Capitolo 8

Interazione debole

La teoria di Fermi del decadimento β nucleare è modellata sulla interazione elettromagnetica. Consideriamo lo scattering elettrone-protone. La hamiltoniana classica ha la forma corrente$\otimes$corrente. Al limite quasi statico:

$$H'_{em} = \int d^3r d^3r' \left[\frac{\rho_p(\vec{r})\rho_e(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} - \frac{1}{c^2}\frac{\vec{j}_p(\vec{r})\cdot\vec{j}_e(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right]$$

nel sistema di unità di Gauss. In notazione quadridimensionale la parentesi quadrata nell'espressione dell'hamiltoniana è il prodotto scalare delle quadricorrenti $j_p^\alpha = (c\rho_p, \vec{j}_p)$ e $j_e^\alpha = (c\rho_e, \vec{j}_e)$ diviso per c^2:

$$H'_{em} = \frac{1}{c^2} \int d^3r d^3r' \frac{j_p(\vec{r}) \cdot j_e(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

da cui il termine 'interazione corrente-corrente'. Nel caso nucleare il termine spaziale è trascurabile perchè le velocità sono piccole rispetto a c (per la parte convettiva di $\vec{j}_p$ vale la relazione $\vec{j}_p = \vec{v}_p\rho_p$) e ci si può limitare al termine coulombiano di interazione $\rho_p \cdot \rho_e$, che per particelle puntiformi ($\rho_p(\vec{r}) = e\delta^3(\vec{r}-\vec{r}_p)$, $\rho_e(\vec{r}) = -e\delta^3(\vec{r}-\vec{r}_e)$) dà:

$$H'_{em} = -\frac{e^2}{|\vec{r}_p - \vec{r}_e|}$$

Nel passaggio alla meccanica quantistica non relativistica, che vale per il protone alle energie tipiche della fisica nucleare ($E \ll 1GeV$) ma non per l'elettrone, $\rho_p(\vec{r})$ diventa l'operatore $\hat{\rho}_p(\vec{r})$ di cui bisogna calcolare l'elemento di matrice tra lo stato iniziale $\psi_\alpha(\vec{r}_p)$ del protone e lo stato finale $\psi_\beta(\vec{r}_p)$ del protone:

$$\rho_p^{cl.}(\vec{r}) \rightarrow \int d^3r_p \psi_\beta^*(\vec{r}_p)\hat{\rho}_p(\vec{r})\psi_\alpha(\vec{r}_p) = e\psi_\beta^*(\vec{r})\psi_\alpha(\vec{r})$$

La densità di probabilità $|\psi(\vec{r})|^2$ del caso stazionario è diventata la densità di probabilità di transizione $\psi_\beta^*(\vec{r})\psi_\alpha(\vec{r})$. L'elettrone deve essere trattato relativisticamente ma il risultato è lo stesso:

$$\rho_e^{cl.}(\vec{r}) \rightarrow -e\psi_\delta^*(\vec{r})\psi_\gamma(\vec{r})$$

Se $|\gamma\rangle$ e $|\delta\rangle$ sono gli stati iniziale e finale dell'elettrone. Se si tiene conto anche dello spin, ψ^* diventa $\psi^\dagger$.

Consideriamo ora lo scattering elettrone-nucleo. La densità di carica del nucleo X che contiene Z protoni è

$$\rho_X(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{Z} e\delta^3(\vec{r}-\vec{r}_i) = \sum_{i=1}^{A} e\frac{1+\tau_3^{(i)}}{2}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}_i)$$

Il proiettore sullo stato di protone permette di estendere la somma su tutti i nucleoni A. La funzione d'onda dello stato iniziale α e finale β del nucleo ha la forma:

$$\psi_\alpha(\vec{r}_1,...,\vec{r}_A) = \frac{e^{i\vec{k}_\alpha\cdot\vec{R}}}{\sqrt{V}}\phi(\vec{r}_1',...,\vec{r}_A')$$

Il termine di onda piana descrive il moto del centro di massa nucleare ed è normalizzato nella scatola di volume V. Le coordinate dei nucleoni rispetto al centro di massa non sono tutte indipendenti perchè:

$$\vec{R} = \frac{1}{A}\sum_{i=1}^{A}\vec{r}_i$$

$$\vec{r}_i' = \vec{r}_i - \vec{R} \Rightarrow \sum_{i=1}^{A}\vec{r}_i' = 0$$

Quindi

$$dr = d^3r_1\cdots d^3r_A = d^3Rd^3r_1'\cdots d^3r_A'\delta^3(\frac{1}{A}\sum_{i=1}^{A}\vec{r}_i') = d^3Rdr'$$

