

LE SORGENTI FISICHE DI RUMORE

1.- Il rumore Johnson di una resistenza o rumore termico

Equipaggiati con quel po' di formalismo illustrato nei capitoli precedenti, ritorniamo all'esempio introdotto nel §.1 del Cap.II: supponiamo cioè di disporre di una resistenza R , posta in equilibrio termico con un serbatoio di calore a temperatura T costante.

Se misuriamo con un voltmetro ideale (impedenza di ingresso infinita, banda passante pure infinita e precisione e sensibilità quanto occorre) la ddp ai capi della nostra R , isolata da qualunque altra rete lineare, troviamo una sequenza di valori di tensione $\{v_R(t)\}$ con $-T/2 < t < T/2$, che costituiscono la nostra sequenza casuale stazionaria.

Assumiamo come fatto sperimentale assodato (magari ottenuto studiando a lungo il comportamento della nostra resistenza con intervalli di quasi-periodicità molto estesi) che :

$$\langle v_R \rangle = 0 \tag{V.1}$$

cioè il valor medio della tensione è nullo.

Il valore quadratico medio della tensione rappresenta quindi la varianza della tensione ai capi della resistenza:

$$\langle v_R^2 \rangle = \int_0^\infty w_v^J(\nu) d\nu \tag{V.2}$$

ed è diversa da zero. Si noti che le medie riportate rappresentano le medie temporali, coerentemente con i simboli adottati e con il fatto che stiamo osservando un unico resistore. Ricordiamo tuttavia che, a causa dell'ipotesi ergodica, tali medie coincidono con quelle di insieme.

Nel seguito vedremo che l'origine della ddp fluttuante ai capi di R va ricercata nel moto caotico dei portatori di carica nel conduttore, ovvero nella agitazione termica. Più avanti, nell'ambito del modello di *Drude* per la conduzione ohmica, sfrutteremo proprio questa modellizzazione per ricavare l'andamento della funzione di autocorrelazione della sequenza $\{v_R(t)\}$ e quindi della densità spettrale di rumore. Ora seguiamo invece un approccio esclusivamente fenomenologico, cercando di determinare l'andamento dello spettro di potenza ai capi della resistenza in funzione della frequenza e dei parametri fisici in gioco (R , T per esempio). Lo spettro di potenza della resistenza è stato indicato con w_v^J per ricordarci da una parte che si tratta di uno spettro di potenza in tensione e da un'altra che tale rumore è detto *rumore Johnson* dal nome del suo scopritore.

Notiamo innanzitutto che l'origine "termica" del rumore è presto messa in evidenza cambiando la temperatura del bagno termostatico col quale R si trova in contatto: se immaginiamo di determinare $\langle v_R^2 \rangle(T)$ alle varie temperature troviamo che tale varianza è proporzionale a T . Pertanto consideriamo il risultato

$$w_v^J(\nu) \propto T \tag{V.3}$$

come un fatto sperimentalmente verificato, avendo appurato che le varianze, cioè gli integrali della 3) su tutta la banda spettrale, risultano proporzionali a T . Più avanti arriveremo a questa conclusione anche sulla base di principi primi.

Per trovare la dipendenza della densità spettrale di rumore dal valore di R occorre approfondire e precisare il modello fisico che rappresenta il fenomeno “resistenza rumorosa”: con lo strumento ideale che abbiamo introdotto all’inizio del paragrafo di fatto abbiamo determinato la *fem* equivalente secondo *Thévenin* ai capi di R ; essendo comunque la resistenza sorgente del rumore un elemento lineare, schematizziamo, coerentemente con le misure effettuate, la resistenza a temperatura T come un generatore reale con resistenza interna secondo *Thévenin* R non “rumorosa” e di *fem* secondo *Thévenin* pari a quella osservata con voltmetro ideale $\{v_R\} = \{v_n(t)\}$ (Fig.1):

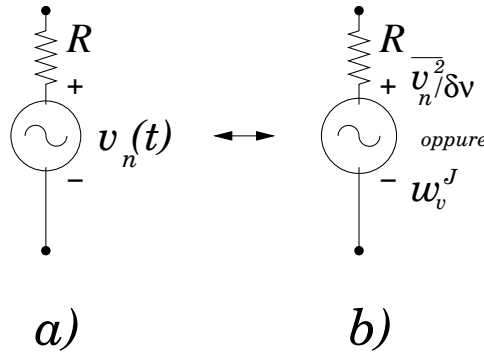


Fig.V.1

L’indice n (come *noise*, rumore) ci dice che si tratta di un generatore casuale con densità spettrale di rumore w_v^J o –come spesso si indica– $\frac{\langle v_n^2 \rangle}{\delta\nu}$ oppure $\frac{\overline{v_n^2}}{\delta\nu}$, con una notazione che, a parte l’ambiguità sui simboli per le medie, esprime in maniera pregnante la densità spettrale come varianza di tensione per unità di frequenza. Si ricorda che le unità di misura dello spettro di potenza in tensione sono $V^2 Hz^{-1}$.

Non ci addentreremo in altri argomenti per giustificare la modellizzazione della nostra resistenza “rumorosa” col generatore reale di tensione della Fig.1; ci limiteremo a dire che il modello in figura riproduce fedelmente tutti i fenomeni sperimentalmente osservati riguardo al rumore della resistenza. Funzionando quindi la schematizzazione del generatore reale di tensione, non sorprende che esso si possa –ove necessario– sostituire col generatore reale di corrente secondo *Norton*:

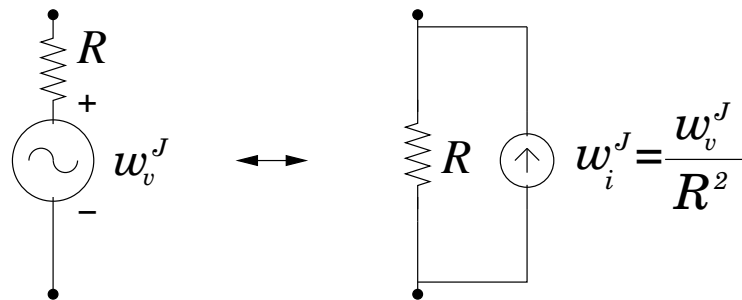


Fig.V.2

L’equivalenza secondo *Norton* impone che il generatore ideale di corrente posto in parallelo alla resistenza “non rumorosa” R abbia una densità spettrale di rumore in corrente w_i^J pari a quella del generatore di tensione equivalente, scalata per l’inverso del quadrato di R . Lo spettro di potenza

del generatore di corrente si indica anche con i simboli $\frac{\langle i_n^2 \rangle}{\delta\nu}$ oppure $\frac{\overline{i_n^2}}{\delta\nu}$ e si misura in $A^2 Hz^{-1}$.

Sia il generatore di *Thévenin* sia quello di *Norton* hanno valor medio di tensione e corrente (rispettivamente) nulli. Questo non impedisce però ai generatori di essere in grado di trasferire potenza verso l'esterno, a patto però di non violare il II Principio della Termodinamica. Vediamo proprio come un ragionamento termodinamico ci permetta di trovare la dipendenza della densità spettrale di rumore dal valore di R . Consideriamo infatti due resistori R_1 e R_2 collegati come in Fig.3, il primo posto a contatto con un bagno termico B_1 a temperatura T_1 e il secondo con un bagno termico B_2 a temperatura T_2 :

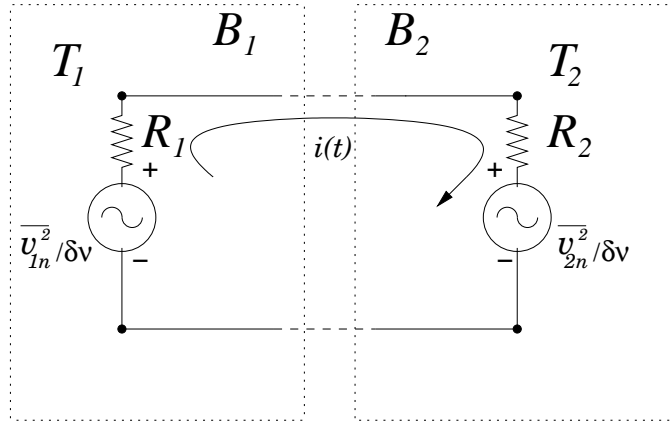


Fig.V.3

I simboli $\langle v_{1,2n}^2 \rangle$ rappresentano le varianze delle tensioni di rumore (secondo lo schema di *Thévenin*) ai capi delle due resistenze.

In un istante generico t , le tensioni dei generatori saranno $v_1(t)$ e $v_2(t)$ e la corrente istantanea $i(t)$ che circola nella maglia sarà data da:

$$i(t) = \frac{v_1(t) - v_2(t)}{R_1 + R_2} \quad (\text{V.4})$$

Il collegamento fra i due serbatoi di calore B_1 e B_2 avviene unicamente tramite i conduttori elettrici fra le due resistenze (immaginiamo che la conducibilità termica di questi conduttori sia trascurabile) e quindi ogni trasferimento di energia da un sistema all'altro passa tramite il trasferimento di potenza elettrica. Pertanto, per calcolare la potenza che istantaneamente viene trasferita fra i due sistemi è sufficiente calcolare il prodotto $i(t) \cdot v(t)$, dove $v(t)$ rappresenta la tensione fra i due terminali tramite in quali i due circuiti sono accoppiati:

$$W_{1 \rightarrow 2}(t) = i(t) \cdot v(t) \quad (\text{V.5})$$

Possiamo esprimere la $v(t)$ per esempio come:

$$v(t) = v_2(t) + i(t) \cdot R_2 \quad (\text{V.6})$$

ovvero come la somma della tensione di rumore sulla resistenza R_2 più la caduta totale della $i(t)$ sulla resistenza medesima. Utilizzando la 4) per esprimere $i(t)$ e la 6) per $v(t)$, mediando la 5) sul tempo otteniamo allora:

$$\langle W_{1 \rightarrow 2}(t) \rangle = \left\langle \frac{v_1(t) - v_2(t)}{R_1 + R_2} \cdot (v_2(t) + i(t) \cdot R_2) \right\rangle = \frac{\langle v_1^2(t) \rangle}{(R_1 + R_2)^2} \cdot R_2 - \frac{\langle v_2^2(t) \rangle}{(R_1 + R_2)^2} \cdot R_1 \quad (\text{V.7})$$

I termini misti del tipo $v_1(t) \cdot v_2(t)$ scompaiono quando se ne fa la media in quanto i due generatori di rumore agiscono indipendentemente l'uno dall'altro ed entrambi sono a media nulla. Possiamo interpretare il risultato 7) dicendo che il primo addendo

$$\frac{\langle v_1^2(t) \rangle}{(R_1 + R_2)^2} \cdot R_2 \quad (\text{V.8})$$

rappresenta la potenza che il generatore di rumore associato alla resistenza R_1 compie sul sistema B_2 , mentre il secondo

$$\frac{\langle v_2^2(t) \rangle}{(R_1 + R_2)^2} \cdot R_1 \quad (\text{V.9})$$

rappresenta l'analoga potenza trasferita dal generatore di rumore associato ad R_2 sul sistema B_1 . Il segno che assume la 7) dice verso quale sistema viene trasferita energia e da quale viene assorbita; possiamo senz'altro dire che la 7) sarà positiva, cioè la potenza verrà trasferita da sinistra a destra, ovvero il primo termine sarà superiore al secondo, quando la temperatura T_1 del serbatoio B_1 è superiore a T_2 e viceversa.

