

VI

IL RUMORE NEI DISPOSITIVI ELETTRONICI

1.- Premessa

Questo capitolo è più che altro una modesta introduzione all'argomento e manca di un approfondimento dedicato alla fisica dei dispositivi attinente ai processi coinvolti. Il capitolo ha lo scopo principale di presentare alcuni dei problemi che si incontrano studiando il rumore nella rivelazione e misura dei segnali con circuiti elettronici. Esso dovrebbe anche servire a mettere in grado il lettore di utilizzare le informazioni riguardo al rumore dei dispositivi, fornite dai costruttori.

2.- Il rumore nel diodo a giunzione

Nel capitolo precedente abbiamo affrontato il caso del diodo a vuoto, polarizzato in modo da operare in regime di corrente limitata dalla temperatura, e abbiamo considerato il caso come il paradigma per il rumore *shot*. Il diodo a giunzione, ovvero a semiconduttore, rappresenta anch'esso un tipico esempio in cui il rumore granulare descrive accuratamente i fenomeni osservati ed oltretutto mette bene in evidenza come per processi a caso indipendenti occorra sommare in quadratura le fluttuazioni associate.

La dipendenza della corrente I_d in un diodo a giunzione dalla tensione applicata è rappresentata ragionevolmente bene dalla funzione:

$$I_d = I_s (e^{V_d/\eta V_T} - 1) \quad (\text{VI.1})$$

dove η è un parametro fenomenologico ($\eta \approx 1$ per il diodo al Silicio), $V_T = kT/q \approx 26 \text{ mV}$ a $T = 300 \text{ K}$ e I_s rappresenta il valore assoluto della corrente di saturazione inversa.

La 1) non riproduce in maniera corretta né gli andamenti per alte correnti (dove la curva tende a linearizzarsi a motivo della caduta ohmica nel *bulk* né quelli per elevate tensioni di contropolarizzazione (mancano infatti nella 1) gli effetti di correnti di perdita superficiale e qualunque tipo di descrizione del *breakdown*). Tuttavia la 1) contiene il grosso dell'informazione per quanto riguarda il rumore *shot* nel diodo e le conclusioni che se ne traggono per quanto riguarda il rumore descrivono bene gli andamenti osservati. In particolare la 1) ci ricorda che la corrente stazionaria nel diodo a giunzione, per tutti i punti di lavoro, in realtà consiste sempre di due contributi, più o meno importanti a seconda di V_d : un contributo $I_s e^{V_d/\eta V_T}$ di corrente diretta dovuta al superamento da parte dei maggioritari della barriera e un contributo $-I_s$ costante dovuto alla corrente di saturazione inversa costituita dai minoritari prodotti per effetto termico nel materiale e che vengono "aiutati"

ad attraversare la barriera dal campo elettrico a loro favorevole. Poiché le due correnti traggono origine da due fenomeni totalmente indipendenti, le densità spettrali di rumore ad esse associate vanno sommate se si vuole considerare l'effetto complessivo. Precisamente per lo spettro di potenza in corrente si trova:

$$w_i^d = 2qI_s e^{V_d/\eta V_T} + 2qI_s \quad (\text{VI.2})$$

dove il primo termine rappresenta lo spettro di potenza della corrente dei maggioritari e il secondo quello della corrente dei minoritari. Per entrambi i contributi, la descrizione tramite la 2), che equivale ad assumere correnti caratterizzate da *full shot noise*, risulta essere sufficientemente accurata. E' interessante notare che la 2) dà contributi totali di rumore assai differenti a seconda della polarizzazione V_d del dispositivo. Inoltre spesso è utile esprimere lo spettro di potenza in funzione della resistenza dinamica del diodo in quanto essa gioca un ruolo fondamentale nella schematizzazione circuitale del dispositivo:

$$r_d = \left(\frac{dI_d}{dV_d} \right)^{-1} = \frac{\eta V_T}{I_d + I_s} \approx \frac{kT}{q(I_d + I_s)} \quad (\text{VI.3})$$

