Capitolo 5

Deutone e potenziale NN

1. **Proprietà del deutone:**
$$J^\pi = 1^+$$
$$B_d = 2,225 MeV$$
$$\mu_d = 0,857 \mu_N$$
$$Q_d = 0,286 fm^2$$
$$\sqrt{\langle r_c^2 \rangle} = 2,116 fm$$
$$R_d = 1,936 fm$$

2. **Stato di deutone:** Da $J^\pi = 1^+$ si ricava $|d\rangle = a|^3S_1\rangle + b|^3D_1\rangle$

3. **$\hat{V}_{np}$ dipende dallo spin:** da 2) soltanto $S = 1$ è presente in $|d\rangle$. La configurazione con spin antiparalleli ($S = 0$) non è ammessa.

4. **Necessità della componente $|^3D_1\rangle$:** se lo stato fosse solo $|^3S_1\rangle$ non ci sarebbe momento di quadrupolo. Infatti, siccome $\vec{r}_p^{cm} = \frac{\vec{r}}{2}$, segue:
$$\hat{Q}_{zz} = \frac{r^2}{4}(3\cos^2\theta - 1) = \frac{r^2}{2}\sqrt{\frac{4\pi}{5}}Y_{2,0}(\theta, \phi)$$
$$\langle \vec{r}|^3S_1\rangle = \frac{F(r)}{\sqrt{4\pi}}\chi_{1,m}$$
$$Q_d = \langle ^3S_1^{m=1}|\hat{Q}_{zz}|^3S_1^{m=1}\rangle = \int d^3r \frac{F(r)}{\sqrt{4\pi}}\chi_{1,1}^\dagger \hat{Q}_{zz}\frac{F(r)}{\sqrt{4\pi}}\chi_{1,1} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\pi}{5}}\int drr^2 d\Omega \frac{F(r)}{\sqrt{4\pi}}\hat{Q}_{zz}\frac{F(r)}{\sqrt{4\pi}} = 0$$
perchè $\int d\Omega Y_{2,0}(\theta, \phi) = 0$

5. **Termine tensoriale in $\hat{V}_{np}$:** per avere uno stato degenere in momento angolare orbitale ($L = 0$ e $L = 2$ contemporaneamente presenti) e solo $S = 1$ nella funzione d'onda di spin occorre un termine

nel potenziale che dipenda da $\vec{r}$, $\vec{\sigma}_1$, $\vec{\sigma}_2$. La sua forma è dettata dall'energia potenziale di interazione tra dipoli magnetici:

$$V_{dip} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3\vec{\mu}_1 \cdot \hat{r}\vec{\mu}_2 \cdot \hat{r} - \vec{\mu}_1 \cdot \vec{\mu}_2}{r^3}$$

Siccome per un nucleone a riposo $\vec{\mu} = g_s \frac{e}{2M}\vec{S}$, si ha:

$$\hat{V}_T(\vec{r}, \vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2) = V_T(r)(3\vec{\sigma}_1 \cdot \hat{r}\vec{\sigma}_2 \cdot \hat{r} - \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2)$$

con una dipendenza radiale (diversa da $\frac{1}{r^3}$, che è tipica dell'interazione elettromagnetica) che dipende dall'interazione nucleare.

6. In conclusione, per spiegare le proprietà del deutone, occorre un potenziale $\hat{V}_{np}$ con almeno due componenti:

$$\hat{V}_{np} = V_c(r) + V_T(r)\hat{S}_{12}$$

$$\hat{S}_{12} = 3\vec{\sigma}_1 \cdot \hat{r}\vec{\sigma}_2 \cdot \hat{r} - \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2$$

7. **Percentuale di onda S e di onda D nel deutone:** il calcolo del momento di dipolo magnetico dà:

$$\mu_d = \mu_p + \mu_n - \frac{3}{2}b^2(\mu_p + \mu_n - \frac{1}{2}\mu_N)$$

Siccome i valori sperimentali sono $\mu_d = 0,857\mu_N$, $\mu_p + \mu_n = 0,880\mu_N$, la percentuale di onda D è $b^2 = 4\%$.

