unità di massa, avremo (descrizione lagrangiana!)  $ds/dt = 0$ , cioè:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) s = 0. \quad (1.3)$$

In linea di principio, ogni particella fluida potrebbe avere una diversa entropia e la condizione di adiabaticità esprimerebbe semplicemente il fatto che il valore dell'entropia di una singola particella è costante durante il moto. Tuttavia, accade spesso che il valore dell'entropia sia lo stesso per tutte le particelle fluide ad un determinato istante e quindi, a causa dell'adiabaticità, anche in tutti gli istanti successivi. In questo caso si parla di moto *isentropico* e la condizione riguardante l'entropia diviene semplicemente

$$s = \text{costante},$$

sia nello spazio che nel tempo.

L'equazione di evoluzione dell'entropia ( $ds/dt = 0$ ), può essere posta in una forma analoga all'equazione di continuità considerando la quantità  $\rho s$ , cioè la *densità di entropia* e calcolandone la derivata totale utilizzando l'equazione di continuità. Si ottiene facilmente:

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho s \mathbf{v}) = 0, \quad (1.4)$$

che ha la stessa struttura e interpretazione dell'equazione di continuità.

Introducendo ora la funzione termodinamica *entalpia*  $W = U + PV$  e considerando l'entalpia riferita all'unità di massa  $w$ , avremo:

$$dw = d\epsilon + Pd(1/\rho) + dP/\rho,$$

dove  $\epsilon$  è l'energia interna per unità di massa e  $1/\rho$  è il volume dell'unità di massa. Utilizzando ora il primo principio della termodinamica,  $d\epsilon = Tds - Pd(1/\rho)$ , otteniamo:

$$dw = Tds + dP/\rho.$$

In un moto isentropico  $ds = 0$  e quindi  $dw = dP/\rho$ . L'equazione di moto di un fluido perfetto si può dunque scrivere:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla P}{\rho} = -\nabla w. \quad (1.5)$$

Una formula vettoriale di frequente uso in meccanica dei fluidi è la seguente:

$$\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \nabla(u^2/2) - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \quad (1.6)$$

dove  $\mathbf{u}$  è un generico vettore. Utilizzando questa formula possiamo scrivere l'equazione (1.5) come:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) = -\nabla(w + v^2/2). \quad (1.7)$$

Prendendo il rotore della precedente equazione e introducendo il vettore *vorticità*,  $\omega = \nabla \times \mathbf{v}$ , si ottiene:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \omega),$$

che contiene solo la velocità.

### 1.3 L'equazione di Bernoulli

Un caso di notevole interesse in meccanica dei fluidi è quello di un moto stazionario, cioè un moto in cui, qualunque sia il punto scelto, il valore di tutte le grandezze rimane costante nel tempo. Quindi la derivata *euleriana* rispetto al tempo di qualunque grandezza è nulla:  $\partial/\partial t = 0$ . Ciò non toglie che il valore delle grandezze fisiche relative a una ben definita particella fluida (schema lagrangiano) possa variare nel tempo:  $d/dt = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \neq 0$ . L'equazione (1.7) nel caso stazionario si scrive:

$$\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla(w + v^2/2).$$

Proiettiamo ora la precedente relazione sulle linee di flusso (o linee di corrente) definite come le linee che in ogni punto sono parallele al vettore velocità. In altre parole, facciamo il prodotto scalare della equazione di moto stazionaria con  $\mathbf{v}$ . Poichè  $\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})$  è perpendicolare a  $\mathbf{v}$  ne segue che

$$\mathbf{v} \cdot \nabla(v^2/2 + w),$$

ossia che

$$w + v^2/2 = \text{costante}$$

lungo una linea di flusso. La costante in generale varia da una linea di flusso ad un'altra perchè solo il gradiente lungo la linea di flusso si annulla, ma non l'intero gradiente. La

condizione perchè la costante sia la stessa su tutte le linee di flusso si ricava immediatamente dall'equazione di moto stazionaria, imponendo che  $\nabla(w + v^2/2) = 0$ , ciò che implica che sia  $\nabla \times \mathbf{v} = 0$  (moti irrotazionali) oppure che  $\nabla \times \mathbf{v}$  sia parallelo a  $\mathbf{v}$  (moti di Beltrami). Nel caso siano presenti altre forze derivabili da un potenziale,  $\mathbf{f} = -\rho\nabla\Phi$ , otterremo:

$$v^2/2 + w + \Phi = \text{costante} \quad (1.8)$$

lungo una linea di corrente. Questa relazione è conosciuta come *teorema di Bernoulli*.