Se $T_1 = T_2 = T$, essendo i due sistemi in equilibrio, non deve avvenire alcun trasferimento netto di potenza da un sistema verso l'altro, ovvero devono essere uguali le potenze medie trasferite da un sistema all'altro. Ponendo quindi

$$\langle W_{1 \rightarrow 2}(t) \rangle = 0 \quad (\text{V.10})$$

otteniamo:

$$\frac{\langle v_1^2(t) \rangle}{(R_1 + R_2)^2} \cdot R_2 = \frac{\langle v_2^2(t) \rangle}{(R_1 + R_2)^2} \cdot R_1 \quad (\text{V.11})$$

ovvero

$$\frac{\langle v_2^2 \rangle}{\langle v_1^2 \rangle} = \frac{R_2}{R_1} \quad (\text{V.12})$$

La 12) ci dice che le due varianze totali $\langle v_{1,2}^2 \rangle$ stanno fra loro come le rispettive resistenze. Questo significa che una analoga relazione deve valere per le densità spettrali di rumore: infatti se la relazione 12) non valesse in ogni intervallo di frequenza, sarebbe possibile violare il II Principio della Termodinamica, inserendo un opportuno filtro in frequenza (puramente passivo) fra le due resistenze.

Pertanto, utilizzando anche la 3), abbiamo:

$$w_v^J = k' T R \quad (\text{V.13})$$

Quanto alla dipendenza dalla frequenza si trova, seguendo ad esempio la dimostrazione di *Nyquist* riportata successivamente, che la densità spettrale di rumore è costante, ovvero indipendente dalla frequenza e pari a:

$$w_v^J = 4 k T R \quad (\text{V.14})$$

con $k = 1.38066 \cdot 10^{-23} JK^{-1}$, costante di *Boltzman*.

Il risultato di *Nyquist*, come vedremo, si basa sul Principio classico di equipartizione dell'energia. Non stupisce quindi che il risultato sia sostanzialmente sbagliato e porti –come per lo spettro di corpo nero della formula di *Rayleigh-Jeans*– alla cosiddetta *catastrofe ultravioletta*, che nel nostro caso si traduce nella divergenza della varianza totale di rumore della ddp termica ai capi di R . La formula corretta quantisticamente per la densità spettrale di rumore *Johnson* è:

$$w_v^J(\nu) = \frac{4R h \nu}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (\text{V.15})$$

con $h = 6.62618 \cdot 10^{-34} Js$, costante di *Planck*.

La differenza fra la 14) e la 15) si apprezza soltanto per frequenze tali per cui $h\nu \approx kT$ o superiori. A temperatura ambiente ciò significa $\nu \approx 6 \cdot 10^{12} Hz$. In pratica, a causa dei valori di banda passante della strumentazione elettronica normalmente disponibile, la densità spettrale di rumore *Johnson* si può effettivamente trattare come costante, con un errore praticamente inesistente. Si noti comunque che, inserendo la 15) nell'integrale 2), si rimuove ogni divergenza ed in particolare si trova:

$$\langle v_R^2 \rangle = \int_0^\infty \frac{4Rh\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} d\nu = \frac{2}{3} \frac{\pi^2 k^2 T^2 R}{h} \quad (V.16)$$

Vedremo più avanti che altri fattori (in particolare le bande passanti effettivamente disponibili) introducono dei meccanismi che limitano in alta frequenza lo spettro di potenza, molto più “efficacemente” della Meccanica Quantistica.

Facciamo un calcolo di varianza totale di rumore, ammettendo che lo strumento di misura della tensione abbia una banda passante BW limitata (e trascurando gli effetti di “bordo”):

$$\langle v^2 \rangle_{BW} = \int_{BW} w_v^J d\nu = 4kTR \cdot BW \quad (V.17)$$

Per esempio, per una resistenza $R = 1 M\Omega$, a temperatura ambiente e con una banda passante dello strumento di misura estesa fra 0 e $1 MHz$ abbiamo $\langle v^2 \rangle_{BW} \approx 1.7 \cdot 10^{-8} V^2$, ovvero una tensione rms $\langle v_{rms} \rangle \approx 130 \mu V$. Le fluttuazioni osservate sono comunque assai piccole e questo rende ragione del fatto che, senza disporre di strumentazione sufficientemente sensibile, tali effetti non siano facilmente messi in evidenza. Vale la pena di far notare che se si osserva con un oscillografo sufficientemente sensibile la tensione ai capi di una resistenza a temperatura finita T e se l'oscillografo ha un definito limite in alta frequenza (diciamo $1 MHz$ assumendo di disporre di un modesto oscillografo da “ $1 MHz$ ”), l'andamento caotico della tensione ovviamente presenta variazioni che non hanno componenti di frequenza apprezzabili oltre il limite superiore della banda passante. La varianza totale osservata, valutata dalla 17), si compone di tutte le fluttuazioni del segnale visibili sullo schermo. Se osservassimo la medesima resistenza, alla medesima temperatura ma con un oscillografo da “ $100 MHz$ ”, osserveremmo una sequenza che differirebbe dalla precedente per la presenza aggiuntiva di componenti molto più rapidamente variabili e tali per cui l'ampiezza media delle fluttuazioni risulterebbe accresciuta di un fattore 10 e la varianza totale aumentata del fattore 100, previsto dalla 17). In Fig.4 è riportata una simulazione numerica che rappresenta i due casi in esame, osservati con la stessa base dei tempi (parte inferiore e superiore rispettivamente per $BW = 1 MHz$ e $BW = 100 MHz$; le unità verticali sono arbitrarie, ma coerenti). Nella parte a) sono presentate le sequenze su un intervallo di circa $8 \mu s$, mentre nella parte b) compare solo il primo μs delle sequenze; si noti il cambiamento di scala verticale fra le sequenze a $1 MHz$ e quelle a $100 MHz$.

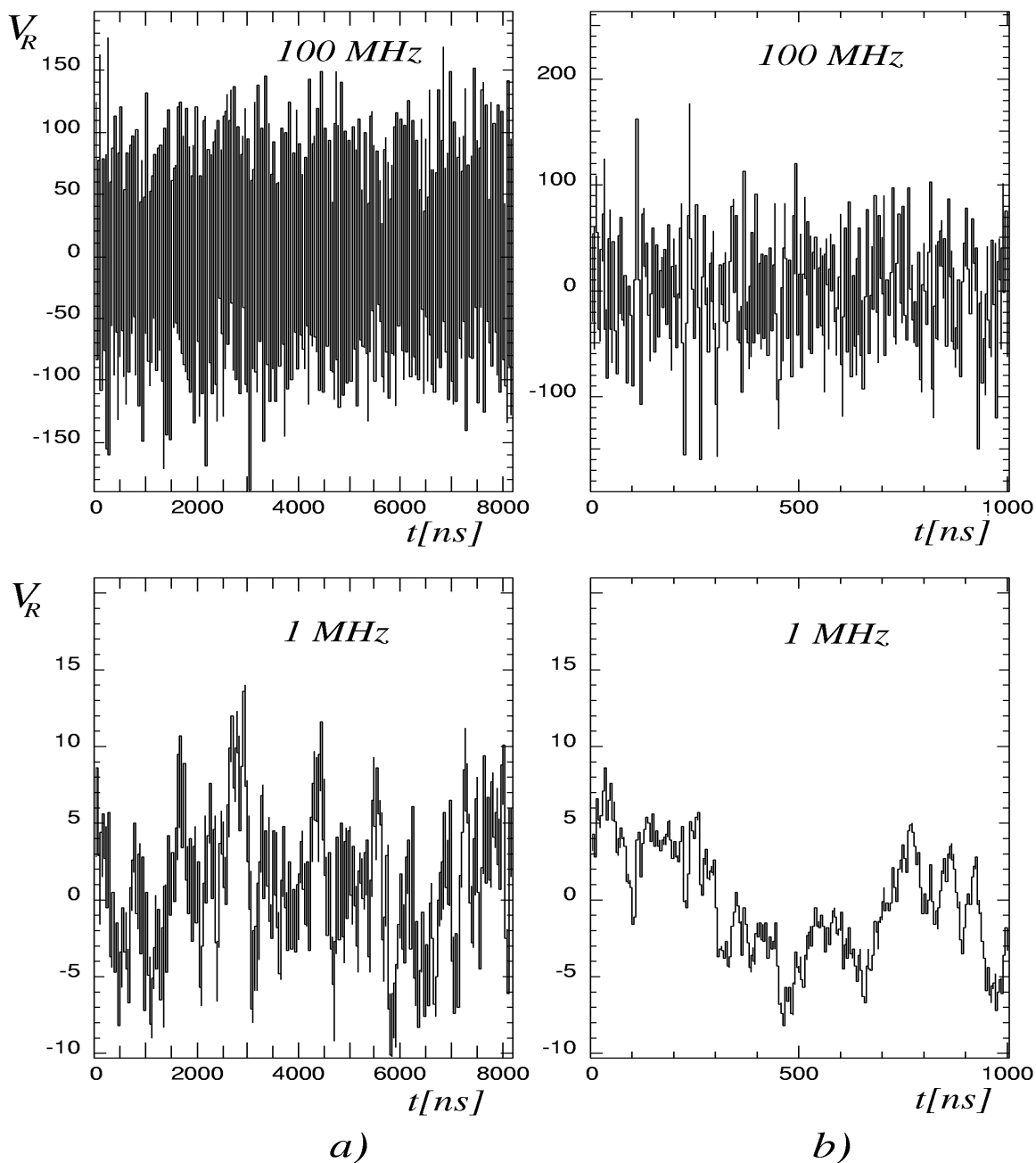


Fig.V.4

Ricordiamo che la banda passante di un oscillografo ($BW = 1 \text{ MHz}$ e $BW = 100 \text{ MHz}$ nei due casi appena considerati), è generalmente ben descrivibile come un filtro passa basso con frequenza di taglio proprio pari alla frequenza indicata; le sequenze riportate nella Fig.4 sono state infatti ottenute inviando una sequenza di rumore bianco all'ingresso di due filtri passa basso con le frequenze di taglio di $BW = 1 \text{ MHz}$ e $BW = 100 \text{ MHz}$ e prelevandone le uscite. L'andamento della funzione di autocorrelazione delle sequenze del tipo mostrato nella Fig.4, verrà discusso più avanti, nel §3.

2.- Derivazione dello spettro di potenza Johnson secondo Nyquist

La forma dello spettro di potenza del rumore *Johnson* è stato ricavato da *Nyquist* considerando due resistenze $R_1 = R_2 = R$, entrambe alla stessa temperatura T , collegate con una linea di trasmissione non dissipativa, avente impedenza caratteristica pari a R e di lunghezza L , anch'essa a temperatura T , schematizzata nella Fig.5.