5.1 Momento di dipolo magnetico del deutone

$$\mu_d = \langle d, M = 1|\hat{\mu}_z|d, M = 1\rangle$$

Se a $\hat{\vec{\mu}}$ contribuiscono solo il protone e il neutrone:

$$\hat{\vec{\mu}} = \frac{e}{2M_p}(g_s^p\vec{S}_1 + g_s^n\vec{S}_2 + \vec{L}_p)$$

$\vec{L}_p$ è il momento angolare orbitale del protone nel sistema del centro di massa:

$$\vec{L}_p = \vec{L}_1 = \vec{r}_1^{cm} \wedge \vec{p}_1^{cm} = \frac{\vec{r}}{2} \wedge \vec{p} = \frac{1}{2}\vec{L}$$

$$\vec{L}_n = \vec{L}_2 = \vec{r}_2^{cm} \wedge \vec{p}_2^{cm} = \frac{-\vec{r}}{2} \wedge -\vec{p} = \frac{1}{2}\vec{L}$$

Conviene scomporre i termini di spin in

$$g_s^p\vec{S}_1 + g_s^n\vec{S}_2 = \frac{1}{2}(g_s^p + g_s^n)(\vec{S}_1 + \vec{S}_2) + \frac{1}{2}(g_s^p - g_s^n)(\vec{S}_1 - \vec{S}_2)$$

e riscrivere $\hat{\vec{\mu}}$ nella forma:

$$\hat{\vec{\mu}} = \frac{\mu_N}{\hbar}\left[\frac{g_s^p + g_s^n}{2}\vec{S} + \frac{g_s^p - g_s^n}{2}(\vec{S}_1 - \vec{S}_2) + \frac{1}{2}\vec{L}\right]$$

Ricordando che $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$, si ottiene infine:

$$\hat{\vec{\mu}} = \frac{\mu_N}{\hbar}\left[\frac{g_s^p + g_s^n}{2}\vec{J} + \frac{g_s^p - g_s^n}{2}(\vec{S}_1 - \vec{S}_2) - \left(\frac{g_s^p + g_s^n}{2} - \frac{1}{2}\right)\vec{L}\right]$$

Il calcolo del valore di aspettazione dei tre operatori rende:

- $\langle d, J = 1, M = 1|\hat{J}_z|d, J = 1, M = 1\rangle = \hbar M|_{M=1} = \hbar$;
- $\langle d|(\vec{S}_1 - \vec{S}_2)_z|d\rangle = 0$ perchè lo stato di deutone è simmetrico ($S = 1$) nello scambio $1 \leftrightarrow 2$, mentre l'operatore $\vec{S}_1 - \vec{S}_2$ è antisimmetrico.
- $\langle d, J = 1, S = 1, L, M = 1|\hat{L}_z|d, J = 1, S = 1, L, M = 1\rangle = \frac{3}{2}\hbar|b|^2$ avendo usato il teorema della proiezione per cui:

  $$\langle JM|\hat{L}_z|JM\rangle = \langle JM|\hat{J}_z|JM\rangle\frac{\langle JM|\vec{L}\cdot\vec{J}|JM\rangle}{\hbar^2 J(J+1)}$$

  $$\vec{L}\cdot\vec{J} = \frac{1}{2}(\vec{J}^2 + \vec{L}^2 - \vec{S}^2)$$

  dove l'ultima espressione è ottenuta quadrando $\vec{J} - \vec{L} = \vec{S}$. Siccome $J = S = 1$, risulta $\vec{L}\cdot\vec{J} \to \frac{1}{2}\vec{L}^2$ e $\vec{L}^2$ ha valore di aspettazione nullo sullo stato $L = 0$ del deutone e nell'elemento di matrice $\langle {}^3S_1|\vec{L}|{}^3D_1\rangle$, mentre

  $$\langle {}^3D_1|\vec{L}^2|{}^3D_1\rangle = \hbar^2 L(L+1)|_{L=2} = 6\hbar^2$$

In conclusione:

$$\mu_d = \mu_N\left[\frac{g_s^p + g_s^n}{2} - \frac{3}{2}|b|^2\left(\frac{g_s^p + g_s^n}{2} - \frac{1}{2}\right)\right] = \mu_p + \mu_n - \frac{3}{2}|b|^2(\mu_p + \mu_n - \frac{1}{2}\mu_N) \quad \text{C.V.D.}$$

