

Capitolo 2

Sezione d'urto classica

In meccanica classica, ogni particella del fascio incidente segue una traiettoria ben definita sotto l'azione del potenziale. Se $V(r)$ è centrale, il momento angolare è conservato, la traiettoria è piana e c'è indipendenza rispetto all'angolo φ . Graficamente si ha:

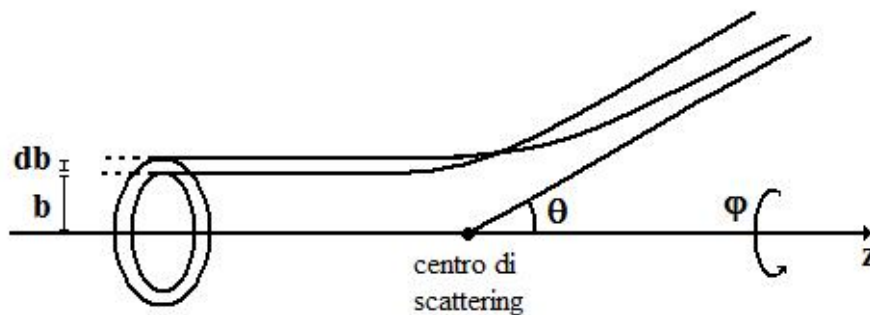


Figura 2.1: Esempio di moto in campo centrale

L'angolo di scattering θ è una funzione univoca del parametro d'urto b . La sezione d'urto differenziale si esprime naturalmente per mezzo di b e di $\theta = \theta(b)$. Le particelle diffuse nell'intervallo $\theta, \theta + d\theta$ sono quelle che passano nell'anello $b, b + db$:

$$d\dot{N}_a^f = I_a^i 2\pi b db$$

D'altronde per definizione di sezione d'urto differenziale:

$$d\dot{N}_a^f = I_a^i \frac{d\sigma}{d\Omega} 2\pi \sin\theta d\theta$$

avendo integrato su φ . Per confronto si ha

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin\theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right|$$

Il valore assoluto in $\frac{db}{d\theta}$ deriva dalla possibilità che $\theta = \theta(b)$ sia una funzione decrescente di b , come nel caso della figura che corrisponde a un potenziale repulsivo che diminuisce al crescere di r .

2.1 Scattering coulombiano classico

Se il potenziale è coulombiano, la relazione tra θ e b è:

$$b = \frac{d_0}{2} \cot \frac{\theta}{2}$$

con $d_0 = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{E}$ da cui

$$\frac{db}{d\theta} = -\frac{d_0}{4} \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\frac{d_0}{2} \cot \frac{\theta}{2}}{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} \frac{d_0}{4} \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} = \left(\frac{d_0}{4}\right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}$$

che è la sezione d'urto Rutherford.

Nota:

1. $\frac{d\sigma}{d\Omega} \rightarrow \infty$ per $\theta = 0$. Fisicamente significa che il potenziale coulombiano ha un raggio d'azione molto grande (infinito, si usa dire), sì che anche particelle con grandi b sono deflesse.
2. Si ha anche:

$$\sigma_t = 2\pi \int_0^\pi \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin \theta d\theta = \infty$$

In pratica non si può misurare $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ a $\theta = 0$: il fascio incidente ha dimensioni finite che determinano un limite superiore per b . Inoltre, la carica del nucleo bersaglio è usualmente schermata dagli elettroni atomici per cui il potenziale diffusore cessa di essere coulombiano a distanze dell'ordine del raggio atomico.

3. Una sezione d'urto classica in accordo con quella quantistica significa che la descrizione classica in termini di traiettoria è giustificata? No, solo se la lunghezza d'onda associata $\lambda = \frac{h}{p}$ è piccola, più precisamente nel caso di scattering coulombiano occorre che:

$$\lambda \ll \frac{d_0}{2} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{2E}$$

che diventa la condizione per il *parametro di Sommerfeld*:

$$\eta = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v} \gg 1$$

N.B.: la condizione per la validità della prima approssimazione di Born è $\eta \ll 1$!!

