Capitolo 6

Teoria di Yukawa

Yukawa comincia considerando la forma del potenziale statico capace di descrivere l'interazione np. Siccome si sapeva che l'interazione decresce rapidamente per distanze maggiori di $\sim 2fm$, Yukawa postulò una energia potenziale di tipo coulombiano schermato da una funzione esponenziale decrescente:

$$V_y(r) = -g^2 \frac{e^{-\frac{r}{a}}}{r}$$

dove a è un parametro dell'ordine di $2fm$, g è la costante di interazione forte comune ai due nucleoni. Come nel caso elettrostatico, l'energia potenziale deriva dall'interazione della carica forte g di un nucleone con il campo $U(r)$ generato dall'altro nucleone:

$$V_y(r) = gU(r)$$

supponendo un nucleone nell'origine e l'altro in $\vec{r}$. $U(r)$ soluzione di un'equazione di Poisson generalizzata:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{a^2}\right) U(r) = 4\pi g \delta^3(r) \tag{6.1}$$

É agevole verificare che:

$$U(r) = -g \frac{e^{-\frac{r}{a}}}{r}$$

è soluzione dell'equazione di (1) ricordando che $V(r) = \frac{e}{r}$ è soluzione dell'equazione di Poisson:

$$\nabla^2 V(r) = -4\pi e \delta^3(r)$$

scritta per una sorgente puntiforme (per cui $\rho(\vec{r}) = e\delta^3(r)$) nel sistema di unità di Gauss. Il passo successivo di Yukawa consistette nel generalizzare l'equazione (1) al caso non stazionario, per ottenere una equazione di campo per $U(\vec{r}, t)$. L'analogia con le equazioni per i potenziali ritardati in elettromagnetismo gli suggerì per il campo $U(\vec{r}, t)$ nel vuoto l'equazione:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{a^2}\right) U(\vec{r}, t) = 0 \tag{6.2}$$

Per ora, $U(\vec{r}, t)$ è ancora un campo classico, che deve essere quantizzato in analogia al campo elettromagnetico, per poter descrivere interazioni nel microcosmo. Per ricavare la massa del quanto corrispondente al campo U è sufficiente cercare la soluzione di tipo onda piana (particella libera) di (2):

$$U(\vec{r},t) = A\exp\left[i\frac{(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}{\hbar}\right]$$

che sostituita in (2) dà :

$$\left[\left(\frac{E}{\hbar c}\right)^2 - \left(\frac{\vec{p}}{\hbar}\right)^2 - \frac{1}{a^2}\right]U(\vec{r},t) = 0$$

Deve essere nulla la parentesi quadra nell'ultima espressione:

$$E^2 = c^2\vec{p}^2 + \left(\frac{\hbar c}{a}\right)^2$$

Per confronto con la relazione relativistica:

$$E^2 = c^2\vec{p}^2 + (mc^2)^2$$

che lega energia e impulso di una particella libera di massa m, deduciamo (come fece Yukawa ma in modo diverso) che il quanto U del campo di forze di range finito ha una massa:

$$m_U c^2 = \frac{\hbar c}{a} \rightarrow a = \frac{\hbar}{m_U c}$$

Questa relazione significa che il parametro a che descrive il range finito della forza tra due nucleoni è determinato dal valore della massa del quanto del campo che media l'interazione. Inserendo il valore $a \simeq 2fm$ otteniamo:

$$m_U c^2 \simeq 100MeV$$

che è la famosa predizione di Yukawa per la massa del quanto dell'interazione nucleare. Il meccanismo quantistico dell'interazione np, secondo Yukawa, è il seguente processo in due tempi:

$$\begin{cases} n \rightarrow p + U^- \\ U^- + p \rightarrow n \end{cases}$$

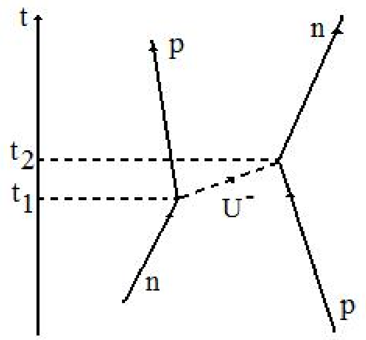


Figura 6.1: Scambio della particella U^-

La carica elettrica di U^- deve essere negativa per conservare la carica nei processi elementari di emissione e assorbimento. Al campo $U^*(\vec{r}, t)$, complesso coniugato del campo $U(\vec{r}, t)$, corrisponde l'antiparticella U^+ del quanto U^-, che ha carica elettrica positiva. L'interazione np può avvenire anche mediante lo scambio del quanto U^+:

$$\begin{cases} p \to n + U^+ \\ U^+ + n \to p \end{cases}$$

É importante notare che nei processi elementari $n \to p + U^-$ ecc. non c'è conservazione dell'energia perchè