5.2 Operatore tensoriale S_{12}

Definizione:

$$S_{12} = 3\vec{\sigma}\cdot\hat{r}\vec{\sigma}_2\cdot\hat{r} - \vec{\sigma}_1\cdot\vec{\sigma}_2$$

Forma alternativa:

$$S_{12} = \frac{1}{\hbar^2}(6(\vec{S}\cdot\hat{r})^2 - 2\vec{S}^2)$$

$$\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_1 = \frac{\hbar}{2}(\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2)$$

5.3 Proprietà di S_{12}

1. Ha valor medio nullo sulle direzioni

   $$\frac{1}{4\pi}\int d\Omega S_{12} = 0$$

   perchè $\frac{1}{4\pi}\int d\Omega\vec{A}\cdot\hat{r}\vec{B}\cdot\hat{r} = \frac{1}{3}\vec{A}\cdot\vec{B}$.

2. E' invariante per rotazioni, perchè è costruito mediante prodotti scalari di vettori. Quindi commuta con $\vec{J}$ e con $\vec{J}^2$:

$$[S_{12}, \vec{J}] = [S_{12}, \vec{J}^2] = 0$$

3. E' invariante per inversione spaziale, conserva la parità $\hat{P}$. Infatti:

$$\vec{r} \to -\vec{r}$$

$$\vec{p} \to -\vec{p}$$

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} \to \vec{L} \Rightarrow \vec{S} \to \vec{S}$$

$$\Rightarrow [S_{12}, \hat{P}] = 0$$

4. Non commuta con $\vec{S}$ nè con $\vec{L}$:

$$[S_{12}, \vec{L}] = -[S_{12}, \vec{S}] = 3i\hbar(\vec{\sigma}_1 \wedge \hat{r}\vec{\sigma}_2 \cdot \hat{r} + \vec{\sigma}_2 \wedge \hat{r}\vec{\sigma}_1 \cdot \hat{r})$$

5. Commuta con $\vec{S}^2$ (vedi la forma alternativa di S_{12}):

$$[S_{12}, \vec{S}^2] = 0$$

6. Non commuta con $\vec{L}^2$:

$$[S_{12}, \vec{L}^2] \neq 0$$

   La forma del commutatore è complicata.

7. In conclusione, S_{12} può essere diagonalizzato insieme com $\vec{J}^2$, $\vec{J}_z$, $\vec{S}^2$, $\hat{P}$. I suoi autostati sono della forma $|J, M, S, \Pi\rangle$. Si possono costruire a partire dagli autostati di spin-angolo:

$$|L, S, J, M\rangle = \sum_{m,\mu} \langle L, m; S, \mu|(LS)J, M\rangle |L, m\rangle |S, \mu\rangle$$

   che sono autostati di $\vec{L}^2$, $\vec{S}^2$, $\vec{J}^2$, J_z. Proiettati sullo spazio delle coordinate spaziali $\vec{r}$ e di spin s, sono detti *funzioni di spin-angolo*:

$$\mathcal{Y}_{L,S}^{J,M}(\hat{r}, s) = \sum_{m,\mu} \langle L, m; S, \mu|(LS)J, M\rangle Y_{L,m}(\theta, \phi)\chi_{S,\mu}$$