4. **Dimensioni finite delle particelle.** Il potenziale coulombiano rappresenta correttamente il potenziale di interazione solo per particelle puntiformi. Se queste sono estese, di raggi R_1 e R_2 , il potenziale diffusore sarà coulombiana se la distanza di massimo avvicinamento d_0 è maggiore di $R = R_1 + R_2$. Questo significa che l'energia E deve essere minore di $\frac{Z_1 Z_2 e^2}{R}$; questa energia critica è spesso chiamata *barriera coulombiana*. Per energie maggiori lo scattering non sarà più descritto dalla sezione d'urto

Rutherford. La distanza minima d , corrispondente a $b \neq 0$, si ottiene agevolmente dalla conservazione del momento angolare:

$$\begin{cases} \frac{p_\infty^2}{2\mu} = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{k}{d} = E \rightarrow p_\infty = \sqrt{2\mu E} \\ p_\infty b = pd \end{cases}$$

$$p = \sqrt{2\mu(E - \frac{k}{d})} = \sqrt{2\mu E(1 - \frac{d_0}{d})} = p_\infty \sqrt{1 - \frac{d_0}{d}}$$

$$\begin{aligned} b = d\sqrt{1 - \frac{d_0}{d}} = \sqrt{d(d - d_0)} \rightarrow d^2 - d_0d - b^2 = 0 \rightarrow d = \frac{1}{2}(d_0 + \sqrt{d_0^2 + 4b^2}) \rightarrow d = \frac{d_0}{2}(1 + \sqrt{1 + \cot^2 \frac{\theta}{2}}) \Rightarrow \\ \Rightarrow d = \frac{d_0}{2}(1 + \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}}) \end{aligned}$$

Le deviazioni appariranno prima a $\theta = 180^\circ$ (d piccoli $\rightarrow \theta$ grandi) e poi progressivamente ad angoli minori al crescere di E . Ad energia fissata ci sarà un angolo critico θ_c al di là del quale la sezione d'urto devierà dall'andamento trovato da Rutherford. Nell'esperimento di Geiger e Marsden (**1913**), le particelle α di energia più alta ($E_\alpha = 7,68 \text{ MeV}$) provenivano dal decadimento del ^{214}Po (RaC'). La targhetta era di metalli pesanti (oro, argento). I risultati erano in accordo con la formula di Rutherford a tutti gli angoli. Nel caso dell'oro ($Z_2 = 79$, $Z_1 = 2$, $E = \frac{197}{197+4} E_\alpha^L = 7,53$, $e^2 = 1,44 \text{ MeV} \cdot \text{fm}$), si aveva:

$$d_0 = \frac{2 \cdot 79 \cdot e^2}{7,53 \text{ MeV}} = \frac{2 \cdot 79 \cdot 1,44 \text{ fm}}{7,53} = 30 \text{ fm}$$

Se ne conclude che il raggio del nucleo di ^{197}Au è minore di 30 fm (oggi sappiamo che è di circa 7 fm ; ci vorrebbero delle particelle α di circa 30 MeV perchè $d_0 = 7 \text{ fm}$). Se ci sono anche forze nucleari agenti tra le due particelle il potenziale coulombiano sarà valido come potenziale di interazione per distanze $r \gg R + \delta$, dove $R = R_1 + R_2$ e δ è il raggio d'azione delle forze nucleari, che è dell'ordine di 1 fm .

2.1.1 Deduzione di $b = \frac{d_0}{2} \cot \frac{\theta}{2}$

Il modo più semplice consiste nell'integrazione di $\vec{F} = m\vec{a}$ tra $t = -\infty$ e $t = \infty$, evitando di derivare l'equazione della traiettoria, che, come si sa dalla meccanica, è un ramo di iperbole.

Sia yz il piano di scattering e siano (r, ϕ) le coordinate sferiche nel piano

$$\begin{cases} y = r \sin \phi \\ z = r \cos \phi \end{cases}$$

con \hat{z} asse polare. L'integrazione analitica di $\vec{F} = m\vec{a}$ è resa possibile dal fatto che, nel caso coulombiano, $\vec{F} = \frac{k}{r^2} \hat{r}$ ($k = Z_1 Z_2 \hbar c \alpha$) e il momento angolare in un generico punto della traiettoria è dato da $L = -\mu r^2 \dot{\phi}$ (il segno (-) è necessario perchè $\dot{\phi}$ è negativo, ϕ decresce da 180° a 0° per t crescente da $-\infty$ a ∞).