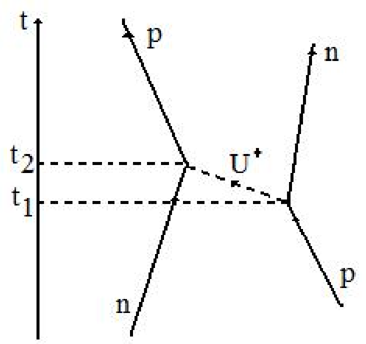
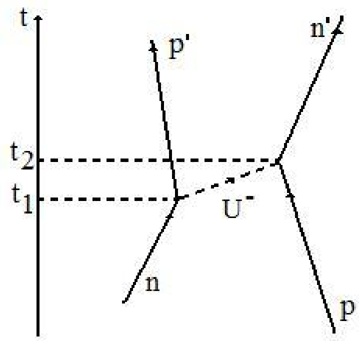


Figura 6.2: Scambio della particella U^+

$m_n < m_p + m_U$ se $m_U \simeq 100\frac{MeV}{c}$, sicchè il processo non può avvenire come processo di emissione reale. Analogamente i grafici che descrivono l'interazione nella teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo, lo stato intermedio $t_1 < t < t_2$ non è fisicamente realizzabile. Si parla di stato vistuale, ammesso in meccanica quantistica purchè la sua durata $\Delta t = t_2 - t_1$ sia talmente breve che **non** sia verificata la relazione di indeterminazione tempo-energia caratteristica dei processi reali, come argomentò Giancarlo Wick:



$$\Delta t \Delta E \leq \hbar$$

Cosa usiamo per ΔE? Una scelta ragionevole è la differenza di energia tra lo stato intermedio e quello iniziale o finale, che coincidono:

$$\Delta E = E_{int} - E_{iniz} = (E_{p'} + E_U + E_p) - (E_n + E_p) = E_{p'} + E_U - E_n$$

Nel sistema del centro di massa sono $(\vec{p}, -\vec{p})$ gli impulsi della coppia di nucleoni nello stato iniziale, e $(\vec{p}', -\vec{p}')$ in quello finale, ma in modulo $|\vec{p}| = |\vec{p}'|$ per la conservazione dell'energia. Quindi

$$E_{p'} - E_n = \sqrt{c^2\vec{p}^2 + m_p^2c^4} - \sqrt{c^2\vec{p}^2 + m_n^2c^4} \simeq 0$$

perchè $m_n \simeq m_p$. Quindi

$$\Delta E \simeq E_U = \sqrt{c^2\vec{p}_U^2 + m_U^2c^4}$$

$$|\vec{p}_U| = |\vec{p} - \vec{p}'|$$

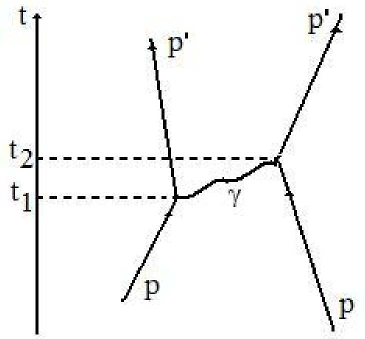
$$\Delta E_{min} \simeq m_U c^2$$

$$\Delta t_{max} \leq \frac{\hbar}{\Delta E_{min}} = \frac{\hbar}{m_U c^2} \Rightarrow a \simeq c\Delta t_{max} = \frac{\hbar}{m_U c}$$

Usando lo stesso argomento per l'interazione elettrica tra due protoni, mediata dallo scambio di un fotone, si ottiene per il 'range' dell'interazione elettromagnetica:

$$a_{e.m.} \simeq \frac{\hbar c}{E_\gamma} \to \infty$$

perchè $E_\gamma = \hbar\omega$ e ω può essere piccola a piacere. La massa nulla del fotone determina un raggio d'azione

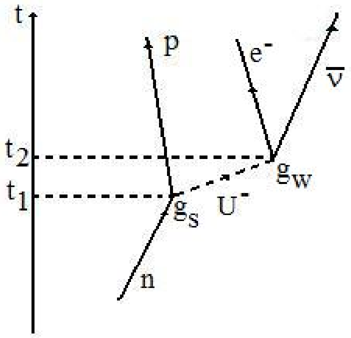


infinito per l'interazione elettromagnetica.

