

Capitolo 1

Conteggi e sezione d'urto

Consideriamo la reazione a due corpi:



che comprende come caso particolare lo scattering elastico. La sezione d'urto differenziale per la reazione (1) è definita dalla relazione che dà il flusso delle particelle b rivelate dal detector in funzione del flusso di particelle del fascio ϕ_a (numero di particelle incidenti sul bersaglio al secondo) e della densità numerica superficiale dei nuclei bersaglio \mathcal{N}_X :

$$d\phi_b = \phi_a \mathcal{N}_X \sigma_{ab}(\theta, \varphi) d\Omega$$

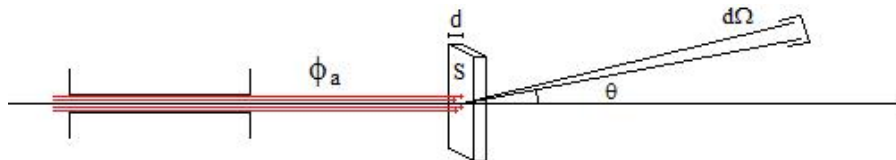


Figura 1.1: Deflessione del flusso nell'angolo solido $d\Omega$

Se il fascio è uniforme sull'area trasversale S :

$$d\phi_b = I_a N_X \sigma_{ab}(\theta, \varphi) d\Omega$$

Dove I_a è l'intensità del fascio (numero di particelle per secondo e per cm^2) e N_X è il numero dei nuclei bersaglio investiti dal fascio:

$$I_a = \frac{\phi_a}{S}$$
$$N_x = S \mathcal{N}_X$$

Se n_a è la densità numerica delle particelle a e v_a la loro *velocità relativa* al bersaglio:

$$I_a = n_a v_a$$

Se n_X è la densità numerica dei nuclei bersaglio e d lo spessore del bersaglio:

$$N_X = n_X S d = n_X V$$

La relazione tra il tasso dei conteggi e la sezione d'urto differenziale diventa:

$$d\phi_b = n_a n_X v_a V \sigma_{ab}(\theta, \varphi) d\Omega$$

e ci servirà per dimostrare l'invarianza relativistica di $d\sigma_{ab} = \sigma_{ab}(\theta, \varphi) d\Omega$.

Spesso il fascio è di particelle cariche e se ne conosce l'intensità di corrente i_a , mentre del bersaglio si conosce la densità di massa ρ_X e il numero di massa A degli atomi, per cui:

$$\phi_a = \frac{i_a}{Z_a e}$$

$$n_X = \rho_X \frac{\mathcal{N}_{avogadro}}{A}$$

1.1 Interpretazione geometrica di σ_{tot}

La probabilità che ci sia una interazione nell'urto del fascio con il bersaglio può essere definita da:

$$P = \frac{\phi^{fin}}{\phi_a}$$

dove ϕ^{fin} è il flusso totale delle particelle finali:

$$\phi^{fin} = \phi_{a'} + \phi_b + \dots$$

D'altronde, per definizione di σ_{tot} :

$$\phi^{fin} = I_a N_X \sigma_{tot} = \frac{\phi_a}{S} N_X \sigma_{tot} = \phi_a \mathcal{N}_X \sigma_{tot}$$

e quindi la probabilità di interazione diventa:

$$P = \frac{\sigma_{tot} N_X}{S}$$

La formula suggerisce di interpretare σ_{tot} come l'area efficace, perpendicolare alla direzione del fascio, da associare ad ogni nucleo bersaglio N_X che si trova entro l'area trasversale del fascio. Se una particella del fascio incide su questa area efficace la reazione avviene e la particella è rimossa dal fascio. In caso contrario, la particella incidente non interagisce con i nuclei bersaglio.

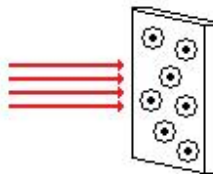


Figura 1.2: Interpretazione geometrica della sezione d'urto

É da notare che σ_{tot} non è una caratteristica del nucleo bersaglio, ma della interazione delle particelle del fascio e del nucleo bersaglio. Se il fascio di particelle cambia e il bersaglio resta lo stesso, σ_{tot} cambia.