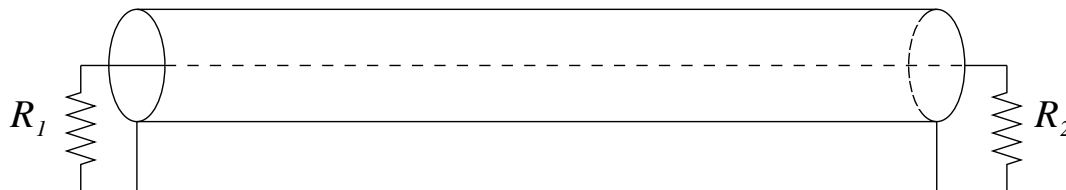


Fig.V.5

Abbiamo già visto che due resistenze in equilibrio termico e collegate in parallelo trasferiscono l'una verso l'altra la medesima potenza. Tale potenza in un ambito di frequenza $\delta\nu$, cioè espressa in funzione delle densità spettrali di rumore, può scriversi (estensione della 9):

$$dP_{R_1 \rightarrow R_2} = dP_{R_2 \rightarrow R_1} = \frac{w_v^J}{4R} d\nu \quad (\text{V.18})$$

Detta v la velocità con la quale le onde elettromagnetiche si propagano nella linea (supponiamo che la velocità sia la stessa per tutte le frequenze, ovvero che la linea non sia dispersiva), il tempo durante il quale la potenza dP si trova distribuita sulla linea vale: $\theta = L/v$; quindi l'energia media accumulata sulla linea vale:

$$dW_f = (dP_{R_1 \rightarrow R_2} + dP_{R_2 \rightarrow R_1}) \cdot \frac{L}{v} = \frac{w_v^J L}{2R v} d\nu \quad (\text{V.19})$$

Per trovare l'espressione della densità spettrale di rumore, consideriamo ora la linea di trasmissione come un sistema fisico non dissipativo all'equilibrio a temperatura T . Consideriamo ora la linea in questione con gli estremi cortocircuitati. Essa, proprio per il fatto di trovarsi a temperatura non nulla, è sede di onde stazionarie; vedremo fra un attimo quali sono le frequenze ammissibili per queste onde; per ora ci basti dire che ad ognuna di esse sono associati due gradi di libertà, ovvero il campo elettrico e quello magnetico oscillanti dell'onda. Pertanto, per il Principio di equipartizione dell'energia (classico) possiamo affermare che per ogni onda stazionaria presente nella linea esiste una quantità kT di energia accumulata nella linea stessa. Si tratta ora di calcolare quante sono le onde stazionarie dN_f presenti nella linea cortocircuitata, comprese in un intervallo di frequenza $d\nu$. La prima, cioè la più bassa frequenza delle onde stazionarie, vale:

$$\nu_1 = \frac{v}{2L} \quad (\text{V.20})$$

Le altre onde stazionarie hanno le frequenze corrispondenti ai multipli interi di ν_1 : $\nu_n = n \cdot \nu_1$. La differenza $\delta\nu$ fra una generica ν_n e la successiva è pertanto pari a ν_1 e quindi in un dato intervallo di frequenze $d\nu$ attorno a qualunque frequenza ν avremo un numero di possibili onde stazionarie pari a :

$$dN_\nu = \frac{d\nu}{\nu_1} = \frac{2L}{v} d\nu \quad (\text{V.21})$$

La 21) suggerisce anche che all'aumentare della lunghezza L della linea il numero delle onde elettromagnetiche stazionarie nell'intervallo di frequenza dato cresce proporzionalmente a L .

Sulla base del Principio di equipartizione dell'energia, l'energia media immagazzinata nella linea in un intervallo $d\nu$ di frequenza vale:

$$dU_L = kT dN_\nu = kT \cdot \frac{2L}{v} d\nu \quad (\text{V.22})$$

Cosa cambia se ora, invece di considerare la linea cortocircuitata ai suoi estremi, la supponiamo –come nella configurazione considerata inizialmente– chiusa agli estremi sulle resistenze R_1 e R_2 , entrambe di valori pari alla impedenza caratteristica R della linea? Di fatto, se consideriamo la linea cortocircuitata agli estremi e infinitamente lunga (come conviene immaginare, per poter esaminare in questo schema tutto l'ambito di frequenze possibili), non cambia niente –per quanto riguarda lo stato stazionario del sistema– a cortocircuitare la linea agli estremi o a chiuderla sulla impedenza caratteristica: infatti una linea infinitamente lunga e non dissipativa è vista da qualunque sezione come una pura resistenza pari alla impedenza caratteristica R . Pertanto possiamo uguagliare la 22) e la 19), ottenendo l'andamento di w_v^J cercato:

$$kT \frac{2L}{v} d\nu = \frac{w_v^J L}{2R v} d\nu \Rightarrow w_v^J = 4kRT \quad (\text{V.23})$$

3.– Il rumore termico in un circuito RC

Consideriamo il circuito RC della Fig.6 e calcoliamo, usando la 23), la densità spettrale

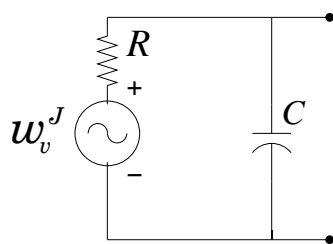


Fig.V.6

di rumore in tensione ai capi del condensatore. Abbiamo già ottenuto il risultato generale IV.5 che, utilizzando la 23), ci dice:

$$w_v^C = \frac{4kTR}{1 + 4\pi^2 \nu^2 R^2 C^2} \quad (\text{V.24})$$

L'andamento rappresentato dalla 24) è riportato nella Fig.7, per due valori di C :

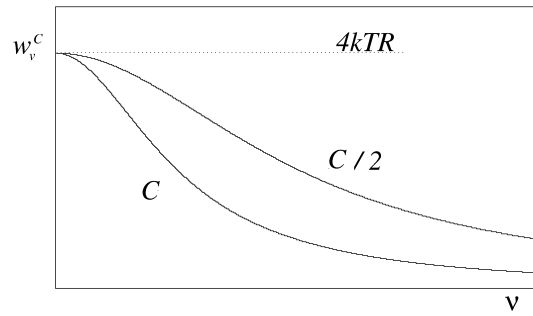


Fig.V.7

Si nota che, pur partendo da una densità spettrale di rumore “bianca” sulla resistenza R , la presenza di una capacità C ai capi di R porta ad una densità spettrale che va a zero all’aumentare della frequenza. In particolare, detto $\theta = RC$, la densità di potenza si dimezza rispetto al valore in continua (coincidente con la densità spettrale di rumore *Johnson* su R) per la frequenza $\nu_H = 1/(2\pi\theta)$. Questo risultato ci dice anche qual è l’effetto fisico reale che quasi sempre taglia in alta frequenza qualunque spettro di potenza realmente osservabile: la presenza della capacità (spesso anche solo quella parassita) fra i terminali di misura immediatamente introduce un taglio in banda. Facciamo un esempio considerando un resistore con $R = 50\Omega$, con una capacità fra i terminali (comprensiva dello strumento di misura) di 0.1 pF (difficile scendere ulteriormente sotto questo valore). Anche in queste condizioni ottimali, esiste un taglio in frequenza di circa $\nu_H \approx 30 \text{ GHz}$, decisamente inferiore al limite fisico posto dalla meccanica quantistica (vedi la 15)).

Calcoliamo ora la varianza totale di rumore ai capi di C :

$$\begin{aligned} \langle v_{Cn}^2 \rangle &= \int_0^\infty w_v^C d\nu = \int_0^\infty \frac{4kTR}{1 + 4\pi^2\nu^2 R^2 C^2} d\nu = \frac{4kT}{2\pi C} \int_0^\infty \frac{d(2\pi RC\nu)}{1 + 4\pi^2\nu^2 R^2 C^2} = \\ &= \frac{2kT}{\pi C} \int_0^\infty \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{2kT}{\pi C} \arctan(x) \Big|_0^\infty = \frac{kT}{C} \end{aligned} \quad (\text{V.25})$$

Troviamo quindi che il valore quadratico medio della tensione ai capi del condensatore posto in parallelo alla resistenza sorgente del rumore è costante e inversamente proporzionale a \sqrt{C} .

La varianza in tensione ai capi di C si può utilmente esprimere come la varianza di carica sulle armature del condensatore:

$$\langle Q_C^2 \rangle = C^2 \cdot \langle v_{cn}^2 \rangle = kTC \quad (\text{V.26})$$

o come energia media accumulata nel campo elettrico fra le armature:

$$\langle E_C \rangle = \frac{1}{2} C \langle v_{cn}^2 \rangle = \frac{1}{2} \frac{\langle Q_C^2 \rangle}{C} = \frac{1}{2} kT \quad (\text{V.27})$$

Quest’ultimo risultato riguardo all’energia media accumulata sul condensatore corrisponde a quello che si ottiene applicando il principio di equipartizione dell’energia; faremo vedere nel prossimo paragrafo che, partendo proprio dal principio di equipartizione dell’energia, cioè considerando la 27) come punto di partenza, sia possibile dedurre la densità spettrale di rumore *Johnson*.

Tornando alla espressione 24) e alla sua dipendenza dalla frequenza, può essere istruttivo calcolare la funzione di autocorrelazione $R_C(\tau)$ corrispondente e confrontarla con quanto atteso. Sulla base del teorema di *Wiener-Khinchin* (§4, Cap.III) $R_C(\tau) = FT^{-1}\{\frac{w_v^C}{2}\}$ e pertanto, ricordando le proprietà generali delle coppie *trasformata-antitrasformata*, abbiamo che, estendendosi la w_v^C fino a

frequenze dell'ordine di $1/(2\pi RC)$, la funzione di autocorrelazione $R_C(\tau)$ è concentrata proprio su tempi dell'ordine di RC . Il significato fisico di ciò è relativamente semplice: mentre in una sequenza di tensione di rumore perfettamente e idealmente bianco, essendo presenti tutte le frequenze con ugual peso, ci possiamo aspettare che la tensione in un istante t sia completamente indipendente dalla tensione al tempo $t+\tau$, quantunque piccolo sia τ , nel caso del condensatore C chiuso su una resistenza R le aspettative sono diverse. Ovvero se al tempo t la tensione ai capi di C (e di R ad essa in parallelo) vale $v_{cn}(t)$, ad un tempo $t+\tau$, con $\tau \ll RC$, essa non potrà assumere un valore qualunque perché naturalmente essa tende a variare con costante di tempo $\theta = RC$; si veda in proposito la Fig.4 b, in basso a destra, dove il segnale passato attraverso la banda passante di 1 MHz presenta proprio l'effetto sopradetto e non mostra forti variazioni su tempi attorno a $\theta = 1 \cdot 10^{-6}/(2\pi) \text{ s} \approx 160 \text{ ns}$. Calcoliamo quindi $R_C(\tau)$. Secondo la 17) abbiamo:

$$\begin{aligned} R_C(\tau) &= \int_0^\infty w_v^C \cos(2\pi\nu\tau) d\nu = 4kTR \int_0^\infty \frac{\cos(2\pi\nu\tau)}{1 + 4\pi^2\nu^2 R^2 C^2} d\nu = \\ &= \frac{4kT}{2\pi C} \int_0^\infty \frac{\cos(2\pi\nu\tau)}{1 + 4\pi^2\nu^2 R^2 C^2} d(2\pi RC\nu) = \frac{4kT}{2\pi C} \int_0^\infty \frac{\cos(x\tau/RC)}{1 + x^2} dx \end{aligned} \quad (\text{V.28})$$

Valendo, per $a > 0$,

$$\int_0^\infty \frac{\cos mx}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2a} e^{-|m|a}$$

abbiamo

$$R_C(\tau) = \frac{kT}{C} e^{-|\tau|/RC} \quad (\text{V.29})$$

ovvero una cuspidi esponenziale centrata nell'origine. La Fig.8 rappresenta proprio la funzione di autocorrelazione (in unità arbitrarie) per una sequenza simulata ottenuta filtrando rumore bianco attraverso un filtro passa basso di $RC = \theta = 10 \text{ ns}$, ovvero con una frequenza di taglio $\nu_H = 16 \text{ MHz}$.