## 1.4 L'equazione dell'energia

L'ultima equazione fondamentale della meccanica dei fluidi riguarda l'energia ed è, almeno per i fluidi perfetti, già contenuta nell'equazione adiabatica. E' utile tuttavia riscriverla in forma diversa, analoga all'equazione di continuità. Per far ciò, consideriamo il contenuto energetico di un volume arbitrario. La densità di energia sarà

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\epsilon,$$

dove  $\epsilon$  è l'energia interna per unità di massa. Mantenendo fisso il volume, consideriamo ora la variazione temporale dei due termini della precedente quantità.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}\rho v^2) = -\frac{1}{2}\nabla(\rho\mathbf{v}) - \mathbf{v} \cdot \nabla P - \rho\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v},$$

dove si è fatto uso dell'equazione di continuità e dell'equazione di moto. Poichè

$$\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \nabla(v^2/2) \quad , \quad \nabla P = \rho\nabla w - \rho T\nabla s,$$

si ottiene:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}\rho v^2) = -\frac{1}{2}\nabla(\rho\mathbf{v}) - \rho\mathbf{v} \cdot \nabla(v^2/2 + w) + \rho T \rho\mathbf{v} \cdot \nabla s.$$

Dal primo principio della termodinamica otteniamo

$$\rho d\epsilon = \rho T ds + (P/\rho)d\rho,$$

e quindi

$$d(\rho\epsilon) = \rho d\epsilon + \epsilon d\rho = \rho T ds + (P/\rho + \epsilon)d\rho = \rho T ds + w d\rho,$$

e infine

$$\frac{\partial(\rho\epsilon)}{\partial t} = \rho T \frac{\partial s}{\partial t} + w \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho T \mathbf{v} \cdot \nabla s - w \nabla(\rho\mathbf{v}),$$

dove si sono usate l'equazione di continuità per la massa e per l'entropia.

Riunendo le espressioni trovate si arriva alla seguente equazione:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( \frac{1}{2} v^2 + \epsilon \right) \right] = -\nabla \left[ \rho \mathbf{v} \left( \frac{1}{2} v^2 + w \right) \right]. \quad (1.9)$$

Come si vede, si ha ancora una forma simile all'equazione di continuità. Infatti al primo membro abbiamo la derivata temporale (euleriana) della densità di energia, mentre al secondo membro abbiamo la divergenza di un vettore che è legato al flusso del vettore  $\rho(\frac{1}{2}v^2 + w)\mathbf{v}$ . A differenza di quanto avviene nel caso dell'equazione di continuità per la massa, tale vettore non è semplicemente il prodotto di  $\mathbf{v}$  con la densità di energia: la quantità  $\epsilon$  è sostituita dalla quantità  $w = \epsilon + P/\rho$ . Il motivo è semplice: l'energia all'interno del volume può variare non solo perchè vi è un flusso di energia attraverso le pareti, ma anche per effetto del lavoro compiuto dalle forze di pressione. Quest'ultimo infatti è pari a

$$- \int_S P \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS,$$

che trasformato in integrale di volume dà

$$- \int_V \nabla(P\mathbf{v}) dV = - \int_V \nabla[\rho\mathbf{v}(P/\rho)] dV,$$

cioè esattamente il termine aggiunto a secondo membro.

## 1.5 Le equazioni della meccanica dei fluidi in forma conservativa

E' utile scrivere le equazioni della meccanica dei fluidi in forma *conservativa*. Con questo si intende che le equazioni assumano la forma:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

nel caso scalare, oppure

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} R_{ik} = 0$$

nel caso vettoriale.

L'equazione di continuità per la massa (Eq. (1.1)) è già scritta in forma conservativa e così pure quella per la conservazione dell'energia (Eq. (1.9)). Si è già notato che in generale  $\mathbf{J} \neq q\mathbf{v}$ . Le equazioni di continuità e di moto possono essere riunite in una equazione in forma conservativa, legata alla conservazione dell'impulso. Infatti, se calcoliamo la derivata temporale della densità di impulso  $\rho\mathbf{v}$ , otteniamo:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial P}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho v_i v_k),$$

dove si è fatto uso dell'equazione di continuità e dell'equazione di moto. La precedente espressione suggerisce di definire un *tensore di pressione*

$$P_{ik} = P\delta_{ik} + \rho v_i v_k,$$

che consente di scrivere:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = - \frac{\partial}{\partial x_k} P_{ik}. \quad (1.10)$$



## 2 Studio delle onde

Definiamo onde dei disturbi che si propagano. Anche le onde stazionarie si possono interpretare come sovrapposizione di due onde che si propagano in direzioni opposte. Le onde sono il modo in cui un sistema fluido reagisce alle sollecitazioni. Sistemi con condizioni di equilibrio differenti reagiscono con differenti tipi di onde. Le onde sono quindi conseguenza della somma di due forze:

1. Il disturbo.
2. La reazione del sistema al disturbo (Reazione antagonista).

In natura le onde si possono osservare di molte specie e in molte occasioni (onde del mare, onde acustiche, vibrazioni, onde sismiche...) ma le possiamo suddividere in due classi ben definite in base alla loro ampiezza:

1. *Onde piccole o lineari.* Le equazioni che le descrivono sono lineari.
2. *Onde grandi o non lineari.* Le equazioni che le descrivono sono non lineari.