1.2 Assorbimento di un fascio e definizione operativa di bersaglio sottile

Sia $\phi(z)$ il flusso delle particelle del fascio a profondità z nel bersaglio di spessore d .

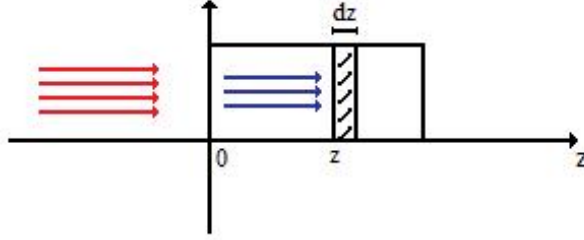


Figura 1.3: Assorbimento del fascio

Nell'attraversamento della targhetta sottile di spessore dz l'intensità del fascio diminuisce di una quantità pari al numero delle reazioni al secondo avvenute nello strato:

$$-d\phi = \frac{dN^f}{dt} = \sigma_{tot} n \phi(z) dz$$

dove n è la densità numerica dei nuclei bersaglio. Se σ_{tot} è indipendente da z l'equazione si integra analiticamente:

$$\phi(d) = \phi(0) e^{-n\sigma_{tot}d} = \phi(0) e^{-\mu d}$$

Il coefficiente $\mu = n\sigma_{tot}$ è detto *coefficiente di assorbimento* o di attenuazione. Il suo inverso $\lambda = \frac{1}{\mu}$ è detto *cammino libero medio* di a in X . **Il bersaglio è sottile se $d \ll \lambda = \frac{1}{\mu}$.** Infatti, in tal caso, si può sviluppare l'esponenziale ottenendo:

$$\phi(d) = \phi(0)(1 - n\sigma_{tot}d)$$

da cui

$$\phi(0) - \phi(d) = \phi(0)n\sigma_{tot}d$$

Ma $\phi(0) - \phi(d)$ dà il numero di reazioni avvenute a $nd = \frac{dN_X}{dS} = \mathcal{N}_X$ è la densità superficiale della targhetta. Ritroviamo la formula che collega sezione d'urto e conteggi nella ipotesi di targhetta sottile da cui siamo partiti:

$$\frac{dN^f}{dt} = \phi(0)\sigma_{tot}\mathcal{N}_X = I_a\sigma_{tot}N_X$$

Osservazione finale: l'indipendenza di σ_{tot} da z sembra ovvia, ma non lo è perchè σ_{tot} dipende dall'energia e l'energia del fascio può variare nell'attraversamento della targhetta, come nel caso di un fascio di particelle cariche. In questi casi, a rigore, non si può parlare di coefficiente di attenuazione.

1.3 Invarianza relativistica della sezione d'urto

Ricordiamo la relazione che lega il numero di eventi per unità di tempo e di volume alla sezione d'urto nel sistema del Laboratorio:

$$\frac{dN}{dt dV} = F d\sigma \quad (1.2)$$

$$F = n_a n_X v_a$$

Vogliamo dimostrare che $d\sigma$ è invariante per trasformazioni di Lorentz collineari con \vec{v}_a . Per questo osserviamo che dN è invariante perchè il numero di conteggi non può cambiare con il sistema di riferimento, mentre $dt dV = \frac{1}{c} d^4x$ è il volume invariante nello spazio tempo. Quindi il primo membro di (2) è invariante. Occorre dimostrare che il fattore di flusso F è invariante. Cominciamo con lo scrivere F nel sistema del Laboratorio ($\vec{p}_X = 0$) evidenziando con un indice o le quantità nel sistema di riferimento a riposo con le particelle del fascio e del bersaglio:

$$F_{lab} = n_a n_X^o v_a^L$$

La densità n_a del fascio nel sistema del Laboratorio si ottiene dalla densità n_a^o nel sistema solidale con il fascio mediante la formula:

$$n_a = \gamma(v_a) n_a^o$$

perchè $dN_a = n_a dV = n_a^o dV^o$ e perchè $dV = \frac{1}{\gamma(v_a)} dV^o$ per la contrazione delle lunghezze.