Consideriamo ora alcuni casi particolari, corrispondenti a differenti condizioni per la polarizzazione del diodo, cominciando con $V_d = 0$. In questa situazione

$$w_i^d(V_d = 0) = 4qI_s \quad (\text{VI.4})$$

Essendo $r_{d0} = r_d(V_d = 0) = \frac{kT}{qI_s}$, abbiamo $qI_s = \frac{kT}{r_{d0}}$ e pertanto

$$w_i^d(V_d = 0) = \frac{4kT}{r_{d0}} \quad (\text{VI.5})$$

Questa espressione ci dice che la densità spettrale di rumore in corrente del diodo, in assenza di polarizzazione, è identica a quella di un conduttore a temperatura T , con resistenza pari a r_{d0} . Questo, lungi da sorprendere, conferma che il diodo non polarizzato, se si trova a temperatura T costante, si comporta come un qualunque conduttore dotato di resistenza r_{d0} e presenta quindi una densità spettrale *Johnson* che –espressa in corrente– ha proprio la forma 5). A $V_d = 0$ nel diodo la corrente nulla è determinata da due contributi I_s e $-I_s$ che in media si equilibrano e danno luogo a fluttuazioni che si sommano in quadratura: la situazione ricorda molto da vicino quella studiata nel §5 del Cap.V, dove il rumore *Johnson* di una resistenza è stato ricavato schematizzando il sistema in maniera assolutamente equivalente a quella ora considerata del diodo non polarizzato.

In condizioni di polarizzazione inversa, tale da rendere praticamente trascurabile il primo dei due termini della 1), abbiamo:

$$w_i^d(V_d \ll -kT/q) = 2qI_s \quad (\text{VI.6})$$

risultato praticamente ovvio.

In condizioni di polarizzazione diretta, cioè quando $V_d \gg kT/q$, abbiamo

$$w_i^d(V_d \gg kT/q) = 2qI_s e^{qV_d/kT} = 2 \frac{kT}{r_d} = \frac{4kT}{2r_d} \quad (\text{VI.7})$$

cioè il rumore granulare osservato per il diodo in condizioni di polarizzazione diretta equivale a quello termico di una resistenza pari al doppio della resistenza dinamica del diodo al punto di lavoro considerato.

Il rumore fino a qui esaminato è bianco, almeno nel limite in cui consideriamo frequenze inferiori all'inverso del tempo di transito dei portatori attraverso la zona della giunzione ($(10^{-11} \div 10^{-12})$ s). Esistono nel diodo altri effetti che contribuiscono al rumore complessivo e che alterano i risultati fin

qui ottenuti, in alta e bassa frequenza. Specificamente, in alta frequenza si assiste ad un aumento della densità spettrale di rumore dovuta al fatto che il passaggio dei portatori attraverso la giunzione da una zona in cui essi sono maggioritari ad una dove sono minoritari comporta la possibilità per alcuni di essi di percorrere il cammino a ritroso, dopo un certo ritardo. Si trova che tutto questo produce un aumento dello spettro di potenza che cresce come la conduttanza del diodo in funzione della frequenza.

In bassa frequenza assistiamo ad una crescita del rumore, del tipo $1/f$, genericamente riconducibile ai processi di generazione e ricombinazione dei portatori minoritari e alle perdite di corrente superficiale (in ogni caso a dettagli costruttivi dei dispositivi). Sicuramente una analisi teorica accurata dei contributi di rumore in un diodo a giunzione, oltre ad esulare completamente dal compito che ci siamo prefissi, sarebbe assai complicata e oltretutto difficilmente approderebbe a conclusioni passibili di accurati controlli sperimentali; molto spesso, alla luce di queste considerazioni, sono di fondamentale importanza le indagini sistematiche svolte dai costruttori sui dispositivi da essi prodotti, che permettono poi di fornire agli utenti le curve (medie) delle densità spettrali di rumore; queste curve sono utilissime perché permettono una oculata scelta dei dispositivi nelle applicazioni in cui l'ottimizzazione del rapporto segnale/rumore è di particolare rilevanza.

