

**Esercizi di
Fisica Nucleare e Subnucleare**

I - Sezione d'urto, conteggi

1. *Fascio di neutroni*

Un fascio di neutroni monoenergetici è prodotto usando la reazione ${}^3\text{H}(d,n){}^4\text{He}$ per cui $Q = 17.6$ MeV. Se il fascio di deutoni ($i = 2\mu\text{A}$, $E = 2.5$ MeV) incide su un bersaglio di trizio (densità superficiale 0.2 mg/cm²), calcolare il flusso di neutroni che attraversa una fenditura di area 1 cm², posta alla distanza di 1 m ad un angolo di 30° rispetto alla direzione del fascio, sapendo che la sezione d'urto differenziale è di 13 mb/sr a questo angolo. Qual'è l'energia dei neutroni ?

R : $\Phi_n = 652.4$ s⁻¹, $E_n = 18.4$ MeV

2. *Sezione d'urto Rutherford*

Un fascio di $i = 1\mu\text{A}$ di particelle α , di energia $E^L = 12$ MeV, bombarda un bersaglio di Ag ($Z=47$) dello spessore di 0.2 μm . Un rivelatore di area 1 cm² è posto alla distanza di 10 cm e a 60° . Calcolare il tasso di conteggi. (Dati del bersaglio: $\rho = 10.5$ g/cm³, peso atomico medio = 107.8).

R : $\Phi_\alpha = 4.6 \cdot 10^4$ s⁻¹

3. *Scattering α - carbonio*

In un esperimento di scattering elastico di particelle α ($i = 1$ μA , $E^L = 40$ MeV) da un bersaglio di grafite con densità superficiale di 1.5 mg/cm² il rivelatore ($\Delta S = 10$ cm², $D = 1$ m) posto a $\vartheta^L = 20^\circ$ è attraversato da 6300 α /s. Ricavare il valore sperimentale della sezione d'urto differenziale per lo scattering elastico α - ${}^{12}\text{C}$ e confrontarlo con il valore predetto dalla formula di Rutherford.

R : $d\sigma/d\Omega = 26.8$ mb/sr, $(d\sigma/d\Omega)_{Ruth} = 128.3$ mb/sr

lo scattering non è puramente coulombiano perchè (classicamente) $d_0 = 0.58$ fm è minore di $R({}^{12}\text{C}) = 3.04$ fm

4. *Cammino libero medio*

Un fascio di particelle incide su uno strato spesso di materiale assorbente. Calcolare il cammino libero medio nei seguenti casi :

a) neutroni termici ($E \simeq 25$ meV) su cadmio ($\rho = 8.6$ g/cm³, $A = 112.4$, $\sigma = 23500$ b/nucleo)

b) fotoni da 2 MeV su piombo ($\rho = 11.3$ g/cm³, $A = 207.19$, $\sigma = 15.7$ b/atomo)

c) antineutrini di un reattore sulla Terra ($\rho = 5$ g/cm³, $\sigma \simeq 10^{-43}$ cm²/elettrone, $Z/A \simeq 0.5$). N.B. : le interazioni con i nuclei possono essere ignorate.

R : $\Lambda = 9.2$ μm (a), 2 cm (b), $6.7 \cdot 10^{16}$ m (c)

5. *Z del carbonio (Misure di Barkla)*

Un fascio di raggi X è attenuato di un fattore 0.64 nell' attraversamento di un blocco di grafite ($\rho = 2.27$ g/cm³) dello spessore di 1 cm. Assumendo che l'assorbimento sia dovuto allo scattering Thomson sugli elettroni del materiale ($\sigma = 6.7 \cdot 10^{-25}$ cm²), derivare

il numero atomico del carbonio.

R : $Z = 6$

6. *Reazione neutrone - uranio naturale*

Un fascio di neutroni di $E = 0.29$ eV e di $I = 10^5$ n/s incide su un bersaglio di uranio dello spessore di 0.01 g/cm². L' uranio naturale consiste per il 99.28% di ²³⁸U e per il resto di ²³⁵U. A questa energia solo lo scattering elastico contribuisce nell'interazione n-²³⁸U con $\sigma = 10$ b, mentre nell' interazione n-²³⁵U, oltre allo scattering elastico ($\sigma = 0.02$ b), sono possibili la cattura radiativa ($\sigma = 70$ b) e la fissione ($\sigma = 200$ b). Calcolare: a) l'attenuazione del fascio, b) il tasso delle reazioni di fissione.

R : attenuazione = 0.03%, $dN_f/dt = 3.6$ s⁻¹

7. *Reazione neutrone - boro naturale*

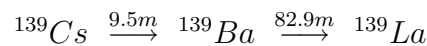
Un lamina sottile di boro naturale (20% di ¹⁰B, 80% di ¹¹B) è attraversata normalmente da un fascio di neutroni di energia cinetica di 1 keV. Il solo assorbimento significativo dei neutroni avviene sul ¹⁰B con una sezione d'urto di 19.3 b e con emissione di una particella α . Nel 30% dei casi il nucleo residuo di ⁷Li resta nello stato fondamentale e nel 70% dei casi in uno stato eccitato da cui decade con emissione di un γ da 500 keV. Trascurando l'effetto dello scattering elastico dei neutroni nella lamina, qual'è il tasso dei gamma emessi se il fascio ha una intensità di 10^5 neutroni/s e la lamina una massa per unità di area di 0.1 g/cm² ?

R : $\Phi_\gamma = 1491$ s⁻¹.

II - Radioattività

1. *Catena radioattiva*

Si osserva la catena radioattiva

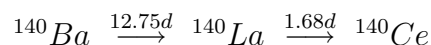


a partire da un campione di 1 mCi di ¹³⁹Cs . Studiare l' andamento temporale della attività del Bario e calcolare, in particolare, il suo valore massimo e il momento in cui si manifesta.

R: $t_m = 33.54$ m, $A(t_m) = 86.6$ μ Ci

2. *Catena radioattiva*

Si osserva la catena radioattiva



a partire da un campione di 1 μ Ci di ¹⁴⁰Ba. Studiare l' andamento temporale della attività del Lantanio nel campione e calcolare, in particolare, il suo valore massimo e il momento in cui si manifesta.