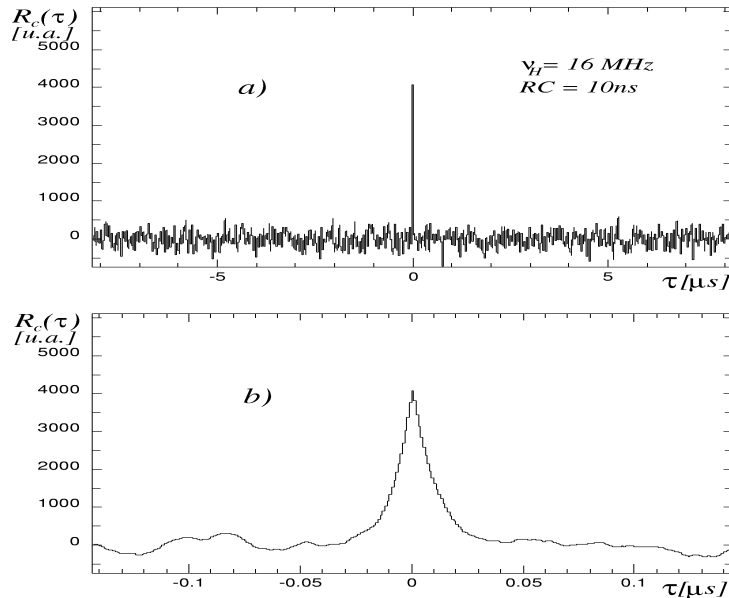


Fig.V.8

L'andamento mostrato nella Fig.8 (che in dettaglio si può osservare nella parte b) della figura)

conferma quantitativamente quanto atteso e ci dice che la costante di tempo $\theta = RC$ del circuito misura la “memoria” che il sistema possiede riguardo alle fluttuazioni e che per valori decisamente maggiori di θ la funzione di autocorrelazione va a zero; l’annullarsi della $R_C(\tau)$ per $\tau \gg RC$ è particolarmente chiaro nella parte a) della figura dove è presentato un ampio campo di valori di τ . Un’altra maniera di interpretare questo risultato è quella di considerare $\theta = RC$ come il tempo caratteristico col quale le fluttuazioni vanno a regime (i valori della sequenza per tempi che differiscono di $\tau \gg \theta$ sono infatti completamente scorrelati).

4.- La misura di carica in un CCD

Come applicazione delle considerazioni sopra svolte, consideriamo un dispositivo CCD (*Charge Coupled Device*): in esso, molto schematicamente, la raccolta della informazione associata alle misure che con tali dispositivi vengono fatte si riconduce alla misura della tensione ai capi di una capacità C_M (dell’ordine di alcuni decimi di pF) sulla quale si è depositata una certa quantità di carica Q_s . La grandezza alla quale siamo interessati è proprio la carica Q_s , in quanto essa è proporzionale al numero di fotoni assorbiti sulla superficie sensibile del pixel; in altre applicazioni, per la verità meno comuni, la carica risulta proporzionale all’energia depositata da una particella ionizzante all’interno del volume di semiconduttore associato al pixel. La particolarità dei dispositivi CCD, che rende l’esempio che stiamo facendo particolarmente perspicuo, è che il trasferimento della carica sulla capacità C_M (preventivamente scaricata) avviene dietro nostro comando e che solo dopo tale trasferimento la ddp v_s ai capi del condensatore viene misurata con uno strumento ad alta impedenza: $v_s = \frac{Q_s}{C_M}$.

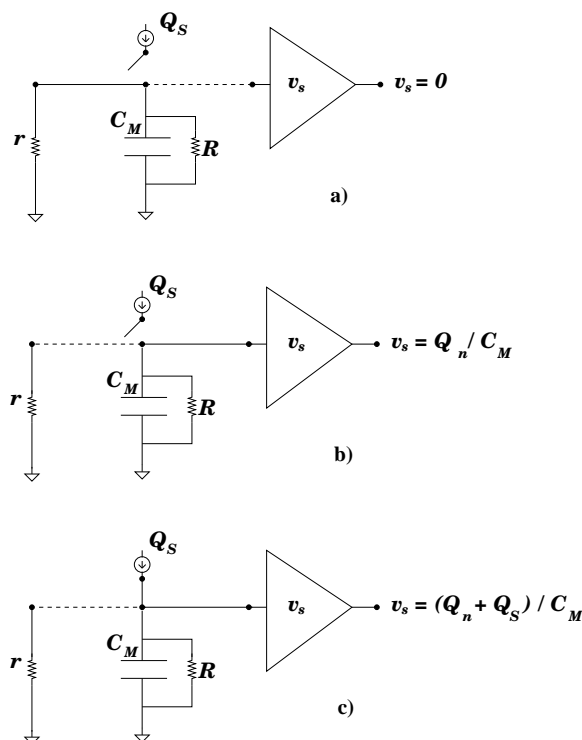


Fig.V.9

La piccolezza di C_M aiuta ad ottimizzare il rapporto segnale/rumore. Infatti sappiamo che sul condensatore, indipendentemente dal valore della resistenza R posta in parallelo ad esso (e a temperatura T), è presente una carica di valore aleatorio, con varianza $\langle Q_n^2 \rangle = kTC_M$, secondo la 26). Per ridurre tale fluttuazione, da confrontare con Q_s^2 , le ricette possibili sono due: tenere il sistema a temperatura ridotta e diminuire C_M , che –a parità di Q_s – aumenta il rapporto $v_s/\sqrt{\langle v_{cn}^2 \rangle} = \frac{Q_s}{C_M} \frac{\sqrt{C_M}}{\sqrt{kT}} \propto \frac{1}{\sqrt{C_M}}$. Queste ultime considerazioni potrebbero far supporre che di fatto fosse comunque impedita la determinazione di cariche Q_s dell'ordine o inferiori delle fluttuazioni $\sqrt{\langle kTC_M \rangle}$, ovvero che la presenza delle fluttuazioni di carica di fatto stabilisca un limite invalicabile per la sensibilità di misura. A temperatura ambiente e con $C_M = 0.2 \text{ pF}$, si trova che $\sqrt{\langle Q_n^2 \rangle} \approx 2.9 \cdot 10^{-17} C \approx 180$ cariche elettroniche. In realtà, proprio a causa dell'andamento della funzione di autocorrelazione $R_C(\tau)$ data dalla 29), questo limite può essere superato. Infatti, dalle considerazioni sull'andamento di $R_C(\tau)$, sappiamo che le fluttuazioni di carica hanno dei tempi propri di modificazione, dell'ordine di $\theta = RC$: se la carica fluttuante sulle armature di C vale in un certo istante Q_n , essa manterrà questo valore sostanzialmente inalterato per tutti i tempi $\ll RC$. Nei casi reali: $C_M \approx 0.2 \text{ pF}$, $R > 10^9 \Omega$ (comprensiva della resistenza di fuga e della resistenza di ingresso del misuratore di tensione) e quindi $\theta = RC > 0.2 \cdot 10^{-3} \text{ s}$. Quindi, sfruttando il fatto che nei CCD il trasferimento della carica da misurare Q_s è comandato esternamente dall'utente e che l'operazione di trasferimento di carica e di misura della stessa possono durare anche solo pochi μs , si può procedere come segue: si scarica C_M chiudendola temporaneamente su una resistenza $r \ll R$ (fase riportata nella Fig.9a); poi, dopo aver riaperto il contatto con r , si misura la carica fluttuante Q_n (Fig.9b). Si trasferisce poi la carica Q_s su C_M e si misura la tensione ai capi di C_M , ottenendo per la carica $Q = Q_s + Q'_n$ (Fig.9c). Poiché la prima misura, il trasferimento e la seconda misura si svolgono in un lasso di tempo di pochi μs , allora $Q'_n = Q_n$ con ottima approssimazione e dalla misura di Q si può sottrarre Q_n per ottenere Q_s .

5.– Il rumore termico in un circuito RC e la densità spettrale di rumore *Johnson*

In questo paragrafo proponiamo una maniera alternativa, rispetto alla procedura di *Nyquist*, di calcolare la densità spettrale di rumore *Johnson*.

Abbiamo visto nei paragrafi precedenti che, partendo dalla densità spettrale di rumore *Johnson*, siamo arrivati a scrivere per il valore dell'energia media accumulata sul condensatore C in parallelo ad R :

$$\begin{aligned} \langle E_C \rangle &= \frac{1}{2} C \langle v_{cn}^2 \rangle = \frac{1}{2} C \int_0^\infty \frac{w_v^J}{1 + 4\pi^2 \nu^2 R^2 C^2} d\nu = \\ &= \frac{1}{4\pi R} \int_0^\infty \frac{w_v^J}{1 + 4\pi^2 \nu^2 R^2 C^2} d(2\pi\nu RC) = \frac{1}{4\pi R} \int_0^\infty \frac{w_v^J}{1 + a^2 \nu^2} d(a\nu) \end{aligned} \quad (\text{V.30})$$

con $a = 2\pi RC$. Vogliamo far vedere che, dovendo essere per il principio di equipartizione dell'energia classico $\langle E_C \rangle = \frac{kT}{2}$, di necessità allora $w_v^J = 4kTR$.

Posto quindi $w_v^J = w_v^J(\nu)$, ovvero una funzione in generale dipendente dalla frequenza, uguagliando $\langle E_C \rangle$ a $kT/2$ e sfruttando la 30), otteniamo:

$$\langle E_C \rangle = \frac{1}{2} kT = \frac{1}{4\pi R} \int_0^\infty \frac{w_v^J(\nu)}{1 + a^2 \nu^2} d(a\nu) \quad (\text{V.31})$$

La 31) può essere riscritta:

$$\int_0^\infty \frac{w_v^J(\nu)}{1+a^2\nu^2} d(a\nu) = 2\pi kTR = A \quad (\text{V.32})$$

con A costante. Vogliamo dimostrare che dalla 32) discende:

$$w_v^J(\nu) = \frac{2A}{\pi} = 4kTR \quad (\text{V.33})$$

ovvero in particolare indipendente dalla frequenza. In pratica nel seguito si dimostra quello che una attenta osservazione della 32) fa intuire, ovvero che essendo l'integrale in $d(a\nu)$ del prodotto di una funzione $w_v^J(\nu)$ per un'altra funzione di $a\nu$ indipendente dal fattore si scala a (in particolare da C), necessariamente $w_v^J(\nu)$ non può dipendere da ν .

Poniamo quindi:

$$w_v^J(\nu) = \frac{2A}{\pi} + w_0(\nu) \quad (\text{V.34})$$

con solo $w_0(\nu)$ dipendente da ν . Dimostrare la 33), significa dimostrare:

$$\int_0^\infty \frac{w_0(\nu)}{1+a^2\nu^2} d(a\nu) = 0 \quad (\text{V.35})$$

ovvero ponendo $y = a\nu$:

$$\int_0^\infty \frac{w_0(y/a)}{1+y^2} dy = 0 \quad (\text{V.36})$$

Si tratta allora di dimostrare che la relazione 36) comporta $w_0(y/a) = 0$.