3.– *Il rumore nel transistor bipolare*

In questo paragrafo sarà data una breve e veramente schematica descrizione del rumore nel transistor bipolare, praticamente al solo scopo di mettere in grado il lettore di comprendere, nei manuali forniti dai costruttori di transistori –se mai gli capiterà di aprirne uno–, le specifiche di rumore dichiarate e di sapere utilizzare le informazioni fornite.

Innanzitutto va notato che mentre nel caso di un dispositivo a due poli (un resistore, un diodo,...) è sufficiente, per caratterizzarlo in rumore, dare lo spettro di potenza o della corrente che lo attraversa o della tensione ai suoi capi, nel caso di un dispositivo a tre poli, come un transistor, la sua completa caratterizzazione per quanto riguarda il rumore si avrebbe dando, per ogni terminale, la densità spettrale di rumore della corrente entrante e la densità spettrale di rumore della tensione rispetto ad un riferimento comune. Per la verità, tale descrizione è ridondante (e le varie densità spettrali non sarebbero quindi indipendenti) dato che la legge dei nodi permette di eliminare una delle tre correnti e le tensioni indipendenti pure si riducono a due a causa della II legge di *Kirchhoff*. In ogni caso i generatori che fossero così rimasti non sarebbero indipendenti perché le curve caratteristiche del dispositivo riaccoppiano le tensioni e le correnti dei vari terminali. In pratica quello che generalmente si cerca di fare è innanzitutto individuare le varie sorgenti fisiche di rumore, associare ad esse, là dove agiscono, i generatori equivalenti di rumore e poi cercare –adoperando le curve caratteristiche del dispositivo o più semplicemente i modelli circuitali per piccoli segnali– di riportare tutti i generatori fra i terminali di ingresso del dispositivo stesso, invece di lasciarli dislocati fra i vari nodi.

Questo modo di procedere è utile perché consente spesso un confronto diretto del rumore intrinseco del dispositivo col segnale che vogliamo amplificare; inoltre la soluzione del problema circuitale associato allo studio della risposta al segnale aiuta a determinare anche la densità spettrale del rumore in uscita (che è poi quello che interessa), visto che i generatori di rumore si trovano in configurazioni o identiche o simili a quelle del segnale. Nei casi in cui, come nel transistor bipolare, i processi fisici che ne determinano le caratteristiche di rumore sono tali da richiedere schematizzazioni che dipendono dai dettagli del modello adottato per descrivere il dispositivo, allora si mantengono

talvolta i generatori nei rami o nei nodi dove essi naturalmente agiscono. Così facendo si approda ad un modello equivalente per il rumore più complicato, ma più attinente alla fisica del processo. Per essere concreti, nel caso del transistor bipolare, un tipico schema, nella configurazione ad emettitore comune che si adotta per il rumore del dispositivo, è quello riportato nella Fig.1a):