R: $t_m = 5.66$ d, $A(t_m) = 0.73$ μ Ci

3. *Equilibrio secolare*

I nuclei intermedi delle serie radioattive dell' ^{238}U e dell' ^{235}U hanno vite medie trascurabili sulla scala dei tempi geologici, sicchè si può dire che l' ^{238}U decade a ^{206}Pb con tempo di dimezzamento di $4.47 \cdot 10^9$ anni e l' ^{235}U decade a ^{207}Pb con tempo di dimezzamento di $7.04 \cdot 10^8$ anni.

In una roccia contenente uranio sono state misurate le quantità di atomi di ^{238}U , ^{235}U , ^{206}Pb , ^{207}Pb che risultano essere nelle seguenti proporzioni 1000 : 7.19 : 79.7 : 4.85. Supponendo che tutto il piombo nella roccia derivi dal decadimento dell' uranio, stimare l'età della roccia.

R: $t = 495$ Myr dai dati su ^{238}U e ^{206}Pb , $t = 524$ Myr dai dati su ^{235}U e ^{207}Pb

4. *Radiodatazione con il ^{14}C*

Un frammento di legno di una tomba egiziana contiene 1 g di carbonio la cui attività misurata è di $3.9 \cdot 10^{-12}$ Ci. Sapendo che l'abbondanza di ^{14}C nel carbonio naturale in equilibrio con l'anidride carbonica dell'atmosfera è $1.3 \cdot 10^{-10}$ % e che il suo tempo di dimezzamento è di 5730 anni, stimare l'età del frammento.

R: $t = 4600$ yr

5. *Attività del Radon*

La sala di un teatro di dimensioni 10m x 10m x 4m, le cui pareti, pavimento e soffitto sono fatti di cemento, non viene aerata per molti giorni dopo uno spettacolo. L'attività specifica misurata di ^{222}Rn è di 100 Bq/m³. Determinare la concentrazione di ^{238}U nel cemento se lo spessore efficace dal quale il Radon, che proviene dal decadimento dell' Uranio, può diffondere nella sala è di 1.5 cm.

R : $1.5 \cdot 10^{21}$ atomi/m³

6. *Pu come sorgente di energia*

Nelle sonde spaziali si usano generatori radio-termici di corrente elettrica che utilizzano l'energia del decadimento α di ^{238}Pu in ^{234}U , per cui $Q=5.49$ MeV e $t_{1/2} = 87.7$ anni. La sonda Voyager 2, lanciata il 20.8.1977, era dotata di un generatore con efficienza del 5.5%. Voyager 2 ha raggiunto Saturno, che dista dal sole 9.5 AU, il 26.8.1981. Quanto plutonio doveva trasportare il Voyager 2 per fornire una potenza elettrica di almeno 395 W quando oltrepassava Saturno ? Quanta potenza era disponibile al momento (24.8.1989) di raggiungere Nettuno, che è ad una distanza di 30.1 AU ?

R: $M = 14.7$ kg, $P = 371$ W

7. *Stima dell'età della terra*

L'uranio presente in natura è una miscela di ^{238}U (99.28%) e di ^{235}U (0.72%). Qual'è l'età della terra se si suppone che alla sua formazione i due isotopi fossero presenti in quantità eguali ? I tempi di dimezzamento sono rispettivamente $4.47 \cdot 10^9$ anni e $7.04 \cdot 10^8$ anni.

R: $t = 5.94$ Gyr

8. *Stima dell'età di un meteorite*

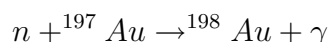
In un meteorite è stato trovato 1g di potassio e 10^{-5} g di ^{40}Ar , che proviene dal decadimento di ^{40}K per cattura di elettrone. Tale decadimento avviene con rapporto di diramazione $\text{BR}(\text{EC})= 10.72\%$ mentre il decadimento β di ^{40}K in ^{40}Ca avviene con $\text{BR}(\beta) = 89.28\%$.

Sapendo che ^{40}K è contenuto nel potassio naturale nella concentrazione del $1.18 \cdot 10^{-2}$ %, che il suo tempo di dimezzamento è di $1.277 \cdot 10^9$ anni, che il peso atomico medio del potassio naturale è 39.089, determinare l'età del meteorite nell'ipotesi che non ci sia stata dispersione di ^{40}Ar .

R: $t = 1.055$ Gyr

9. *Produzione di isotopi per irraggiamento*

Un bersaglio di oro, costituito essenzialmente di ^{197}Au , di spessore $d = 0.01$ cm e di densità $\rho = 19.3$ g/cm³, è esposto ad un fascio di neutroni di intensità costante $\Phi = 10^{13}$ /(s cm²). Parte dei neutroni sono assorbiti nella reazione



che ha sezione d'urto $\sigma = 97.8$ b. Il nucleo ^{198}Au decade β^- a ^{198}Hg con tempo di dimezzamento $t_{1/2} = 2.7$ d.

- (a) Se il bersaglio viene irraggiato per $t = 10$ min, qual'è l'attività risultante di ^{198}Au per unità di superficie ?
- (b) Quanti atomi di ^{198}Hg per unità di superficie saranno presenti allo stesso tempo, assumendo che ^{198}Hg non interagisca con i neutroni ?
- (c) Qual'è il numero massimo di atomi di ^{198}Au per unità di superficie che si possono avere nel campione ?

R: $A = 1.03$ GBq/cm², $N = 3.08 \cdot 10^{11}$ /cm², $N_m = 1.94 \cdot 10^{17}$ /cm²

10. *Equilibrio secolare*

In una roccia isolata contenente 0.1% in peso di ^{238}U si sviluppano sia ^{226}Ra che ^4He . Calcolare la quantità di radio presente in una tonnellata di roccia e il tasso di produzione di elio in grammi per anno nella stessa quantità di roccia. I tempi di dimezzamento sono $4.47 \cdot 10^9$ anni per ^{238}U e $1.60 \cdot 10^3$ anni per ^{226}Ra .

R : $M(\text{Ra}) = 0.34$ mg, $dM(\text{He})/dt = 2.08 \cdot 10^{-8}$ g/y

11. *Vita media di ^{239}Pu*

Il ^{239}Pu decade prevalentemente emettendo particelle α di 5.144 MeV. La sua vita media viene determinata sperimentalmente immergendo una sfera di ^{239}Pu , di massa 120 g, in azoto liquido e misurando il tasso di evaporazione del liquido, che ha un volume sufficiente per fermare completamente le particelle α emesse nel decadimento. Sapendo che il tasso di evaporazione misurato corrisponde ad una potenza emessa, costante nella durata dell'esperimento, di 0.231 W, determinare il tempo di dimezzamento del ^{239}Pu , considerando solo il decadimento α . (NB : Anche il nucleo residuo contribuisce al riscaldamento dell'azoto.)