   In generale sarà:

$$|J, M, S, \Pi\rangle = \sum_L Q_L |L, S, J, M\rangle$$

   con la somma su L limitata a soli valori pari (se $\Pi = +1$) o dispari (se $\Pi = -1$). Siccome $\vec{S}^2$ commuta con S_{12}, stati con $S = 0$ e $S = 1$ non si mescolano. Il caso $S = 0$ è particolarmente semplice perchè implica $L = J$. Inoltre

$$S_{12}\chi_{0,0} = 0$$

   perchè

$$\vec{S}\chi_{0,0} = 0 \Rightarrow \vec{\sigma}_1\chi_{0,0} = -\vec{\sigma}_2\chi_{0,0}$$

e perciò

$$S_{12}\chi_{0,0} = (3\vec{\sigma}_1 \cdot \hat{r}\vec{\sigma}_2 \cdot \hat{r} - \vec{\sigma}.\vec{\sigma}_2)\chi_{0,0} = (-3(\vec{\sigma}_1 \cdot \hat{r})^2 + \vec{\sigma}_1^2)\chi_{0,0} = (-3+3)\chi_{0,0} = 0$$

dato che $\vec{\sigma}_1^2 = 3$ e $(\vec{\sigma} \cdot \hat{r})^2 = 1$. In conclusione S_{12}, operando su $\chi_{0,0}$, lo annichila. Il termine tensoriale del potenziale dà contributo nullo sugli stati di singoletto di spin.

8. Come agisce S_{12} sugli stati di spin-angolo?

$$S_{12}|L,S,J,M\rangle = \sum_{L'} |L',S,J,M\rangle\langle L',S,J,M|S_{12}|L,S,J,M\rangle$$

avendo usato la completezza degli stati e il fatto che S_{12} lascia invariati S, J, M e parità. Il calcolo (complicato) dà i seguenti risultati per gli elementi di matrice di S_{12} (vedi figura 1). Ovviamente non

(L')/(L)	**(J-1)**	**(J)**	**(J+1)**
(J-1)	$-2\frac{J-1}{2J+1}$	0	$6\frac{\sqrt{J(J+1)}}{2J+1}$
(J)	0	2	0
(J+1)	$6\frac{\sqrt{J(J+1)}}{2J+1}$	0	$-2\frac{J+2}{2J+1}$

Figura 5.1: Elementi di matrice di S_{12}

c'è dipendenza da M perchè S_{12} è un operatore scalare ed è sottinteso che $S = 1$.

9. Per il caso del deutone ($J = 1$, $S = 1$, $L = 0, 2$) la tabella dà, in notazioni spettroscopiche:

$$\begin{cases} S_{12}|^3S_1\rangle = \sqrt{8}|^3D_1\rangle \\ S_{12}|^3D_1\rangle = \sqrt{8}|^3S_1\rangle - 2|^3D_1\rangle \end{cases}$$

Pertanto nè $|^3S_1\rangle$ nè $|^3D_1\rangle$ sono autostati si S_{12}. Se il potenziale contiene un termine tensoriale $V_T(r)S_{12}$, l'equazione agli autovalori:

$$H\psi_d = -B_d\psi_d \quad B_d = 2,225MeV$$

non ammette come soluzione $\psi(\vec{r}) = F(r)\mathcal{Y}_{0,1}^{1,M}(\hat{r},s)$ oppure $\psi(r) = G(r)\mathcal{Y}_{2,1}^{1,M}(\hat{r},s)$ ma una loro combinazione lineare:

$$\psi_d(r) = F(r)\mathcal{Y}_{0,1}^{1,M}(\hat{r},s) + G(r)\mathcal{Y}_{2,1}^{1,M}(\hat{r},s)$$

che, come abbiamo visto, è quella necessaria per spiegare le proprietà del deutone.