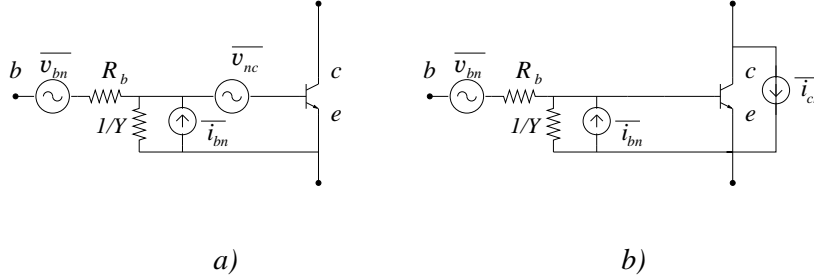


Fig.VI.1

dove Y rappresenta l'ammettenza di ingresso e R_b la resistenza in base. Molto schematicamente: il generatore $\langle v_{bn} \rangle$ rappresenta il rumore *Johnson* associato alla resistenza di base R_b , il generatore $\langle i_{bn} \rangle$ rappresenta il rumore *shot* associato alla corrente di base e infine il generatore $\langle v_{cn} \rangle$ è l'equivalente in base del rumore *shot* di corrente di collettore (disegnato nella parte b) della Fig.1). In altri termini la parte b) della Fig.1 rappresenta meglio la fisica alla base del rumore nel dispositivo; il passaggio dalla rappresentazione b) a quella a) è fatto sulla base del modello circuitale del transistor per piccoli segnali, che ci assicura:

$$\langle v_{cn} \rangle = \frac{\langle i_{cn} \rangle}{g_m} \quad (\text{VI.8})$$

dove g_m rappresenta la tranconduttanza del transistor.

In bassa frequenza quindi tutti i generatori introdotti nello schema della Fig.1 sono caratterizzati da rumore bianco e quindi le densità spettrali associate si possono esprimere come segue:

$$\langle v_{bn}^2 \rangle / \delta\nu = 4kTR_b \quad (\text{VI.9a})$$

$$\langle i_{bn}^2 \rangle / \delta\nu = 2qI_B \approx 2kTg_m / \beta_F \quad (\text{VI.9b})$$

$$\langle i_{cn}^2 \rangle / \delta\nu = 2qI_C \approx 2kTg_m \quad (\text{VI.9c})$$

$$\langle v_{nc}^2 \rangle / \delta\nu = (\langle i_{cn}^2 \rangle / \delta\nu) / g_m^2 = 2kT / g_m \quad (\text{VI.9d})$$

La prima delle 9) è la banale espressione del rumore *Johnson* alla R_b ; la seconda si ottiene dalla relazione:

$$I_B = \frac{I_C}{\beta_F} = \frac{I_E}{\beta_F} \alpha_F \quad (\alpha_F \approx 1, \beta_F \gg 1) \quad (\text{VI.10})$$

che, sostituita nella seconda delle 9), dà:

$$\langle i_{bn}^2 \rangle / \delta\nu = 2q \frac{I_E}{\beta_F} \alpha_F \quad (\text{VI.11})$$

D'altra parte la corrente di emettitore I_E è esprimibile, in funzione della resistenza dinamica r_e come $I_E = \frac{kT}{qr_e}$ e quindi, ricordando che $r_e = \frac{\alpha_F}{g_m}$, otteniamo finalmente:

$$\langle i_{bn}^2 \rangle / \delta\nu = 2q \frac{\alpha_F}{\beta_F} \frac{kT}{qr_e} = \frac{2kT}{\beta_F} \cdot g_m \quad (\text{VI.12})$$

Similmente per $\langle i_{cn}^2 \rangle / \delta\nu$, tenendo conto che $I_C = \alpha_F I_E = \alpha_F \frac{kT}{qr_e} = kTg_m$, abbiamo:

$$\langle i_{cn}^2 \rangle / \delta\nu = 2kTg_m \quad (\text{VI.13})$$

In questo modello si considerano indipendenti le fluttuazioni delle correnti di base e di collettore. La schematizzazione corrispondente alle 9) è sicuramente assai rozza. Una più attenta analisi mostra che le densità spettrali che compaiono nella 9) non sono bianche: in particolare il rumore della corrente di base $\langle i_{bn}^2 \rangle / \delta\nu$ aumenta in bassa frequenza sensibilmente (un tipico contributo $1/f$) e aumenta anche in alta frequenza. Sarà il costruttore a darci gli andamenti delle densità spettrali associate ai vari generatori. Se il costruttore adotta un modello specifico per i generatori di rumore, sarà sua cura indicarlo, insieme con gli spettri di potenza dei generatori introdotti.