R: $t_{1/2} = 2.4 \cdot 10^4$ yr

12. *Decadimento con diramazione*

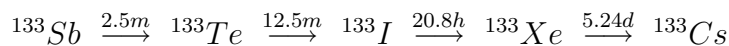
Il ^{137}Cs decade β^- in ^{137}Ba con tempo di dimezzamento di 30.07 anni. Il decadimento avviene con rapporto di diramazione $BR = 94.4\%$ ad uno stato eccitato e con $BR =$

5.6% allo stato fondamentale di ^{137}Ba . A sua volta lo stato eccitato decade γ nello stato fondamentale con tempo di dimezzamento di 2.55 minuti. Studiare l'evoluzione temporale della popolazione di Bario nei suoi due stati, supponendo che, al tempo $t=0$, siano presenti solo nuclei di Cesio in quantità N_0 e calcolarne il numero dopo 1 anno.

R: $N(\text{Ba}^*) = 3.03 \cdot 10^{-7} N_0$, $N(\text{Ba}) = 2.28 \cdot 10^{-2} N_0$

13. *Radioattività indotta*

Il 4.5% della fissione di ^{235}U prodotta da neutroni termici è in ^{133}Sb . Questo isotopo è instabile e produce una catena di emettitori β che termina con l'isotopo stabile ^{133}Cs :



Un campione di 1g di uranio naturale è irradiato per 60m con un flusso di neutroni termici di 10^{11} neutroni/($\text{cm}^2 \cdot \text{s}$). Calcolare il numero di atomi di Sb e di Te presenti alla fine del periodo di irraggiamento sapendo che la sezione d'urto di fissione è di 500 b e che la percentuale di ^{235}U nell'uranio naturale è di 0.72%.

R: $N(\text{Sb}) = 8.86 \cdot 10^9$, $N(\text{Te}) = 4.23 \cdot 10^{10}$

III - Dimensioni e masse nucleari

1. *Scattering e - p*

Un fascio di elettroni di 15 GeV e di intensità 10^{14} particelle/s incide su un bersaglio di idrogeno liquido ($\rho = 0.06 \text{ g/cm}^3$) della lunghezza di un metro, parallelo al fascio. Calcolare il numero di elettroni diffusi al secondo in un cono di 10^{-4} sr centrato a $\vartheta = 0.1$ rad per a) protoni puntiformi privi di spin, b) protoni estesi con spin.

R : a) $1.23 \cdot 10^5 \text{ s}^{-1}$; b) $1.47 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$

2. *Fattore di forma di carica*

Un fascio di elettroni di impulso 330 MeV/c è diffuso da un bersaglio di calcio. Calcolare la sezione d'urto a $\vartheta = 10^\circ$ nel sistema del laboratorio se il nucleo è : a) puntiforme, b) esteso con densità elettrica costante.

R : a) 327.2 mb/sr ; b) 244.0 mb/sr

3. *Stelle di neutroni*

Con una estrapolazione ardita dell'ambito di validità della formula semiempirica, calcolare la massa ed il raggio minimo di una stella di neutroni, considerandola come un nucleo costituito di soli neutroni. Per $A \simeq 10^{56}$ bisogna tener conto del contributo dell'energia gravitazionale alla massa.

R : $M \simeq 10^{31} \text{ g}$; R = 4.44 km

4. $(B/A)_{max}$ per $Z = 56$

Verificare analiticamente che la formula semiempirica predice un massimo per l'energia di legame per nucleone per $A = 56$. (Supporre $Z = N = A/2$).

5. Z_{stab} in funzione di α

I. Asimov descrive in un racconto un universo in cui il nuclide più stabile con $A = 186$ è il ${}^{186}_{94}\text{Pu}$ invece che il ${}^{186}_{74}\text{W}$ come conseguenza di un rapporto tra le costanti di accoppiamento forte ed elettromagnetica diverso rispetto a quello del nostro universo. Verificare che la formula semiempirica predice massima stabilità per $Z = 74$. Assumendo che le masse dei nucleoni e l'interazione forte restino invariate, calcolare il valore della costante di struttura fine α^* che renderebbe il ${}^{186}_{82}\text{Pb}$ l'isobaro più stabile. Dimostrare che, nelle stesse ipotesi, non è possibile che il nuclide più stabile con $A = 186$ sia il ${}^{186}_{94}\text{Pu}$.

(Suggerimento : solo il termine Coulombiano della formula semiempirica delle masse dipende da α , $a_c \propto e^2$.)

$$R : \alpha^* = 1/261$$

6. Energia di separazione di un neutrone

L'energia di separazione di un neutrone S_n negli isotopi del cerio ($Z=58$) è di 7.456 MeV, 9.201 MeV, 5.428 MeV andando dal ${}^{139}\text{Ce}$ al ${}^{141}\text{Ce}$. Trovate una formula analitica approssimata di S_n a partire dalla formula semiempirica delle masse (Suggerimento : per grandi A la variazione di una unità si può considerare infinitesima). Confrontate i valori sperimentali con quelli teorici per gli isotopi di massa 139, 140, 141 e commentate.

R : $S_n({}^{139}\text{Ce})=6.64$ MeV, $S_n({}^{140}\text{Ce})=8.08$ MeV $S_n({}^{141}\text{Ce})=6.18$ MeV . È da notare l'effetto dell'energia di pairing negli isotopi di massa A pari o dispari e l'effetto dell'energia di shell , non inclusa nella formula semiempirica, nel passaggio da $N=81$ a $N=83$.