5.4 Dimostrazione di $S_{12}\mathcal{Y}_{0,1}^{1,M} = \sqrt{8}\mathcal{Y}_{2,1}^{1,M}$

Sappiamo che S_{12}, applicato ad uno stato $\mathcal{Y}_{0,1}^{1,M}$, lascia inalterati $J = 1$, $S = 1$ e M e cambia $L = 0$ in $L = 2$:

$$S_{12}\mathcal{Y}_{0,1}^{1,M} = \lambda\mathcal{Y}_{2,1}^{1,M} \tag{5.1}$$

Tale relazione vale per ogni M. Scegliamo $M = 1$. Prendiamo inoltre l'asse z coincidente con $\vec{r}$:

$$\vec{r} = (r, \theta, \phi) \to (r, 0°, indefinito)$$

$$\mathcal{Y}_{2,1}^{1,1} = \sum_m \langle 2, m, 1, 1-m|(2,1)1,1\rangle Y_{2,m}(\theta = 0°, \phi)\chi_{1,1-m} = \underbrace{\langle 2, 0, 1, 1|(2,1)1,1\rangle}_{=\frac{1}{\sqrt{10}}} \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\chi_{1,1} = \frac{1}{\sqrt{8\pi}}$$

perchè $Y_{2,m}(\theta = 0°, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\delta_{m,0}$. D'altronde

$$S_{12}(\hat{r}) \to 3\sigma_{1z}\sigma_{2z} - \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2$$

$$S_{12}(\hat{r})\mathcal{Y}_{0,1}^{1,1} \to (3\sigma_{1z}\sigma_{2z} - \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2)\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\chi_{1,1} = (3-1)\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\chi_{1,1} = 2\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\chi_{1,1}$$

Dalla equazione (1) che definisce λ segue:

$$2\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\chi_{1,1} = \lambda\frac{1}{\sqrt{8\pi}}\chi_{1,1} \Rightarrow a = 2\sqrt{2} = \sqrt{8}$$

5.5 Dimostrazione di $S_{12}\mathcal{Y}_{2,1}^{1,M} = \sqrt{8}\mathcal{Y}_{0,1}^{1,M} - 2\mathcal{Y}_{2,1}^{1,M}$

Applicato a $\mathcal{Y}_{2,1}^{1,M}$, S_{12} trasforma $L = 2$ in $\vec{L}' = \vec{L} + \vec{2}$ perchè trasferisce due unità di momento angolare orbitale, per cui L' può assumere tutti i valori da 0 a 4. Però S_{12} non cambia la parità dello stato su cui opera, sicchè $(-1)^{L'} = (-1)^{L=2} = +1$. Sono quindi da escludere i casi $L' = 1$ e $L' = 3$. Anche $L' = 4$ non è possibile, perchè dalla somma vettoriale di L' e di $S = 1$ si deve ottenere $J = 1$. Restano solo $L' = 0$ e $L' = 2$:

$$S_{12}\mathcal{Y}_{2,1}^{1,M} = a\mathcal{Y}_{0,1}^{1,M} + b\mathcal{Y}_{2,1}^{1,M}$$

Il coefficiente $a = \int d\Omega(\mathcal{Y}_{0,1}^{1,M})^\dagger S_{12}\mathcal{Y}_{2,1}^{1,M} = \sqrt{8}$ perchè S_{12} è hermitiano e abbiamo trovato che $\int d\Omega(\mathcal{Y}_{2,1}^{1,M})^\dagger S_{12}\mathcal{Y}_{0,1}^{1,M} = \sqrt{8}$. Il coefficiente b si trova procedendo come prima con $M = 1$ e $\hat{r} \equiv \hat{z}$:

$$\mathcal{Y}_{2,1}^{1,1} \to \frac{1}{\sqrt{8\pi}}\chi_{1,1}$$

$$\mathcal{Y}_{0,1}^{1,1} \to \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\chi_{1,1}$$

e quindi

$$S_{12}\frac{1}{\sqrt{8\pi}}\chi_{1,1} = \sqrt{8}\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\chi_{1,1} + b\frac{1}{\sqrt{8\pi}}\chi_{1,1}$$

ma $S_{12}\chi_{1,1} = 2\chi_{1,1}$ dunque $b = 2 - 4 = -2$.