Per la componente y dell'equazione del moto abbiamo

$$\begin{cases} \frac{dp_y}{dt} = F_y = \frac{k}{r^2} \frac{y}{r} = \frac{k}{r^2} \sin \phi \\ dt = -\frac{\mu r^2}{L} d\phi \\ dp_y = -\frac{\mu k}{L} \sin \phi d\phi \end{cases}$$

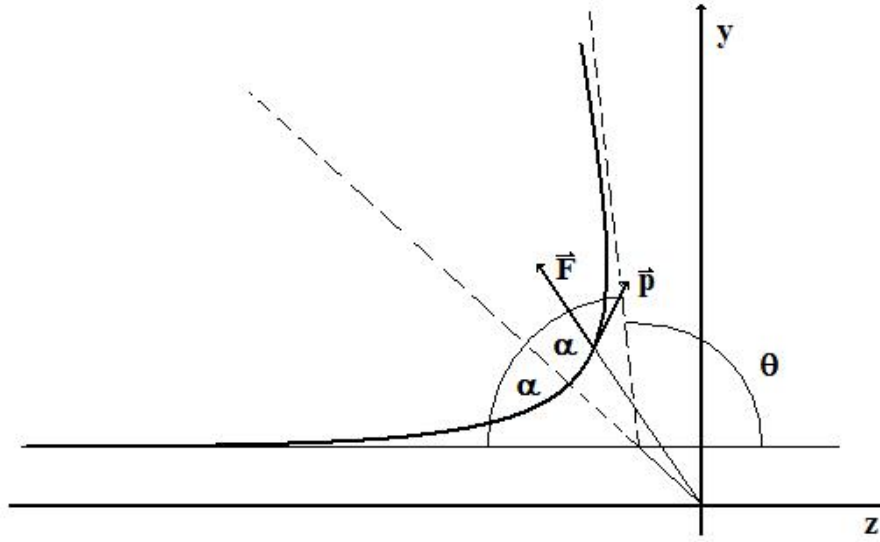


Figura 2.2: Traiettoria iperbolica

che integrata dà:

$$p_y^f - p_y^i = - \int_{\pi}^{\theta} \frac{\mu k}{L} \sin \phi d\phi = \frac{\mu k}{L} (1 + \cos \theta) \quad (2.1)$$

Siccome si ha che:

$$\begin{aligned} p_y^i &= 0 \\ p_y^f &= p_{\infty} \sin \theta \\ L &= b p_{\infty} \\ E &= \frac{p^2}{2\mu} + \frac{k}{r} = \frac{p_{\infty}^2}{2\mu} \\ d_0 &= \frac{k}{E} \end{aligned}$$

per cui risulta

$$\frac{\mu k}{L} = \frac{\mu E d_0}{b p_{\infty}} = p_{\infty} \frac{d_0}{2b}$$

allora l'equazione (1) diventa:

$$\begin{aligned} p_{\infty} \sin \theta &= p_{\infty} \frac{d_0}{2b} (1 + \cos \theta) \\ 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} &= \frac{d_0}{2b} 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \\ b &= \frac{d_0}{2} \cot \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

2.2 Scattering classico da sfera rigida

Consideriamo un fascio di particelle puntiformi a , incidenti su un bersaglio di sfere rigide X di raggio R . Se anche le particelle a hanno un raggio R_a , ci si riconduce al caso considerato con il cambiamento $R \rightarrow R_a + R_X$.

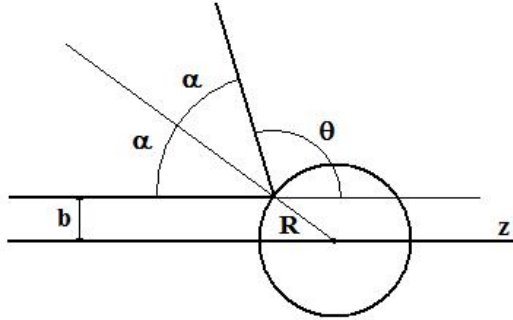


Figura 2.3: Urto da sfera rigida

L'urto da sfera rigida è caratterizzato da un angolo di riflessione uguale all'angolo di incidenza per cui:

$$\theta = \pi - 2\alpha$$

$$b = R \sin \alpha = R \cos \frac{\theta}{2}$$

$$\left| \frac{db}{d\theta} \right| = \frac{R}{2} \sin \frac{\theta}{2}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right| = \frac{R^2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{2 \sin \theta} = \frac{R^2}{4}$$

La distribuzione angolare è isotropa. La sezione d'urto totale è:

$$\sigma_t = 4\pi \frac{d\sigma}{d\Omega} = \pi R^2$$

Molto ragionevolmente σ_t coincide con l'area della sezione (trasversa alla direzione del fascio) della sfera.