7. Energie di legame

Gli stati fondamentali di ${}^{17}\text{N}$ e di ${}^{17}\text{Ne}$ sono membri di un multipletto di isospin $I = 3/2$. Gli altri membri del multipletto sono stati eccitati di ${}^{17}\text{O}$ e di ${}^{17}\text{F}$. Stimare le energie di eccitazione di questi stati assumendo per l'energia coulombiana l'espressione della formula semiempirica delle masse e sapendo che le energie di legame degli stati fondamentali di questi nuclei sono :

$${}^{17}\text{N}, 123.86 \text{ MeV} ; {}^{17}\text{O}, 131.76 \text{ MeV}$$

$${}^{17}\text{F}, 128.22 \text{ MeV} ; {}^{17}\text{Ne}, 112.92 \text{ MeV} .$$

$$R : E_{ex}({}^{17}\text{O})=11.09 \text{ MeV} ; E_{ex}({}^{17}\text{F})=11.20 \text{ MeV}$$

8. Q_β per isobari

Si considerino i decadimenti deboli all'interno di una famiglia di isobari. Derivare dalla formula semiempirica delle masse le espressioni dei Q -valori per i decadimenti β^- , β^+ e per cattura elettronica, tenendo conto del termine di pairing. Nel caso di $A=148$, dimostrare che i nuclei ${}^{148}\text{Nd}$ e ${}^{148}\text{Sm}$ sono stabili per questi 3 decadimenti.

9. Energia coulombiana e raggio nucleare

Il nucleo ${}^{27}\text{Si}$ decade nel nucleo speculare ${}^{27}\text{Al}$ con decadimento β^+ . La massima energia totale del positrone emesso è 4.3 MeV. Si determini la differenza di massa tra i due nuclei. Si stimi il raggio dei due nuclei, assumendo per l'energia coulombiana l'espressione classica corrispondente ad una distribuzione costante di carica.

$$R : \Delta M = 4.8 \text{ MeV} ; R = 4.42 \text{ fm}$$

10. Energia di separazione di neutroni e protoni

Per i nuclei leggeri l'energia necessaria per estrarre un protone S_p , o un neutrone, S_n , è

circa uguale. Per i nuclei pesanti invece S_p è maggiore di S_n . Si determini l'andamento di $S_p - S_n$ in funzione del numero di massa A per nuclei pesanti pari-pari stabili. Si calcoli $S_p - S_n$ per ^{238}U (valori sperimentali : $S_p = 7.58$ MeV, $S_n = 6.66$ MeV).
 R : $S_p - S_n = 0.27$ MeV

IV - Sistema NN

1. *Distribuzione spaziale del deutone*

Nel modello a buca quadrata del deutone ($V_0 = - 34$ MeV, $R = 2.1$ fm) calcolare la probabilità che la distanza tra i due nucleoni sia minore o uguale al raggio della buca. Calcolare inoltre il valore medio della energia potenziale e della energia cinetica.

R : $P_{int} = 37$ %, $P_{est} = 63$ %, $\langle V \rangle = - 12.58$ MeV, $\langle T \rangle = 10.35$ MeV

2. *Scattering in onda S da potenziale a buca quadrata*

Calcolare la lunghezza di scattering per lo scattering neutrone - protone nello stato 3S_1 utilizzando il potenziale a buca quadrata dell'esercizio 1. (Il valore sperimentale è $a_t = 5.48$ fm).

R : $a_t = 5.0$ fm

3. *Stima dell' hard-core del potenziale NN*

Il fatto che lo sfasamento nello stato 3S_1 di scattering neutrone-protone si annulla per $E_{lab} = 300$ MeV si può interpretare usando una buca di potenziale con un nocciolo repulsivo di raggio R_c . Determinare R_c utilizzando i valori $V_0 = 73.3$ MeV e $R - R_c = 1.337$ fm per la profondità e per la larghezza della buca, che permettono di riprodurre le proprietà del deutone.

R : $R_c = 0.3$ fm

4. *Lunghezza di scattering e profondità della buca di potenziale*

Calcolare la variazione della lunghezza di scattering da un potenziale a buca quadrata al variare della profondità della buca, a raggio costante. Verificare che la variazione percentuale della lunghezza di scattering è di un fattore 10 maggiore della variazione della profondità della buca.

$$R : \frac{\Delta a}{a} = -\frac{\pi^2}{8} \frac{a}{R} \frac{\Delta V}{V}$$

5. *Potenziale di Hulthén*

Per il potenziale di Yukawa non esiste soluzione analitica per il problema del deutone in onda S. Il potenziale di Hulthén

$$V(r) = -V_0 \frac{e^{-\mu r}}{1 - e^{-\mu r}}$$

che si riduce al potenziale di Yukawa a piccoli r , ammette la soluzione esatta per la funzione radiale ridotta

$$u(r) = N(e^{-\alpha r} - e^{-\beta r})$$

dove N è la costante di normalizzazione e α è legato alla energia di legame B_d del deutone da $\hbar\alpha = \sqrt{MB_d}$. Determinare i valori di β e di V_0 per i quali è soddisfatta l'equazione di Schroedinger, assumendo per μ il valore $\mu=0.7$ fm corrispondente allo scambio di un pione. Calcolare anche N . (Suggerimento : l'equazione deve valere a tutti gli r , in particolare per $r \rightarrow 0$.)

$$R : \beta = \alpha + \mu, U_0 = \mu(\alpha + \beta), V_0 = 34 \text{ MeV}, N^2 = 2 \alpha \beta (\alpha + \beta) / \mu^2$$

6. Deutone con parità negativa

Se il deutone avesse spin 1 e parità negativa, quali sarebbero, in notazione spettroscopica, i suoi due stati possibili ? Calcolare il momento di dipolo magnetico del deutone se il suo stato fosse uno o l'altro di questi due stati.

$$R : |^1P_1\rangle, |^3P_1\rangle ; \mu_d = 0.5 \mu_N \text{ se lo stato è } |^1P_1\rangle, \mu_d = 0.69 \mu_N \text{ se lo stato è } |^3P_1\rangle,$$

7. Sfasamenti n-p

Sapendo che la sezione d'urto differenziale n - p è isotropa nel sistema del centro di massa per neutroni di $E_L = 5$ MeV e che vale 130 mb/sr, si determini lo sfasamento per la diffusione elastica in onda S nello stato di singoletto di spin $\delta(^1S_0)$, sapendo che quello per il tripletto vale $\delta(^3S_1) = 118.1^\circ$. Come dipende dall'angolo di scattering la sezione d'urto differenziale nel sistema del Laboratorio ?

$$R : \delta(^1S_0) = 50.1^\circ, \quad \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^L = 4 \cos\theta^L \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^{CM}$$

V - Modelli nucleari

1. $F(q)$ e $\rho(r)$ con potenziale di oscillatore armonico

Calcolare la densità nucleare nel modello a shell con potenziale di oscillatore armonico e dimostrare che ad una shell chiusa corrisponde una densità indipendente dagli angoli. Calcolare il fattore di forma corrispondente ai nuclei di ^{16}O e di ^{40}Ca e verificare che il numero dei nodi aumenta con il crescere del momento angolare.