Trattiamo ora soltanto le onde lineari; il caso di quelle non lineari (onde d'urto) sarà esaminato in seguito. Poichè le equazioni della meccanica dei fluidi sono non lineari, procederemo utilizzando la teoria delle piccole perturbazioni. Supponiamo cioè di conoscere una soluzione *imperturbata*, tipicamente una soluzione di equilibrio statico, delle equazioni fluide e determiniamo la dinamica del sistema quando essa venga *perturbato*, cioè quando lo stato del sistema si scosti poco dalle condizioni di equilibrio. Questo procedimento consente di linearizzare le equazioni, cioè di passare da un sistema non lineare ad un sistema lineare a cui si possono quindi applicare i metodi standard di soluzione. Lo stato imperturbato è definito dalle condizioni:

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0 \quad ; \quad \mathbf{v} = 0.$$

Le perturbazioni a tutte le quantità saranno quindi definite come:

$$f = f_o + \epsilon f_1 \quad (\epsilon \ll 1),$$

dove sono state indicate con il pedice  $o$  le quantità all'equilibrio. Le perturbazioni sono sempre trascurabili rispetto alle quantità all'equilibrio tranne che per la velocità del fluido che all'equilibrio è supposta nulla ( $\mathbf{v} = \epsilon \mathbf{v}$ ). Per linearizzare le varie equazioni si sostituisce

a ciascuna variabile il suo sviluppo perturbativo, separando poi i termini di ordine zero in  $\epsilon$  da quelli di ordine uno (in quanto non possono compensarsi a vicenda nelle equazioni e quindi devono essere nulli entrambi) e trascurando i termini di ordine superiore. Partiamo quindi dalle equazioni fluide:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

$$\rho \left\{ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right\} = -\nabla P$$

L'equazione di continuità diviene:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_o + \epsilon \rho_1) + \nabla \cdot [(\rho_o + \epsilon \rho_1) \epsilon \mathbf{v}] = 0,$$

e quindi, fino al primo ordine in  $\epsilon$ ,

$$\frac{\partial \rho_o}{\partial t} + \epsilon \left[ \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_o \mathbf{v}) \right] = 0$$

Da cui, separando i vari ordini, si ottiene:

$$\frac{\partial \rho_o}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_o \mathbf{v}) = 0$$

Facciamo la stessa cosa con l'equazione di moto; il primo membro dell'equazione di ordine zero ha tutti termini in  $\mathbf{v}$  e quindi è nullo:

$$0 = -\nabla P + \mathbf{f}$$

Se per il momento si suppone che agiscano sole le forze legate alla pressione, si ottiene  $P_0 = \text{costante}$ , mentre al primo ordine si ha:

$$\rho_o \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla P_1$$

Manca da trattare solo l'equazione dell'energia. Supponiamo che il gas sia un gas perfetto. L'espressione dell'entropia è quindi

$$s = c_V \ln (P \rho^{-\gamma}).$$

Nel caso di processi adiabatici l'equazione dell'energia è semplicemente:

$$\frac{ds}{dt} = 0$$

,

Considerando  $s = s_o + s_1$ , dove si è conglobata la quantità  $\epsilon$  in  $s_1$ , si sviluppa la derivata totale:

$$\frac{d(s_o + s_1)}{dt} = \frac{\partial(s_o + s_1)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla(s_o + s_1) = 0$$

Il termine contenente  $\mathbf{v}$  non dà contributi di ordine zero e quindi:

$$\frac{\partial s_o}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial s_1}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla s_o = 0$$

Dobbiamo adesso identificare  $s_o$  e  $s_1$ :

$$s = c_V \ln \{ (P_o + P_1)(\rho_o + \rho_1)^{-\gamma} \} = c_V \ln \left\{ P_o \rho_o \left( 1 + \frac{P_1}{P_o} \right) \left( 1 + \frac{\rho_1}{\rho_o} \right)^{-\gamma} \right\}$$

Sviluppando in serie fino al primo ordine si ha:

$$s = c_V \ln \left\{ P_o \rho_o^{-\gamma} \left( 1 + \frac{P_1}{P_o} - \gamma \frac{\rho_1}{\rho_o} \right) \right\}$$

Ma per  $x \ll 1$   $\ln(1+x) \simeq x$  e quindi:

$$s \simeq c_V \left\{ \ln (P_o \rho_o^{-\gamma}) + \frac{P_1}{P_o} - \gamma \frac{\rho_1}{\rho_o} \right\} = c_V \ln (P_o \rho_o^{-\gamma}) + \frac{1}{P_o} \left( P_1 - \gamma P_o \frac{\rho_1}{\rho_o} \right)$$

Chiamando  $c_s^2 = \gamma \frac{P_o}{\rho_o}$  e identificando con  $s_o$  il termine  $c_V \ln (P_o \rho_o^{-\gamma})$  e con  $s_1$  l'altro si ottiene la forma linearizzata per l'energia:

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla P_o - c_s^2 \left\{ \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho_o \right\} = 0$$