D'altronde $w_0(y/a)$ si può scrivere come $w_0(y/a) = w_0(e^{\log(y/a)}) = w_0(e^{(\log y - \log a)}) = f(\log y - \log a)$. Pertanto dalla 36) abbiamo:

$$\int_0^\infty \frac{f(\log y - \log a)}{1+y^2} dy = 0 \quad (\text{V.37})$$

Ponendo $\log y = z$ e $\log a = \mu$, abbiamo

$$\frac{dy}{y} = dz \Rightarrow dy = dz \cdot y = e^z dz \quad (\text{V.38})$$

e quindi

$$\int_0^\infty \frac{f(\log y - \log a)}{1+y^2} dy = \int_{-\infty}^\infty \frac{f(z - \mu)}{1+e^{2z}} e^z dz \quad (\text{V.39})$$

Posto $g(z) = \frac{e^z}{1+e^{2z}}$, abbiamo:

$$\int_{-\infty}^\infty f(z - \mu) g(z) dz = 0 \quad (\text{V.40})$$

Ricordando che

$$-FT\left\{\int_{-\infty}^\infty f(\mu - z) g(z) dz\right\} = FT\{f\} \cdot FT\{g\},$$

$$-FT\left\{\int_{-\infty}^\infty f(z + \mu) g(z) dz\right\} = FT\{f\} \cdot FT^*\{g\}$$

e quindi

$$-FT\left\{\int_{-\infty}^\infty f(z - \mu) g(z) dz\right\} = FT\left\{\int_{-\infty}^\infty f(z) g(z + \mu) dz\right\} = FT^*\{f\} \cdot FT\{g\},$$

abbiamo:

$$FT^*\{f\} \cdot FT\{g\} = 0 \quad (\text{V.41})$$

Essendo $FT\{g\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^z}{1+e^{2z}} e^{-j2\pi\nu z} dz \neq 0$, abbiamo che la 41) comporta necessariamente:

$$FT^*\{f\} = 0 \quad (\text{V.42})$$

e quindi $f(z) = w_0(y/a) = 0$, come dovevasi dimostrare.

6.– Il modello di Drude di un conduttore e il rumore Johnson

In questo paragrafo riportiamo un ulteriore metodo per il calcolo del rumore *Johnson* di una resistenza, basato sul modello di *Drude* della conduzione ohmica. Questo modello della conduzione è notoriamente un po' rozzo; tuttavia il calcolo che si può fare in questo ambito mette bene in evidenza sia i meccanismi fisici fondamentali, sia gli aspetti formalmente più interessanti.

Nel modello di *Drude* le proprietà ohmiche del conduttore sono ricondotte al moto caotico (di tipo *browniano*) degli elettroni nel reticolo cristallino: in assenza di campo elettrico applicato (che è il caso di nostro interesse in quanto vogliamo proprio studiare cosa accade ad una resistenza “lasciata a se stessa” alla temperatura T) il moto di ogni elettrone è una continua sequenza di urti alternata a tratti di moto rettilineo uniforme con direzione a caso, percorsi con velocità quadratica media crescente con la temperatura. La distanza λ fra il punto di una collisione e l'altra è detta libero cammino dell'elettrone (libero da urti cioè) e il suo valore medio $\bar{\lambda}$ (il *libero cammino medio*) è una caratteristica del materiale in esame e della temperatura T alla quale si trova il conduttore.

Consideriamo un conduttore in forma di sbarretta omogenea cilindrica, di sezione S e lunghezza L (Fig.10).

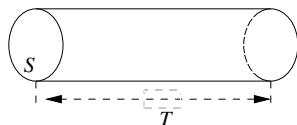


Fig.V.10

Ammettendo l'equilibrio termodinamico alla temperatura T , abbiamo per la velocità media v_{rms} degli elettroni (consideriamo solo il grado di libertà lungo la direzione X della sbarretta, quella di L)

$$\frac{1}{2}mv_{x,rms}^2 = \frac{1}{2}kT \quad (\text{V.43})$$

ovvero

$$v_{x,rms}^2 = \frac{kT}{m} \quad (\text{V.44})$$

Il tempo θ fra una collisione e un'altra vale, detto λ il tratto di volo libero e v la velocità lungo il volo:

$$\theta = \lambda/v \quad (\text{V.45})$$

Consideriamo ora il moto di un elettrone fra un urto e il successivo ed in particolare calcoliamo la corrente associata a questo moto, lungo la solita direzione X . Per calcolare la corrente associata a questo moto consideriamo un numero N molto grande di questi elettroni, uniformemente distribuiti

nel materiale, e ammettiamo che tutti traslino lungo X con velocità pari a v_x ; la corrente associata a questo moto sarà allora data da:

$$I = |\vec{j}|S = \frac{eN}{SL}v_x S = \frac{eNv_x}{L} \quad (\text{V.46})$$

Ad un singolo portatore sarà quindi associata una corrente pari a $1/N$ della 46), ovvero:

$$i_e = \frac{ev_x}{L} \quad (\text{V.47})$$

Nell'atto di moto costituito dal "volo libero" di un elettrone lungo λ con velocità v (volo che dura pertanto, secondo la 45) un tempo $\theta = \lambda/v$) abbiamo un impulso di corrente rettangolare di ampiezza

$$\frac{ev_x}{L} = \frac{e}{L} \left(\frac{\lambda}{\theta} \right)_x \quad (\text{V.48})$$

e durata $\theta = \lambda/v$ (vedi Fig.11).

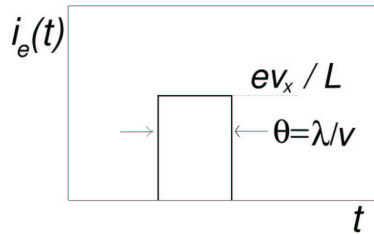


Fig.V.11

Nella 48) $\left(\frac{\lambda}{\theta} \right)_x$ rappresenta la proiezione di \vec{v} lungo la direzione X . L'area dell'impulso di corrente è data da

$$q_{ex} = \frac{e\lambda_x}{L} \quad (\text{V.49})$$

con λ_x proiezione di λ su X . In questa schematizzazione il moto delle cariche produce impulsi di corrente del tipo rappresentato il Fig.12, con segno a caso (quello della proiezione lungo X di \vec{v}), ampiezza fluttuante e durata pure a caso; infatti, in linea di principio, sia la distanza fra una collisione e l'altra sia il vettore velocità dell'elettrone sono variabili aleatorie (non necessariamente indipendenti l'una dall'altra). Riprendendo i risultati III.37 e seguenti (ed in particolare il risultato III.42) in linea di principio siamo in grado di calcolare la funzione di autocorrelazione della sequenza complessiva costituita dalla successione degli impulsi associati agli N elettroni della sbarretta, ovvero:

$$R(\tau) = \Psi_\tau \bar{v} + (F_f)^2 \cdot \bar{v}^2 \quad (\text{V.49})$$

con il significato dei simboli allora definito.

Osserviamo che il secondo termine è nullo: infatti $F_f = \int_{-\infty}^{\infty} f_f(\theta) d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} d\theta (\sum_{\text{forme } l} g_l f_l(\theta))$ vale 0, perchè la media delle forme degli impulsi è nulla, essendo il segno degli impulsi rigorosamente a caso.

Valutiamo ora \bar{v} , ovvero il numero di impulsi per unità di tempo. Ogni elettrone in ogni intervallo θ inizia un nuovo "volo" e quindi il numero di impulsi per unità di tempo del complesso degli N elettroni, è dato da $\bar{v} = \frac{N}{\bar{\theta}}$, dove $\bar{\theta}$ rappresenta la differenza media di tempo fra un urto e un altro.

Resta ora la parte più difficile, ovvero il calcolo di Ψ_τ che è data da:

$$\Psi_\tau = \int_{-\infty}^{\infty} d\theta \psi_\tau(\theta, 0, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} d\theta \sum_{\text{forme } l} g_l f_l(\theta) f_l(\theta + \tau) \quad (\text{V.50})$$

La media delle forme deve tener conto che da impulso a impulso può cambiare λ e v_x (quindi ampiezza e durata dell'impulso). Pertanto la sommatoria dei prodotti $f_i(\theta) f_i(\theta + \tau)$ pesati con g_i in realtà dovrebbe essere calcolata come valore di aspettazione di quel prodotto, con la densità di probabilità congiunta di avere un certo valore di λ e un certo valore di v_x . Ovviamente il caso è estremamente complicato e non lo affronteremo in questo schema generale, ma piuttosto in uno schema semplificato che corrisponde esattamente al modello di *Drude*: ovvero ammetteremo $\lambda = \bar{\lambda}$ sempre, $v_x = v_{x,rms}$ sempre, cioè sostituendo alle variabili aleatorie i loro valori medi. Si noti che comunque, in ogni schema semplificato o no, Ψ_τ è positiva, indipendentemente dal fatto che f_f sia positiva o negativa.

Nello schema di *Drude*, la media sulle forme non occorre più e l'impulso medio ha ampiezza $\frac{e(\bar{\lambda})_x}{L}$ e quindi area pari a $\frac{e(\bar{\lambda})_x}{L}$. Ψ_τ assume così la forma triangolare rappresentata in Fig.12:

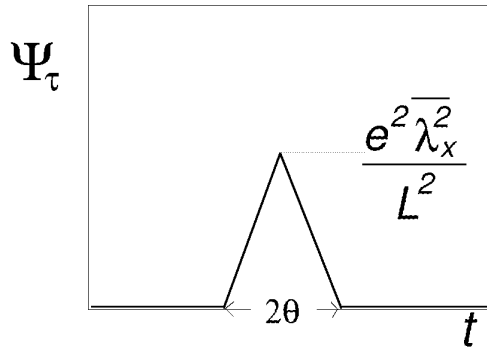


Fig.V.12

A questo punto potremmo fare la *FT* della funzione rappresentata nella figura, per ottenere la densità spettrale di rumore. Si noti che la *FT* della Ψ_τ dà luogo ad una funzione della frequenza sostanzialmente piatta da 0 fino a frequenze dell'ordine di $1/(2\bar{\theta})$. Essendo, secondo i valori noti del libero cammino medio $\bar{\lambda}$ e delle velocità termiche degli elettroni a temperatura T , $\bar{\theta} \approx 10^{-13} \div 10^{-14}$ s, si ha uno spettro di potenza piatto a tutte le frequenze di interesse pratico (come si doveva trovare, visto che dobbiamo ottenere la densità di rumore *Johnson*, che è bianca).

Dati i numeri in gioco, è naturale allora estremizzare la schematizzazione, considerando $\bar{\theta} \rightarrow 0$; in questa ipotesi tutti gli impulsi sono uguali e schematizzabili come:

$$i_{ex} = \frac{e\bar{\lambda}}{L} \delta(t) \quad (\text{V.51})$$

Riprendendo quindi il risultato III.43 abbiamo:

$$R(\tau) = \frac{e^2 \bar{\lambda}_x^2}{L^2} \frac{N}{\bar{\theta}} \delta(\nu) \quad (\text{V.52})$$

Esprimendo $\bar{\lambda}_x$ in funzione della velocità otteniamo:

$$R(\tau) = \frac{e^2 v_{x,rms}^2}{L^2} \bar{\theta} N \delta(\nu) \quad (\text{V.53})$$

Utilizzando la III.16 abbiamo per la densità spettrale di rumore (in corrente, ovviamente):

$$w_i = \frac{2e^2 v_{x,rms}^2 \bar{\theta} N}{L^2}$$

Ricordando che $v_{x,rms}^2 = \frac{kT}{m}$, otteniamo:

$$w_i = 2kT \cdot \frac{e^2 \bar{\theta} N}{mL^2}$$

La densità spettrale di rumore è bianca e proporzionale a kT ; perché effettivamente questo risultato coincida con il valore già noto per lo spettro di potenza *Johnson* occorre che:

$$2kT \cdot \frac{e^2 \bar{\theta} N}{mL^2} = \frac{4kT}{R}$$

con R resistenza della sbarretta; ovvero deve essere:

$$\frac{2mL^2}{e^2 \bar{\theta} N} = R \quad (\text{V.55})$$

Calcoliamo allora il valore della resistenza nel modello di *Drude*. Per il calcolo di R ammettiamo di applicare una ddp V al conduttore: detto $E_x = -V/L$ il campo lungo la direzione X della sbarretta, l'acquisto di velocità nella direzione del campo fra una collisione e l'altra da parte dell'elettrone è dato da:

$$\Delta v_x = \frac{eE\theta}{m} \quad (\text{V.56})$$

cui corrisponde un aumento medio di velocità nella direzione del campo pari $v_D = \Delta v_x/2 = eE\theta/2m$. la velocità v_D rappresenta la velocità di deriva media degli elettroni. Pertanto il vettore densità di corrente associato a questo moto (considerando gli N elettroni del volume $S \cdot L$) è dato da:

$$|\vec{j}| = e n v_D = \frac{e^2 N E \bar{\theta}}{SL2m} \quad (\text{V.57})$$

Quindi la conducibilità σ ($\vec{j} = \sigma \vec{E}$) vale:

$$\sigma = \frac{e^2 N \bar{\theta}}{SL2m} \quad (\text{V.58})$$

e per $R = \frac{L}{\sigma S}$ otteniamo:

$$R = \frac{2mL^2}{e^2 N \bar{\theta}} \quad (\text{V.59})$$

che conferma il risultato atteso.