2. Livelli e momento di dipolo magnetico di ^{13}C

I livelli di energia più bassi del ^{13}C sono : lo stato fondamentale con $J^\pi = \frac{1}{2}^-$; il primo stato eccitato a 3.09 MeV con $J^\pi = \frac{1}{2}^+$; il secondo a 3.68 MeV con $J^\pi = \frac{3}{2}^-$; il terzo a 3.85 MeV con $J^\pi = \frac{5}{2}^+$. Gli stati successivi sono a 7 MeV sopra il fondamentale. A quali configurazioni del modello a shell corrispondono i primi quattro stati ? Il momento di dipolo magnetico dello stato fondamentale è $\mu_{exp} = 0.70 \mu_N$. Qual'è la predizione del modello ?

R : $\mu = 0.64 \mu_N$. Il fondamentale è uno stato di particella $1p_{1/2}$, il secondo eccitato uno stato di lacuna $(1p_{3/2})^{-1}$. Gli altri due stati corrispondono al neutrone spaiato in $2s_{1/2}$ e in $2d_{5/2}$. Da notare l'inversione di questi due orbitali.

3. Livelli, μ e Q di ^{209}Bi e ^{207}Tl

I livelli di energia più bassi del ^{209}Bi sono : lo stato fondamentale con $J^\pi = \frac{9}{2}^-$; il primo stato eccitato a 0.90 MeV con $J^\pi = \frac{7}{2}^-$; il secondo a 1.61 MeV con $J^\pi = \frac{13}{2}^+$; il terzo

a 2.43 MeV con $J^\pi = \frac{1}{2}^+$. Quelli del $^{207}_{81}\text{Tl}$ sono : lo stato fondamentale con $J^\pi = \frac{1}{2}^+$; il primo stato eccitato a 0.35 MeV con $J^\pi = \frac{3}{2}^+$; il secondo a 1.34 MeV con $J^\pi = \frac{11}{2}^-$; il terzo a 1.67 MeV con $J^\pi = \frac{5}{2}^+$. Si possono interpretare questi stati in termini di stati di particella singola ? Il momento di dipolo magnetico dello stato fondamentale del ^{207}Tl è $\mu_{exp} = 1.876 \mu_N$ e quello del ^{209}Bi è $\mu_{exp} = 4.111 \mu_N$. Il momento di quadrupolo elettrico del ^{209}Bi è $Q_{exp} = -0.37$ b. Confrontateli con le predizioni del modello a shell.

R : $\mu(\text{Bi}) = 2.624 \mu_N$, $Q(\text{Bi}) = -0.28$ b, $\mu(\text{Tl}) = 2.793 \mu_N$; i livelli seguono le previsioni del modello a shell con stati di particella per il Bi e di lacuna per il Tl.

4. *Deformazione di ^{176}Lu da Q*

Il nucleo di $^{176}_{71}\text{Lu}$ ha $J = 7$ e un momento di quadrupolo elettrico $Q = 8.0$ b. Supponendo che la sua distribuzione di carica sia ellissoidale e la densità sia costante, calcolare il valore dei semiassi dell' ellisse.

R : $a = 5.6$ fm, $b = 7.7$ fm

5. *Momento d'inerzia di ^{170}Hf*

Lo spettro dei livelli del nucleo $^{170}_{72}\text{Hf}$ presenta uno stato fondamentale 0^+ seguito da una serie di stati eccitati di spin e parità 2^+ , 4^+ , 6^+ e 8^+ ed energie di eccitazione di 100 keV, 321 keV, 641 keV e 1041 keV, rispettivamente. Calcolate il momento di inerzia del nucleo in ciascuno stato eccitato e commentate i risultati. Quale momento d'inerzia avrebbe il nucleo se la materia nucleare fosse rigida ?

$$R : 2I/\hbar^2 = 60\text{MeV}^{-1}, 62\text{MeV}^{-1}, 66\text{MeV}^{-1}, 69\text{MeV}^{-1}, \text{rispettivamente}$$

$$2I_{rig}/\hbar^2 = 169\text{MeV}^{-1}$$

6. *Effetto del potenziale di pairing*

I valori sperimentali di spin e parità del primo stato eccitato nei nuclei $^{31}_{14}\text{Si}$, $^{41}_{19}\text{K}$ e $^{49}_{21}\text{Sc}$ sono $1/2^+$, $1/2^+$ e $3/2^+$, rispettivamente. Giustificare questi valori nel modello a shell.

R : in ogni caso si forma una coppia in una subshell più alta e resta una lacuna in una subshell più bassa rispetto alla sequenza dei livelli di particella singola.

7. *Momento d'inerzia di ^{234}U*

Il nucleo ^{234}U ha stato fondamentale di spin-parità $J^\pi = 0^+$ e livelli eccitati di $J^\pi = 2^+$, 4^+ , 6^+ , 8^+ ad energie di eccitazione pari rispettivamente a 44 keV, 143 keV, 296 keV e 500 keV. Nell'ipotesi che questi formino una banda rotazionale, calcolate il momento d'inerzia del nucleo in funzione dello spin del livello. A quale energia di eccitazione sarà il livello 10^+ ($E_{ex} = 741$ keV) ? Confrontate i valori calcolati per il momento d'inerzia con quello che si avrebbe se il nucleo fosse sferico, rigido e di densità costante. Commentate i risultati ottenuti.

$$R : 2I/\hbar^2 = 136\text{MeV}^{-1}, 140\text{MeV}^{-1}, 142\text{MeV}^{-1}, 144\text{MeV}^{-1}, \text{rispettivamente}$$

$$E_{ex} = 764\text{keV}, 2I_{rig}/\hbar^2 = 269\text{MeV}^{-1}$$

8. *Energie di particella singola*

Le energie di ^{17}O rispetto al nocciolo di ^{16}O sono -4.15MeV per lo stato $5/2^+$, -3.28 MeV

per lo stato $1/2^+$, e $+0.93$ MeV per lo stato $3/2^+$. Assumendo che questi valori siano le energie di particella singola dei livelli nelle orbite ds , trovare le energie relative degli stati più bassi $1/2^+$, $3/2^+$ e $5/2^+$ del nucleo ^{39}Ca rispetto al nocciolo di ^{40}Ca .