Vogliamo ora riunire tutto il sistema in un'unica equazione per la velocità  $\mathbf{v}$ . Per raggiungere questo risultato si deriva l'equazione di moto rispetto al tempo e poi, sfruttando anche le equazioni di ordine 0, si sostituiscono tutte le variabili diverse da  $\mathbf{v}$  per cui arrivando infine a scrivere:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} = c_s^2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) + (\gamma - 1) \mathbf{g} (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \nabla (\mathbf{v} \cdot \mathbf{g}) \quad (2.1)$$

## 2.1 Onde sonore

Supponendo che il problema sia piano-parallelo, cioè tutte le quantità variano al variare della sola coordinata  $x$ . Supponiamo inoltre che sia  $\mathbf{g} = 0$  e che il sistema sia isoterma,  $T = \text{costante}$ . L'Eq. (2.1) si riduce a quella per la sola componente  $x$  della velocità. Poniamo dunque  $\mathbf{v} = v(x)\mathbf{e}_x$  e ricaviamo dalla (2.1)

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c_s^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \quad (2.2)$$

Il termine  $c_s^2$  dipende solo dalla temperatura ed è quindi una costante. Vediamo dunque che  $v$  obbedisce all'*equazione delle onde* che ha come soluzione:

$$v = f(x - c_s t) + h(x + c_s t),$$

dove  $f$  e  $h$  sono funzioni *arbitrarie* del loro argomento.  $f(x - c_s t)$  rappresenta un disturbo che si propaga senza deformazione nella direzione positiva dell'asse delle  $x$  con velocità  $c_s$ . Analogamente,  $h(x + c_s t)$  rappresenta un disturbo che si propaga senza deformazione nella direzione negativa dell'asse delle  $x$  con velocità  $c_s$ . Si osservi tuttavia che se sia  $f$  che  $h$  sono diverse da zero, il disturbo composto viene deformato durante la propagazione, come sarà illustrato tra poco. Poiché la velocità della particella fluida,  $\mathbf{v}$ , è parallela alla direzione di propagazione dell'onda, quest'ultima viene detta *onda longitudinale*.  $c_s$  prende il nome di *velocità del suono* nel mezzo considerato.<sup>1</sup> Si noti come, dipendendo da  $\gamma$ ,  $c_s$  dipenda anche dal tipo di atomi che compongono il fluido: un atomo con simmetria sferica assorbe meno energia per attivare i suoi gradi di libertà rispetto ad un atomo biatomico. Vogliamo ora

---

<sup>1</sup>La velocità del suono corrisponde alla velocità con cui un sistema comunica con le sue parti, equivale quindi alla velocità con cui si propagano i disturbi.

dimostrare che, se  $\rho_0 = \text{costante}$ , la perturbazione di densità,  $\rho_1$  può essere espressa come:

$$\rho_1 = \frac{\rho_o}{c_s} [f(x - c_s t) - h(x + c_s t)]$$

Sostituendo nell'equazione di continuità  $\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla(\rho_o \mathbf{v}) = 0$  si ottiene:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -\frac{\rho_o}{c_s} [c_s f' + h' c_s'] = -\rho_o (f' + h'),$$

$$\nabla(\rho_o \mathbf{v}) = \rho_o (f' + h'),$$

e quindi:

$$\rho_o (f' + h') - \rho_o (h' + f') = 0$$

Si vuole ora determinare la forma funzionale di  $h$  e  $f$  dalla conoscenza delle condizioni iniziali.

$$v(x; 0) = f(x) + h(x)$$

$$\rho_1(x; 0) = \frac{\rho_o}{c_s} [f(x) - h(x)]$$

Si può ricavare la  $f$  moltiplicando l'espressione  $v(x; 0)$  per  $\frac{\rho_o}{c_s}$  e sommandola all'espressione per  $\rho_1(x; 0)$  ottenendo:

$$f(x) = \frac{1}{2} \frac{c_s}{\rho_o} \left[ \frac{\rho_o}{c_s} v(x; 0) + \rho_1(x; 0) \right]$$

La  $h$  si ricava, invece, sottraendo. Se la forma delle perturbazioni al tempo zero è nota, è determinata la forma funzionale di  $f$  e  $h$ . Per conoscere il valore di queste funzioni ad un generico tempo  $t$  è sufficiente sostituire  $x \pm c_s t$  a  $x$  nelle loro espressioni al tempo  $t = 0$ . Per fare un esempio, supponiamo che  $v(x; 0) = 0$ . Allora:

$$f \propto \rho_1(x; 0) \quad h \propto -\rho_1(x; 0)$$

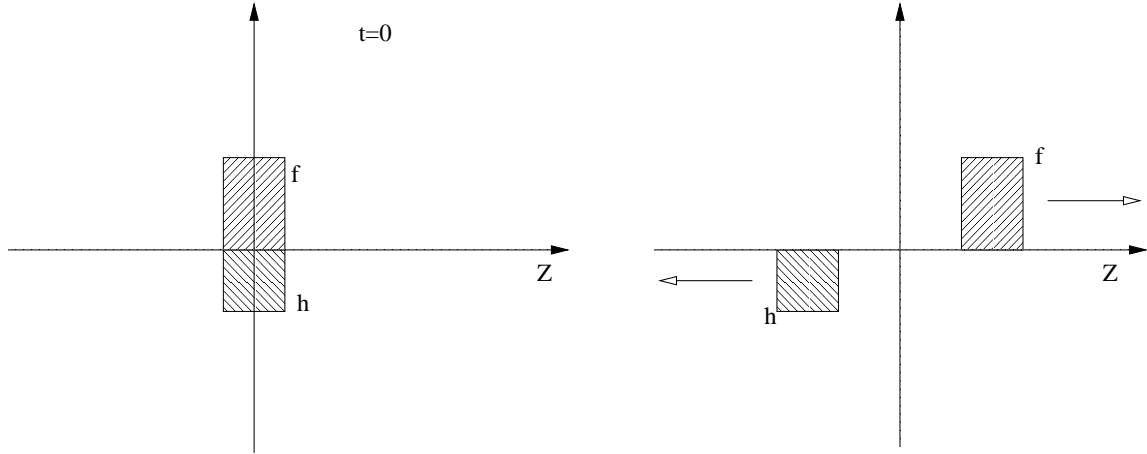


Figura 1:

Come si vede, il profilo della velocità cambia continuamente durante la propagazione. Abbiamo detto che la velocità del suono in un gas perfetto dipende solo dalla temperatura infatti:

$$c_s^2 = \gamma \frac{P_o}{\rho_o} = \gamma \frac{k_B n_o T}{n_o m} = \gamma \frac{k_B T}{m}$$

Si noti la somiglianza con la velocità termica  $v_{th} \propto 3 \frac{k_B T}{m}$ . Nell'aria la velocità del suono risulta essere  $c_s \simeq 320 m/s \simeq 1200 Km/h$ . Se c'è una variazione di densità allora il fluido non può essere incomprimibile e quindi  $\nabla \cdot \mathbf{v} \neq 0$ . Per quanto riguarda l'energia l'equazione al primo ordine:

$$\frac{\partial s_1}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla s_o = 0$$

Se sia  $P_o$  che  $\rho_o$  sono costanti, l'equazione dell'energia si riduce a:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{P_1}{P_o} - \gamma \frac{\rho_1}{\rho_o} \right) = 0$$

Quindi  $s_1$  è costante e, con una opportuna scelta delle condizioni iniziali, si può scrivere:

$$P_1 - c_s^2 \rho_1 = 0$$

L'equazione dell'energia ci dice quindi che le forze di richiamo, cioè quelle che nel sistema reagiscono al disturbo, sono legate alla pressione e quindi le onde generate sono onde di

pressione. Per rendersi conto sia della sensibilità dell'orecchio umano, si pensi che un - frastuono insopportabile produce appena una perturbazione dell'0.5% della densità dell'aria, ciò che giustifica l'uso di una teoria perturbativa in acustica.

## 2.2 Il metodo di Fourier

Consideriamo dapprima una generica funzione  $f(x)$  della coordinata spaziale  $x$  e la sua trasformata di Fourier,  $\tilde{f}(k)$ , definita da (vedi (??)) :

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx. \quad (2.3)$$

$f(x)$  è detta *antitrasformata* di Fourier della  $f(k)$  ed è evidentemente data da (vedi (??)) :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) e^{ikx} dk. \quad (2.4)$$

Per comprendere la relazione tra una funzione e la sua trasformata consideriamo dapprima lo speciale caso in cui la  $f(x)$  è un'onda piana con lunghezza d'onda  $\lambda_0 = 2\pi/k_0$ , infinitamente estesa e di ampiezza costante:

$$f(x) = A e^{ik_0 x}.$$

La sua trasformata di Fourier è data da:

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i(k_0-k)x} dx = \delta(k_0 - k),$$

Vediamo quindi che mentre la funzione non identifica nessuna particolare regione dello spazio delle  $x$ , la trasformata è localizzata con infinita precisione nello spazio delle  $k$ . Se volessimo prendere in esame una funzione maggiormente localizzata nello spazio delle  $x$ , potremmo considerare un pacchetto d'onde, per esempio un pacchetto gaussiano:

$$f(x) = f_0 e^{-a^2 x^2} e^{ik_0 x}. \quad (2.5)$$

Si tratta sostanzialmente di un'oscillazione di lunghezza d'onda  $\lambda = 2\pi/k_0$  la cui ampiezza è modulata da una funzione gaussiana. Il parametro  $a$  è dà una misura della larghezza della gaussiana: nel punto  $x_0 = 1/a$  il valore della gaussiana è pari a  $f_0/e$ . La trasformata di Fourier della (2.5) è data da:

$$\tilde{f}(k) = \frac{f_0}{2a\sqrt{\pi}} e^{-(k-k_0)^2/4a^2}. \quad (2.6)$$

Come si vede la trasformata è ancora una gaussiana, che vale 1/e del suo valore massimo in  $k - k_0 = 2a$ . Possiamo ora definire la regione di localizzazione del pacchetto come:

$$\begin{aligned} (\Delta x)^2 &= \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle 2x \langle x \rangle \rangle + \langle \langle x \rangle^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \\ &= \langle x^2 \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-a^2 x^2} dx}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 x^2} dx}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

dove si è tenuto conto che  $\langle x \rangle = 0$ . Definendo in maniera analoga  $\langle (\Delta k)^2 \rangle$ . ed eseguendo gli integrali, si trova facilmente che

$$\langle \Delta x^2 \rangle \langle \Delta k^2 \rangle = 1/4.$$

Nel caso più generale di un pacchetto non gaussiano, si può dimostrare che la precedente uguaglianza si trasforma nella disuguaglianza:

$$\langle \Delta x^2 \rangle \langle \Delta k^2 \rangle \geq 1/4. \quad (2.8)$$

Possiamo riassumere questi risultati dicendo che tanto più una funzione è localizzata nello spazio delle  $x$ , tanto meno è localizzata la sua trasformata nello spazio delle  $k$ . Questa proprietà delle trasformate di Fourier ricorda da vicino il Principio di Indeterminazione di Heisenberg. Se infatti  $f(x)$  rappresentasse la posizione di una particella, ricordando che in meccanica quantistica l'impulso è definito dalla relazione  $p = \hbar k$  e moltiplicando la (2.8) per  $\hbar$  si vede che essa equivale a  $\Delta x \Delta p \gtrsim \hbar$ .

Tutte le espressioni precedenti sono facilmente generalizzabili al caso in cui  $f = f(\mathbf{r}, t)$  :

$$f(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} d\mathbf{k} d\omega, \quad (2.9)$$

e

$$\tilde{f}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}, t) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} d\mathbf{r} dt, \quad (2.10)$$

dove  $\mathbf{k}$  e  $\omega$  sono quantità reali. La (2.9) rende evidente il significato fisico della trasformata di Fourier: la funzione data viene considerata come una sovrapposizione di onde elementari, rappresentate dal fattore  $\exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$ , con un'ampiezza data da  $\tilde{f}(\mathbf{k}, \omega)$ . La quantità

$$\Phi = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t = k \left( \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_k - \frac{\omega}{k} t \right) \quad (2.11)$$

viene detta fase dell'onda.

La (2.4) mostra che per ogni onda elementare lo spazio e il tempo compaiono solo nella combinazione  $(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_k - \frac{\omega}{k} t)$ . I piani  $\Phi = \text{costante}$  si muovono dunque nella direzione di  $\mathbf{e}_k$  con velocità

$$\mathbf{v}_f = \frac{\omega}{k} \mathbf{e}_k. \quad (2.12)$$

Per determinare  $\tilde{f}(\mathbf{k}, \omega)$  è sufficiente conoscere la  $f(\mathbf{r}, t)$  al tempo  $t = 0$ . Infatti, scrivendo  $f(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{r}, t) \delta(t)$  nell'integrando della (2.10), otteniamo un'espressione per le componenti di Fourier, che, introdotta nella (2.9), ci fornisce l'espressione di  $f(\mathbf{r}, t)$  per  $t \neq 0$ .

Si può descrivere l'insieme di queste operazioni dicendo che l'ampiezza iniziale di ciascuna onda elementare è trasportata con la velocità di fase caratteristica di tale onda, data dalla (2.12). Ad ogni istante il profilo della  $f(\mathbf{r}, t)$  viene ricostruito sommando il contributo di tutte le onde elementari. Poichè, in generale, la velocità di fase è diversa per le diverse onde



elementari, il profilo ricostruito al tempo  $t$  risulterà modificato rispetto al profilo iniziale: è questo il fenomeno della dispersione. Se tuttavia la velocità di fase è la stessa per tutte le onde elementari, non si avrà distorsione del profilo.

Se esaminiamo criticamente la procedura descritta ci rendiamo però conto che da un lato non abbiamo mai specificato la dinamica del fenomeno e dall'altro non sappiamo quale significato attribuire al parametro  $\omega$  quando determiniamo la  $\tilde{f}(\mathbf{k}, \omega)$  a partire dalle condizioni iniziali, visto che  $\omega$  di fatto scompare dal risultato dell'integrale nella (2.10). Questi due aspetti sono legati tra loro, come ora vedremo.