Molto grossolanamente (e nelle zone dove gli spettri di potenza sono approssimativamente costanti) gli ordini di grandezza del rumore sono: $\sqrt{\langle v_{nc}^2 \rangle / \delta\nu} \approx nV / \sqrt{Hz}$ e $\sqrt{\langle i_{bn}^2 \rangle / \delta\nu} \approx pA / \sqrt{Hz}$. Il costruttore, quando sia rilevante, riporta gli spettri di potenza associati ai vari generatori anche in funzione della polarizzazione del transistor (cioè del punto di lavoro).

4.- Il rumore nel transistor a effetto di campo a giunzione

Il transistor a effetto di campo a giunzione (JFET) è uno dei dispositivi elettronici che meglio si prestano a fungere da primo stadio di amplificazione, principalmente perché presenta ottime caratteristiche di rumore. Le due principali sorgenti di rumore nel JFET sono: la corrente di polarizzazione inversa I_G del diodo gate-canale (contropolarizzato nelle condizioni normali di lavoro) e il rumore *Johnson* associato alla resistività della zona del canale. Sfruttando la relazione che lega la variazione della differenza di potenziale fra *gate* e *source* alla variazione della corrente di *drain*: $v_{gs} = i_{ds} / g_m$, abbiamo la rappresentazione circuitale equivalente del rumore del JFET, rappresentata nella Fig.2, parte a), mentre la parte b) colloca i generatori là dove le fluttuazioni traggono vera origine:

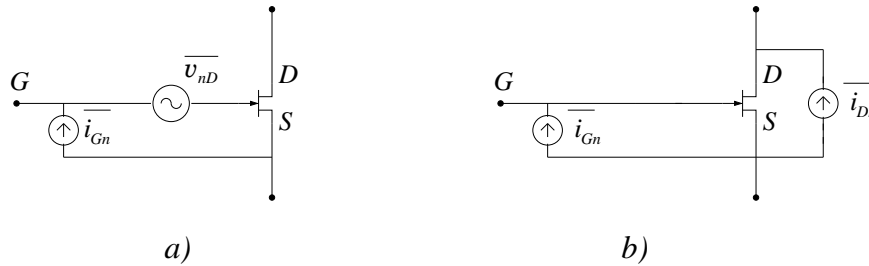


Fig.VI.2

In prima approssimazione (R_c rappresenta la resistenza di canale):

$$\langle i_{Gn}^2 \rangle / \delta\nu = 2qI_G \quad (\text{VI.14a})$$

$$\langle i_{Dn}^2 \rangle / \delta\nu = 4kT / R_c \quad (\text{VI.14b})$$

$$\langle v_{nD}^2 \rangle / \delta\nu = (\langle i_{Dn}^2 \rangle / \delta\nu) / g_m^2 = 4kT / (R_c g_m^2) \quad (\text{VI.14c})$$

Con riferimento alla Fig.2 a), il generatore di tensione è spesso indicato col nome di generatore di rumore serie, mentre quello di corrente come generatore di rumore parallelo.

Nelle geometrie tipiche dei JFET la transconduttanza g_m e la resistenza di canale R_c sono legate da una relazione di proporzionalità inversa, per cui –euristicamente– abbiamo una espressione per $\langle v_{nD}^2 \rangle / \delta\nu$ del tipo:

$$\langle v_{nD}^2 \rangle / \delta\nu = 2.7kT/g_m \quad (\text{VI.15})$$

Quantitativamente la 15) per un JFET con $g_m \approx 10 \text{ mAV}^{-1}$ dà, a $T = 300 \text{ K}$, $\sqrt{\langle v_{nD}^2 \rangle / \delta\nu} \approx 1 \text{ nV}/\sqrt{\text{Hz}}$.