L'elemento di matrice di $\hat{\rho}_X(\vec{r})$ diventa:

$$\langle\beta|\hat{\rho}_X(\vec{r})|\alpha\rangle = e\int dr\psi_\beta^*(\vec{r}_1,...)\sum_{i=1}^{A}\frac{1+\tau_3^{(i)}}{2}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}_i)\psi_\alpha(\vec{r}_1,...) =$$

$$e\int dr'd^3R\frac{e^{i\vec{k}_\alpha\cdot\vec{R}}}{\sqrt{V}}\phi_\beta^*(\vec{r}_1',...)\sum_{i=1}^{A}\frac{1+\tau_3^{(i)}}{2}\delta^3(\vec{r}-\vec{R}-\vec{r}_i')\frac{e^{i\vec{k}_\alpha\cdot\vec{R}}}{\sqrt{V}}\phi_\alpha(\vec{r}_1',...) =$$

$$= e\frac{e^{i(\vec{k}_\alpha-\vec{k}_\beta)\cdot\vec{r}}}{V}\int dr'\phi_\beta^*(\vec{r}_1',...)\sum_{i=1}^{A}\frac{1+\tau_3^{(i)}}{2}e^{-i(\vec{k}_\alpha-\vec{k}_\beta)\cdot\vec{r}_i'}\phi_\alpha(\vec{r}_1',...)$$

avendo usato la $\delta^3(\vec{r}-\vec{R}-\vec{r}_i')$ per integrare su d^3R. Ovviamente lo stesso fattore $\frac{1}{V}e^{i(\vec{k}_\alpha-\vec{k}_\beta)\cdot\vec{r}}$ compare nell'elemento di matrice di $\hat{\rho}_p$:

$$\langle\beta|\hat{\rho}_p(\vec{r})|\alpha\rangle = e\psi_\beta^*(\vec{r})\psi_\alpha(\vec{r})$$

Prima di considerare il decadimento β del neutrone e di un generico nucleo conviene vedere lo scattering debole $\nu_e + n \to e + p$ che è più simmetrico. L'elemento di matrice dell'hamiltoniano debole secondo Fermi è:

$$\langle ep|\hat{H}_w'|\nu_e n\rangle = \frac{1}{c^2}\int d^3rd^3r'(j_{\nu_e e}(\vec{r}')\cdot j_{np}(\vec{r}))\delta^3(\vec{r}-\vec{r}') = \frac{1}{c^2}\int d^3r(j_{\nu_e e}(\vec{r})\cdot j_{np}(\vec{r})) =$$

$$= \int d^3r\left[\rho_{\nu e}(\vec{r})\rho_{np}(\vec{r}) - \frac{1}{c^2}\vec{j}_{\nu e}(\vec{r})\cdot\vec{j}_{np}(\vec{r})\right]$$

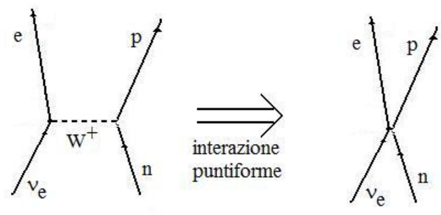

Figura 8.1: Scattering debole

$$\rho_{np}(\vec{r}) = \langle p|g\delta^3(\vec{r}-\vec{r}_N)|n\rangle = g\langle N'|t_+\delta^3(\vec{r}-\vec{r}_N)|N\rangle$$

dove g è la carica di interazione debole del nucleone. Il formalismo di isospin permette di descrivere il cambiamento di stato (da neutrone a protone) del nucleone nell'interazione. L'operatore t_- serve per il cambiamento da protone a neutrone. Indicando con α, β lo stato iniziale e finale del nucleon:

$$\rho_{np}(\vec{r}) = g\psi^*_\beta(\vec{r})t_+\psi_\alpha(\vec{r}) = g\frac{e^{i(\vec{k}_\alpha-\vec{k}_\beta)\cdot\vec{r}}}{V}\chi^\dagger_{\frac{1}{2}m'}\eta^\dagger_{\frac{1}{2}\nu'}t_+\chi_{\frac{1}{2}m}\eta_{\frac{1}{2}\nu}$$

$\chi_{\frac{1}{2}m}$ è lo spinore, $\eta_{\frac{1}{2}\nu}$ l'isospinore del nucleone nello stato α; $\chi_{\frac{1}{2}m'}$ è lo spinore, $\eta_{\frac{1}{2}\nu'}$ l'isospinore del nucleone nello stato finale β. Per la densità di corrente debole leptonica $\rho_{\nu e}(\vec{r})$ si ottiene l'espressione analoga:

$$\rho_{\nu e}(\vec{r}) = g'\psi^*_e(\vec{r})\psi_\nu(\vec{r}) = g'\frac{e^{i(\vec{k}_\nu-\vec{k}_e)\cdot\vec{r}}}{V}\chi^\dagger_e\chi_\nu$$