Al di là del compiacersi del risultato ottenuto nonostante le schematizzazioni introdotte, occorre ribadire che:

- il calcolo dà il risultato giusto in virtù delle relazioni autoconsistenti introdotte
- il calcolo insegna che un limite di alta frequenza (al di là del problema della formula della equipartizione classica dell'energia) viene anche naturalmente introdotto dal tempo finito che intercorre fra un urto e il successivo
- il calcolo nel dominio del tempo mostra molto direttamente che la corrente di rumore *Johnson* fluttuante (o equivalentemente la tensione ai capi di R) deriva dall'azione incoerente di un numero enorme di impulsi e quindi riporta l'effetto finale (la corrente istantanea al tempo t) ad una somma di N ($N \rightarrow \infty$) variabili aleatorie indipendenti. Tutto questo ci sarà utile quando vorremo sapere anche le distribuzioni dei valori $i(t)$ o $v(t)$, ovvero le densità di probabilità delle loro ampiezze.

7.- Il rumore granulare o "shot"

Consideriamo ora un'altra sorgente di rumore, ovvero il cosiddetto rumore *shot* o rumore *granulare* che risulta essere sempre presente quando in un ramo di un circuito circola una corrente costituita dal moto di portatori di carica con tempi di transito completamente a caso, ovvero con una distribuzione uniforme nel tempo.

Ritorniamo nel seguito su questo aspetto, che gioca un ruolo fondamentale nel determinare la densità spettrale di rumore associata a questa corrente. Per ora limitiamoci ad osservare che siamo in presenza di un fenomeno (la fluttuazione di una corrente) a media diversa da zero; infatti queste fluttuazioni sono proprio associate alla presenza di una corrente macroscopica (il valor medio, per l'appunto) diversa da 0.

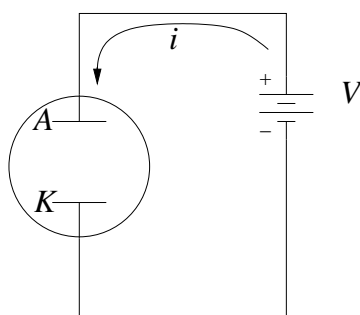


Fig.V.13

Per trattare quantitativamente questo tipo di rumore, tipicamente si inizia a considerare il caso del diodo a vuoto, nella condizione di lavoro detta di "corrente limitata dalla temperatura", ovvero il caso in cui tutta la carica emessa per effetto termoionico dal catodo venga raccolta dall'anodo; in altre parole assistiamo ad una corrente (vedi Fig.13) costituita da una serie di impulsi, ognuno associato al transito del singolo portatore (l'elettrone) che, evaporato dal catodo, vola, sotto l'azione accelerante del campo elettrico, verso l'anodo e contemporaneamente induce corrente nel circuito esterno. Poiché il processo di evaporazione (meglio detto di emissione termoionica) è completamente a caso per quanto riguarda gli istanti di emissione che sono ognuno indipendente dagli altri, il fenomeno si può considerare puramente stocastico e più esplicitamente possiamo affermare che il numero di elettroni emessi dal catodo (e quindi raccolti dall'anodo) nell'unità di tempo fluttua in maniera poissoniana.

Il generico impulso di corrente $i_{ek}(t)$ di un elettrone che vola dal catodo all'anodo (distanti D) ha la forma approssimativamente triangolare riportata nella Fig.14:

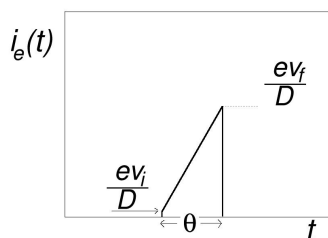


Fig.V.14

dove il valore iniziale dell'impulso, avente ampiezza media pari a $\frac{e\bar{v}}{D} = \frac{e(v_i + v_f)}{2D}$, è determinata dalla velocità v_i con la quale l'elettrone ha lasciato il catodo (normalmente esso è riscaldato attorno a $T = 800 \div 1000 K$ in maniera indiretta da un filamento); l'andamento successivo risente dell'accelerazione che l'elettrone subisce nell'attraversare lo spazio fra catodo e anodo dove è presente il campo elettrico dovuto al generatore V . Normalmente il contributo iniziale v_i dovuto alla temperatura del catodo è molto inferiore a quello impartito dall'accelerazione. Infatti l'energia termica degli elettroni, nonostante la temperatura elevata del catodo, è dell'ordine del decimo di eV , mentre la ddp applicata fra anodo e catodo è dell'ordine del centinaio di V . In pratica tutti gli impulsi sono uguali fra loro.

La corrente media di ogni impulso vale (ricordando anche quanto detto nel paragrafo precedente):

$$\bar{i} = \frac{e\bar{v}}{D} = \frac{e}{\theta} \quad (\text{V.60})$$

con θ tempo di transito. L'area di ogni impulso vale allora e , cioè è identica per tutti gli impulsi (questo è vero, indipendentemente da una eventuale differenza nella velocità iniziale). Quanto al valore medio $\bar{\theta}$ dei tempi di transito, nelle geometrie tipiche dei diodi a vuoto, esso è attorno al ns . La corrente media associata alla presenza di questi impulsi, vale (vedi III.27):

$$\langle i \rangle = e \cdot \bar{v} \quad (\text{V.61})$$

Per trovare la densità spettrale di rumore occorre calcolare la funzione di autocorrelazione ricorrendo alla formula III.42. L'operazione di media sulle forme non è però necessaria, avendo ammesso –molto ragionevolmente– l'uguaglianza delle velocità v_i di emissione. Semplifichiamo ancora il problema, trattando come infinitamente piccolo il tempo di transito. In questo schema il singolo impulso di corrente è caratterizzato da una corrente:

$$i_{ek}(t) = e \cdot \delta(t - t_k) \quad (\text{V.62})$$

e quindi applicando la III.43 abbiamo:

$$R(\tau) = e^2 \delta(\tau) \cdot \bar{v} + \langle i \rangle^2 \quad (\text{V.63})$$

che può essere scritta come

$$R(\tau) = e \cdot \langle i \rangle \cdot \delta(\tau) + \langle i \rangle^2 \quad (\text{V.64})$$

Nella notazione standard in cui la $\langle i \rangle$ è scritta I e la carica del singolo portatore è indicata con q otteniamo:

$$R(\tau) = qI \cdot \delta(\tau) + I^2 \quad (\text{V.65})$$

A questo punto, per trovare la densità spettrale di rumore, che è legata alla varianza della sequenza casuale (cioè al termine fluttuante rispetto al valor medio), possiamo fare ricorso alla formula II.16 per la quale la funzione di autocorrelazione associata al termine a media nulla vale:

$$R_d(\tau) = q I \delta(\tau) \quad (\text{V.66})$$

La densità spettrale di rumore associata alla corrente I è quindi data da (vedi III.16):

$$w_I^S = 2FT^{-1}\{R_d(\tau)\} = 2qI \quad (\text{V.67})$$

Come aspettato, avendo confuso ogni nostro singolo impulso con una $\delta(t - t_k)$, cioè avendo assunto il tempo di volo dell'elettrone (non troppo realisticamente, per la verità) nullo, otteniamo una densità spettrale di rumore indipendente dalla frequenza. Se avessimo considerato il tempo di transito θ finito, avremmo trovato una densità spettrale di rumore sostanzialmente pari a quella calcolata dalla 67) fino a frequenze dell'ordine di $1/\theta$ ($\approx 1 \text{ GHz}$, quindi) che sarebbe poi andata a zero per frequenze superiori, con un andamento determinato dal dettaglio della distribuzione reale dei tempi di volo.

E' importante ricordare che, qualora la corrente non sia costituita da sequenze di impulsi completamente a caso, in particolare il numero di impulsi per unità di tempo non fluttua più poissonianamente (come richiesto per la correttezza del risultato III.42), il risultato 67) non è più valido e le fluttuazioni sono ridotte. Per esempio, se il diodo opera a tensioni V in cui si instaura il regime di carica spaziale, si trova una riduzione (anche molto forte) delle fluttuazioni e quindi della densità spettrale di rumore.

Risultati coerenti con il regime di fluttuazione puramente *shot* si ottengono per le componenti di corrente diretta e inversa di un diodo a semiconduttore. Questo non sorprende per niente, in quanto nel diodo a semiconduttore il regime delle correnti diretta e inversa è determinato dai processi statistici di superamento della barriera alla giunzione e dalla produzione termica dei portatori minoritari. Quanto ai tempi di transito della barriera da parte dei portatori di carica, essi sono di 2-3 ordini di grandezza inferiori rispetto ai tempi di volo catodo-anodo in un diodo a vuoto. Pertanto il valore di frequenza per il quale il rumore *shot* di un diodo a giunzione cesserebbe di essere bianco è dell'ordine delle centinaia di GHz *.

Riprendendo la formula 67), valutiamo nel caso di puro rumore *shot* (o come si dice di *full shot noise*), le varianze in corrente che si osservano: supponiamo di misurare una corrente di 1 mA e di avere uno strumento misuratore di corrente con una banda passante di 1 MHz e per il resto ideale. Allora abbiamo:

$$\sigma^2(I = 1 \text{ mA}) = \int_0^{10^6 \text{ Hz}} w_i^S d\nu = 2qI \cdot 10^6 \approx 3.2 \cdot 10^{-16} \text{ A}^2 \quad (\text{V.68})$$

cui corrisponde un limite alla precisione relativa della misura di circa $1.8 \cdot 10^{-5}$. Se misurassimo con lo stesso strumento una corrente di 1 nA otterremmo per la precisione relativa di misura un valore 1000 volte peggiore.

Nelle formule precedenti per la densità spettrale di rumore *shot* abbiamo riportato il valore medio della corrente, indicato con I . Questo non significa che la formula 66) si possa solo applicare al caso di correnti rigorosamente continue. La corrente $I(t)$ può anche dipendere dal tempo e la formula 66) è ancora applicabile, almeno fino a che si considerano le densità spettrali di rumore ben al di sopra delle componenti di frequenza contenute nel segnale.

Prima di passare ad affrontare argomenti più pratici e meno speculativi, vogliamo ricordare che le conclusioni tratte in questo paragrafo e nel precedente potevano essere raggiunte anche calcolando le densità spettrali di rumore delle sequenze in funzione delle trasformate di *Fourier* degli impulsi base elementari (si veda la relazione III.44). Anzi, questo è il procedimento normalmente seguito nei testi classici che affrontano questi argomenti. Abbiamo preferito l'approccio del calcolo della funzione di autocorrelazione nel dominio del tempo perché –a nostro avviso– permette un migliore approfondimento della fisica di tutto il processo.