La piccolezza della corrente I_G , caratteristica di un diodo contropolarizzato, fa sì che nelle normali condizioni di impiego, ovvero quelle in cui la resistenza serie del generatore di tensione applicato al *gate* è decisamente inferiore ai $M\Omega$, la parte dovuta al rumore parallelo (alcuni $fA/\sqrt{\text{Hz}}$) sia trascurabile rispetto all'effetto associato al generatore serie. Quanto al contributo di rumore serie si vede dalla 15) che –a parità di altre condizioni, in particolare I_G e la temperatura– per applicazioni di basso rumore sono da preferire i JFET con transconduttanza elevata; oltretutto questa ricetta è abbastanza naturale e ovvia, visto che nell'utilizzo del JFET come amplificatore il guadagno (o la stabilità, se il sistema è reazionato) cresce con g_m ed è quindi di interesse che essa sia elevata.

Per quanto riguarda gli spettri di potenza dei generatori serie e parallelo, che fino a questo punto sono da aspettarsi bianchi, in realtà si osserva un aumento dei contributi di rumore a frequenze basse (in particolare le fluttuazioni della corrente I_G dovute alle perdite superficiali contribuiscono con rumore $1/f$ con ν_0 della V.75 attorno alla decina di $k\text{Hz}$) e a frequenze elevate.

Anche per il JFET valgono le considerazioni svolte per il transistor bipolare: il costruttore fornisce gli andamenti dello spettro di potenza serie e parallelo in funzione della frequenza, normalmente attenendosi allo schema presentato nella Fig.2. Poiché le caratteristiche di rumore possono dipendere anche dal punto di lavoro (oltre alla ovvia dipendenza dal punto di lavoro di g_m nel generatore serie), il costruttore riporta talvolta gli andamenti degli spettri di potenza serie e parallelo in funzione dei parametri di polarizzazione.

5.– Il rumore negli amplificatori

Dato un amplificatore base del tipo riportato in Fig.3

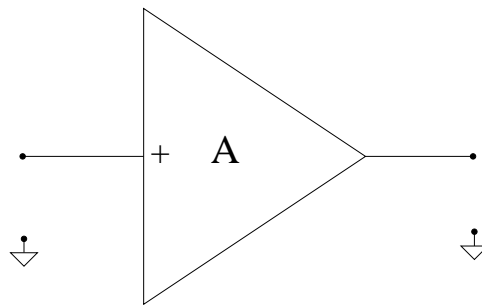


Fig.VI.3

è spesso di interesse conoscerne le caratteristiche in termini di rumore. Normalmente vengono introdotti i contributi serie e parallelo, come visto nel caso del JFET, riportati nel circuito equivalente

di Fig.4 nella quale l'amplificatore ideale è completato dai generatori di rumore anzidetti.

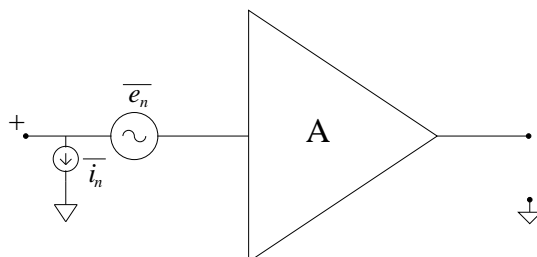


Fig.VI.4

Ovviamente il terminale di ingresso accessibile all'utente è quello marcato “+” nella Fig.4. Naturalmente i due generatori di rumore introdotti schematizzano l'effetto del rumore associato ai dispositivi elettronici presenti nell'amplificatore, descritti nei paragrafi precedenti.

Il costruttore del dispositivo avrà cura di fornire le densità spettrali di rumore dei due generatori in funzione della frequenza ed eventualmente delle condizioni di polarizzazione del dispositivo.