2.3 Scattering classico da ellissoide rigido

Supponiamo che l'ellissoide abbia il suo asse di simmetria orientato come la direzione del fascio:

Le relazioni tra gli angoli sono:

$$\begin{cases} \alpha + \phi = \frac{\pi}{2} \\ 2\alpha + \theta = \pi \end{cases} \Rightarrow \theta = 2\phi$$

Dall'equazione dell'ellissoide $\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ che nel piano $x = 0$ diventa $\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, si ottiene:

$$\tan \phi = \left(\frac{dy}{dz} \right)_{\substack{y=b \\ z=-c\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}}} = \frac{a}{bc} \sqrt{a^2 - b^2}$$

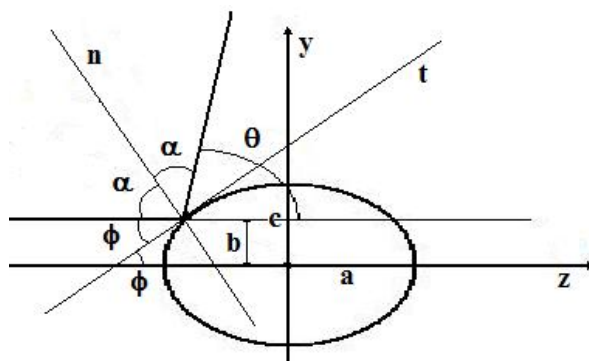


Figura 2.4: Urto da ellissoide rigido

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{a}{bc} \sqrt{a^2 - b^2} \Rightarrow b = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + c^2 \tan^2 \frac{\theta}{2}}}$$

$$\frac{db}{d\theta} = -\frac{1}{2} \frac{a^2 c^2}{(a^2 + c^2 \tan^2 \frac{\theta}{2})^{3/2}} \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos^3 \frac{\theta}{2}}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4} \frac{a^4 c^2}{(a^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + c^2 \sin^2 \frac{\theta}{2})^2} \rightarrow \frac{R^2}{4} \quad (\text{se } a = c = R)$$

2.4 Costruzione della traiettoria coulombiana

Consideriamo prima il caso $b = 0$:



Figura 2.5: Caso $b = 0$

$$d_0 = 2a = \frac{k}{E}$$

Se $b \neq 0$, disegniamo una circonferenza di raggio a con centro in C_2 , intersezione della linea di volo $b \neq 0$ con la perpendicolare passante per C_1 . Tracciamo la NC_2 , che interseca la circonferenza in A_2 . NC_2 è il semiasse maggiore dell'iperbole, A_2 è il vertice.

Infatti:

$$a = \frac{k}{2E}$$

$$b = \frac{L}{\sqrt{2mE}}$$

$$NC_2 = \sqrt{a^2 + b^2} = a\epsilon = \frac{\text{distanza}}{\text{focale}}$$

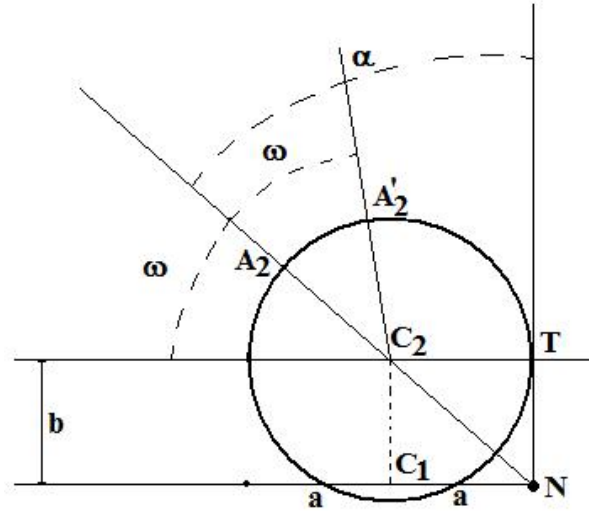


Figura 2.6: Caso $b \neq 0$

Inoltre, tracciata la tangente al cerchio in N , consideriamo l'angolo $C_2\hat{N}T = \alpha$, tale che

$$\alpha + \omega = 90^\circ$$

D'altronde, $A'_2\hat{C}_2T = \theta$ (angolo di scattering) è tale che $\theta + 2\omega = 180^\circ$, da cui $\alpha = \frac{\theta}{2}$.

Dal triangolo C_2NT si ha $\cot \alpha = \frac{TN}{C_2T} = \frac{b}{a}$ da cui

$$b = a \cot \alpha = \frac{d_0}{2} \cot \frac{\theta}{2}$$

$$\cot \frac{\theta}{2} = 2b \frac{E}{k} = 2 \frac{b}{d_0}$$

La lunghezza $d_0 = \frac{k}{E}$ è la distanza di massimo avvicinamento tra particella e nucleo. Infatti nel caso di urto centrale ($b = 0$) la distanza minima corrisponde al punto in cui la velocità relativa si annulla. Dalla conservazione dell'energia si ha $E = \frac{k}{d_0}$.