* Il motivo del condizionale “cesserebbe” va ricercato nel fatto che altri fattori, cui sarà brevemente accennato nel prossimo capitolo, modificano l'andamento in alta frequenza del rumore di corrente nei diodi a giunzione

8. – Una misura di corrente in presenza di rumore granulare e termico

Consideriamo ora una resistenza a temperatura T percorsa da una corrente I (a valor medio costante) che presenta *full shot noise*: ci chiediamo quale sia la densità spettrale di rumore in tensione della caduta di tensione v_R ai capi di un resistore di resistenza R percorso dalla corrente I (vedi Fig.15 a)):

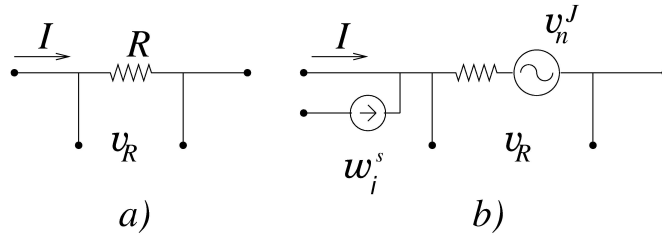


Fig.V.15

La densità spettrale di rumore è determinata dalla somma (in quadratura) dei due contributi del rumore *shot* della corrente I e del rumore termico di R . Tenendo presente il circuito equivalente per il rumore della Fig.15 b), la ddp istantanea $v_R(t)$ vale:

$$v_R(t) = v_n^J(t) + IR + i_n^S(t)R \quad (\text{V.69})$$

e quindi per la densità spettrale di rumore in tensione otteniamo:

$$w_{tot} = w_v^J + w_i^S R^2 = 4kTR + 2qIR^2 \quad (\text{V.70})$$

Se immaginiamo che la configurazione di Fig.15 rappresenti la misura della corrente I effettuata misurando la caduta di tensione che essa provoca su una resistenza nota, ci possiamo chiedere quale sia il valore che R deve assumere affinché la parte di rumore associato all'effetto *Johnson* sia inferiore rispetto alle fluttuazioni *shot*. Più esplicitamente, è ovvio che, fissata la sensibilità del voltmetro, si ha un vantaggio per la precisione della misura ad aumentare di R ; questo però comporta un aumento del contributo di rumore termico. Si tratta di valutare quantitativamente l'effetto, notando anche che questo calcolo ha un senso se si ammette che I sia iniettata in R da un generatore ideale di corrente, ovvero che essa non cambi al variare di R e che il voltmetro sia dotato di una impedenza di ingresso molto elevata, in particolare $\gg R$ per tutti i valori di R considerati.

I due contributi *shot* e *Johnson* diventano uguali quando:

$$R = \frac{2kT}{qI} \quad (\text{V.71})$$

che a temperatura ambiente dà: $R \approx 0.05/I \Omega$. Per esempio, se vogliamo misurare una corrente di 1 nA e vogliamo al più aumentare di un fattore $\sqrt{2}$ l'incertezza di misura (dovuta al rumore) rispetto al valore limite associato all'effetto *shot*, R non deve superare $50 \text{ M}\Omega$ (a temperatura ambiente). Le considerazioni svolte sopra trattano l'incertezza assoluta della misura di v_R dovuta alle varie sorgenti di rumore. Tuttavia, al variare di R , cambia non solo l'accuratezza assoluta di v_R , ma

anche, se non soprattutto, v_R medesima. Pertanto, quello che di norma interessa è il rapporto *rumore/segnale*, ovvero la quantità: $\sqrt{\frac{w_{tot}}{v_R^2}} = \sqrt{\frac{w_v^J + w_i^S R^2}{I^2 R^2}} = \sqrt{4kT/IR + 2q/I}$. Questa espressione ci dice allora che l'ottimizzazione della precisione della misura (cioè del rapporto *segnale/rumore*) si ottiene quando R è decisamente superiore al valore critico dato dalla 71).

La conclusione alla quale siamo giunti circa il valore critico di R vale indipendentemente dalla banda passante dello strumento di misura: infatti entrambe le densità spettrali di rumore che compaiono nella 70) sono indipendenti dalla frequenza e quindi le condizioni dedotte da formule che le contengono valgono anche se avessimo considerato le varianze, indipendentemente dai limiti di frequenza entro i quali gli spettri di potenza vengono integrati. E' tuttavia istruttivo portare avanti il calcolo, non fosse altro che per vedere che nell'affrontare il problema in esame abbiamo compiuto delle schematizzazioni che possono risultare irrealistiche e soprattutto possono alterare le conclusioni. Ammettiamo pertanto che lo strumento presenti effettivamente una banda passante finita: per prima cosa è ovvio che il taglio introdotto deve agire esclusivamente nelle alte frequenze, visto che in bassa frequenza non ci possiamo permettere alcuna soppressione, essendo la grandezza da misurare I continua (su questo punto torneremo con alcune precisazioni). In alta frequenza, oltre al limite proprio dello strumento, un altro taglio viene introdotto naturalmente dalle capacità di ingresso del voltmetro, che fino ad ora abbiamo trascurato. Detta C tale capacità, sappiamo come si modifica la 70) (si veda la V.24):

$$w_{tot}^C = \frac{4kTR + 2qIR^2}{1 + 4\pi^2 R^2 C^2 \nu^2} \quad (V.72)$$

ovvero il circuito si comporta come un filtro passa basso con frequenza di taglio pari a $\nu_H = 1/(2\pi RC)$. Supposto un valore realistico di $C \approx 10$ pF abbiamo $\nu_H \approx 300$ Hz, che normalmente sarà dominante rispetto alla banda passante propria dello strumento. Abbiamo già calcolato la varianza totale della tensione in un caso analogo a questo (V.25); estendendo quel risultato abbiamo:

$$\sigma^2(v_R) = \frac{kT + qIR/2}{C} \quad (V.73)$$

che, nel caso di aver scelto R in modo da avere due contributi uguali per i due effetti, dà:

$$\sigma^2(v_R) = \frac{qIR}{C} \quad (V.74)$$

Nel caso in esame otteniamo: $\sigma^2(v_R) \approx 8 \cdot 10^{-10} V^2$, ovvero $\sigma(v_R) \approx 28 \mu V$. In tali condizioni, l'effetto totale relativo delle fluttuazioni dovuto al rumore *shot* e al rumore *Johnson* ammonta a $\sigma(v_R)/v_R \approx 6 \cdot 10^{-4}$.

Probabilmente, a meno di non disporre di uno strumento particolarmente sofisticato, gli errori sistematici dichiarati dal costruttore del voltmetro saranno superiori a questi limiti e pertanto potremmo considerarci soddisfatti. Se volessimo raggiungere precisioni superiori (per esempio perché lo strumento nominalmente lo consente) o volessimo misurare correnti più piccole, allora altri sforzi andrebbero fatti e facilmente incorreremmo nel problema che il misuratore stesso è una fonte di rumore, con la sua elettronica di ingresso. Questo problema, affrontato in dettaglio in un contesto differente di misure, sarà esaminato nel seguito.

Nella pratica, le tecniche di misura delle piccole correnti quasi mai si riconducono al semplice schema sopra esposto, ma ricorrono a soluzioni assai più sofisticate. L'esempio è più che altro stato introdotto per mettere in evidenza alcuni dei problemi che si devono comunque affrontare nelle misure di alta sensibilità, là dove non ci possiamo permettere di ignorare l'esistenza del rumore.

Prima di chiudere questo paragrafo, notiamo ancora che precedentemente abbiamo sovrasemplificato un aspetto del problema, precisamente quando abbiamo detto che la banda passante della misura di necessità deve estendersi, in basso, fino alla continua. Questa necessità in realtà proprio non esiste: una misura rigorosamente in continua, ovvero a $\nu = 0$, comporterebbe un tempo di acquisizione infinito e pertanto si tratta di un caso non fisico. Una reale misura in continua dura il tempo necessario allo strumento per compiere la misura, per esempio il tempo di conversione di un ADC o il tempo necessario allo strumento ad ago per fermarsi; in pratica questo significa che il limite di frequenza inferiore, anche per misurare una quantità continua, non deve essere $\nu = 0$, bensì un valore dell'ordine dell'inverso del tempo di misura del nostro strumento. Precisato questo, torniamo alla formula 74): essa suggerisce che qualunque aumento del valore della capacità C sarebbe benefico dal punto vista del rumore. Aumentata la capacità C , occorrerebbe caso mai allungare i tempi di misura, se fossero tali entrare in conflitto col nuovo limite di banda. Normalmente questa procedura non si può estremizzare per un motivo almeno duplice: da una parte l'aumento del tempo di misura comporta scomodità nella realizzazione della misura stessa, da un'altra –problema più sostanziale– ci si imbatte in un significativo aumento del rumore, non riconducibile a nessuna delle sorgenti di rumore prima descritte; tale contributo aggiuntivo di rumore normalmente va sotto il nome di rumore $1/f$ (a ricordarci il suo andamento approssimativo in funzione della frequenza) o *rumore in eccesso* e spesso si osserva nei contributi di rumore dei dispositivi elettronici. Di questo contributo tratteremo brevemente nel prossimo paragrafo.

9.– Il rumore “ $1/f$ ” o “rumore in eccesso”

Il rumore *Johnson* e il rumore granulare costituiscono due processi che spiegano bene molte delle caratteristiche del rumore osservato nei circuiti elettrici ed elettronici. Tuttavia non tutte le caratteristiche del rumore elettrico che si osservano sono riconducibili a questi processi: questo è particolarmente vero per i dispositivi elettronici a semiconduttore nei quali è presente un andamento caratteristico della densità spettrale di rumore che cresce in ragione inversa della frequenza. Genericamente tali contributi di rumore, non riconducibili a effetti di selezione in banda (da parte delle funzioni di trasferimento) di processi noti (rumore termico e/o granulare), sono indicati per questo come “rumore in eccesso” (*excess noise*) o, a causa dell'andamento generalmente osservato in funzione della frequenza, “rumore $1/f$ ”; un termine inglese assai diffuso è quello di *flicker noise*. Una caratteristica abbastanza sorprendente di questo rumore è proprio che, nonostante che alla sua base, caso per caso, si identifichino processi fisici differenti, per tutti si osservi un andamento simile dello spettro di potenza, crescente circa con l'inverso della frequenza. In generale si osserva che il rumore $1/f$ si manifesta in situazioni di non-equilibrio termodinamico, ovvero quando dell'energia è apportata dall'esterno sul sistema fisico che presenta il rumore in eccesso: per esempio quando una corrente fluisce in un resistore, quando una ddp è applicata ad un condensatore o a una giunzione a semiconduttore.

Non entreremo in alcun dettaglio riguardo ai processi alla base del fenomeno, ma ci limitiamo a ricordare alcuni effetti fisici che sono riconosciuti essere alla base di casi osservati di rumore $1/f$: nei resistori ad impasto di carbone, la presenza del rumore $1/f$ è associata alla resistenza di contatto fra i granuli di conduttore costituenti l'impasto; nei condensatori ceramici, tale rumore si associa alla debole corrente di fuga dipendente dalla temperatura; nei dispositivi a semiconduttore, alle fluttuazioni della generazione e ricombinazione dei portatori minoritari.