R : 3.28 MeV, - 0.93 MeV, 4.15 MeV , rispettivamente

9. Potenziale di spin-orbita

Si consideri il potenziale di oscillatore armonico tridimensionale come la parte centrale del potenziale nucleare medio e si supponga che la parte di spin-orbita del potenziale nucleare medio abbia la forma

$$V_{ls}(r) = - \frac{V_0}{A^{2/3}} \frac{\vec{l} \cdot \vec{s}}{\hbar^2}$$

Determinare V_0 sapendo che la differenza di energia tra i livelli di protone $1p_{1/2}$ e $1p_{3/2}$ in ^{16}O è di 6.3 MeV.

Calcolare la differenza di energia tra i livelli di protone $1h_{9/2}$ e $1h_{11/2}$ in ^{208}Pb e confrontare con il valore sperimentale che è di 5.6 MeV.

R : $V_0 = 26.7$ MeV, $\Delta E = 4.18$ MeV

10. Spettro dei livelli di ^{39}K

Il nucleo di ^{39}K ha i seguenti valori di spin-parità nei livelli più bassi di energia: $\frac{3}{2}^+$ nello stato fondamentale, $\frac{1}{2}^+$ nel I stato eccitato a 2.53 MeV, $\frac{7}{2}^-$ nel II stato eccitato a 2.87 MeV, $\frac{3}{2}^-$ nel III stato eccitato a 3.02 MeV.

Interpretare questi stati nel modello a shell. Inoltre calcolare il momento di dipolo magnetico e di quadrupolo elettrico dello stato fondamentale, che hanno i valori $\mu = 0.39 \mu_N$, $Q = 0.056$ b.

R : $\mu = 0.124 \mu_N$, $Q = 0.037$ b. Il fondamentale e il I stato eccitato sono stati di lacuna $(1d_{3/2})^{-1}$ e $(2s_{1/2})^{-1}$. Il II e il III stato eccitato corrispondono a spostare un protone da $1d_{3/2}$ a $1f_{7/2}$ e a $2p_{3/2}$.

11. Proprietà del ^{85}Rb

Il nucleo di ^{85}Rb nello stato fondamentale ha $J^\pi = 5/2^-$ e $\mu = 1.363 \mu_N$ e $Q = 0.23$ b. Confrontare questi valori con le previsioni del modello a shell. Questo nucleo presenta la seguente serie di livelli eccitati, in ordine di energia di eccitazione crescente : $3/2^-$ (0.151 MeV), $1/2^-$ (0.281 MeV), $9/2^+$ (0.514 MeV). Interpretare questi stati nel modello a shell.

R : Lo stato fondamentale è uno stato di lacuna $(1f_{5/2})^{-1}$ per cui $\mu = 0.862 \mu_N$, $Q = 0.071$ b. Il I eccitato corrisponde ad una lacuna $(2p_{3/2})^{-1}$. Il II e il III stato eccitato corrispondono a portare un protone da $1f_{5/2}$ in $2p_{1/2}$ e in $1g_{9/2}$, rispettivamente.

VI - Isospin

1. Rapporto di sezioni d'urto

Qual' è il rapporto tra le sezioni d'urto totali per le reazioni $p + d \rightarrow \pi^0 + ^3\text{He}$ e $p + d \rightarrow \pi^+ + ^3\text{H}$ per una data energia nel CM ?

R : $\sigma_0/\sigma_+ = 1/2$

2. *Isospin e distribuzione angolare*

In un esperimento di verifica della conservazione dell'isospin è stata usata la reazione ${}^4\text{He} + {}^2\text{H} \rightarrow {}^3\text{He} + {}^3\text{H}$. Il fascio di elio aveva un'energia di 82 MeV nel Laboratorio. Le sezioni d'urto differenziali per l'emissione di ${}^3\text{He}$ e di ${}^3\text{H}$ ad un dato angolo nel Laboratorio risultano approssimativamente uguali per tutti gli angoli della misura. Dimostrare che questo risultato sperimentale implica che la distribuzione angolare della sezione d'urto è simmetrica rispetto a 90° nel sistema del centro di massa. Dimostrare che questa simmetria si può spiegare invocando la conservazione dell'isospin nella reazione.

3. *Multipletto di isospin*

Gli stati fondamentali di ${}^{17}\text{N}$ e di ${}^{17}\text{Ne}$ sono membri di un multipletto di isospin $I = 3/2$. Gli altri membri del multipletto sono stati eccitati di ${}^{17}\text{O}$ e di ${}^{17}\text{F}$. Stimare le energie di eccitazione di questi stati sapendo che le energie di legame degli stati fondamentali di questi nuclei sono :

$$B({}^{17}\text{N}) = 123.86 \text{ MeV} ; B({}^{17}\text{O}) = 131.76 \text{ MeV}$$

$$B({}^{17}\text{F}) = 128.22 \text{ MeV} ; B({}^{17}\text{Ne}) = 112.92 \text{ MeV} .$$

$$R : E_{ex}({}^{17}\text{O}^*) = 10.34 \text{ MeV}, E_{ex}({}^{17}\text{F}^*) = 10.24 \text{ MeV}$$

4. *Multipletto di isospin*

Stimare l'energia di eccitazione del primo livello eccitato ($J^\pi = 0^+, T = 1$) del nucleo ${}^{14}\text{N}$, che fa parte di un tripletto di isospin con gli stati fondamentali di ${}^{14}\text{C}$ e ${}^{14}\text{O}$, sapendo che il loro eccesso di massa atomica è di 3.020 MeV e 8.007 MeV, rispettivamente, mentre quello di ${}^{14}\text{N}$ è di 2.863 MeV. Suggerimento : ricavare la costante coulombiana a_c adatta agli isobari $A = 14$ e ricordare che per le forze nucleari vale la simmetria di isospin.

$$R : E_{ex}({}^{14}\text{N}^*) = 2.4 \text{ MeV}$$

5. *Quadrupletti di isospin*

Si dimostri che è possibile esprimere la massa dei nuclei che fanno parte di un multipletto di isospin mediante la formula

$$M = a + b T_3 + c T_3^2$$

dove i coefficienti a,b,c sono funzioni del numero di massa A e del valore T dell' isospin del multipletto.