In un generico sistema di riferimento in moto con velocità \vec{V} rispetto al Laboratorio, il fattore di flusso diventa:

$$\begin{aligned} F' &= n'_a n'_X |\vec{v}'_a - \vec{v}'_X| \\ n'_a &= \gamma(v'_a) n_a^o \\ n'_X &= \gamma(v'_X) n_X^o = \gamma(V) n_X^o \quad (\vec{v}'_X = -\vec{V}) \\ \Rightarrow |\vec{v}'_a - \vec{v}'_X| &= v'_a + V = \frac{v_a - V}{1 - \frac{v_a V}{c^2}} + V = \frac{v_a}{1 - \frac{v_a V}{c^2}} \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) = \frac{1}{\gamma^2(V)} \frac{v_a}{1 - \frac{v_a V}{c^2}} \\ \Rightarrow F' &= n_a^o \gamma(v'_a) n_X^o \gamma(V) \frac{1}{\gamma^2(V)} \frac{v_a}{1 - \frac{v_a V}{c^2}} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Siccome vale la relazione

$$\gamma(v'_a) = \gamma(v_a) \gamma(V) \left(1 - \frac{v_a V}{c^2}\right) \quad (1.4)$$

otteniamo da (3):

$$F' = v_a^o \gamma(v_a) n_X^o v_a = F$$

e quindi $d\sigma' = d\sigma$.

Dimostrazione di (4): per il caso generale vedi *J. D. Jackson, Classical Electrodynamics*. Per il caso delle tre velocità collineari \vec{v}_a , \vec{v}'_a e \vec{V} basta sfruttare l'additività delle rispettive rapidità:

$$\begin{aligned} \tanh \xi_a &= \frac{v_a}{c} \\ \tanh \xi'_a &= \frac{v'_a}{c} \\ \tanh \eta &= \frac{V}{c} \\ \cosh \xi_a &= \gamma(v_a) \\ \sinh \xi_a &= \frac{v_a}{c} \gamma(v_a) \end{aligned}$$

Dalle relazioni:

$$\begin{aligned}\xi'_a &= \xi_a - \eta \\ \cosh(\alpha - \beta) &= \cosh \alpha \cosh \beta - \sinh \alpha \sinh \beta\end{aligned}$$

segue la (4).

1.4 Luminosità

Un parametro importante dei collisionatori è la luminosità L definita da:

$$R = L\sigma$$

dove R (*rate*) è il numero di eventi al secondo di un dato tipo, derivante da una reazione con sezione d'urto σ , per una singola regione di incontro dei fasci. La luminosità dipende solo dalle caratteristiche del collisionatore, con valori tipici di $10^{32} \frac{1}{\text{cm}^2\text{s}}$. La luminosità ha una espressione semplice nel caso idealizzato di fasci uniformi su un'area A , che si urtano frontalmente:

$$L = nf \frac{N_1 N_2}{A} \quad (1.5)$$

dove n è il numero di pacchetti (*bunch*) di particelle nei due fasci, N_1 e N_2 il numero di particelle in ogni pacchetto dei fasci 1 e 2, ed f la frequenza di percorrenza dell'anello. Infatti se ricordiamo il significato geometrico di σ , $\frac{\sigma N_2}{A}$ è la probabilità che una generica particella del fascio 1 abbia una interazione nell'attraversamento del pacchetto 2, per cui $N_1 \frac{\sigma N_2}{A}$ è il numero di reazioni in ogni attraversamento di due pacchetti. Il numero di reazioni al secondo in una data regione di incontro dei fasci è pertanto:

$$R = nf \frac{N_1 N_2 \sigma}{A}$$

da cui segue la formula (5). É da notare che R è lineare in n (e non quadratico) perchè ogni 'bunch' di un fascio incontra un solo 'bunch' dell'altro fascio in un dato punto.