Infine, Yukawa propose una unificazione delle interazioni forti e deboli ipotizzando che il quanto $U^\pm$ sia anche il mediatore del decadimento β attraverso il processo in figura. Siccome le due interazioni sono molto diverse in intensità, Yukawa assegnò una carica forte g_s al vertice npU e una carica debole g_w al vertice $Ue\nu_e$. In questo modo anche l'interazione debole aveva un range (mentre Fermi l'aveva supposta puntiforme) che era lo stesso dell'interazione forte $\frac{\hbar}{m_U c} \sim 2fm$. Oggi sappiamo che l'idea di Yukawa di un range finito per l'interazione debole era correrra, ma il suo valore è molto più corto ($\sim 10^{-3}fm$). Infatti l'interazione debole non è mediata dal quanto U ma dai bosoni vettoriali intermedi $W^\pm$, Z^0 (scoperti nel 1983 al CERN) che hanno una massa di $81\frac{GeV}{c}$ e di $90\frac{GeV}{c}$ rispettivamente.

6.1 Osservazione finale

Yukawa scelse i segni per il potenziale $V_y(r) = -g^2\frac{e^{-\frac{r}{a}}}{r}$ in modo arbitrario, per avere un potenziale np attrattivo nel canale $^3S_1$ del deutone. Nello stesso tempo modellò l'interazione forte su quella elettromagnetica



trattando il campo $U(\vec{r},t)$ come se fosse l'analogo del potenziale scalare $V(\vec{r},t)$ dell'elettromagnetismo. Inoltre trascurò, per semplicità, l'analogo forte del potenziale vettore $\vec{A}(\vec{r},t)$. Queste scelte sono inconsistenti perchè ad un campo quadrivettoriale corrisponde una forza repulsiva tra cariche dello stesso segno, come nel caso coulombiano. Una forza attrattiva si può ottenere a partire da un campo scalare, a cui corrisponde un quanto di spin nullo. Si può dimostrare che per generare il potenziale $V_y(r) = -g^2 \frac{e^{-\frac{r}{a}}}{r}$ occorre che il bosone abbia parità positiva, sia cioè di spin-parità 0^+. Un mesone di questi numeri quantici, detto σ in fisica nucleare e f_0 in fisica delle particelle, esiste ma ha una massa di circa $600\frac{MeV}{c^2}$, troppo grande per essere il mesone di Yukawa. Il mesone più leggero, che si può identificare con il mesone di Yukawa, è il pione (in simboli π), scoperto nei raggi cosmici da Powell e coll. nel 1947. I pioni carichi $\pi^{\pm}$ hanno una massa di $139,6\frac{MeV}{c^2}$, quello neutro ha massa $135,0\frac{MeV}{c^2}$. Il loro spin è nullo, ma la loro parità è negativa, $J^{\pi} = 0^-$. Come conseguenza, il potenziale NN derivante dallo scambio dei tre pioni (detto potenziale OPE da One-Pion-Exchange) non ha un termine centrale come nel potenziale di Yukawa ma un termine spin-spin e un termine tensoriale. La sua forma esplicità è:

$$V_{OPE} = \frac{1}{3}\frac{f^2}{\hbar c} m_{\pi} c^2 \left[\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 Y_0(m_{\pi} r) + S_{12}(\hat{r}) Y_2(m_{\pi} r)\right] \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2$$

con

$$Y_0(x) = \frac{e^{-x}}{x}$$

$$Y_2(x) = (1 + \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2}) Y_0(x)$$

e dove $\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2$ è il fattore di isospin. Il valore della carica nucleare forte è $\frac{f^2}{\hbar c} \simeq 0,08$ da fit di dati sperimentali.