I livelli di bassa energia dei nuclei isobari di massa $A=33$ sono riportati nella figura allegata. Identificare gli stati appartenenti al quadrupletto di isospin $T = 3/2$. Utilizzare i dati sperimentali per determinare i coefficienti a,b,c della formula e stimare l'energia dello stato fondamentale di ${}^{33}\text{Ar}$ rispetto a quella di ${}^{33}\text{S}$.

R : Del quadrupletto di isospin fanno parte gli stati fondamentali di ${}^{33}\text{P}$ e ${}^{33}\text{Ar}$ e gli stati eccitati $1/2^+$ a circa 5.5 MeV di energia di eccitazione in ${}^{33}\text{S}$ e ${}^{33}\text{Cl}$. $\Delta B ({}^{33}\text{Ar}) = 17.2 \text{ MeV}$, $a = M({}^{33}\text{S}) + 8.253 \text{ MeV}$, $b = 5.65 \text{ MeV}$, $c = 0.209 \text{ MeV}$

6. *Dipolo magnetico*

Esprimere con il formalismo di isospin l'operatore di momento di dipolo magnetico per un nucleo con A=dispari nel modello a shell a particella singola. Denotando con $\mu_z(T_3)$ il valore di aspettazione dell' operatore μ_z rispetto allo stato nucleare $|J, M = J, L, T, T_3\rangle$ dimostrare che la somma dei momenti magnetici di due nuclei "mirror" è data , in unità di μ_N , da

$$\mu_z(T_3) + \mu_z(-T_3) = \frac{1}{2} (1 + g_S) J + \frac{1}{2(J+1)} (1 - g_V) (L(L+1) - \frac{3}{4})$$

dove $g_S = g_s^p + g_s^n$ e $g_V = g_s^p - g_s^n$.

7. *Decadimento in $\pi - N$*

Una risonanza neutra decade per interazione forte principalmente in nucleone - pione. Determinare l'isospin della risonanza sapendo che la larghezza di decadimento in $p\pi^-$ è quasi il doppio della larghezza di decadimento in $n\pi^0$.

R : T = 3/2

8. *Reazioni $K^- p$*

Esprimere il rapporto delle sezioni d'urto per le reazioni $K^- p \rightarrow \pi^- \Sigma^+$ e $K^- p \rightarrow \pi^+ \Sigma^-$ in funzione delle due possibili ampiezze di isospin. Quale valore assume il rapporto se una delle ampiezze è dominante ?

R : R = 1

9. *Risonanza in γp*

La sezione d'urto totale γp ha un andamento risonante per energie dei γ comprese tra 200 MeV e 450 MeV. In questa regione cinematica le particelle sperimentalmente osservate nello stato finale sono coppie $\pi^0 p$, nel 66% degli eventi, e $\pi^+ n$, nel 33% degli eventi. Il massimo della sezione d'urto corrisponde a fotoni di 320 MeV, la larghezza della risonanza è dell'ordine di 100 MeV. Si determinino la massa e l'isospin della risonanza.

R : M = 1232 MeV, T = 3/2

VII - Decadimenti nucleari

1. *Stima del raggio nucleare dal decadimento α*

Il ^{216}Po decade α con tempo di dimezzamento di 0.145 s. Dare una stima del raggio di interazione $\alpha + ^{212}\text{Pb}$ sapendo che l'energia delle particelle α di decadimento è di 6.78 MeV.

R : R = 7.9 fm

2. *Dipendenza da Z nel decadimento α*

Il nucleo di ^{238}U decade con emissione di particelle α di 4.3 MeV con $t_{1/2}$ di 4.47 miliardi di anni. Quale sarebbe il tempo di dimezzamento del ^{234}Th se anche questo nucleo decadesse emettendo α della stessa energia ? (Ignorare le piccole variazioni del raggio).

R : $t_{1/2}(\text{Th}) = 0.057 \cdot t_{1/2}(\text{U})$

3. *Stabilità per decadimento α*

L'oro è considerato un elemento stabile pur avendo un Q-valore positivo per emissione α . Utilizzando le tabelle delle masse nucleari determinare il Q-valore per il processo di decadimento α del nucleo ^{197}Au . Stimare la vita media per tale decadimento e commentare sulla stabilità dell'oro.

R : $t_{1/2} = 10^{74}$ y

4. *Decadimento ^{14}C*

Il ^{226}Ra decade per emissione α con tempo di dimezzamento di 1602 anni e con $Q = 4.87$ MeV. Esiste un decadimento raro (rapporto di diramazione $\text{BR} = 2.3 \cdot 10^{-11}$) con emissione di ^{14}C per cui $Q = 28.2$ MeV. Giustificare questo risultato usando anche per questo decadimento la teoria sviluppata per il decadimento α . Si assuma un raggio della particella α di 1.67 fm e per i nuclei la formula $R = 1.2 \cdot A^{1/3}$ fm.

$$R : \lambda(^{14}\text{C}) = 0.6 \cdot 10^{-5.5} \lambda_\alpha$$

5. *Decadimento super-permesso di ^{34}Cl*

Il ^{34}Cl decade β^+ in ^{34}S con tempo di dimezzamento di 1.53 s. Entrambi gli stati hanno $J^\pi = 0^+$ e formano un tripletto di isospin con lo stato fondamentale di ^{34}Ar . Utilizzando le tabelle delle masse atomiche determinare l'energia cinetica massima del positrone di decadimento. Stimare il tempo di dimezzamento usando il teorema di Sargent e confrontarlo con il valore sperimentale.

$$R : t_{1/2} = 1.84 \text{ s}$$

6. *Universalità β leptonica*

Il leptone $\mu(105.6)$ decade sempre in $e \nu_e \nu_\mu$; per il leptone $\tau(1777)$ il canale $e \nu_e \nu_\tau$ ha un rapporto di diramazione del 17.8%. Calcolare approssimativamente la vita media del τ sapendo che la vita media del muone è $\tau_\mu = 2.2 \cdot 10^{-6}$ s.

$$R : \tau_\tau = 2.9 \cdot 10^{-13} \text{ s in accordo con il valore sperimentale}$$

7. *Misura di Davis dei neutrini solari*

Nel suo esperimento Davis sfrutta la reazione $\nu_e + ^{37}\text{Cl} \rightarrow e^- + ^{37}\text{Ar}$ per rivelare i neutrini solari, principalmente quelli provenienti dal decadimento β di ^8B . La sezione d'urto di cattura dei neutrini mediata sulla parte dello spettro dei neutrini sopra la soglia di cattura è di 10^{-42} cm². Il rivelatore di Davis contiene 600 tonnellate di C_2Cl_4 con il cloro contenente il 24.47% di ^{37}Cl . Dato che il tasso di produzione di ^{37}Ar è di uno ogni due giorni, calcolare il flusso dei neutrini rivelabili.