Abbiamo supposto che la  $f(\mathbf{r}, t)$  sia la soluzione di un'equazione differenziale lineare omogenea nelle variabili  $\mathbf{r}$  e  $t$ . Essa conterrà dunque gli operatori  $\nabla$  e  $\partial/\partial t$ . Scrivendo la  $f(\mathbf{r}, t)$  nella forma (2.9) ci si rende immediatamente conto che

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} (-i\omega \tilde{f}) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} d\mathbf{k} d\omega,$$

e, analogamente;

$$\nabla f = \int_{-\infty}^{\infty} (i\mathbf{k} \tilde{f}) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} d\mathbf{k} d\omega.$$

Dunque, a livello delle trasformate, gli operatori  $\nabla$  e  $\partial/\partial t$  sono semplicemente i moltiplicatori  $i\mathbf{k}$  e  $-i\omega$ . Questo risultato vale anche per applicazioni ripetute di tali operatori,  $\partial^2 f/\partial t^2 \rightarrow -\omega^2 \tilde{f}$ , o per le formule del calcolo vettoriale se  $f$  è un vettore,  $\nabla \cdot \mathbf{f} \rightarrow i\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{f}}$  e così via.

Di conseguenza, l'equazione differenziale omogenea nello spazio  $(\mathbf{r}, t)$  che possiamo scrivere simbolicamente nella forma:

$$D(\nabla, \partial/\partial t) f = 0, \tag{2.13}$$

nello spazio delle trasformate  $(\mathbf{k}, \omega)$  diviene:

$$D(i\mathbf{k}, -i\omega) \tilde{f} = 0. \tag{2.14}$$

Nello spazio delle trasformate dobbiamo quindi risolvere un'equazione *algebraica* invece di un'equazione *differenziale*, ciò che rappresenta un indubbio vantaggio. D'altra parte, sappiamo che la condizione per avere una soluzione non identicamente nulla della (2.14) è

$$D(i\mathbf{k}, -i\omega) = 0.$$

La precedente equazione, detta *relazione di dispersione*, stabilisce il legame tra  $\omega$  e  $\mathbf{k}$  di cui avevamo bisogno. In generale, la relazione di dispersione possiede un numero finito di soluzioni discrete (dette *modi normali*):

$$\omega = \omega_\alpha(\mathbf{k}), \quad \alpha = 1, 2, \dots, N. \tag{2.15}$$

Possiamo introdurre formalmente la condizione  $D(i\mathbf{k}, -i\omega) = 0$  nella (2.9) scrivendo:

$$\tilde{f}(\mathbf{k}, \omega) = \sum_{\alpha=1}^N \tilde{f}_\alpha(\mathbf{k}) \delta[\omega - \omega_\alpha(\mathbf{k})],$$

con le  $\omega_\alpha$  date dalla (2.15). Eseguendo l'integrale in  $d\omega$  nella (2.9) troviamo che la soluzione generale del nostro problema può essere scritta nella forma:

$$f(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}_\alpha(\mathbf{k}) e^{i[\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_\alpha(\mathbf{k})t]} d\mathbf{k}. \quad (2.16)$$

I risultati precedenti si generalizzano facilmente al caso in cui si debbano considerare grandezze vettoriali. La (2.13) in tal caso diviene

$$D(\nabla, \partial/\partial t) \mathbf{f} = 0,$$

dove  $D$  è un tensore e la (2.14) si scrive ora

$$\tilde{D}(i\mathbf{k}, -i\omega) \text{vec} \tilde{f} = 0.$$

La condizione per avere soluzioni non nulle, cioè la relazione di dispersione, è ora data da :

$$D(\mathbf{k}, \omega) = \text{Det}[\tilde{D}(i\mathbf{k}, -i\omega)] = 0. \quad (2.17)$$

Ad ogni soluzione della relazione di dispersione è associato un *autovettore*  $\tilde{\mathbf{f}}$  che caratterizza quel particolare modo di propagazione.

Ritornando ora al problema delle onde sonore, applichiamo il metodo di Fourier alla sua soluzione. Siccome i coefficienti dell'equazione (2.2) sono costanti, potremo effettuare uno sviluppo di Fourier sia rispetto al tempo che rispetto alla coordinata spaziale  $x$ :

$$v(x; t) = \int \hat{v}(k; \omega) e^{i(kx - \omega t)} dk d\omega$$

Sostituendo nell'equazione delle onde si ottiene:

$$\int \hat{v}(k; \omega) [-\omega^2 + c_s^2 k^2] e^{i(kx - \omega t)} dk d\omega = 0$$

Essendo questa un'identità che deve valere per qualsiasi  $\hat{v}$ , l'unica soluzione possibile è che il termine fra parentesi quadre sia nullo e quindi:

$$\omega^2 = c_s^2 k^2 \quad \Rightarrow \quad \omega = \pm k c_s,$$

che costituisce la relazione di dispersione per le onde sonore. Tenendo conto di tale relazione possiamo scrivere:

$$v(z; t) = \int \hat{v}(k; kc_s) e^{ikx - kc_s t} dk + \int \hat{v}(k; -kc_s) e^{i(kx + kc_s t)} dk$$

Gli integrali possono essere riscritti come:

$$\int \hat{v}(k; \pm c_s k) e^{ik(x \pm c_s t)} dk.$$

Questo integrale semplicemente la rappresentazione di Fourier di una generica funzione di argomento di argomento  $x \pm c_s t$  e ritroviamo quindi il ben noto risultato per le soluzioni dell'equazione delle onde. Il beneficio immediato nell'utilizzare al posto della funzione la sua trasformata e quello di trasformare un sistema di equazioni differenziali ordinarie in un sistema algebrico lineare:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c_s^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0 \quad \rightarrow \quad (-\omega^2 + k^2 c_s^2) \hat{v}(k; \omega) = 0$$