Contrariamente al caso delle sorgenti fisiche di rumore “essenziali”, quali il rumore termico e quello granulare, per il rumore $1/f$ è possibile una ottimizzazione delle caratteristiche di rumore tramite controlli attenti nei processi costruttivi dei dispositivi, per esempio mirati a migliorare le proprietà fisiche e la purezza dei materiali impiegati.

Quando nel seguito daremo una sommaria descrizione delle caratteristiche di rumore dei dispositivi elettronici, vedremo che in un vasto campo di frequenze i processi di rumore termico e granulare presenti si possono schematizzare come generatori “equivalenti” di rumore (in corrente e tensione) posti all’ingresso dei dispositivi; nella Fig.16 sono riportati i circuiti equivalenti di rumore per un JFET canale n e un transistor bipolare npn .

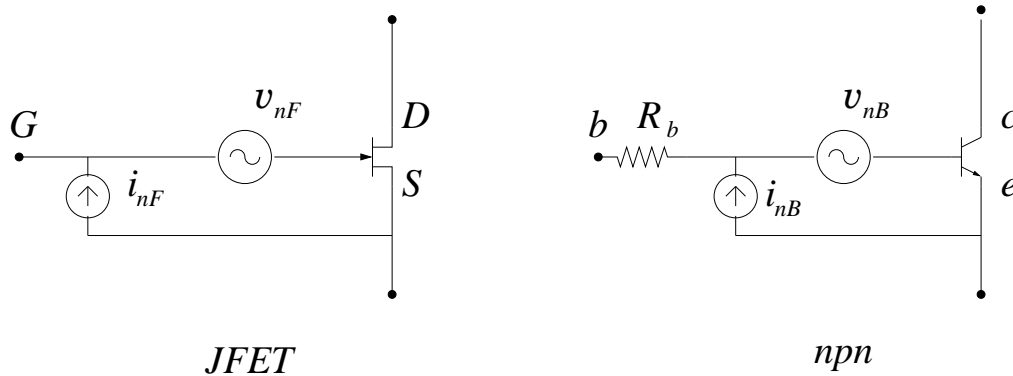


Fig.V.16

Le densità spettrali di rumore di questi generatori sono ottenute calcolando le densità spettrali indicate sulla base della funzione di trasferimento fra l’ingresso e i generatori primari di rumore termico e granulare, dislocati nel dispositivo; per esempio –come vedremo– il rumore *Johnson* della resistenza del canale del JFET è “riportato” nel generatore $\langle v_{nF} \rangle$ in serie al gate. In questa operazione di trasferimento giocano un ruolo fondamentale il circuito equivalente per piccoli segnali del dispositivo, le resistenze dei contatti e del *bulk* nonché le capacità interelettrodiche. Invariabilmente si trova che tali effetti porterebbero a densità spettrali per i generatori equivalenti, riportati nella Fig.16, sostanzialmente costanti, almeno in bassa frequenza. Viceversa, in pratica si verifica, proprio a causa dell’esistenza dei contributi –di varia origine– di rumore in eccesso, che gli andamenti osservati in bassa frequenza delle densità spettrali di rumore della Fig.16 sono meglio riprodotti da una legge del tipo:

$$w_{in}^{J,S'} = w_{in}^{J,S} \left(1 + \frac{\nu_0}{\nu}\right) \quad \text{in bassa frequenza} \quad (\text{V.75})$$

dove $w^{J,S}$ rappresenta la densità spettrale di rumore per i generatori di Fig.16 prevista sulla base delle sorgenti di rumore *Johnson* e *shot* individuate nel dispositivo e riportate in ingresso. La frequenza ν_0 (detta *corner frequency*) rappresenta il valore di frequenza per la quale il rumore in eccesso uguaglia quello del contributo bianco; ν_0 pertanto definisce la frequenza al di sotto della quale il rumore in eccesso risulta dominante. Le frequenze ν_0 , a seconda dei dispositivi, variano fortissimamente andando da pochi *Hz* fino ad alcuni *MHz*.

Tutte le volte che nel seguito faremo riferimento al rumore $1/f$ sarà solo per dire che esso dà un contributo in più rispetto a quello calcolato e che sarà necessario, volta volta, tenerne conto facendo principalmente affidamento alle informazioni che i costruttori di dispositivi avranno cura di fornire.

10.— *La distribuzione gaussiana delle ampiezze del rumore termico e granulare*

In questo paragrafo affrontiamo un problema sul quale abbiamo completamente sorvolato, o meglio che abbiamo aggirato, quando abbiamo affrontato l'argomento della descrizione delle sequenze casuali. Di fatto fin dall'inizio abbiamo rinunciato a dare una descrizione della sequenza casuale che prevedesse la conoscenza della distribuzione delle ampiezze della sequenza, a favore della determinazione delle sue proprietà medie; più precisamente dei valori medi e delle varianze.

A questo punto della trattazione, avendo introdotto dei modelli —magari un po' rozzi, ma fisici— per descrivere l'origine microscopica di due delle principali sorgenti di rumore (*Johnson* e *shot*) siamo anche in grado di derivare in maniera relativamente semplice la legge con la quale i valori della sequenza in osservazione sono distribuiti, ovvero la densità di probabilità delle variabili aleatorie $\{f_n(t)\}$ che costituiscono la sequenza.

Facciamo innanzitutto una osservazione banale, ma auspicabilmente chiarificatrice di alcuni aspetti fondamentali della discussione successiva: se il sistema di registrazione della sequenza $\{f_n(t)\}$ è a banda passante infinita, se la registrazione è istantanea, se il rumore è bianco ed in particolare se i processi fisici base sono quelli visti per il rumore *Johnson* e granulare, allora la distribuzione delle ampiezze presenta infinite singolarità che impediscono ad essa di avere un andamento regolare, in particolare gaussiano; infatti, rappresentando la nostra $f(t)$ come una successione di impulsi δ -formi, avremo:

$$f(t) = \sum_{k=1}^M q_k \delta(t - t_k) \quad (\text{V.76})$$

e quindi, avendo il nostro sistema tempo di registrazione infinitesimo (permesso dalla banda passante infinita ipotizzata), la $f(t)$ assume o valore nullo (nessun impulso per quel t in esame) o valore divergente; a causa degli andamenti elementari δ -formi, è irrilevante —purché finito— il numero di impulsi nell'intervallo di quasi-periodicità $-T/2, T/2$ dove è definita la sequenza.

Passando ora ad un caso fisicamente più interessante (e sicuramente meno astratto), ammettiamo che il processo non dia rumore bianco, ma dia uno spettro di potenza limitato in frequenza (supponiamo ad esempio che il processo base, cioè l'impulso elementare, abbia una durata finita θ , che produce un taglio in frequenza dell'ordine di $1/\theta$) oppure che la funzione di trasferimento fra dove il processo fisico è generato e là dove viene osservata la sequenza introduca un filtro passa basso oppure entrambe le cose; al momento manteniamo l'ipotesi che il processo di registrazione sia istantaneo.

Nelle ipotesi sopra dette, il valore della ampiezza della tensione (o corrente) misurata al tempo t vale:

$$f(t) = \sum_{k=1}^M q_k \phi(t - t_k) \quad (\text{V.77})$$

con $t_k < t$ e con $\phi(t)$ che rappresenta l'impulso normalizzato di estensione finita θ . Ripensando ai casi studiati del rumore termico e granulare, sappiamo quale può essere la variabilità delle ampiezze dei segnali elementari. Quanto ad M , il limite superiore della sommatoria, il suo valore dipende dalla estensione temporale di $\phi(t)$ e dal numero medio di impulsi nell'unità di tempo $\bar{\nu}$: M deve essere tale da includere tutti gli impulsi che al tempo t hanno un valore diverso da 0. M deve essere pertanto dell'ordine di $M \approx \bar{\nu} \cdot \theta$ (si faccia anche riferimento alla Fig.III.3). La rappresentazione del segnale della sequenza espressa dalla 77) consente quindi di affermare che la funzione $f(t)$ ad ogni istante risulta dalla somma di M contributi indipendenti, ovvero gli M segnali elementari $\phi_k(t - t_k)$ che hanno ampiezza diversa da 0 al tempo t ; per come sappiamo che sono fatti gli impulsi, ognuno

di essi ha valor medio $\overline{\phi_k}$ e varianza $\overline{(\phi_k - \overline{\phi_k})^2}$ finiti. Nel limite di M tendente all'infinito (come accade in tutti i casi realistici in cui si studia il rumore termico o granulare), quindi un ritmo medio di impulsi $\bar{\nu}$ pure tendente all'infinito, il Teorema del limite centrale assicura che $f(t)$ presenta una distribuzione gaussiana. Qualora (come nel caso del rumore *Johnson*) anche q_k sia una variabile aleatoria, la conclusione resta –a maggior ragione– vera.

Infine, se la registrazione non avviene in maniera istantanea, ma dura piuttosto un tempo finito e quindi rappresenta la media della $f(t)$ su un tempo finito τ , le conclusioni non cambiano: infatti possiamo ragionare esattamente come sopra, salvo che ora le M variabili aleatorie che concorrono a costituire il valore della tensione media misurata nell'intervallo τ , sono a loro volta i valori medi di ognuno degli M impulsi $\phi_k(t - t_k)$ nell'intervallo τ , che restano quindi M variabili aleatorie indipendenti, essendo comunque le loro origini indipendenti e distribuite a caso.

La gaussianità delle distribuzioni di rumore si può verificare misurando le distribuzioni delle ampiezze delle sequenze di rumore termico o shot: i risultati mostrano che esse sono effettivamente gaussiane con un ottimo grado di approssimazione.

Si noti che viceversa se in una sequenza a caso è sovrapposto un contributo di disturbo ad una frequenza definita, la distribuzione delle ampiezze cambia corrispondentemente ed esso –se il contributo di disturbo monocromatico è dominante– invece di mostrare il profilo gaussiano (cerchi pieni) tipico del rumore, presenta approssimativamente la forma disegnata a tratto continuo nella Fig.17:

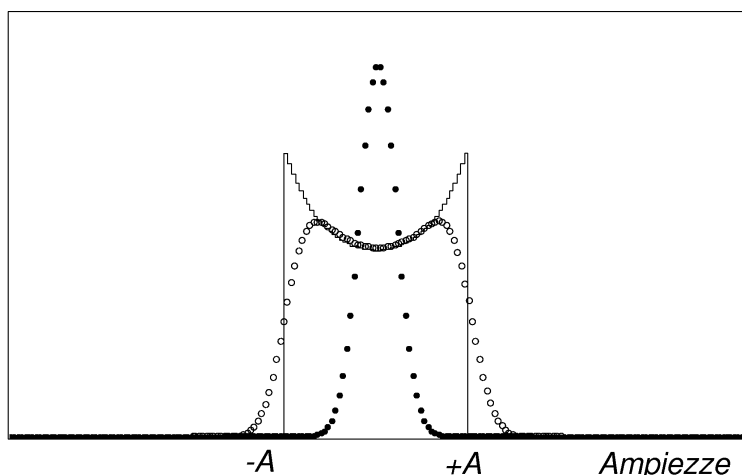


Fig.V.17

la distribuzione è adesso limitata ($\pm A$, dove A è l'ampiezza del disturbo sinusoidale puro) e i valori più probabili sono quelli estremi. In questo ultimo caso, riportato nella figura, abbiamo assunto l'assenza di contributi di rumore; se entrambi gli effetti sono presenti (rumore e disturbo sinusoidale puro) la distribuzione assume un profilo del tipo mostrato come curva a cerchietti vuoti.