$$R : \Phi = 2.7 \cdot 10^6 \nu / (\text{cm}^2 \text{ s})$$

8. *End-point dello spettro di elettroni*

Calcolare la frazione di elettroni emessi entro $\Delta E = 0.1$ keV dall' end-point nel decadimento β del trizio, il cui Q-valore è $Q = 18.6$ keV, assumendo nulla la massa del neutrino e uguale a 1 la funzione coulombiana di Fermi. (Osservare che l'intervallo di energia di interesse è molto piccolo rispetto al Q-valore.)

$$R : \Delta N / N = 3.4 \cdot 10^{-7}$$

9. *Esperimento Gallex*

L'esperimento Gallex utilizza 30 tonnellate di Gallio, costituito per il 40% da ^{71}Ga , per la rivelazione dei neutrini solari tramite la reazione $\nu_e + ^{71}\text{Ga} \rightarrow ^{71}\text{Ge} + e^-$. Per calibrare l'esperimento viene utilizzata una sorgente di ^{51}Cr da $6.3 \cdot 10^{16}$ Bq che decade per cattura elettronica (EC) emettendo ν_e con una energia di 0.75 MeV. Sapendo che il $\lg(\text{ft})$ del decadimento per EC del ^{71}Ge in ^{71}Ga vale 4.3, si determini

- (a) la sezione d'urto d'interazione dei ν_e della sorgente di calibrazione con il Gallio ;
- (b) il numero di interazioni per unità di tempo dei neutrini emessi dal ^{51}Cr con il Gallio.

Si assuma che l'efficienza geometrica dovuta alla posizione della sorgente sia il 10%, che la superficie di Gallio esposta ai neutrini sia di 20 m^2 , che il flusso dei neutrini possa essere considerato uniforme.

$$R : \sigma = 4.6 \cdot 10^{-45} \text{ cm}^2 ; dN/dt = 1.26/d$$

10. *Massa di ν_e*

Il processo di cattura elettronica $e^- + {}^{10}\text{C} \rightarrow {}^{10}\text{B} + \nu_e$ con ${}^{10}\text{C}$ a riposo, può essere utilizzato per dare una stima della massa di ν_e misurando l'energia cinetica di rinculo di ${}^{10}\text{B}$ che risulta essere $714.0 \pm 0.5 \text{ eV}$. Quale valore si deduce per la massa di ν_e e con quale errore ?

$$R : m_\nu = 172 \text{ keV} , \Delta m_\nu = 27 \text{ keV}$$

11. *Energia media degli elettroni emessi*

Il trizio decade β^- in ${}^3\text{He}$ con tempo di dimezzamento di 12.33 anni. Un campione di idrogeno gassoso arricchito contiene 0.1g di ${}^3\text{H}$ e produce 21 calorie per ora a causa dell'assorbimento degli elettroni emessi nel decadimento del trizio. Si determini l'energia media degli elettroni di decadimento.

$$R : 4.26 \text{ keV}$$

12. *Cattura di elettroni*

Il ${}^{125}\text{Cs}$ decade a ${}^{125}\text{Xe}$ sia per cattura di elettroni (EC) che per decadimento β^+ . Determinare la probabilità relativa della EC sapendo che l'energia cinetica massima dei positroni emessi è di 2.05 MeV e che l'energia di legame degli elettroni nello strato K dell'atomo di Xe è di 41 keV.

$$R : \lambda_{EC} = 0.21 \cdot \lambda_{\beta^+}$$

13. *Spettroscopia γ*

Uno stato nucleare eccitato decade per emissione γ con una transizione E2 allo stato fondamentale $\frac{3}{2}^+$. Elencare i possibili valori di spin e parità dello stato eccitato. Se non c'è evidenza di decadimento mediante una transizione M1, qual'è il valore più probabile di J^π dello stato eccitato ?

$$R : J^\pi = 1/2^+, 3/2^+, 5/2^+, 7/2^+. \text{ In assenza di transizione M1, } J^\pi = 7/2^+$$

14. *Decadimento α e γ di ${}^{17}\text{O}^*$*

Uno stato eccitato di ${}^{17}\text{O}$ decade per emissione di un neutrone nello stato fondamentale di ${}^{16}\text{O}$ in onda L=3. Questo stesso stato può anche decadere per emissione α nello stato fondamentale di ${}^{13}\text{C}$ in onda L=4. Facendo ricorso alle previsioni del modello a shell per i nuclei prodotto del decadimento, determinare J^π dello stato eccitato ${}^{17}\text{O}^*$ e trovare qual'è il livello più basso del modello a shell che gli corrisponde. Il nucleo ${}^{17}\text{O}^*$ può anche decadere direttamente nello stato fondamentale di ${}^{17}\text{O}$ per emissione γ . Determinare il termine di multipolo dominante della transizione γ .

$$R : J^\pi({}^{17}\text{O}^*) = 7/2^-; \text{ livello } 1f7/2; \text{ dipolo elettrico}$$

15. *Deduzione di spin e parità di livelli nucleari*

Il momento di dipolo magnetico dello stato fondamentale di ${}^{207}\text{Pb}$ vale $0.59\mu_N$ e il tempo di dimezzamento del suo primo stato eccitato (570 keV) è di 130 ps. Usare queste informazioni per dedurre spin e parità dei due stati.

R : Lo stato fondamentale è uno stato $p_{1/2}$. Lo stato eccitato ha parità negativa mentre $J = 3/2$ oppure $5/2$; uno stato $f_{5/2}$ sarebbe in accordo con il modello a shell.

16. *Stime di Weisskopf*

Il nucleo di ^{134}Cs ha uno stato isomerico di spin-parità 8^- che decade allo stato fondamentale 4^+ e ad uno stato eccitato 5^+ emettendo fotoni di 137 keV e 127 keV di energia, rispettivamente. Stabilire la natura delle transizioni e stimare l'intensità relativa delle due radiazioni.

R : sono transizioni M4 e E3, rispettivamente, con intensità relativa $\Gamma(\text{M4})/\Gamma(\text{E3}) = 3 \cdot 10^{-9}$