Nella Fig.4 si è implicitamente assunto che l'impedenza di ingresso dell'amplificatore sia sostanzialmente infinita; in altre parole si assume che l'amplificatore in studio, almeno per quanto riguarda gli ingressi (il terminale + e il riferimento) sia un misuratore ideale di tensione. Tenendo presente questa precisazione, è spesso utile caratterizzare l'amplificatore con la cosiddetta “cifra di rumore” NF (*noise figure*). Essa è definita considerando l'amplificatore in questione e collegando l'ingresso al terminale di riferimento tramite una resistenza R_s , pari a quella del generatore di segnale che vogliamo poi utilizzare (Fig.5):

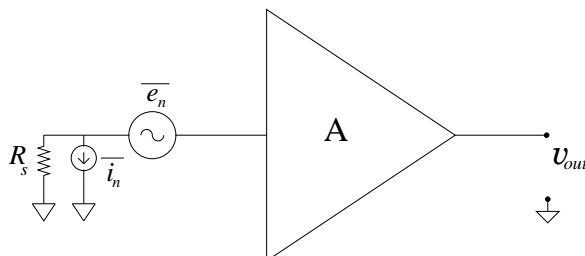


Fig.VI.5

La cifra di rumore NF è definita come:

$$NF = 10 \log_{10} F \quad (\text{VI.16})$$

dove F è il rapporto fra la densità spettrale di rumore in uscita dell'amplificatore reale e quella dell'amplificatore ideale (quello cioè senza i generatori di rumore). Ammettendo, come stiamo facendo, che l'impedenza di ingresso sia infinita e che il guadagno A sia un numero reale su tutto l'ambito di frequenze studiato, F vale:

$$F = \frac{4kTR_s + \langle e_n^2 \rangle / \delta\nu + \langle i_n^2 \rangle / \delta\nu \cdot R_s^2}{4kTR_s} \quad (\text{VI.17})$$

Pertanto

$$NF = 10 \log_{10} \left(1 + \frac{\langle e_n^2 \rangle / \delta\nu + \langle i_n^2 \rangle / \delta\nu \cdot R_s^2}{4kTR_s} \right) \quad (\text{VI.18})$$

L'interesse della conoscenza di NF risiede principalmente nel fatto che, almeno nei limiti delle schematizzazioni adottate, la cifra di rumore permette di valutare direttamente il contributo aggiuntivo di rumore introdotto dall'amplificatore rispetto a quello che sarebbe comunque presente in quanto dovuto al rumore *Johnson* associato alla resistenza R_s in serie al generatore.

Va da sé che, a parità di altre caratteristiche, in particolare della resistenza R_s , della risposta in frequenza e del guadagno A , la scelta dell'amplificatore cadrà su quello che dà la cifra di rumore più piccola.

Per un dato amplificatore il costruttore talvolta indica la cosiddetta "resistenza ottimale" R_{so} , ovvero quella resistenza in serie al generatore che minimizza la cifra di rumore. Derivando l'argomento del logaritmo nella 18) e imponendo la stazionarietà, otteniamo:

$$R_{so} = \sqrt{\frac{\langle e_n^2 \rangle / \delta\nu}{\langle i_n^2 \rangle / \delta\nu}} \quad (\text{VI.19})$$

Si badi bene che la indicazione della resistenza ottimale significa che, in presenza di un generatore con R_{so} in serie, il nostro amplificatore funziona meglio di un altro con pari caratteristiche ma con resistenza ottimale differente. Non vuole certo dire che se per caso il nostro generatore ha una resistenza in serie inferiore alla R_{so} dell'amplificatore che stiamo utilizzando, sia opportuno aggiungerne una in serie fino a raggiungere R_{so} .

Nel prossimo capitolo, invece di esaminare l'amplessima casistica che potrebbe essere riportata riguardo al calcolo del rumore elettronico e della ottimizzazione del rapporto segnale/rumore, faremo un solo esempio di ottimizzazione di questo rapporto su un caso di notevole interesse nel campo delle misure di fisica, ovvero della misura di (piccole) quantità di carica, rilasciate nei rivelatori a semiconduttore dalle radiazioni ionizzanti.

*G.Poggi: Appunti sul rumore elettrico; Cap.VI
Firenze, 11 giugno 2004*