La carica debole lepronica g' è sperimentalmente maggiore (di poco) della carica debole adronica g. Nel decadimento β nucleare compare sempre il loro prodotto $gg' = G_\beta$, che è detta la **costante di Fermi**. Nel caso di scattering $\nu + X \to e + Y$, la parte leptonica non cambia, quella adronica diventa:

$$\rho_{XY}(\vec{r}) = \int dr\psi^*_Y(\vec{r}_1,...)\sum_{i=1}^{A}t^{(i)}_+\delta^3(\vec{r}-\vec{r}_i)\psi_X(\vec{r}_1,...) = g\frac{e^{i(\vec{k}_X-\vec{k}_Y)\cdot\vec{r}}}{V}\int dr'\phi^*_Y(\vec{r}'_1,...)\sum_{i=1}^{A}t^{(i)}_+e^{-i(\vec{k}_X-\vec{k}_Y)\cdot r}\phi_X(\vec{r}'_1,...)$$

Passiamo al decadimento β: Non ci sono cambiamenti per la parte adronica se non una semplificazione

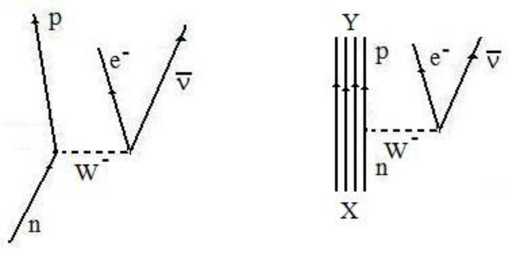

Figura 8.2: Decadimento β

dovuta al fatto che il Q-valore di decadimento è dell'ordine dei MeV nella maggioranza dei casi. Gli impulsi sono dell'ordine del $\frac{MeV}{c}$ e quindi $(\vec{k}_X - \vec{k}_Y)\cdot\vec{r}'_i$ in ρ_{XY} è piccolo rispetto a 1 ($\simeq \frac{MeV}{\hbar c}\cdot R \simeq \frac{R}{200fm}$; R è il raggio nucleare) e si può porre $e^{-i(\vec{k}_X-\vec{k}_Y)\cdot\vec{r}'_i} = 1$. Si parla allora di transizioni permesse per le quali:

$$\rho_{XY}(\vec{r}) = g\frac{e^{i(\vec{k}_X-\vec{k}_Y)\cdot\vec{r}}}{V}\int dr'\phi^*_Y(\vec{r}'_1,...)\sum_{i=1}^{A}t^{(i)}_+\phi_X(\vec{r}'_1,...)$$

Per la parte leptonica il cambiamento è notevole:

$$\langle e|\hat{\rho}(\vec{r})|\nu\rangle \Rightarrow \langle e\bar{\nu}|\hat{\rho}(\vec{r})|0\rangle$$

Occorrerebbe saper calcolare l'elemento di matrice dell'operatore densità $\hat{\rho}(\vec{r})$ tra il vuoto e lo stato di due leptoni, che non sappiamo fare. Possiamo però intuire che sarà:

$$\langle e\nu|\hat{\rho}(\vec{r})|0\rangle = g'\psi_e^*(\vec{r})\psi_{\bar{\nu}}^*(\vec{r}) = g'\frac{e^{-i(\vec{k}_e+\vec{k}_{\bar{\nu}})\cdot\vec{r}}}{V}\cdots$$

dove i puntini stanno per la parte spinoriale (che non ci interessa). In conclusione abbiamo trovato per le transizioni permesse di Fermi il risultato:

$$\langle e\bar{\nu}Y|\hat{H}_w'|X\rangle = G_\beta \int \frac{e^{i(\vec{k}_X-\vec{k}_Y-\vec{k}_e-\vec{k}_{\bar{\nu}})\cdot\vec{r}}}{V^2} M_{fi} d^3 = \frac{G_\beta}{V^2} V \delta^3_{\vec{k}_X,\vec{k}_Y+\vec{k}_e+\vec{k}_{\bar{\nu}}} M_{fi}$$

$$M_{fi} = \langle Y|T_+|X\rangle = \int dr'\phi_Y^* T_+ \phi_X \quad T_+ = \sum_{i=1}^{A} t_+^{(i)}$$

N.B.: M_{fi} è un elemento di matrice intrinseco, cioè nel sistema del centro di massa nucleare.