Il fatto che la relazione di dispersione,  $\omega = \pm kc_s$ , sia lineare ci dice che la forma della perturbazione non cambia durante la dinamica del sistema: infatti la velocità di fase è uguale per tutte le componenti della trasformata di Fourier e quindi quando si passa all'antitrasformata si ricostruisce esattamente il profilo iniziale. Se la relazione di dispersione non fosse lineare ogni componente della trasformata di Fourier avrebbe una velocità diversa e il pacchetto cambierebbe di forma durante la propagazione.

Nelle onde sonore la velocità del disturbo è parallela alla direzione in cui cambia l'ampiezza dell'onda: si tratta di *onde longitudinali*. Il caso delle onde del mare è invece quello delle *onde trasverse* dove la velocità di propagazione del disturbo è perpendicolare alla direzione di variazione del disturbo.

### 2.3 Velocità di fase e velocità di gruppo

Abbiamo definito la velocità di fase come la velocità di propagazione delle onde elementari,  $\mathbf{v}_f = (\omega/k)\mathbf{e}_k$ . E' facile rendersi conto che questa velocità non può essere associata ad alcun effetto fisico, in particolare alla trasmissione di segnali o al trasferimento di energia. Infatti, le onde elementari hanno un'ampiezza costante e sono infinitamente estese nello spazio. Quindi il loro moto con velocità  $\mathbf{v}_f$  non può produrre nulla di fisicamente osservabile, poichè la situazione rimane identica a s stessa al passare del tempo. Quindi, anche se la velocità di fase divenisse maggiore di  $c$ , questo non costituirebbe una violazione dei principi della relatività, che stabiliscono che la velocità della luce è un limite superiore per la velocità di qualunque *segnale*.

Diverso è il caso di un pacchetto d'onde che distingue una particolare regione dello spazio dalle altre. Un eventuale movimento del pacchetto sarà quindi osservabile e potrà essere associato a effetti fisici. La velocità con cui si muove un pacchetto d'onde è detta *velocità di gruppo*. Per ottenere un'espressione della velocità di gruppo, consideriamo un pacchetto che rappresenti un treno d'onde di lunghezza finita, quale, ad esempio, il pacchetto gaussiano considerato in precedenza. Supponiamo inoltre che lo spettro del pacchetto, cioè l'insieme dei vettori d'onda che lo rappresentano nello spazio delle  $k$ , presenti un picco nell'intorno di un particolare valore  $k_0$ . Nel caso del pacchetto gaussiano, questo avviene quando  $a/k_0 \ll 1$ . Se questo avviene per uno dei modi normali, l'integrale nella (2.16) riceverà un contributo solo dai valori di  $k$  vicini a  $k_0$  e questo ci autorizza a sviluppare in serie di Taylor intorno a  $k_0$  la quantità  $\omega_\alpha(\mathbf{k})$  che compare in tale integrale. Limitandoci ai termini del primo ordine scriveremo, omettendo il pedice  $\alpha$ ,

$$\omega(\mathbf{k}) \simeq \omega(\mathbf{k}_0) + \sum_i (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)_i \left. \frac{\partial \omega}{\partial k_i} \right|_{\mathbf{k}_0} = \omega_0 + (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \cdot \mathbf{v}_g,$$

dove si è introdotta la quantità

$$\mathbf{v}_g = \left. \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} \right|_{\mathbf{k}_0}. \quad (2.18)$$

La (2.16) (limitandoci ad un solo termine della somma) può ora essere scritta nella forma

$$f(\mathbf{r}, t) = \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{v}_g t)} d\mathbf{k} \right] e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - \omega_0 t}.$$

L'espressione in parentesi quadra rappresenta una generica funzione della variabile  $(\mathbf{r} - \mathbf{v}_g t)$  e in definitiva potremo scrivere

$$f(\mathbf{r}, t) = A(\mathbf{r} - \mathbf{v}_g t) e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - \omega_0 t}.$$

Questa equazione mostra che per ogni modo d'onda (scelto cioè il valore del parametro  $\alpha$  nella (2.16)) la soluzione consiste in un'onda piana infinita, corrispondente ad un vettore d'onda  $k_0$  e frequenza  $\omega_0$  che si propaga con la *velocità di fase*,  $\mathbf{v}_f = (\omega_0/k_0)\mathbf{e}_k$ , la cui ampiezza è modulata dalla funzione  $A(\mathbf{r} - \mathbf{v}_g t)$ , che si propaga con la *velocità di gruppo*,  $\mathbf{v}_g = (\partial \omega / \partial \mathbf{k})_{k_0}$ . La velocità di gruppo può essere identificata con la velocità di propagazione dell'energia e pertanto deve risultare  $v_g < c$ .